UiT NORGES ARKTISKE UNIVERSITET

Fakultet for naturvitenskap og teknologi
Institutt for matematikk og statistikk

Elevers forståelse av lineære likninger

En kvalitativ studie av elevers arbeid med én tradisjonell og én utforskende oppgave i matematikk.

Sunniva Sagerup

MAT-3906 Mastergradsoppgave i matematikk – lektor i realfag
Juni 2019

Sammendrag

Hensikten med denne studien er å undersøke hvordan elever med høy måloppnåelse i matematikk forstår lineære likninger. Forskningsspørsmålet i denne studien er: «Hvilke aspekter ved lineære likninger er vanskelig for elever å forstå?»

Studien har en kvalitativ tilnærming og bygger på intervjuer med syv ungdomsskoleelever der elevene ble bedt om å løse én tradisjonell og én utforskende oppgave tilknyttet likninger. Gjennom elevenes oppgaveløsing ønsker jeg å finne ut hvilke elementer i en likning som er spesielt vanskelig å forstå, og hvilke aspekter med *mathematical proficiency* som kommer til uttrykk gjennom deres oppgaveløsning.

Etter en litteraturgjennomgang ble Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) sin definisjon av *mathematical proficiency* brukt for å beskrive hva det innebærer å ha forståelse i matematikk.

Resultatene fra undersøkelsen viser at det mest utfordrende med den tradisjonelle oppgaven er å behandle negative tall. Av analysen kommer det frem at elevene som under intervjuet utviste begrepsforståelse for variabler også hadde større suksess når det kommer til å løse den utforskende oppgaven.

Fellestrekk blant elevene som ikke klarte å løse den utforskende oppgaven var vanskeligheter med variabelbegrepet og betydningen av likhetstegnet. De som ikke fikk til den utforskende oppgaven hadde også problemer med å endre løsningsstrategi på tvers eller innad i oppgavene.

Med bakgrunn i analysen burde elever utvikle en dypere forståelse for begrepene variabel, likhet og negative tall.

Forord

Det er mange som har vært til uvurderlig hjelp i denne mastergraden. Først og fremst ønsker jeg å rette en takk til alle mine informanter, deres engasjement og velvilje har bidratt til verdifullt datamateriale. Jeg vil også takke faglærerne som la til rette for at jeg fikk samlet inn datamaterialet i en ellers hektisk skolehverdag. En stor takk rettes også til mine tanter Helen, Ragnhild og Grete for både korrekturlesning, middag og støttende ord.

Til slutt vil jeg takke mine veiledere Anne Fyhn, Institutt for lærerutdanning og pedagogikk, og Ragnar Soleng, Institutt for matematikk og statistikk, for råd og tilbakemeldinger i arbeidet med denne masteroppgaven.

Til mine medstudenter – takk for alle innspill og artige stunder.

Tromsø, Juni 2019

Sunniva Sagerup

Innholdsfortegnelse

Tabelliste

Figurliste

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

Gjennom flere år med forskning og reformer i matematikkfaget er det vektlagt at elever skal bli gode problemløsere, som forstår sammenhengen mellom emner både innad og på tvers av fag. På tross av dette viser det seg at en stor andel elever støtter seg på memorerte prosedyrer og metoder i sitt arbeid med matematikk (Lithner, 2006). Brekke (2000) beskriver i sammenheng med KIM–prosjektet (Kvalitet i matematikkundervisningen) at et stort fokus på å lære regler, formler og algoritmer kan medføre at elever blir fasitorienterte i oppgaveløsningen og neglisjerer å vurdere egne resultater. Denne måten å håndtere matematikk på er noe jeg ser igjen hos flere elever, og jeg har lyst å trekke frem en episode fra tidligere praksis som både har inspirert, og vært med å forme denne studien.

Eleven hadde løst alle oppgavene under temaet likninger, og jeg var nysgjerrig på hva eleven hadde forstått og stilte noen spørsmål (utdrag hentet fra egen lærerlogg, 2018):

Student: «Kan du forklare hvordan du løste denne oppgaven?»
Elev: «Jeg flyttet tallet over til høyre side av likhetstegnet»
Student: «Vet du hvorfor du kan gjøre dette?»
Elev: «Nei, og hvorfor skal jeg tenke på det? Jeg har jo fått rett svar»

Eksempelet viser to ting: Eleven er fasitorientert, og at det krever en dypere matematisk forståelse å forklare bakgrunnen for en regel enn å ta regelen i bruk.

En elev som klarer å forklare bakgrunnen for matematiske regler og anvende eksisterende kunnskap i nye situasjoner har det som kalles begrepsforståelse. Testresultater fra TIMSS (Trends in International Mathematics and Sience Study) i perioden 2003–2015 viser at norske elever har manglende ferdigheter innenfor områder i matematikk som krever denne formen for forståelse, og da særlig innen algebra (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016; Grønmo, Bergem, Kjærnsli, Lie & Turmo, 2004). Resultater fra TIMSS 2015 viser at det blant norske 8. klassinger er en signifikant nedgang innenfor emneområdet algebra, og skåren er urovekkende lav sett i forhold til andre emneområder. Det samme resultatet vises også i PISA (Programme for International student Assessment). Disse resultatene gir grunnlag for videre undersøkelse.

Alle læreplanen i grunnskolen skal i 2020 erstattes med en fornyelse av Kunnskapsløftet. I denne sammenheng er det arbeidet med å utvikle kjerneelementer i matematikk. Kjerneelementene skal ramme inn det viktigste innholdet i faget og beskrive hva elevene må lære for å kunne mestre å bruke faget (KD, 2019). Kjerneelementet *matematiske kunnskapsområder* beskriver de områdene i matematikk eleven må mestre for å danne det nødvendige grunnlaget for utvikling av matematisk forståelse. Under dette kjerneelementet beskrives algebra som arbeid med strukturer, mønster og relasjoner. Det viser videre til at elevene gjennom skoleløpet skal arbeide med algebraisk tenkemåte:

> *Elevene skal gjennom hele skoleløpet arbeide med algebraisk tenkemåte - om hvordan algebra er en generalisering av tallregning, om hvordan algebra kan brukes til å finne ukjente størrelser, og om hvordan algebra kan brukes til å uttrykke sammenhenger mellom størrelser.* (KD, 2018b, s.16)

I motsetning til de andre kunnskapsområdene tall og tallforståelse, statistikk og sannsynlighet, geometri og funksjoner beskriver ikke dette kjerneelementet spesifikke områder læreren burde fokusere på i undervisning av algebra. (Kapittel 2.6.5 for kompetansemålene som på høring våren 2019).

For å kunne utvikle undervisningspraksis og styrke norske elevers matematiske kompetanse innen algebra er det nødvending å være klar over hvilke aspekter ved algebra elever finner vanskelig. På ungdomskolen går elevene fra å regne med tall og faste mengder, til å regne med tall som både kan variere og være ukjente. Overgangen fra å regne med tall til å regne med symboler kan for mange elever oppleves svært krevende (Carraher & Schilemann, 2007). Innføringen av likhet sammen med symbolet x skaper ofte forvirring da dette gjerne må knyttes til et annet tema for å kunne visualiseres. For eksempel er $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$. For en elev på ungdomsskolen er det ikke opplagt hvor $(-2xy)$ kommer fra. Rent visuelt ser likningen $(x-y)^2 = x^2 - y^2$ mer korrekt ut (Thwaites, 1982). Hva den enkelte elev synes er utfordrende vil avhenge av elevens forståelse av emnet, og hva eleven selv anser som viktig matematisk kompetanse.

Denne studien begrenses av kompetansemålene etter 10. årstrinn og jeg har valgt å fokusere på tema likninger innenfor emnet algebra. For å hjelpe en elev å forstå er det essensielt å være klar over hva eleven ikke forstår ved det aktuelle tema. Ved å undersøke elevers arbeid med likninger, ønsker jeg å avdekke eventuelle fellestrekk ved deres forståelse og finne ut hvilke aspekter ved likninger elever opplever som vanskelige.

1.2 Forskningsspørsmål

Elevers forståelse av et emne kommer til uttrykk gjennom oppgaveløsning og deres resonnement i arbeid med matematiske oppgaver (Naaslund, 2012). For å finne ut hvilke aspekter det burde være fokus på i undervisningen av emnet likninger har jeg utarbeidet følgende forskningsspørsmål:

Hvilke aspekter ved lineære likninger er vanskelig for elever å forstå?

For å besvare denne problemstillingen vil jeg undersøke hvordan elever arbeider med en tradisjonell og en undersøkende oppgave i matematikk. Siden studien er rettet mot ungdomsskoleelever er begrepet *likning* begrenset av kompetansemålene etter 10. årstrinn. Begrepet likning vil i denne studien derfor kun referere til lineære likninger.

1.3 Begrepsavklaring

Dette avsnittet gjør rede for viktige begreper og hvordan disse er brukt i masteroppgaven.

Algoritme. Algoritme brukes i denne oppgaven om fremgangsmåter som eksplisitt læres i form av en kjede med instruksjoner.

Fleksibel tenkning og *fleksibilitet.* Fleksibel tenkning refererer til den norske oversettelsen, ved Botten (2016), av begrepet *adaptive reasoning* i Kilpatrick et al. (2001) sin kompetansemodell. *Adaptivity* vektlegger evnen til å reflektere over og evaluere den valgte løsningsstrategien, mens begrepet fleksibilitet primært brukes i litteraturen for å referere til en persons evne til å veksle mellom flere ulike strategier (Verschaffel, Luwel, Torbeyns & Van Dooren, 2009). Da denne oppgaven tar utgangspunkt i Kilpatrick et al. sitt begrep er det et viktig poeng at den norske oversettelsen fleksibel tenking refererer tilbake på begrepet adaptive reasoning og ikke må forveksles med begrepet fleksibilitet.

Heltall og *naturlige tall*. Heltall refererer til tall i mengden $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ og omfatter altså ikke tall med desimaler. Naturlige tall refererer til mengden av positive heltall $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Kompetanse: Kompetanse viser i denne studien til alle aspektene ved læring som er nødvending for å forstå matematikk (Kilpatrick et.al., 2001)

Måloppnåelse: Høy måloppnåelse vil i denne studien brukes som en betegnelse på elever med standpunktkarakteren 5 – 6 i faget (KD, 2016).

Kunnskap og *forståelse.* Kunnskap og forståelse er begreper som brukes om hverandre i ulik litteratur: Skemp (1976) og Mellin-Olsen (1984) skriver om relasjonell forståelse og instrumentell forståelse, Hiebert og Lefevre (1986) om begrepskunnskap og prosedyrebasert kunnskap og Kilpatrick et al. (2001) om begrepsforståelse og prosedyrekunnskap. Den vekslende bruken av kunnskap og forståelse for å forklare fenomener basert på samme grunntanke har medført at de ulike begrepene mer eller mindre er sidestilt. I denne oppgaven vil begrepene prosedyrekunnskap og begrepsforståelse benyttes. Utenom disse begrepene brukes forståelse for å forklare at en elev vet *hvorfor*, *hvordan* og *hva* som skal gjøres for å løse en oppgave, mens kunnskap kun refererer til *hva* og *hvordan*.

Prosedyre og *strategi*. Prosedyre refererer til stegene, altså de matetematiske operasjonene, som utføres for å komme frem til en løsning. Alle stegene samlet utgjør strategien som er brukt for å løse oppgaven (Jonsson, Norqvist, Liljekvist & Lithner, 2014).

1.4 Disposisjon

Kapittel 2 presenterer det teoretiske rammeverket som ligger til grunn for analyse og drøfting av empiri. Dette kapittelet vil også definere begrepet likning og beskrive vanlige problemområder innenfor emnet.

Metodiske valg tilknyttet gjennomføring og analyse av datamaterialet beskrives i kapittel 3. I kapittel 3 blir også valg av datainnsamlingsmetode og analyseprosessen lagt frem. Valg av informanter blir begrunnet og utarbeidelse av intervjuguide presentert. Kapittelet avsluttes med undersøkelsens kvalitet og etiske overveielser.

Behandling av datamaterialet og de ferdig utarbeidete kategoriene presenteres i kapittel 4, og i kapittel 5 vil analysen presenteres. I kapittel 6 vil resultater fra analysen sammenfattes og i kapittel 7 vil hovedfunn ses i sammenheng med aktuell teori og eksisterende forskning på feltet. Oppgaven avsluttes med kapittel 8 hvor undersøkelsen sammenfattes og implikasjoner for videre forskning presenteres.

2 Teori

Dette kapittelet beskriver det teoretiske rammeverket som benyttes i undersøkelsen og bakgrunn for valg av kompetansemodell. Kapittelet vil også beskrive ulike oppgaver som benyttes i matematikkundervisning, samt problemområder innenfor emnet likninger.

I kapittel 2.2. – 2.5 vil Kilpatrick et al. (2001) sine aspekter ved *mathematical proficiency* utdypes. For å beskrive kjennetegn på strategisk kompetanse vil supplerende teori fra Haylock (1997); Elia, van den Heuvel-Panhuizen og Kolovou (2009) og Lithner (2006, 2008) brukes.

2.1 Forståelse i matematikk

For å kunne definere hva det vil si å forstå begrepet likning, må det først avklares hva det å ha forståelse i matematikk innebærer. Blant teoretikere finnes det flere syn på hva forståelse i matematikk er, eller hva det kan være: Kilpatrick et al. (2001) og Schoenfeld (1992; 2007a) peker på fem ulike aspekter som tilsammen utgjør to forskjellige rammeverk for *mathematical proficiency. Mathematical proficiency* kan grovt oversettes til matematisk kompetanse, men for å unngå at mening forsvinner i oversettelsen har jeg valgt å bruke det engelske begrepet. Kilpatrick definerer *mathematical proficiency* slik:

> *Recognizing that no term captures completely all aspects of expertise, competence, knowledge, and facility in mathematics, we have chosen mathematical proficiency to capture what we believe is necessary for anyone to learn mathematics successfully.*
> (Kilpatrick et.al., 2001, s. 116)

Dette begrepet omfatter dermed alle aspektene ved læring som er nødvending for å forstå matematikk.

I de to påfølgende delkapitlene, 2.2.1 og 2.2.2, presenteres Kilpatrick og Schoenfeld sin definisjon av *mathematical proficiency*, og i kapittel 2.1.3 begrunnes valget av teoretisk rammeverk. Siden rammeverkene til Kilpatrick og Schoenfeld inneholder aspekter som er identiske er begge relevant for denne studien.

2.1.1 Kilpatricks rammeverk for *mathematical proficiency*

Kilpatrick et al. (2001) presenterer fem aspekter som alle er gjensidig avhengige av hverandre i utviklingen av *mathematical proficiency.* Aspektene presenteres her ved norsk oversettelse av Botten (2016):

- *begrepsforståelse (conseptual understanding)*: forståelse av matematiske begreper, operasjoner og relasjoner
- *prosedyrekunnskap (procedural fluency)*: ferdighet i å utføre prosedyrer fleksibelt, nøyaktig, effektivt og hensiktsmessig
- *strategisk kompetanse (strategic competence)*: evne til å formulere, representere og løse matematiske problemer
- *fleksibel tenking (adaptive reasoning)*: kapasitet til å tenke logisk, reflektere, forklare og begrunne valg av løsningsstrategi
- *produktiv holdning (productive disposition)*: tilbøyelighet til å anse matematikk som fornuftig og verdifullt

2.1.2 Schoenfelds rammeverk for *mathematical proficiency*

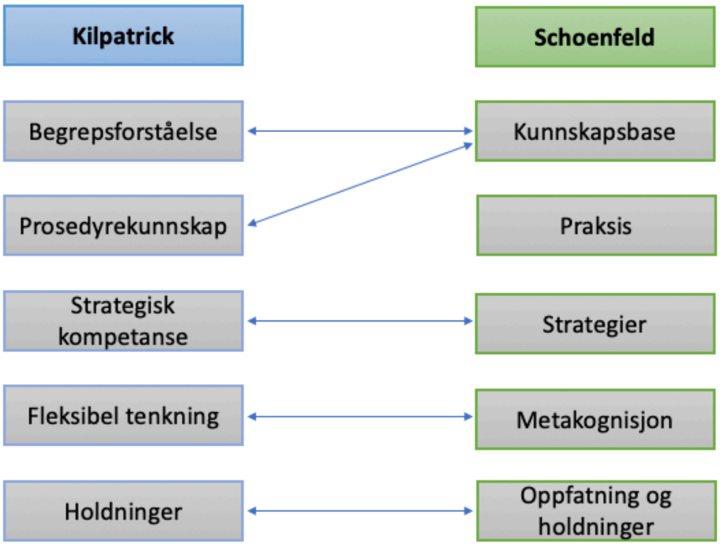
Schoenfeld (1992, 2007a) definerer *mathematical proficiency* gjennom fem aspekter som kan bidra til å forklare hvorfor noen forsøk på problemløsning lykkes og andre ikke. Aspektene er presentert under ved egen oversettelse:

- *kunnskapsbase (knowledge base)*: omfatter all den matematiske kunnskapen en elev innehar
- *strategier (strategies)*: evne til å formulere, representere og løse matematiske problemer
- *metakognisjon (metacognition)*: evne til å evaluere egen læring, og bruke kunnskapen du har effektivt
- *oppfatning og holdning (beliefs and disposition*): individets, lærernes og samfunnets forståelse og følelser omkring matematikk, og hvordan disse påvirker elevens matematiske adferd
- *Praksis (Practice)*: innbefatter kunnskap om hvordan matematikk burde undervises

2.1.3 Bakgrunn for valg av teoretisk rammeverk

På bakgrunn av studiens formål og emnespesifikke avgrensning er ikke alle aspektene beskrevet i de ulike rammeverkene like relevante. Likevel har Kilpatrick et al. (2001) og

Schoenfeld (2007a) sine rammeverk flere aspekter ved *mathematical proficiency* som er like. Figur 1 illustrer hvilke aspekter som har samme meningsinnhold.



Figur 1: Sammenlikning av Kilpatrick et al. (2001) og Schoenfeld (2007c) definisjon av mathematical proficiency

Kilpatrick viser til to aspekter ved *mathematical proficiency* kalt begrepsforståelse og prosedyrekunnskap. Gjennom disse aspektene tydeliggjøres forskjellen mellom å forstå hvordan ulike matematiske begreper henger sammen, og det å memorere fakta og fremgangsmåter. Disse begrepene sammen utgjør Schoenfeld (2007a) sitt aspekt kalt kunnskapsbase. Schoenfeld gjør rede for at aspektet kunnskapsbase innbefatter både den kunnskapen og fakta eleven bringer inn i problemløsningssituasjonen, og hvordan denne informasjonen brukes. Med bakgrunn i mitt forskningsspørsmål er det et poeng å skille mellom å kunne utføre en prosedyre og ha forståelse av sammenhenger. Kilpatrick sitt rammeverk for mathematical proficiency fremstår derfor som mest relevant.

Schoenfeld (1992) viser også til aspektet praksis, dette aspektet fremkommer ikke i Kilpatrick sitt rammeverk og omfatter kunnskap om hvordan matematikk burde undervises. Da empirien i denne studien ikke omhandler undervisning av likninger fremstår dette aspektet som mindre relevant.

Jeg har derfor valgt å bruke Kilpatrick et al. (2001) sin kompetansemodell som teoretisk rammeverk i denne studien.

De tre neste delkapitlene 2.2 *Produktiv holdning*, 2.3 *Begrepsforståelse og prosedyrekunnskap* og kapittel 2.4 *Strategisk kompetanse og fleksibel tenkning* vil nærmere beskrive og utdype Kilpatrick et al. sine fem aspekter ved *mathematical proficiency.*

2.2 Produktiv holdning

Det siste aspektet i Kilpatrick et al. (2001) sin modell er produktiv holdning. Dette aspektet omhandler elevens tilbøyelighet til å anse matematikk som nyttig, fornuftig og verdt å lære. Det å ha en produktiv holdning er en svært viktig komponent for utviklingen av begrepsforståelse, prosedyrekunnskap, strategisk kompetanse og fleksibel tenkning (Kilpatrick et al., 2001). For å ha mulighet til å utvikle seg må den enkelte elev ha tro på at matematikk er noe som kan læres og forstås. Denne holdning til matematikk henger sammen med tro på egne evner til å løse vanskelige oppgaver. En kan typisk se at elever med høy måloppnåelse i matematikk ofte har et produktivt tankemønster når de arbeider med faget (Kilpatrick et al., 2001). Eksempel på et produktivt tankemønster kan være: «Matematikk er viktig og det jeg lærer er nyttig for meg. Matematiske regler er logiske, ikke tilfeldige, og derfor noe jeg kan forstå».

2.3 Begrepsforståelse og prosedyrekunnskap

Matematikkdidaktisk litteratur skiller i all hovedsak mellom to typer matematisk forståelse som av ulike forskere er tilegnet ulike navn og ulikt fokus. Kilpatrick et al. (2001) refererer til begrepsforståelse og definerer det som *«an integrated and functional grasp of mathematical ideas»* (Kilpatrick et al., 2001, s. 118). En elev som har begrepsforståelse forstår ikke bare et matematisk begrep, men også hvordan dette begrepet henger sammen med andre matematiske begreper. En enhet av begrepskunnskap kan derfor ikke være en isolert bit av informasjon.

(Kilpatrick et al., 2001) beskriver at en signifikant indikator på begrepsforståelse er om eleven evner å løse matematiske oppgaver presentert på ulike måter. Dette innebærer å forstå i hvilke situasjoner ulike prosedyrer er hensiktsmessig å bruke. En elev med begrepsforståelse skjønner bakgrunnen for alle stegene som utføres i prosedyren og den blir derfor lettere både å huske og bruke.

Prosedyrekunnskap omfatter ifølge Kilpatrick et al. (2001) kunnskap om prosedyrer og algoritmer, samt kunnskap om når disse skal brukes. Dette aspektet innbefatter evnen til å regne nøyaktig, effektivt og fleksibelt.

Prosedyrekunnskap omhandler kjennskap til det formelle matematiske språket om symboler og regler. En elev med denne type kunnskap vil kjenne til og huske algoritmer og prosedyrer, men vil ha problemer med å forklare bakgrunnen for disse. Eleven vil altså ha problemer med å knytte kunnskap om et bestemt begrep til andre begreper eller situasjoner. Prosedyrekunnskap er en viktig del av begrepsforståelsen, men om en elev kun innehar prosedyrekunnskap vil dette medføre problemer i møte med nye oppgaver.

Kilpatrick vektlegger at elever må kunne bruke prosedyrer fleksibelt, og understreker her viktigheten av at prosedyrekunnskap må støttes opp av begrepsforståelse. Begrepet fleksibilitet viser til elevens kapasitet til å bryte ut av fastsatte tankemønster og fleksibelt velge egnet strategi for å løse en gitt matematisk oppgave. Begrepet fleksibilitet er nært relatert til den strategiske kompetansen og vil utypes nærmere i kapittel 2.4.

2.4 Strategisk kompetanse og fleksibel tenking

Strategisk kompetanse refererer til å kunne formulere, representere og løse matematiske oppgaver. For å inneha denne kompetansen må eleven være i stand til å fleksibelt velge mellom ulike løsningsmetoder: resonnering, prøv og feil, algebraisk, generalisering, eller andre metoder som passer til den gitte oppgaven (Kilpatrick et al., 2001). Det å velge egnet strategi til en gitt oppgave anses som den største kognitive utfordringen når det kommer til å løse ukjente oppgaver.

Å være strategisk kompetent innebærer fleksibilitet i valg av løsningsmetode. Fleksibilitet omhandler evnen til å kunne veksle mellom ulike strategier på en fleksibel måte, og er et kjennetegn på strategisk kompetanse (Kilpatrick et.al, 2001). Elia et al. (2009) skiller mellom to typer fleksibilitet: *inter – task flexibility*, å endre strategi på tvers av oppgaver, og *intra – task flexibility*, å endre strategi innad i oppgaven. For å kunne endre strategi på tvers eller innad i oppgaver må eleven ha kunnskap om flere typer strategier, og prosedyrer. Altså vil elever med godt utviklet strategisk kompetanse og prosedyrekunnskap lettere kunne utvise fleksibilitet i oppgaveløsningen.

Det å endre strategi innad i oppgaven, spesielt i en utforskende oppgave, setter større krav til elevens begrepsforståelse og kognitive skjema[1]. Desto flere sammenhenger, begreper og prosedyrer eleven mestrer desto større er sjansen for at eleven klarer å tilpasse og ta i bruk de rette strategiene. Da skolen og læreverker i stor grad benytter seg av tradisjonelle oppgaver i undervisningen (kapittel 2.5) krever det mer av elevene å utøve *intra – task flexibility* (Elia et al., 2009). For å kunne kartlegge disse formene for fleksibilitet krever det at eleven opplever en kognitiv konflikt i oppgaveløsningen og dermed «tvinges» til å se oppgaven på en annen måte.

En utfordring i matematikkfaget er at elever ikke klarer løse matematiske oppgaver på tross av at de innehar all den matematiske kunnskapen som trengs for å løse oppgaven. Haylock (1997) viser til at en av årsakene kan være at tankemønsteret fastlåses i en bestemt retning, *fiksering*, og elevene velger derfor å fortsette med en fremgangsmåte som ikke fører til løsningen. Det motsatte av fiksering er fleksibilitet, en elev som har fleksibilitet i oppgaveløsningen klarer i flere tilfeller å bryte ut av disse fastsatte tankemønstrene og løse oppgaven.

Kilpatrick et al. (2001) beskriver at de ulike aspektene ved *mathematical proficiency* er gjensidig avhengig av hverandre. Dette medfører at elevens strategivalg i stor grad vil være avhengig av den individuelle elevs forståelse omkring emnet som undersøkes. Lithner (2006) tar opp at det dominerende strategivalget til de fleste elever baseres på å kopiere eller følge en fastsatt modell eller et eksempel. Denne formen for tankegang fremkommer ofte som en konsekvens av prosedyrebasert fokus i undervisningen og refererer til det Lithner (2006) kaller *imitative reasoning* (imitativ tenking). Lithner (2006, 2008) skiller i sitt begrepsapparat mellom to former for imitativ tenking: *memorert* og *algoritmisk*.

Memorert tenkning baserer seg på å gjenkalle et komplett svar fra minnet. Denne strategien er nyttig kun på noen få oppgavetyper, for eksempel de som ber eleven gjengi fakta «hvor

---

[1] Piaget mener mennesket systematiserer tankeprosessene i kognitive strukturer, såkalte skjemaer. Disse kognitive skjemaene utgjør menneskets erfaringer og kunnskaper (Lyngnes & Rismark, 2013).

mange kubikk inneholder en liter», definisjoner eller beviser. Algoritmisk tenkning kjennetegnes ved følgende betingelser:

1. Strategivalget baseres på å huske en algoritme
2. Å begrunne strategien, eller forstå bakgrunnen for algoritmen anses som trivielt fordi det ikke er nødvending for å oppnå korrekt svar.

Algoritmisk tankegang kan benyttes av elever med ulike underliggende forståelser, men besvarelsene vil for utenforstående se helt like ut. Innlæring av algoritmisk tankegang medfører at alle deler av oppgaven som krever begrepsforståelse tas hand om av algoritmen. Den enkle delen med å sette inn tall og beregne overlates til eleven. Denne formen for strategivalg støttes i stor grad av elevens prosedyrekunnskap. Spesifikke strategier tilknyttet likningsløsning diskuteres i kapittel 2.6.4.

Fleksibel tenkning refererer til den individuelle elevs evne til å tenke logisk, resonnere, reflektere og forklare. En kan si at fleksibel tenkning tas i bruk for å bestemme om den valgte løsningsstrategien er korrekt. Kilpatrick et al. (2001) refererer til fleksibel tekning som ledestjernen i matematikklæring da denne formen for resonnering brukes for å navigere gjennom fakta, prosedyrer, begreper og strategier å se at alt henger sammen. Fleksibel tenkning identifiseres ved at eleven i løpet av problemløsningsprosessen evaluerer sine egne svar eller går tilbake til det opprinnelige problemet for å undersøke om det er forstått korrekt.

2.5 Tradisjonelle og utforskende oppgaver i matematikkundervisning

Matematikkundervisning foregår i institusjonelle rammer som fastlegger vilkår og former for praksis. Hver enkelt lærer må ta hensyn til læreplaner med deres tilhørende kompetansemål, timeplanen, klasseinndelingen, læreverk, vurderingssystem og ulike resurser skolen har til rådighet. På bakgrunn av disse rammene er det utviklet en sterk undervisningstradisjon i matematikkfaget (Blomhøj, 2016, s. 90). Denne undervisningstradisjonen beskrives gjennom det Blomhøj definerer som en tradisjonell didaktisk kontrakt. Den didaktiske kontrakten beskriver de gjensidige oppfattelsene og forventningene lærer og elev har til en undervisningssituasjon som er karakteristisk i matematikken. Etablering av en didaktisk kontrakt er både en forutsetning for- og en konsekvens av undervisning (Brousseau, 1997).

Den didaktiske kontrakten for tradisjonell matematikkundervisning vil i stor grad understøttes av lærerens klasseledelse og kan deles i tre hoveddeler (Blomhøj, 2016, s.92):

a) Gjennomgang og rettelse fra forrige time

b) Læreren presenterer nye modeller eller algoritmer, disse er ofte oppgitt i lærerboken

c) Elevene arbeider parvis eller individuelt med tilhørende oppgaver

En matematikkundervisning som beskrevet over domineres ofte av det Mellin-Olsen (1991) kaller oppgavediskursen. Når oppgavediskursen er dominerende blir målet å avklare noen matematiske forhold slik at bestemte oppgaver kan besvares. Oppgavene som gis til elevene er formulert slik at de kun har én riktig løsning, og ofte kan denne løsningen finnes ved å anvende den gjennomgåtte metoden. Denne tendensen er også rapporter i undersøkelser gjort av Kieran (1992), Slovin (1990) og Skovsmose (2003). Mellin-Olsen (1996) beskriver også at matematikkoppgaver innenfor oppgavediskursen kjennetegnes ved at de har en tydelig begynnelse og en slutt. Slutten markeres ved et svar som står i en fasit. Det er denne formen for oppgavestilling som kjennetegner tradisjonelle oppgaver i matematikk.

Motsetningen til denne type oppgave er utforskende oppgaver. En utforskende oppgave inviterer elevene til selv å finne nye problemstillinger samtidig som den utfordrer elevens forståelse for ulike begreper og evne til å vurdere egne løsninger. Spørsmålsstillingen i en utforskende undervisning består i hovedsak av åpne spørsmål som kan løses ved hjelp av flere ulike metoder (Blomhøj, 2013). Dialogen rundt utforskende oppgaver er også ulik fra det som beskrives i oppgavediskursen. Om en elev sitter fast med en oppgave vil det i et undersøkelseslandskap være naturlig å stille spørsmål som: «kan du forklare hvorfor du har gjort dette?», «finnes det en annen måte å løse dette på?» eller «hva skjer om?» Med andre ord er at veien til målet viktigere enn det endelige svaret (Skovsmose, 2003).

2.6 Likninger

Det finnes flere ulike definisjoner på hva en likning er, og definisjonene varierer både i lengde og vanskelighetsgrad. Når det kommer til å forstå likninger er det viktig at eleven har forkunnskap om komponentene en likning består av. Dette delkapittelet vil derfor omhandle ulike forståelser av likhetstegnets mening, variabelbegrepet, aritmetiske tegn og negative tall.

2.6.1 Definisjon likning

For å forklare hva en likning er har jeg valgt å se på definisjonene fra *Dictionary of mathematics*, to ulike læreverk brukt av skolen hvor jeg rekrutterte informanter og *Wolfram Mathworld.*

Dictionary of Mathematics definerer en likning til å være et matematisk uttrykk på følgende form:

> *An equation is a formula that asserts that two expressions have the same value; it is either an Identical equation, which is true for any values of the variables, or conditional equation, which is only true for certain values of the variables. (Borowski & Borwein, 1989, s. 194)*

Denne definisjonen setter krav til at en likning skal inneholde variabler, og at uttrykkene på begge sider av likhetstegnet har samme verdi. Alseth, Tangen og Tofteberg (2015), forfattere av læreverket Maksimum definerer en likning slik: «En likning er en likhet som inneholder en eller flere ukjente størrelser. Det som står på venstre side av likhetstegnet er likt det som står på høyre side» (s.106). Alseth et al. (2015) setter på samme måte som Borowski og Borwein (1989) krav til variabler og sannhet i sin definisjon. Basert på disse definisjonen er ikke $2 = 0$ en likning siden uttrykket ikke inneholder en variabel som kan gjøre påstanden sann.

Wolfram Mathworld sier «An equation is a mathematical expression stating that two or more quantities are the same as one another». Denne definisjonen beskriver at en likning er et matematisk uttrykk som påstår at to størrelser har samme verdi. Wolfram setter verken krav til sannhet eller tilstedeværelse av variabler, og med bakgrunn i denne definisjonen er eksempelet brukt over: $2 = 0$, en likning. På samme måte som Wolfram setter heller ikke Hjardar og Pedersen (2014b, s. 193), forfattere av læreverket Faktor, krav til at en likning må inneholde variabler, derimot setter denne definisjonen et krav til sannhet: «To uttrykk med samme verdi, ett på hver sin side av likhetstegnet, kalles en likning». Etter Hjardar og Pedersen (2014b) definisjon er ikke $2 = 0$ en likning. Derimot vil både Wolfram og Hjardar og Pedersen definere $2 + 2 = 6 - 2$ til å være en likning noe Alseth et al, Borowski og Borwein ikke gjør, på bakgrunn av den manglende tilstedeværelsen av variabler.

Felles for definisjonene presentert over er at det må være et utrykk på hver side av likhetstegnet, for at en matematisk setning skal defineres som en likning. Basert på om utrykkene har samme verdi kan en videre definere om likningen er sann eller ikke.

Da ulike læreverk har ulike definisjoner av begrepet likning må en også gå ut fra at elever innehar mer enn bare en oppfatning om hva en likning er. Vanlige misoppfatninger blant elever er at uttrykk som $(2x + 5)$ er en likning, denne oppfatningen kan skyldes at elever definerer uttrykket basert på tilstedeværelsen av ukjente størrelser og ikke likhet (Naalsund, 2012). Det kan være mange ulike oppfatninger av hva en likning er. De fleste elever vil gå med på at $30 = 5x$ er en likning, men de vil fortsatt definere $A = l \cdot b$ som en formel og $y = 2x$ som en funksjon (Usiskin, 1999). På grunn av ulike definisjoner vil mange elever definere matematiske uttrykk basert på situasjoner og bruksområder i skolehverdagen.

2.6.2 Likhetstegnet

Likhetstegnet er kanskje et av de vanligste symbolene i skolematematikken og det introduseres gjerne i tidlig alder. Å utvikle en forståelse for symbolets mening blir ansett som uproblematisk, og etter introduksjon i tidlig barneskole er ikke dette et tema det brukes mye tid på (Attorps & Tossavainen, 2009). Det viser seg midlertidig at få elever har utviklet en tilstrekkelig forståelse av begrepet likhet, og at dette får konsekvenser for senere arbeid med likninger (Booth & Davenport, 2013; Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006). En utbredt misoppfatning er at elever anser likhetstegnet som en operator (Knuth et al., 2006). Et operasjonelt syn på likhetstegnet kan oppstå utenfor klasserommet hvor likhetstegnet brukes i ordspill som «Kari + Martin = Sant» eller «Matematikk = Kjedelig». I denne sammenheng tilegner elever symbolet betydningen «det er», en oppfatning som lett kan tas med tilbake til klasserommet. Denne oppfatningen av likhetstegnet forsterkes ved at elever får oppgaver som har matematiske uttrykk på venstre side av likhetstegnet og blankt rom på høyre side.

Eks: $2 + 4 =$___

Denne type oppgaver kan støtte opp om allerede etablerte forestillinger: «2 pluss 4 er 6» og forståelser av likhetstegnet som et symbol som representerer «summen av» eller «det totale» får grobunn (Knuth et al., 2006). I oppgaver som vist i eksemplet over er det ikke nødvending for elevene å tenke på likhetstegnet som et symbol for likhet, og når elever senere skal arbeide med likninger er det lett å assosiere likhetstegnet med aritmetiske operasjoner som utføres for å få et endelig svar. For å forstå de ulike operasjonene som utføres når en løser en likning må eleven ha forståelse av likhetstegnet som et symbol for relasjon mellom to uttrykk av samme verdi (Booth & Davenport, 2013). Det viser seg at det er større sannsynlighet for at elever med begrepsforståelse for likhetstegnets betydning løser lineære likninger korrekt (Knuth et al., 2006, s. 233).

2.6.3 Variabelbegrepet

En variabel er et symbol som representerer elementer i en mengde. Elementene i denne mengden representerer verdiene til variabelen (Usiskin, 1999). Elementene representerer typisk tall, men kan også representere andre former for objekter som distanse eller pris. Konteksten elementene settes i vil avgjøre hvordan, og om verdien av variabelen kan variere (Wagner, 1983). Begrepet variabel brukes i flere sammenhenger, men på ungdomsskolen møter elevene variabler først og fremst i bokstavuttrykk, likninger og funksjoner.

Elever anser ofte variabler som noe som varierer, dette kan skape forvirring i møte med likninger der x representerer en spesifikk verdi, en *ukjent*. Læreverkene bruker ofte begrepet ukjent for bokstaver som opptrer i lineære likninger, men har en tendens til å ikke skille dette fra en variabel. Det er derfor viktig å poengtere at begrepet ukjent alltid henviser til et fiksert tall (Carraher & Schilemann, 2014). Det uklare skillet mellom variabel og ukjent kan føre til forvirring. Særlig når bokstaver som tidligere er presentert som variabler i bokstavuttrykk eksempelvis: $(2x + 5)$ blir fiksert og behandlet som en ukjent i en likning: $2x + 5 \ = 15$. En av de vanligste oppfattelsene elever har om variabler er at de kan representere mer enn én verdi, når da skillet mellom variabel og ukjent nesten er utvisket kan dette skape en kognitiv konflikt i møte med likninger (Gray, Loud & Sokolowski, 2007).

Når en arbeider med variabler kreves det at eleven er i stand til å uttrykke forhold mellom størrelser, identifisere hvilke størrelser som er kjente, ukjente og om størrelsen kan variere (Carraher & Schilemann, 2014). Tas det utgangspunkt i de tre likningene under kan en se at navnene vi tilegner uttrykkene (likning, formel, funksjon) gjenspeiler ulike bruksområder variabel er satt til.

$$a)\ \ 30 = 5x$$

$$b)\ \ A = l \cdot b$$

$$c)\ \ y = 2x$$

I likning a) tenker vi på x som en ukjent. x har her en fast verdi og likningen løses ved å lete etter det spesifikke tallet som vil gjøre likningen sann. Likning b) består av variablene *A, l* og *b* som henholdsvis representerer areal, lengde og bredde. Elever refererer til denne likningen som en formel. Likning c) er den eneste av disse som gir en følelse av «variabilitet», her er det ønskelig at elevene skjønner at verdien av y er avhengig av verdien til x. Denne følelsen av variabilitet forsvinner derimot om en anser likningen som en representasjon av en linje med stigningstall to (Usiskin, 1999).

De fleste elever klarer å løse *likning b* om de får oppgitt verdiene for *l* og *b*, og skjønner at lengde og bredde vil variere for ulike objekter. Problemene oppstår derimot om de får oppgitt verdiene for A og *l*:

$$b)\ A = l \cdot b$$

$$40\ m^2 = 10\ m\ \cdot b$$

Her må en skjønne at variabelen *b* som står for bredde, nå er en fiksert verdi og at de samme operasjonene en kan bruke på *likning a* også gjelder i dette tilfellet.

En annen forvirring som kan oppstå i tidlig algebra er mellom bokstaver som måleenheter og bokstaver som variabler. For eksempel står *10 m* for ti meter, noe som lett kan forveksles med *10m* som refererer til ti ganger det uspesifiserte tallet *m* (Mason, Graham & Wilder, 2011)

2.6.4 Utfordringer ved løsning av likninger

Evnen til å løse en likning indikerer ikke nødvendigvis forståelse. Elever kan få korrekt svar på alle likningene de løser uten å forstå hvordan eller hvorfor svaret er korrekt. En kan derfor komme langt med kun prosedyrebasert kunnskap når det kommer til å løse likninger. Derimot øker sannsynligheten for å gjøre feil når nye elementer introduseres i likningen. Dette delkapittelet vil kort beskrive utfordringer ved memorering av metode, negative tall, aritmetiske tegn og likninger med brøk.

Memorering av metode

Et eksempel på hvordan elever kan få rett svar ved å memorere en metode er bruken av *flytt og bytt regelen*. Flytt og bytt er en regel som sier en kan «flytte» matematiske uttrykk fra en side av likhetstegnet over til motsatt side om en bytter fortegn (+ eller -). Eksempel på bruk av flytt og bytt regelen[2]:

$$\begin{aligned} &Liknig\ A\text{:} && 2x + 5 = 15 \\ &Steg\ 1\text{:} && 2x = 15 - 5 \\ &Steg\ 2\text{:} && 2x = 10 \end{aligned}$$

---

[2] For å gjøre oppgaven mer leservennlig har jeg valgt å markere alle korrekte steg i likningsløsning med grønn farge, og alle feil med rød.

$$Steg\ 3. \qquad x = 5$$

For å få x alene på den venstre side av likningen «flytter» en femtallet over på høyre side og bytter fortegn. Det er viktig å her poengtere at en egentlig ikke «flytter» på utrykk, men legger til eller trekker fra samme verdi på begge sider av likhetstegnet.

Ved å kun huske denne regelen trenger ikke eleven ha noe kunnskap om likhetstegnet eller skjønne hva han/hun egentlig gjør for å få korrekt svar på oppgaven. Om en ikke skjønner bakgrunnen for regelen kan dette medføre at elever:

1. Konsekvent ikke bytter noen fortegn, men «flytter» tall og uttrykk til motsatt side av likhetstegnet
2. Bytter fortegn på x, men ikke heltall, eller motsatt.

Det viser seg at elever som ukritisk tar i bruk denne regelen ofte også har en operasjonell forståelse av likhetstegnets betydning (Naalsund, 2012).

Negative tall

Når negative tall introduseres i likningen, ser en økning i antall feil som begås av elever. Dette skyldes ofte at elevene konkluderer feilaktig og tror at negative tegn kun refererer til subtraksjonsoperasjonen (Booth & Davenport, 2013). Dette kan medføre en feil som vist under:

$$Likning\ B: \qquad 8 - x = \ 4x - \ 4$$

$$Steg\ 1: \qquad 8 - x - x = 4x - 4 - x$$

Når elever blir bedt om å løse en likning med negative tall, likning B, er en av de vanligste feilene elevene gjør illustrert i steg 1. I steg 1 blir ikke $(-x)$ ansett som et negativt tall, og dermed opprettholdes ikke symmetrien i likningen. Elevene ser bort fra det negative fortegnet foran x og på denne måten eliminerer de x fra høyre side ved å subtrahere. Elever som tar i bruk flytt og bytt regelen uten å ha begrepsforståelse for likhet gjør, i nesten alle tilfeller, feil i møte ved negative tall (Vlassis, 2004).

Aritmetiske tegn

Manglede forkunnskaper om aritmetiske tegn kan skape problemer når variabler innføres i likninger. En vanlig feil elever gjør ved løsning av lineære likninger er å behandle produkter av variabler som summer (Naalsund, 2012). Tar en likning D som eksempel, kan en forvente at elever som gjør oppgaven feil enten svarer $x = 4$ eller $x = \frac{9}{5}$

$$Likning\ D: \quad 2x + 3 = 9$$

Elever som oppgir svaret $x = 4$ har med stor sannsynlighet tolket $2x$ til å bety $2 + x$ og dermed endt opp med likning D1:

$$\begin{aligned} Likning\ D1: &\quad 2 + x + 3 = 9 \\ Steg\ 1: &\quad 5 + x = 9 \\ Steg\ 2: &\quad x = 9 - 5 = 4 \end{aligned}$$

Denne feilen skyldes at elever ikke har forståelse for uttrykket $2x$. Har eleven manglende begrepsforståelse for at $2x = 2 \cdot x = x + x$ vil en i utgangspunktet lett oppgave fort bli veldig vanskelig.

Elever i gruppen som slår sammen variabler og tall får venstre side av likning D til å bli lik $5x$. Misoppfatningen om at $2x + 3 = 5x$ vil videre lede til likningen D2 (Naalsund, 2012, s 112):

$$\begin{aligned} Likning\ D2: &\quad 5x = 9 \\ Svar: &\quad x = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

2.6.5 Likninger i læreplanen

Den nåværende læreplanen, Kunnskapsløftet (K06), er resultatet av en reform i 2006. K06 er gjeldende fra 1–13 trinn og fokuserer på å fremme kunnskap og basisferdigheter. Sammenliknet med tidligere reformer (L97) har fokuset i matematikk skiftet fra beskrivelser av hva det forventes at studenter skal arbeide med på hvert årstrinn, til mål for hvilke kompetanser elevene bør inneha etter endt skolegang. Det er satt konkrete mål innen kategoriene «tall og algebra», «geometri», «måling», «statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk», «funksjoner» og «økonomi». Dette har gitt lærerne større spillerom for både når og hvordan målene skal nås.

Tall og algebra i grunnskolen innebærer å arbeide med mønster, strukturer og relasjoner. Elevene lærer hvordan algebra kan brukes for å beskrive og analysere sammenhenger, samt at tallregning kan generaliseres for å finne ukjente størrelser (KD, 2013). Etter K06 skal tall og algebra danne grunnmuren i faget og er derfor en særlig viktig del av matematikkundervisningen. Dersom en ser spesifikt på emnet likninger kan en på tvers av de tre siste læreplanene se tydelige forandringer i kompetansemålene.

I K06 er fokus på det praktiske fremmet og likninger med symboler innføres ikke før på ungdomsskolen. Etter K06 skal elevene etter 7. årstrinn kunne «stille opp og løse enkle likninger» og etter 10. årstrinn «løse likninger og ulikheter av første grad og likningssystem med to ukjente» (KD, 2013, s 8–9). Læreplanen som kom i 1997 (L97) og K06 inneholder ingen kompetansemål om likninger og symbolbruk før på ungdomstrinnet. Sammenlikner en disse læreplanene med mønsterplanen i 1987 (M87) skulle elever allerede i 1.–3. klasse kunne løse enkle likninger ved utprøving, og i 4.–6. klasse stille opp likninger med bokstaver som symbol for tall (Kirke –og utdanningsdepartementet [KUD], 1987). Ved sammenlikning av læreplanene ser en at det har vært mindre og mindre symbolsk algebra i grunnskolen. I løpet av 2020 begynner innføringen av den nye læreplanen og i det siste høringsutkastet til læreplaner i matematikk ser en derimot en forandring. Likninger trekkes frem allerede under kompetansemål etter 5. trinn der mål for opplæringen er at eleven skal «Kunne løse likninger og ulikheter gjennom logiske resonnement og forklare hva det vil si at et tall er en løsning av en likning» (KD, 2019).

Våren 2018 vedtok KD kjerneelementer i alle fag, også i matematikk. Kjerneelementene representerer det viktigste og mest sentrale elevene skal lære i hvert fag, samt beskrivelser av metoder, tenkemåter og sentrale kunnskapsområder. For matematikk er det utarbeidet seks kjerneelementer:

- Utforsking og problemløsing
- Modellering og anvendelser
- Resonnering og argumentasjon
- Representasjon og kommunikasjon
- Abstraksjon og generalisering
- Matematiske kunnskapsområder

To av kjerneelementene er spesielt viktig for denne studien. Disse er *utforsking og problemløsning* og *resonnering og argumentasjon*. Utforsking handler om at elevene skal lete etter mønster og oppdage sammenhenger, elevene skal her vektlegge strategier og fremgangsmåtene mer enn løsningene (KD, 2018b). Problemløsning innebærer at elevene skal utvikle løsningsmetoder på oppgaver de ikke kjenner fra før. Resonnering og argumentasjon fremkommer som et viktig kjerneelement i denne studien da det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige. Eleven må her kunne begrunne både fremgangsmåte og løsninger.

3 Metode

Målet med denne masteroppgaven er å undersøke hvordan den enkelte elev tenker og resonnerer i møte med lineære likninger. Oppgaven tar derfor utgangspunkt i en kvalitativ studie på et lite utvalg elever. Studien anses å være en emnespesifikk kognitiv studie da den gir innblikk i elevenes læring av et spesifikt emne innen faget, deres oppfatninger, samt gir mulighet til å oppdage årsaker til feil i elevenes resonnementer (Cobb, 2007). Siden forskningen bygger på hvordan et bestemt individ tenker og resonnerer er det underliggende kunnskapssynet i studien kognitiv psykologi. Dette innebærer at menneskers utsagn og handlinger anses som troverdige kilder for å kartlegge kognitive og psykologiske prosesser.

Denne type studie kan bidra til læreres undervisningspraksis ved at misoppfatninger knyttet til emnet fortere kan oppdages, samt rette oppmerksomhet mot store skift i elevenes resonnementer (Cobb, 2007).

3.1 Datainnsamlingsmetode

I kvalitativ forskning har forskeren en aktiv rolle i datainnsamling og analyseprosessen. Ved å selv delta i datainnsamlingen vil forskeren ha førstehånds informasjon om både verbal og nonverbal kommunikasjon (Merriam, 2014). I denne undersøkelsen var det derfor naturlig å velge en metode som gav meg denne muligheten. Siden jeg ønsker å undersøke hvordan elever forstår et spesifikt emne, må jeg også velge en datainnsamlingsmetode der informantene får mulighet til både å vise og forklare hva de tenker. Intervju fremsto derfor som det åpenbare metodevalget.

3.1.1 Oppgavebasert intervju

For å få et datamateriale som kan belyse studiens forskningsspørsmål, valgte jeg oppgavebaserte intervju som metode. Hensikten med denne intervjuformen er å innhente informasjon om elevers matematiske kunnskap og få innsikt i hvordan de løser matematiske problemer (Maher & Sigley, 2014). Forskjellen mellom oppgavebaserte intervjuer og andre intervjuformer er at interaksjonen skjer mellom intervjuer, informant og oppgavene. Nøkkelkomponenten i oppgavebaserte intervju er derfor nøye gjennomtenkte oppgaver.

Oppgavene skal utfordre eksiterende kunnskap, representasjoner av matematiske ideer, strukturer og elevens måter å redegjøre for disse (Goldin, 1997). Ved å la elevene løse oppgaver underveis i intervjuet vil en få tilgang på informasjon om elevens forståelse av matematiske prinsipper utover det eleven selv klarer å sette ord på. Oppgavebaserte intervjuer setter derfor krav til fleksibilitet siden ulike individer med stor sannsynlighet vil forsøke å løse oppgavene på ulik måte. Goldin (1997) hevder også at oppgavebaserte intervjuer er nyttig for å samle informasjon som direkte retter seg mot det en ønsker skal skje i klasserommet.

Christoffersen og Johannessen (2012) beskriver at intervjuer kan ha ulik grad av struktur: *ustrukturertintervju*, *semistrukturert intervju, strukturert intervju* og *strukturert intervju med faste svaralternativ*. Siden oppgavebaserte intervjuer setter et krav til fleksibilitet vil intervjuet i denne undersøkelsen være semistrukturert.

Jeg har valgt å gjennomføre semistrukturerte intervju da dette gir mulighet til å tilpasse spørsmålene etter informantenes svar. Semistruktrurerte intervjuer tar ofte utgangspunkt i en overordnet intervjuguide. Intervjuguiden fungerer som en oversikt over tema og spørsmål som skal tas opp i løpet av intervjuet, og sikrer på denne måten at relevante problemstillinger blir tatt opp (Bjørndal, 2015). På tross av fast struktur gir også denne intervjuformen stor grad av fleksibilitet da både rekkefølge og tema kan endres basert på intervjuets utvikling. Intervjuguiden i denne undersøkelsen består overordnet av to deler. Del én refererer til spørsmålene og del to de matematiske oppgavene. Utarbeidelse av intervjuguide vil beskrives i kapittel 3.1.3.

Et sentralt spørsmål knyttet til intervju som metode er hvor mange informanter det burde innhentes data fra. En måte å bestemme utvalgsstørrelsen er å hente inn data til det ikke forekommer ny informasjon per informant. Forskeren har da oppnådd det Christoffersen og Johannessen (2012) kaller et metningspunkt, og det er ingen hensikt å samle inn mer data. Det er også vanlig å ta hensyn til målgruppens heterogenitet eller homogenitet. Ved intervju av et homogent utvalg vil en trenge færre informanter for å besvare forskningsspørsmålet enn om det hadde vært stor variasjon mellom informantene (Christoffersen & Johannessen, 2012).

For å sikre førstehånds informasjon fra datainnsamlingen utførte jeg intervjuene selv, og for å kunne gjengi informasjon så korrekt mulig ble lydopptaker brukt under intervjuene. Ved å ta i bruk lydopptaker får jeg som intervjuer mulighet til å være mer tilstede i samtalen samt sikre nøyaktig informasjon. Siden informantene er barn i 14–15 årsalderen, er det en sjanse for at intervjuet kan oppfattes som en vurderingssituasjon om det blir tatt notater underveis. På den andre side er det risiko for at bruk av lydopptaker kan gjøre intervjuet mer formelt, og at informantene synses det er ubehagelig eller blir stresset av at samtalen tas opp.

3.1.2 Utvalg

Utvalget består av syv elever på 9. trinn med høy måloppnåelse i matematikk. Elevene i utvalget går på samme skole, i tre ulike klasser. To av de tre klassene i denne undersøkelsen har samme faglærer. Informantene i denne undersøkelsen er derfor plukket ut ved hjelp fra to ulike faglærere. Kriteriene satt for utvelgelsen av informanter tar utgangspunkt i kunnskapsdepartementets nasjonale kjennetegn på høy måloppnåelse (KD, 2016). I disse retningslinjene regnes standpunktkarakteren 5–6 som høy måloppnåelse. Standpunktkarakteren skal gi et uttrykk for kompetanse i faget og fastsettes på bakgrunn av de samlende kompetansemålene. Alle informantene er valgt ut basert på faglærerens subjektive vurdering av elevens kompetansenivå.

For å øke utvalgets homogenitet har jeg valgt å intervjue elever fra samme skole og årstrinn med høyeste måloppnåelse i faget. Ved å intervjue elever som har antatt like ferdigheter vil det i datamaterialet være enklere å avdekke både likheter og ulikheter på tvers av utvalget. Jeg har valgt å rekruttere informanter fra en skole jeg tidligere har vært i praksis ved. Dette både fordi flere av elevene selv uttalte at de ønsket å delta i prosjektet, og fordi det var naturlig å bruke min tidligere veileder som døråpner for å få tilgang på informanter. Ved å intervjue elever jeg kjenner håper jeg at barrieren for å innrømme at noe er vanskelig, og å tørre og løse en oppgave som oppfattes som utfordrende, senkes.

3.1.3 Utarbeidelse av intervjuguide

Intervjuet består av to hoveddeler. Del én består av spørsmål én til fire og omhandler begrepet likninger, samt spørsmål om komponentene en likning består av. Del to i intervjuet refererer til de matematiske oppgavene. For fullstendig intervjuguide se vedlegg 1.

Intervjuguiden har til hensikt å rette oppmerksomhet mot temaet for studien. Jeg var under utarbeidelsen oppmerksom på at spørsmålene skal invitere til refleksjon rundt begrepene og ikke legge opp til ja/nei svar. Bjørndal (2015, s.100) tar også opp viktigheten av å være oppmerksom på makten intervjuer har til å forme intervjuets videre gang. Jeg valgte derfor bevisst å ikke stille spørsmål om eventuelle metoder eller regler, da dette kan oppfattes som en føring for hvordan jeg ønsket informantene skulle løse likningene senere i intervjuet.

Ved utarbeidelsen av de matematiske oppgavene var det mange faktorer som spilte inn, blant disse: elevenes forkunnskaper, målet med oppgaven og læreplanen. Chapman (2013) viser til at en oppgave er hensiktsmessig utformet om den a) utfordrer elevenes begrepsforståelse og støtter deres utvikling av matematisk tenkning, b) læringspotensialet i den gitte oppgaven er optimalisert. Det ble laget to oppgaver til intervjuet, en tradisjonell oppgave (oppgave 1) og en utforskende oppgave (oppgave 2).

Oppgave 1 har et tradisjonelt uttrykk og ber informantene om å løse en oppgave av formen «løs likningen». Mitt hovedfokus i utformingen av oppgave 1 har vært at elevene skal få mulighet til å vise prosedyrekunnskap og strategisk kompetanse, samt at oppgavens utforming skal være formålstjenlig med hensyn til forskningsspørsmålet. Da jeg er interessert i hvordan elever forstår likninger var det viktig at oppgaven i hovedsak inneholdt komponentene beskrevet i kapittel 2.6. Oppgave 1 krever at informantene må håndtere en ukjent samt vise at de mestrer å slå sammen ledd av samme type.

Oppgave 1

$$31 - 2x = 5x + 4 + 2x$$

Informantene får også vist om de mestrer strategier for likningsløsning og om de kan samle utrykk av samme type på hver sin side av likhetstegnet. På høyre side av likningen må i tillegg informantene vise at de har kompetanse til å trekke sammen utrykk med en ukjent. Det er her et poeng at oppgaven er lagt opp med flest ukjente på høyre side av likhetstegnet. Dette har jeg valgt å gjøre da de fleste oppgavene i læreboka, faktor 9, legger opp til at de ukjente skal samles på venstre side av likhetstegnet. Når læreverket i sine eksempler konsekvent løser denne type oppgaver med samme veldefinerte prosedyre er det sannsynlig at elevene også velger å bruke lærerbokens algoritme som sin løsningsstrategi (Lithner, 2008). Velger elevene løsningsstrategi ukritisk, basert på hukommelse alene, benytter de ifølge Lithner (2008) en algoritmisk tankegang. Velger elevene i dette tilfellet å følge algoritmen fra oppgaveboka vil de ende opp med et negativt uttrykk for x:

$$\begin{aligned} &Oppgave\ 1: && 31 - 2x = 5x + 4 + 2x \\ &Ukjente\ på\ venstre\ side: && -2x - 7x = 4 - 31 \\ &Ender\ opp\ med: && -9x = -27 \end{aligned}$$

Gjennom praksis ved studie og arbeid innen skole har jeg observert at mange elever går ut fra de har beregnet feil, eller at det rett og slett stopper opp i møte med negative fortegn. Det vil derfor være interessant å observere hvordan informantene møter problemet om de velger å løse oppgaven som vist over. Oppgaven vil derfor kunne avdekke både elevens begrepsforståelse, prosedyrekunnskap og strategisk kompetanse

Bjørndal (2015 s.100) ber intervjuer være oppmerksom på om «spørsmålet krever informasjon og innsikt som intervjupersonene ikke har?». På bakgrunn av dette har jeg gjort et bevisst valg og utelukker parenteser og brøkuttrykk fra oppgaven. Dette valget baseres på resultater fra TIMSS og PISA som viser at elever har en tendens til å håndtere brøk i likninger feil, samt at jeg ikke ønsker å ta vekk motivasjonen for å fullføre resten av intervjuet.

Oppgave 2 er en utforskende oppgave hvor elevene skal forklare forholdet mellom to variabler i en likning. Oppgaven elevene ble gitt er hentet fra Blomhøj (2016, s. 98) og er utarbeidet i forbindelse med en undersøkelse på danske niendeklassinger og deres forståelse av funksjonsbegrepet. Blomhøj oppgave er illustrert i figur 2.

$y = x + 5$

Hvad kan du sige om x i forhold til y?

Figur 2: Oppgave hentet fra Blomhøj (2016, s.98)

Oppgaven ble i mitt intervju oversatt til norsk og presentert som vist under:

Oppgave 2

$$y = x + 5$$

Hva kan du si om x i forhold til y ?

Selv om denne likningen kan oppfattes som en funksjon vil ofte elevers valg av metoder og anvendelse av matematiske begreper være sterkt avhengig av deres personlige tolkning av konteksten oppgaven er formulert i (Boaler, 1993). Det er tatt i betraktning at likningen som presenteres i oppgave 2 kan tolkes som et funksjonsuttrykk, men da de foregående spørsmålene i intervjuet omhandler likninger er det sannsynlig at elevene vil betrakte også dette uttrykket som en likning.

Jeg valgte å bruke denne oppgaven da jeg ønsker å utfordre elevene med en oppgave som bryter med det tradisjonelle mønsteret. Oppgaveformuleringen er utradisjonell i den forstand at den bryter med oppgavediskursen. Elevene blir utfordret til å lese mening inn i likningen, noe som ikke normalt inngår i undervisningen (Blomhøj, 2016). Elevene blir ikke i denne oppgaven bedt om å løse, eller regne ut, derimot legger oppgaven opp til at elevene skal gi en språklig formulering av sammenhengen likningen beskriver. Formuleringen av spørsmålet utfordrer elevenes begrepsforståelse og evne til fleksibel tenkning, dette spesielt siden den spør om x i forhold til y og ikke motsatt. Elevenes begrepsforståelse vil utfordres da likningen har en notasjonsform som er knyttet til standardspørsmål og tolkninger i skolens matematikkundervisning, samtidig som spørsmålstillingen er «uvanlig» (Blomhøj, 2016). Det er heller ingen opplysninger om hvilke grunnmengder x og y tilhører, og en kan derfor si at oppgaven oppfordrer elevene til selvstendig tekning. Ved å gi denne oppgaven åpner jeg for diskusjon omkring begrepet variabel.

3.1.4 Transkribering av intervju

I en transkripsjon blir samtalen mellom to mennesker overført til skriftlig form. Transkripsjon av en intervjusamtale til skriftlig form innebærer en abstraksjon der stemmeleie, intonasjon og åndedrett går tapt (Cohen, Morrison & Manion, 2007). Dette er et avgjørende steg i intervjuprosessen da det innebærer risiko for tap av data, feiltolkninger og reduksjon av kompleksitet. Når materialet struktureres i tekstform blir det lettere å få oversikt, og struktureringen er i seg selv en begynnelse på analysen.

Et materiale som er produsert av forskeren vil alltid inneholde tolkninger av de nedskrevne observasjonene som bunner i hva som subjektivt er ansett som viktig (Olsen, 2002). I transkripsjonen av mitt datamateriale har jeg hatt fokus på hva som er nyttig for min forskning. Jeg har vært nøye på at teksten skal inneholde relevant informasjon med hensyn til mitt forskningsspørsmål, og at det jeg skriver skal være sant med respekt til opptakene. Jeg har vært oppmerksom på at punktsetting kan tilegne eller endre meningen i utsagnene og har i den grad det er mulig forsøkt å unngå dette. Det klassiske eksempel på hvordan tegnsetting kan påvirke innholdet i et utsag er «heng ham, ikke vent til jeg kommer» versus «heng ham ikke, vent til jeg kommer».

Et annet spørsmål tilknyttet transkripsjon er om følelsesuttrykk og pauser skal inkluderes (Kvale & Brinkmann, 2009). En pause i intervjuet kan indikere at noe oppfattes som utfordrende eller vanskelig, samtidig kan det stilles spørsmål om hvor lang en pause må være før det defineres som en lang pause? Skyldes pausen at han/hun ikke skjønner oppgaven, eller er det bare vanskelig å sette ord på tanker? Da årsakene til pausene i intervjuet vil avhenge av min fortolkning valgte jeg å se bort fra disse. Bakgrunnen for dette valget er at jeg vil unngå å tilegne datamaterialet falsk mening. Jeg valgte også å se bort fra følelsesuttrykk som latter og sukk i transkripsjonen da jeg ikke anser disse som relevante for studien.

For å sikre validiteten i transkripsjonen har jeg i etterkant hørt tilbake på deler av lydopptakene som inneholder utsagn som kan oppfattes som uklare. Jeg har forsøkt å ta hensyn til tonefall, samt sette informantens uttalelser i kontekst med det som tidligere er sagt. Jeg har også valgt å transkribere intervjuene til et skriftlig normert språk, da jeg i hovedsak ønsker å se helheten i informantenes svar og ikke gjennomføre en lingvistisk analyse.

3.2 Datamaterialet

Datamaterialet i denne studien består av 7 elevintervjuer på omkring 15 minutter hver. Til hvert intervju følger også elevenes skriftlige besvarelser på de matematiske oppgavene. Alle intervjuene er gjennomført og transkribert av meg. Siden det er jeg som har transkribert intervjuene vil materialet som produseres inneholde mine subjektive tolkninger, og fokusere på det jeg anser som viktigst. Ved transkripsjon av datamaterialet valgte jeg å transkribere spørsmålene og de matematiske oppgavene hver for seg.

3.3 Tematisk analyse

For å analysere datamaterialet benytter jeg i denne studien tematisk analyse. Tematisk analyse er en kvalitativ analysemetode hvor temaer innen datamaterialet identifiseres og analyseres på tvers av materialet for å finne gjentatte meningsmønstre (Attride-Stirling, 2001; Boyatzis, 1998; Braun & Clarke, 2006). En tematisk analyse organiserer og beskriver datasettet på en detaljert måte og gjør det mulig å tolke ulike aspekter ved forskningstemaet. Bruk av denne analysemetoden fører til kategorier som senere kan brukes i selve analysen av datamaterialet.

Det inngår i fleksibiliteten til en tematisk analyse at kategoriseringen av ulike tema[3] kan utføres på flere ulike måter. Denne studien har en induktiv tilnærming noe som innebærer at kodingen utføres uten forsøk på å knytte kategoriene til et allerede eksisterende rammeverk (Braun & Clarke, 2006). En slik tilnærming medfører derfor en sterk korrelasjon mellom de identifiserte temaene og datamaterialet. For å tydeliggjøre skillet mellom informasjon fra

[3] Begrepet tema betegnes av Ryan og Bernard (2000, s. 87) som en abstrakt konstruksjon som knytter resultater i datamaterialet til fenomenet forskningen prøver å beskrive.

intervjuene og mine tolkninger av datamaterialet ønsker jeg å vise hvilke beslutninger som er tatt gjennom analyseprosessen.

Braun og Clarke (2006) beskriver at en tematisk analyse gjennomføres i seks faser der det siste steget er å skrive en «vitenskapelig rapport». De påfølgende delkapitlene vil gjøre rede for de resterende fem fasene i analyseprosessen, og beskrive hvordan en tematisk analyse burde gjennomføres for å ende opp med gode kategorier for analyse av datamaterialet.

Av pragmatiske grunner har jeg valgt å ha med et eget kapittel, kapittel 4. *Behandling av datamateriale*, der alle vurderinger, koder og tema beskrives inngående og ferdig utarbeidete kategorier presenteres. Under de ulike fasene i dette delkapittelet vil jeg derfor ikke gå i dybden omkring den praktiske gjennomføringen.

3.3.1 Fase en: bli kjent med datamaterialet

Det første steget i en tematisk analyse er å bli kjent med datamaterialet. Dette er avgjørende for å sikre god oversikt over datamaterialet (Braun & Clarke, 2006).

For å bli kjent med datamaterialet lyttet jeg til intervjuene og transkriberte disse. Deretter leste jeg aktivt over transkripsjonene og lette etter mønster og mening. Jeg satte så opp en liste som grovt presenterte hvilken informasjon jeg kunne hente ut fra datamaterialet.

3.3.2 Fase to: koding av datamaterialet

I fase to begynner kodingen av datamaterialet. Dette involverer å produsere koder fra datamaterialet. Koder er med på identifisere deler av data som vekker interesse eller er tett knyttet til forskningsspørsmålet (Braun & Clarke, 2006). Kodene representerer de mest elementære segmentene av materialet forskeren opplever som meningsfulle med hensyn på fenomenet det forskes på.

Under kodingen av datamaterialet satte jeg ord på mønstrene jeg observerte i fase én.

3.3.3 Fase tre: utarbeidelse av tema

Denne fasen av analysen fokuserer på hvordan de ulike kodene kan sorters og kombineres for å danne potensielle tema. Attride-Stirling (2001) beskriver at en kan skape et tematisk nettverk ved å ta utgangspunkt i det hun kaller *basic themes* og jobbe seg inn mot det overordnede globale temaet.

I mitt tilfelle vil kodene brukt under transkriberingen av spørsmålene kunne danne *basic themes*, og definisjonen av *hva en likning er* regnes som det globale tema. For de matematiske oppgavene vil strategiene elevene har benyttet utgjøre globale tema.

3.3.4 Fase fire: gjennomgang av tema

Fase fire innebærer å undersøke om temaene utarbeidet i fase tre representerer kodene. I denne fasen skal det også vurderes om flere tema kan slås sammen å danne hovedtema også kalt kategorier (Braun & Clarke, 2006).

Ved å ta utgangspunkt i begrepene informantene selv benyttet, har jeg forsøkt å utforme empirinære tema som favner alle de ulike forståelsene av hva en likning er samt elevenes løsningsstrategier.

3.3.5 Fase fem: definering av kategorier

Fase fem i en tematisk analyse består av de ferdig utarbeidete kategoriene som skal brukes i analysen av datamaterialet. I denne fasen skal kategoriene både presenteres og valideres (Braun & Clarke, 2006). Når kategoriene er validert kan datamaterialet som hører til innenfor de ulike kategoriene analyseres med bakgrunn i et passende teoretisk rammeverk.

I denne studien vil jeg bruke kategorier utarbeidet av Blomhøj (2016) for å analysere den utforskende oppgaven. Hans kategorier presenteres i kapittel 4.5 Definering av kategorier.

3.4 Undersøkelsens kvalitet

For å sikre kvalitet og objektivitet har forskning et fokus på å produsere valid og reliabel kunnskap. En sentral utfordring i kvalitativ forskning er at menneskers oppfatninger og kunnskap er i stadig endring, å få likt resultat ved gjentakelse av samme undersøkelse er derfor nesten umulig. Selv ved gjennomførelse av et nytt intervju, utført med samme intervjuguide og utvalg av informanter, vil sannsynligheten for å få like resultater være lav (Cohen et al., 2007). I denne studien er derfor intervjuets åpne struktur alene et eksempel på lav grad av reliabilitet. Ved å utføre et mer lukket intervju vil reliabiliteten øke, men et lukket intervju medfører også økt risiko for å miste viktig informasjon. På bakgrunn av dette er det ikke et ønske i seg selv at kvalitativ forskning skal ha høy grad av reliabilitet, dette aspektet ved kvalitet vil derfor ikke utdypes nærmere. Undersøkelsens validitet vil i kapittel 3.4.1 beskrives gjennom Schoenfelds (2007b) begreper som omhandler validitet.

3.4.1 Validitet

Validitet omhandler hvor god relasjon det er mellom fenomenet som undersøkes, metode og datamaterialet som er samlet inn (Cohen et al., 2007). Christoffersen og Johannessen (2012) viser til at validitet ikke er noe en kan definere som oppnådd, men et kvalitetskrav som bør være tilnærmet oppfylt. Validiteten til kvalitative data kan fremmes gjennom ærlighet, dataens dybde, og forskerens objektivitet. Schoenfeld (2007b, s. 81) tar opp tre grunnleggende spørsmål forskeren bør stille seg:

- *Why should one believe what the author says? (the issue of trustworthiness)*
- *What situations or contexts does the research really apply to? (the issue of generality)*
- *Why should one care? (the issue of importance)*

Ved å stille disse spørsmålene diskuteres tre ulike dimensjoner av validiteten til en undersøkelse: troverdighet, generalitet og relevans.

«Hvorfor skal noen tro på det forfatteren sier?» dette spørsmålet viser til undersøkelsens troverdighet og kan knyttes til hvor stor relasjon det er mellom forskningsspørsmålet og datamaterialet som er samlet inn (Schoenfeld, 2007b). En kilde til lav troverdighet i undersøkelsen er om intervjuerens forutinntatte ideer eller forestillinger er med å farge informantens svar (Cohen et al., 2007). For å unngå dette har jeg som intervjuer vært oppmerksom på å stille oppfølgingsspørsmål av typen: «du brukte ordet, hva mente du med dette?» Ved å stille denne type spørsmål vil en i større grad unngå at informantens ord fremstilles i lys av intervjuerens subjektive tolkning. Ved å ta seg tid til å oppklare hva informanten mente vil intervjuer også kunne unngå misforståelser som videre kan påvirke analysen. I utarbeidelsen av intervjuguiden har jeg også kontrollert at alle spørsmålene i intervjuguiden samsvarer med temaet i undersøkelsen, og at spørsmålene ikke er ledende. Hvilke spørsmål og hvordan disse er formulert kan være med å påvirke undersøkelsens validitet, valgene som er tatt i sammenheng med utarbeidelse av spørsmålene til intervjuguiden er utdypet i kapittel 3.1.3.

Andre faktorer som kan spille inn på undersøkelsens troverdighet er at informantene under intervjuet blir nervøse eller stresset og derfor ikke klarte å vise alt de kunne. Det er også en risiko for at informantene svarer det de tror jeg ønsker å høre og dermed utelater informasjon (Bjørndal, 2016). For å få et komplett bilde av informantens matematiske oppførsel løste også informantene oppgaver underveis i intervjuet. Dette styrker validiteten i undersøkelsen da jeg gjennom å løse en oppgave «sammen med» informanten kan få innblikk i informantens forståelse utover det informanten selv klarerer å sette ord på.

«I hvilke situasjoner kan forskningen sies å gjelde, og for hvem er den relevant?» de to siste spørsmålene Schoenfeld (2007b) stiller viser til dimensjonene *generalitet* og *relevans og* omhandler i hvor stor grad forskningen kan sies å gjelde, altså om funnene er overførbare, og hvorvidt undersøkelsen er relevant. Generaliserbarheten i denne studien er begrenset da utvalget mitt kun består av syv informanter. På den andre side opplevde jeg gjennom oppgaveløsningen å komme til det Christoffersen og Johannesen (2012) refererer til som et metningspunkt. Resultatene vil i hovedsak gjelde for elevene som ble intervjuet, og jeg kan ikke basert på denne undersøkelsen trekke en direkte generalisering.

Undersøkelsen beskriver misoppfatninger omkring et spesifikt tema i et utvalg av elever med høyeste måloppnåelse i faget, det vil derfor være rimelig å anta at disse misoppfatningene også finnes hos elever med lavere måloppnåelse. På bakgrunn av dette vil jeg si at studien har relevans for lærere, da den kan bidra til en bevisstgjøring omkring undervisningspraksis. Jeg vil også si at studien har relevans sett i lys av den nye læreplanen da resultantene viser til hvordan elever mestrer å løse en utforskende oppgave.

3.5 Etiske overveielser

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi (NESH) har utarbeidet forskningsetiske retningslinjer som skal bidra til å utvikle forskningsetisk skjønn og fremme god vitenskapelig praksis (NESH, 2016). Retningslinjene er delt i seks punkter og blant disse er det spesielt punkt *B. Hensyn til personer* som er relevant for mitt prosjekt.

Datamaterialet i dette prosjektet inneholder ikke sensitive personopplysninger, likevel skal forskningsetiske retningslinjene satt av NESH (2016) følges. Prosjektet er godkjent av Norsk Senter for Forskningsdata (NSD) og informantene har mottatt informasjon om prosjektet og deres rett til selvbestemmelse angående deltakelse. Mindreårige som har fylt 15 år kan som hovedregel selv samtykke til at forsker kan innhente personopplysninger, er barna under 15 år må forskeren innhente samtykke fra foresatte. Da elevgruppen jeg skal utføre forskning på er ungdom på 14–15 år valgte jeg å innhente samtykke fra alle informantenes foresatte. Informasjonsskriv og samtykkeskjema se vedlegg 2.

Informantenes samtykke skal gjøres *fritt* og *uttrykkelig* og være basert på informasjon om prosjektets formål og metode. Fritt samtykke skal sikre deltagernes frihet og medbestemmelse, samtidig som det skal forebygge krenkelser av personlig integritet, og det er viktig at samtykke avgis uten ytre press (NESH, 2016). At samtykket er uttrykkelig innebærer at informantene klart og tydelig gir uttrykk for at de har skjønt hva det betyr å delta i forskningsprosjektet. Deltakerne fikk tydelig informasjon om at de kunne trekke seg når som helst eller avbryte sin deltakelse uten negative konsekvenser.

For alle illustrasjoner (håndskrevne elevsvar) er det innhentet ekstra tillatelse for å bruk. Både hos den enkelte elev og dens foresatte. Det er også gitt ekstra informasjon om hvilke illustrasjoner som vil brukes og hvilken kontekst materialet er satt i, slik at informantene har mulighet til å trekke sitt samtykke eller komme med innspill om de mener resultatene fremstilles feilaktig.

3.5.1 Personvern

Alle som deltar i prosjektet er garantert anonymitet, og som forsker er det mitt ansvar å sikre konfidensialiteten samt sørge for at enkeltpersoner som deltar i prosjektet ikke kan identifiseres. Intervjuene er tatt opp på lydopptaker og lydfilene ble deretter lagret på et passordbeskyttet område på universitetets server. Lydfilene er tilegnet kodenøkkel og ingen direkte identifiserende opplysninger (navn, skolested) oppgis i opptak eller filnavn. Alt av datamateriale som er samlet inn blir behandlet manuelt. Under transkribering, koding og analysering benyttes ikke informantens navn, men intervjuets tilhørende nummer. Ved prosjektslutt vil alle lydopptak og transkripsjoner slettes.

For å hindre bruk av informasjon som kan skade enkeltpersoner og sørge for at personvernet ivaretas vil informantene bli tildelt fiktive navn og kjønn i selve oppgaven. Kjønn har ingen betydning for min analyse og denne tildelingen er derfor tilfeldig.

4 Behandling av datamaterialet

Dette kapittelet gjør rede for hvordan jeg kom frem til kategoriene som brukes i analysen. Jeg vil her beskrive hvordan jeg behandlet datamaterialet i hver av de fem fasene i en tematisk analyse. Et kjennetegn ved empirisk forskning er at den foregår i sykluser der aspektene ved prosessen vurderes og revurderes om en annen (Schoenfeld, 2007b). De ulike fasene i analyseprosessen har derfor overlappet og gjensidig påvirket hverandre.

4.1 Bli kjent med datamaterialet

Første steg i å bli kjent med datamaterialet var å høre gjennom intervjuene, og siden det var jeg som gjennomførte disse hadde jeg allerede før transkriberingen gjort meg opp noen tanker om datamaterialet. Som beskrevet i kapittel 0 er alle intervjuene transkribert slik at den videre analysen kunne fortsette på bakgrunn av skriftlig materiale. Jeg bestemte meg ganske tidlig for å transkribere de to delene av intervjuet, spørsmålene og de matematiske oppgavene, separat. Årsaken til dette er at spørsmålene i stor grad gav informasjon om informantenes forståelse av spesifikke begreper, mens de matematiske oppgavene i større grad gir informasjon om informantenes strategivalg. Ved å separere disse delene var det lettere å finne meningsinnhold på tvers av intervjuene, og oppnå en høyere struktur i datamaterialet. I fase én produserte jeg liste som grovt beskrev hvilken informasjon de to delene av intervjuet inneholdt, denne listen presenteres i tabell 1.

Tabell 1: Datamaterialets innhold

Del en: spørsmål	Del to: matematiske oppgaver
- Beskrivelser av likninger - Variabler (ulike forståelser) - Ukjent - Beskrivelser av hvordan likninger løses - Bokstavuttrykk - x , y - Likhet (ulike forståelser)	- Flere strategier for å løse oppgavene - Ulike forklaringer - Får ikke til å begrunne prosedyre - Noen evaluerer egne svar - Tar i bruk flere strategier på samme oppgave - Vil ikke arbeide mer med oppgaven - Opplever utforskende oppgave som vanskelig

4.2 Koding av datamaterialet

I fase to undersøkte jeg meningsinnholdet i de ulike utsagnene, og kartla hvilke utsagn/informasjon som gjentok seg. Siden intervjuguiden i denne undersøkelsen er utformet for å få innblikk i elevers forståelse av likninger har fokuset i kodingen vært å få frem meningsinnhold knyttet til elevens forståelse og matematikk. Utsagn som ikke kunne knyttes til disse aspektene ble kodet som «annet» og ikke tatt med videre til fase tre. Eksempel på utsagn som er kodet som annet er: «Kan jeg fortelle de andre i klassen at jeg har vært med på et intervju»

For å sikre at jeg ikke gikk glipp av verdifull informasjon kodet jeg alle spørsmålene i intervjuene hver for seg. Jeg forsøkte i denne fasen å sette ord på mønstrene jeg observerte i fase én. Tabell 2 illustrerer et eksempel for hvordan koding ble benyttet for å organisere datamaterialet.

Tabell 2: Utdrag fra datamaterialet med tilhørende koder

Utdrag fra datamaterialet	**Kodet for**
«En likning er enten et utrykk, eller et regnestykke som består av bokstavutrykk som består av en ukjent.»	1. Nevner ikke likhetstegnet i definisjon av likning 2. Benytter ordet ukjent 3. Benytter ordet bokstavuttrykk

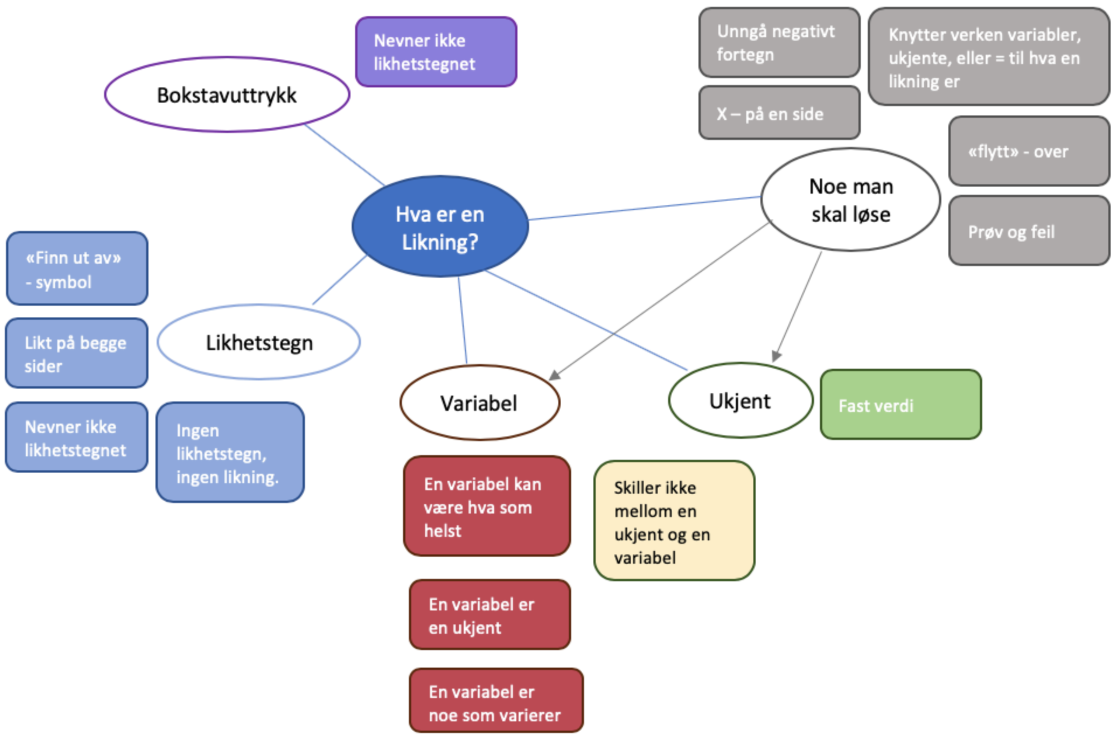
I denne fasen var jeg oppmerksom på at mine tolkninger av informantenes utsagn ikke skulle farge kodingen. Datamaterialet er derfor kodet etter hvilke ord informantene har benyttet i sine svar. Samlet endte jeg opp med 15 ulike koder for spørsmålene.

I kodingen av de matematiske oppgavene lyttet jeg gjennom den respektive delen av intervjuene, samtidig som jeg så på de skriftlige besvarelsene. Siden elevene løste de matematiske oppgavene ulikt, har jeg også spurt informantene ulike oppfølgingsspørsmål. De matematiske oppgavene kan derfor ikke sammenlignes på samme grunnlag som del en av intervjuet. De matematiske oppgavene er derfor kodet på bakgrunn av hvilke løsningsstrategier informantene brukte, og om strategien førte til korrekt svar. Elevenes begrunnelser for valg av løsningsstrategi vil presenteres i analysen kapittel 5.2.

Siden jeg har tatt i bruk en oppgave fra Blomhøj (2016) har jeg valgt å bruke hans ferdig utarbeidede kategorier for analyse av oppgave 2. Blomhøj sine kategorier presenteres i kapittel 4.5.

4.3 Utarbeidelse av tema

I denne fasen sammenliknet jeg de 15 kodene som var brukt for å analysere spørsmålene, og forsøkte å få en oversikt over hvilket meningsinnhold som gikk igjen. Deretter lagde jeg forslag til tema (basic themes) som kunne favne de ulike kodene. Det er et poeng å ikke miste viktig data tidlig i analyseprosessen og jeg vektla derfor at alle kodene skulle med. I første omgang lette jeg etter tema som på best mulig måte kunne representere datamaterialet. Figur 3 illustrerer et tidlig tematisk kart over datamaterialet fra spørsmålene i intervjuet. Kodene er her plassert under fem tema: bokstavuttrykk, likhetstegn, variabel, ukjent og noe man skal løse.



Figur 3: Tidlig tematisk kart, kodene fra spørsmål 1-4 plassert under fem tema

Besvarelsene fra den tradisjonelle oppgaven viste at informantene brukte to ulike strategier for å besvare oppgaven. Da informantene i undersøkelsen besvarte oppgaven 1 veldig likt, vil disse strategiene utgjøre hovedtema for den tradisjonelle oppgaven.

4.4 Gjennomgang av tema

Ved å ta utgangspunkt i begrepene informantene benyttet, har jeg forsøkt å utforme empirinære tema og favne alle de ulike forståelsene av hva en likning er. Etter utarbeidelsen av Figur 3 ble det tydelig at enkelte tema var veldig små og derfor burde slås sammen. For eksempel la jeg merke til at informantene som anså likninger som noe de skal løse heller ikke skiller mellom likninger og bokstavuttrykk, disse temaene ble derfor slått sammen.

4.5 Definering av kategorier

Før den endelige defineringen av hovedtema fant sted undersøkte jeg temaenes troverdighet. Dette gjorde jeg ved en siste gjennomgang av transkripsjonen for å sikre at data ikke var utelatt, eller at utsagnene jeg har brukt ikke er tatt ut av kontekst. Jeg drøftet også med veileder for å være sikker på at kategoriene var i tråd med forskningsspørsmålet, og at innholdet i de ulike temaene gjenspeilet datamaterialet på en meningsfull måte.

4.5.1 Kategorier del 1: spørsmål

Etter nøye gjennomgang kom jeg frem til tre tema som representerer de ulike besvarelsene på spørsmålene i intervjuet.

- Kategori 1: Besvarelser som tar høyde for likhet, samt variabler eller ukjente
- Kategori 2: Besvarelser som kun tar høyde for likhet
- Kategori 3: Besvarelser som ikke skiller mellom likninger og bokstavuttrykk.

Gjennom analyseprosessen kom det frem at det residerer ulike forståelser av likhetstegnets betydning, variabler og ukjente innenfor de ulike temaene. For å kunne skille mellom de ulike forståelsene vil jeg i analysen bruke Knuth et al. (2006) sine kategorier knyttet til forståelse av likhetstegnets betydning:

- *Begrepsforståelse*: om eleven besvarer at symbolet betyr «det skal være lik verdi på begge sider av symbolet».
- *Operasjonelt syn*: om eleven beskriver symbolets betydning som «regn ut» eller «det blir»
- *Andre*: Om eleven gjenbruker ordet i sin forklaring. For eksempel: «det betyr lik»

Informantenes besvarelser som omhandler variabler og ukjente vil diskuteres både i kapittel 6.1 og kapittel 7.1 Variabelbegrepet.

4.5.2 Kategorier del 2: matematiske oppgaver

De matematiske oppgavene er i stor grad kategorisert basert på bakgrunn av hvilke strategier informantene benyttet i oppgaveløsningen. Gjennom den tematiske analysen ble det identifisert at informantene benyttet seg av strategiene «flytt og bytt» og «utføre samme operasjon på begge sider av likhetstegnet» for å løse den tradisjonelle oppgaven. Besvarelsene fra den utforskende oppgaven var veldig ulike, og det viste seg at selv like besvarelser ble funnet ved hjelp av ulike strategier. Jeg vil benytte kategorier utarbeidet av Blomhøj (2016) for kategorisering av den utforskende oppgaven, disse er:

> *Type a): Besvarelser, der angiver at x er (5) mindre end y.*
> *Type b): Besvarelser, der fortolker ligningen uden at svare på spørgsmålet.*
> *Type c): Besvarelser, der angiver at x er 5 større end y.*
> *Type d): Besvarelser, der hverken fortolker ligningen eller svarer på spørgsmålet.*
> (Blomhøj, 2016. s.14,16,18)

Da besvarelsene i mitt datamateriale ikke faller under alle Blomhøj sine kategorier vil jeg kun bruke tre av disse i analysen. Oversikt over hvilke kategorier som vil benyttes for å analysere de matematiske oppgavene er illustrert i tabell Tabell 3.

Tabell 3: Kategorisering av matematiske oppgaver

Tradisjonell oppgave	a) Samme operasjon på begge sider, rett svar
	c) Flytt og bytt
	c) Samme operasjon på begge sider, galt svar
Utforskende oppgave	a) Muntlig svar: x er (5) mindre enn y
	b) Besvarelser som tolker likningen, uten å svare på spørsmålet
	c) Besvarelser som verken tolker likningen eller svarer på spørsmålet

5 Analyse

Gjennom den tematiske analysen ble det i tilknytning til spørsmålene avdekket tre kategorier som gjentok seg på tvers av utvalget. I tillegg ble det kartlagt at de syv informantene benyttet to ulike strategier for å løse den tradisjonelle oppgaven. Besvarelsene fra den utforskende oppgaven kunne plasseres under tre av kategoriene utarbeidet av Blomhøj (2016).

I denne analysen vil datamaterialet beskrives og illustreres med karakteristiske besvarelser, og analyseres med bakgrunn i Kilpatrick et.al (2001) sitt rammeverk for *mathematical proficiency*, samt teorier knyttet til likninger presentert i kapittel 2.6. På bakgrunn av undersøkelsens design vil ikke datamaterialet kunne tilføye informasjon om aspektet *holdninger* utover vurderingen som er gjort av informantenes lærere.

5.1 Del 1: Spørsmål

Alle besvarelsene under de ulike kategoriene omhandler hvilke begreper informantene tar i bruk når de forklarer hva en likning er. Som beskrevet i kapittel 4 *Behandling av datamateriale,* er ikke forståelse for begrepene som brukes et kriterium for å plasseres under de respektive kategoriene.

På bakgrunn av intervjuets åpne struktur har ikke informantene blitt stilt identiske spørsmål. En konsekvens av dette er at noen av informantene har fått større mulighet til å vise hva de forstår, eventuelt ikke forstår, enn andre. Siden spørsmålene i intervjuet ikke inneholder oppgaveløsning analyseres ikke denne delen av intervjuet med hensyn til strategisk kompetanse og fleksibel tenkning.

Kategori 1: Besvarelser som tar høyde for likhet, samt ukjente eller variabler.

Denne kategorien omfatter tre besvarelser: I. Ada, II. Bente og III. Christian. Alle beskriver prinsippet om likhet, og knytter begrepet *ukjent* eller *variabel* til likninger. Da alle besvarelsene innenfor denne kategorien er ulike har jeg valgt å gjengi alle.

I. Ada: «En likning er hvis man har noen ukjente og et likhetstegn med svar på begge sider, men fortsatt noen ukjente du må finne ut av».

Denne besvarelsen tar hensyn til likhetstegnet, og refererer til at en likning inneholder noen ukjente.

Intervjuer: «Kan du forklare nærmere hva du mener med en ukjent?»

Ada: «Det er en variabel, for eksempel x på en side av likhetstegnet. Det er et tall, men du vet ikke hvordan»

Å svare at en ukjent er en variabel, antyder at informanten ikke differensierer mellom de ulike begrepene. Samtidig sier hun «det er et tall, men du vet ikke hvordan», noe som kan tolkes som at hun anser en ukjent som et tall med fast verdi. For å være sikker på at jeg tolket utsagnene hennes korrekt satte jeg opp en likning, pekte på x og spurte om denne kunne variere.

Ada: «Ja, siden der er en variabel»

Intervjuer: «Kan du forklare hva en variabel er?»

Ada: «En variabel er et tall som kan variere, men man vet ikke hvordan tall det er»

Ada sin forklaring av begrepet variabel er matematisk korrekt, men hun viser gjennom eksempelet jeg fremsatte at hun ikke skjønner at x representerer en spesifikk verdi i likninger. Denne besvarelsen indikerer at Ada har prosedyrekunnskap om begrepet variabel. Dette fordi hun ikke klarer å knytte kunnskapen hun har om variabelbegrepet til det hun vet om likninger og likhet. Informasjon som fremstår som en isolert bit av kunnskap defineres som prosedyrekunnskap (Kilpatrick et al., 2001).

Usiskin (1999) poengterer at mange elever anser bokstaver i matematikk som variabler, uansett hvilke situasjoner de oppstår i, og Gray et al. (2007) viser til forskning der kun 5% av deltagerne oppgir at x kan ha en fiksert verdi. Det at Ada ved direkte spørsmål ikke reager på at likningen vil bli ubalansert om verdien av x endres tyder på en manglende forståelse av likhetstegnets betydning. Hun er også den eneste av alle informantene som benytter ordet «svar» for å beskrive at det er matematiske uttrykk på begge sider av likhetstegnet. Bruken av dette ordet antyder at hun assosierer likhetstegnet med aritmetiske operasjoner som utføres for å få et endelig resultat. På den andre siden indikerer hennes svar på spørsmål om likhetstegnet begrepsforståelse.

Intervjuer: «Du brukte ordet likhetstegn, kan du forklare hva det betyr?»

Ada: «Det betyr at det er samme verdi på samme side»

Etter Knuth et al. (2006) definisjon vil denne besvarelsen kategoriseres under begrepsforståelse, men siden Ada gjennom mitt eksempel ikke å klarer anvende kunnskapen hun har i en ny situasjon viser hun prosedyrekunnskap.

II. Bente: «Det er like mye på hver side av likhetstegnet, og x har samme verdi uansett hvor den er. Det er slik at man skal finne ut hva x er»

Bevarelsen inneholder en beskrivelse av likhet og informanten refererer til x som en komponent som alltid befinner seg i likninger. Bente viser gjennom intervjuet at hun skjønner x sin rolle i likninger, og hun beskriver også likhet i sine svar.

Intervjuer:	«Hva representerer x i en likning?»
Bente:	«En ukjent verdi. Du vet ikke hva det er når du starter å jobbe, men du skal finne det ut»
Intervjuer:	«Kan du forklare hva du mener med en ukjent verdi?»
Bente:	«Det er det ukjente tallet som gjør at likningen går opp»
Intervjuer:	«Vet du hva en variabel er?»
Bente:	«En variabel er en x som vil si at den alltid er ukjent. Det har noe med å variere å gjøre».

Bente viser begrepsforståelse for prinsippet om likhet da hun forklarer at x kun kan ha én verdi om likningens balanse skal opprettholdes. Av intervjuet fremkommer det også at Bente knytter symbolet x både til en ukjent verdi og til variabler, og hun tilegner x ulik betydning avhengig av kontekst. Svaret viser begrepsforståelse da Bente forklarer hvordan begrepene variabel og ukjent henger sammen med symbolet x, og hva dette medfører når symbolet plasseres i en likning.

III. Christian: «En likning er enten et utrykk, eller et regnestykke som består av bokstavutrykk som består av en ukjent». Han utdyper videre: «For å gjøre det litt lettere for meg selv kan jeg skrive et eksempel på en likning: $3x + 3 = 2x + 6$ her har jeg en variabel med i regnestykket».

Denne besvarelsen er kompleks da Christian benytter begrepene: likning, bokstavutrykk, regnestykke, ukjent og variabel om hverandre. Selv om informanten ikke dirkete nevner likhetstegnet i sin besvarelse gjør han rede for likhetstegnet betydning gjennom eksempelet han fant på. Jeg valgte derfor å plassere han under kategori 1.

Christian er den eneste av de syv informantene som svarer på spørsmålet: «Hva er en likning?» ved hjelp av en konkretisering, og han skiller seg fra de andre i kategori 1 med sin beskrivelse av en variabel.

Intervjuer:	«I likningen du skrev opp brukte du det symbolet (peker på x), vet du hva dette symbolet betyr?»
Christian:	«Det er en variabel og kan være hva som helst»
Intervjuer:	«Hva mener du med hva som helst?»
Christian:	«For eksempel biler, båter eller penger»

Christian svarer at x i en likning er en variabel, og at en variabel kan være hva som helst. I en likning bestående av tall kan ikke x representere noe annet enn en spesifikk tallmengde. Han skiller ikke i sitt svar mellom objektet, altså biler eller båter og det x faktisk representerer nemlig *antall* objekter. Oppfatningen om at en variabel kan være hva som helst er en indikasjon på manglede begrepsforståelse av variabelbegrepet, samtidig kan min spørsmålstilling ha påvirket hvordan informanten formulerte svaret sitt. For å få et tydeligere bilde på om Christian skiller mellom en variabel og en ukjent pekte jeg på likningen han skrev opp innledningsvis i intervjuet, og spurte:

Intervjuer:	«Hva representerer x i denne sammenhengen?»
Christian:	«I denne sammenhengen er det en spesiell ting»

Dette svaret gir en indikasjon på at Christian forstår at x i en likning refererer til en spesifikk verdi. På den andre side benytter han ordene «spesiell ting» noe som kan vise tilbake til eksemplene han presenterte over (bil, båt, penger). Intervjusamtalen om dette temaet stopper her, da jeg ikke stilte Christian flere oppfølgingsspørsmål.

Felles for disse besvarelsene er at informantene, ved direkte spørsmål, viser at de har skjønt begrepet likhet. Alle tre informantene svarer at symbolet betyr at det skal være lik verdi på begge sider. Når det kommer til forståelsen av begrepene variabel og ukjent viser derimot informantene ulike former av forståelse. De ulike formene for forståelse som fremkommer av spørsmål 1–4 i intervjuet er fremstilt i tabell 4.

Tabell 4: Forståelse blant informantene, kategori 1 - spørsmål

	Begrepsforståelse	**Prosedyrekunnskap**	**Annet**
Likhet	Bente, Christian	Ada	
Ukjent	Bente		Ada, Christian
Variabel	Bente	Ada	Christian

Kategorien «annet» omfatter de besvarelsene der jeg på bakgrunn av spørsmålene alene ikke fikk nok informasjon til å si noe om informantens forståelse.

Kategori 2: Besvarelser som kun tar høyde for likhet.

Denne kategorien dekker to besvarelser: David og Emil, hvor informantene definerer en likning basert på likhetstegnet alene. Definisjonen av en likning som brukes av disse informantene er i tråd med definisjonen til læreverket Faktor som sier: «En likning består av to uttrykk som har samme verdi, ett på hver sin side av likhetstegnet». David og Emil svarer tilnærmet identisk på spørsmålene, jeg velger derfor å kun presentere én besvarelse:

IV. De svarer: «Det er når noe er likt på begge sider» ved spørsmål om de kunne komme på noe mer knyttet til likninger svarte begge nei.

Denne besvarelsen viser at informantene anser likhetstegnet som et av de viktigste kjennetegnene på en likning, og verken David eller Emil bruker begrepene variabel eller ukjent i sin definisjon. Det er et poeng å nevne at David og Emil ikke går i samme klasse og at de har ulik hovedlærer i matematikk. Sannsynligheten for at de har kopiert hverandres svar eller snakket sammen er derfor liten. Ved spørsmål om hva likhetstegnet betyr avgir begge svar som indikerer god begrepsforståelse: «Det betyr at det er lik verdi på begge sider» og «det er likt på begge sider». En kan derimot se forskjeller i informantenes svar om variabelbegrepet.

Intervjuer: «Hva representerer x i en likning?»

David: «x representerer en variabel, eller i en likning er ikke x en variabel men et fast bestemt tall, en ukjent»

Intervjuer: «Hva er en variabel da?»

David: «Variabel beskriver en mengde som kan ta ulike verdier»

David sin besvarelse viser at han skiller mellom en ukjent og en variabel, og han viser begrepsforståelse ved å forklare at symbolet x har ulik mening avhengig av konteksten det brukes i. På spørsmål om hva x representerer i en likning svarer Emil: «x representerer en variabel». Ved spørsmål om hva en variabel er, beskriver han på samme måte som Christian under kategori 1 en variabel som «noe som kan være forskjellige ting».

Tabell 5 viser en oversikt over de ulike formene for forståelse David og Emil viste under spørsmålene.

Tabell 5: Forståelse blant informantene, kategori 2 - spørsmål

	Begrepsforståelse	**Prosedyrekunnskap**	**Annet***
Likhet	David, Emil		
Ukjent	David		Emil
Variabel	David		Emil

*besvarelsene der jeg på bakgrunn av spørsmålene alene ikke fikk nok informasjon til å si noe om informantens forståelse.

***Kategori 3: Besvarelser som ikke skiller mellom likninger og bokstavuttrykk*.**

Denne kategorien omfatter to besvarelser: V. Frode og VI. Grete. Disse besvarelsene tar ikke høyde for likhetstegnets rolle i likninger. Siden besvarelsene viser ulike aspekter ved elevers forståelse velger jeg derfor å presentere begge.

V. Frode: «En likning er et bokstavutrykk med x som er en variabel»

Denne besvarelsen sidestiller likninger og bokstavuttrykk. Av uttalelsen kommer det frem at informanten anser tilstedeværelse av x som et identitetsmerke på likninger og at x anses som en variabel. Ved videre spørsmål om informanten kunne gi meg et eksempel på en likning skrev han ned $(2x + 7)$. Da han ikke nevner likhetstegnet plasseres Frode i kategori 3.

Da Frode i sine besvarelser ikke skiller mellom en likning og et bokstavuttrykk vil det være rimelig å anta at han heller ikke skiller mellom en ukjent og en variabel.

Intervjuer: «Vet du hva x representerer i en likning?»
Frode: «En likning er jo et bokstavutrykk, så x er en variabel»

Selv om jeg eksplisitt spør om hva x representerer i en likning tar Frode med seg misoppfatningen om at en likning og et bokstavuttrykk er det samme, og svarer at x er en variabel. Da dette svaret gir lite informasjon om hans oppfatning av x i en likning utvider jeg utrykket han skrev innledningsvis ($2x$ + 7) til $2x$ + 7 = 40.

Intervjuer: «Hva står x for her?»
Frode: «x er en variabel som kan variere»

På bakgrunn av dette svaret kommer det frem at Frode ikke skiller mellom variabler og ukjente. Denne oppfatningen kan bunne i at han ikke anser likhetstegnet som et identitetsmerke på likninger. På bakgrunn av disse spørsmålene alene er det vanskelig å si om Frode har en prosedyrebasert forståelse for begrepene eller ikke.

VI. Grete: «En sammensetning av flere forskjellige regnestykker med en x»

Denne besvarelsen bruker ikke direkte ordet bokstavuttrykk, men er plassert under denne kategorien da x brukes som eneste identitetsmerke for likninger. Ved utdypende spørsmål besvarte informanten at både $(2x + 3)$ og $2x + 3 = 13$ er likninger. Det fremgår ikke av dette svaret om informanten anser x som en variabel eller en ukjent.

Intervjuer: «Vet du hva x representerer i en likning?»
Grete: «x er en variabel, det kan være hvordan som helst tall. Men om det er flere $x -$ er i en likning er fortsatt disse det samme. x er bare en ukjent.»
Intervjuer: «Er en variabel og en ukjent det samme?»
Grete: «Ja og nei. En variabel er du ikke sikker på, det kan være hva som helst. For eksempel er ball en fellesbetegnelse for flere typer baller (fotball, volleyball) x er på samme måte en fellesbetegnelse på flere typer ting»

Dette intervjuutdrag viser at Grete er usikker på begrepene variabel og ukjent. Intervjuutraget viser også at hun har lignende forståelse av begrepet variabel som Christian og Emil under kategori 1 og 2.

Felles for begge besvarelsene V og VI er at informantene ikke anser likhetstegnet som et kriterium for å kunne kalle et matematisk uttrykk en likning. På tross av dette er det betydelig forskjell på hvordan de to informantene forstår begrepet likhet. Frode besvarer at likhetstegnet betyr «Er lik, regn ut». Svarene til Frode indikerer at han har et operasjonelt syn på symbolet, noe Knuth et al. (2006) refererer til som en av de vanligste misoppfatningene. Grete sin besvarelse viser begrepsforståelse for symbolets mening: «Man kan se på det som en vekt med to sider, det skal være likt på begge sider».

Tabell 6: Forståelse blant informantene, kategori 3 - spørsmål

	Begrepsforståelse	Prosedyrekunnskap	Annet*
Likhet	Grete	Frode	
Ukjent			Frode, Grete
Variabel			Frode, Grete

*besvarelsene der jeg på bakgrunn av spørsmålene alene ikke fikk nok informasjon til å si noe om informantens forståelse.

5.2 Del 2: Matematiske oppgaver

De matematiske oppgavene består av en tradisjonell og en utforskende oppgave. I dette delkapittelet vil jeg presentere de ulike svarene og strategiene informantene brukte for å løse de ulike oppgavene.

5.2.1 Tradisjonell oppgave

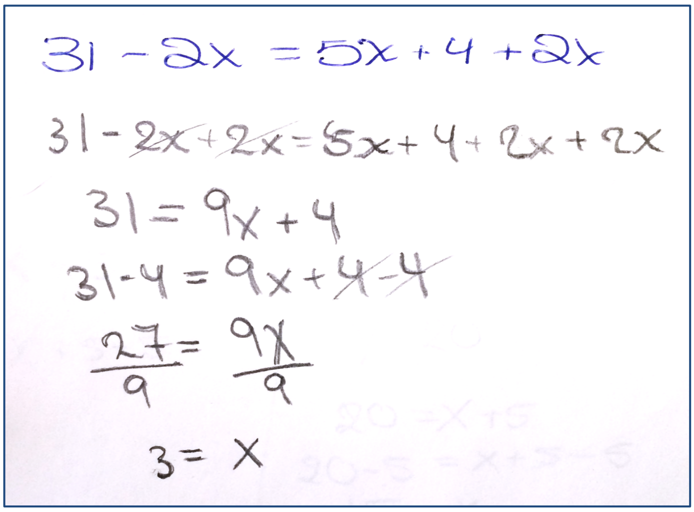
Den tradisjonelle oppgaven ble i hovedsak løst på to ulike måter. Seks av informantene utførte en variant av å gjøre samme operasjon på begge sider av likhetstegnet, og én benyttet seg av strategien *flytt og bytt*. Blant de seks som benyttet strategien «samme operasjon på begge sider» var det bare to av informantene som gjorde feil i oppgaveløsningen. Av disse to klarte én å selv se hvor feilen i utregningen lå, den andre ikke.

Da alle informantene har brukt en hensiktsmessig strategi for å løse den tradisjonelle oppgaven vil besvarelsene fra oppgave 1 i hovedsak analyseres med hensyn til begrepsforståelse, prosedyrekunnskap og fleksibel tekning.

Type a) Samme operasjon på begge sider av likhetstegnet, korrekt svar.

Denne kategorien omfatter fem besvarelser der informantene har subtrahert eller addert med like størrelser på begge sider av likhetstegnet, og kommet frem til korrekt løsning. Fire av de fem besvarelsene er helt identiske.

I. Christian, David, Emil og Grete løste oppgaven helt likt, og alle informantene argumenterer med likhet når de forklarer hvorfor de ulike stegene i likningsløsningen gjennomføres. Samtlige viser begrepsforståelse gjennom oppgaveløsningen da de skjønner hvordan aspektet likhet påvirker de ulike stegene i den valgte løsningsstrategien. Siden informantene valgte en passende strategi for å løse oppgaven viser de også strategisk kompetanse. Figur 4 illustrerer hvordan de fire informantene valgte å gå frem for å løse oppgaven.



Figur 4: Besvarelse oppgave 1, Christian, David, Emil og Grete

Samtlige valgte å eliminere x fra venstre side av likningen som første steg. Ved spørsmål om hvorfor de velger å samle x på høyre side får jeg samme svar fra alle.

Intervjuer: «Hvorfor har du valgt å samle alle $x -$ ene på høyre side av likhetstegnet»

Informanter: «Fordi høyre side har flest $x -$ er».

Av de fire informantene er det kun David som klarer å begrunne hvorfor det er gunstig å samle de ukjente på høyre side. Han svarer: «Er alle de ukjente på høyre side slipper jeg å jobbe med negativ x». Med denne forklaringen støtter David opp prosedyrekunnskap med begrepsforståelse, og han viser at han forstår hvordan plasseringen av den ukjente i likningen vil påvirke fortegnet.

Alle informantene under type a – I har samme faglærer. En av årsakene til at de svarer tilnærmet identisk kan derfor skyldes at de har mottatt samme undervisning. Manglende forklaring fra Christian, Emil og Grete indikerer prosedyrebasertkunnskap om dette aspektet ved strategien, men det kan også være et tegn på lite verbal trening. Mine data gir ikke informasjon om informantenes verbale trening så dette er derfor vanskelig å fastslå.

II. Et annet aspekt ved elevers tenkning kommer frem gjennom besvarelsen til Bente. Hun forsøker på samme måte som informantene under punkt I. å addere og subtrahere på begge sider av likhetstegnet. Hun forsøker totalt tre ulike prosedyrer før hun kommer frem til korrekt løsning.

Forsøk 1: $31 - 31 - 2x = 5x + 4 + 2x - 31$

Bente: «Vent litt, i denne likningen er den største x–en på høyre side, jeg vil heller prøve få alle x – ene over dit. Da blir det mye lettere tror jeg, men egentlig vil jeg ha de på venstre side for det er det jeg er vant til»

Intervjuer: «Hvorfor er det mye enklere å ha x – ene på høyre side?»

Bente: «Jeg er ikke så flink å jobbe med minustegn»

Bente er den eneste av alle informantene som uttrykker et ønske om å samle utrykk med x på venstre side av likhetstegnet, slik som læreverket legger opp til. Hun klarer også på samme måte som David under punkt I å forklare hva det medfører å samle de ukjente på høyre side. Siden hun vil unngå negative tall begynner hun på nytt.

Forsøk 2: $31 - 2x - 2x = 5x + 4 + 2x - 2x$

Bente: «Nei det går ikke, jeg kan ikke trekke fra $-2x$ siden $-2x - 2x = -4x$»

I forsøk 2 evaluerer Bente steget i den valgte prosedyren uoppfordret, og viser her fleksibel tenkning. Hun fant ut at hun hadde gjort feil og spør igjen om å få starte på nytt. På tredje forsøk prøver informanten å løse likningen slik:

Forsøk 3: $31 - 2x - 2x = 5x + 4 + 2x - 2x$

Steg 1: $31 - 2x + 2x = 5x + 4 + 2x + 2x$

Steg 2: $31 - 4 = 5x + 4 - 4 + 2x + 2x$

Steg 3: $27 = 5x + 2x + 2x - 2x$

Bente: «Jeg vet at dette blir feil, men jeg husker ikke hva jeg skal gjøre»

Intervjuer: «Hva er felles for disse uttrykkene?» (peker på høyre side i steg 3)

Bente: «Ja! de er lik og kan legges sammen»

Steg 4: $27 = 9x$

Bente: «Er det nå man skal skrive x^3? nei det er det ikke, det er når man ganger»

Videre dividerte informanten begge sider med 9 og konkluderte med at $x = 3$. Hun sjekket også sin egen løsning ved å substituere x med 3 i den opprinnelige likningen.
En åpenbar forskjell mellom besvarelse I og II er at Bente brukte tre forsøk før hun klarer å

løse likningen. Det er heller ingen aspekter ved Bente sin besvarelse som indikerer at hun følger en memorert algoritme. Et kjennetegn ved begrepsforståelse er evnen til å rekonstruere prosedyrer ved hjelp av eksisterende kunnskap, da Bente resonnerer seg frem til den korrekte løsningen vil jeg si hun utviser begrepsforståelse i oppgaveløsningen. Hun evaluerer også alle stegene i prosedyren og viser gjennom denne oppgaveløsningen også fleksibel tenkning (Kilpatrick et al., 2001).

Tabell 7 illustrerer hvilke aspekter ved *mathematical proficiency* som kom til uttrykk gjennom den tradisjonelle oppgaven. Da denne undersøkelsen har fokus på hva som er utfordrende for elever å forstå velger jeg å trekke frem aspekter ved den valgte løsningsstrategien som gjennom intervjuet fremsto vanskelig. Samtlige informanter utviste strategisk kompetanse ved løsning av den tradisjonelle oppgaven så dette aspektet ved *mathematical proficiency* er ikke presentert i tabellen.

Tabell 7: Aspekter ved mathematical proficiency type a - tradisjonell oppgave

Aspekter ved strategien	**Begrepsforståelse**	**Prosedyrekunnskap**	**Fleksibel tenkning**	**Annet***
Likhet	Bente, Christian, David, Emil og Grete	Bente, Christian, David, Emil og Grete	Bente	
Negative tall	Bente og David	Christian, Emil og Grete		

*besvarelsene der jeg på bakgrunn av spørsmålene alene ikke fikk nok informasjon til å si noe om informantens forståelse.

Type b) flytt og bytt. Denne kategorien innbefatter én besvarelse, hvor informanten har «flyttet» tall fra en side av likhetstegnet og byttet fortegn. Besvarelsen tilhører Ada og så slik ut:

III. $$Oppgave\ 1: \quad 31 - 2x = 5x + 4 + 2x$$

$$Steg\ 1: \quad 31 - 2x = 7x + 4$$

$$Steg\ 2: \quad 31 = 9x + 4$$

$$Steg\ 3: \quad \frac{27}{9} = \frac{9x}{9}$$

$$Svar: \quad x = 3$$

Ada velger i steg 1 å slå sammen de ukjente størrelsene på høyre side av likhetstegnet. Ved spørsmål om hvorfor hun i steg 2 hadde skrevet $9x$ forklarte hun at hun hadde flyttet $(-2x)$ over til høyre side og byttet fortegn, og at $7x + 2x = 9x$. Ved spørsmål om hvorfor hun kan gjøre dette forklarer hun at en egentlig legger til $2x$ på begge sider av likhetstegnet for å bli kvitt x på venstre side. Hennes argument er hovedsakelig vinklet mot å «kvitte seg» med x ikke å opprettholde balansen i likningen.

På samme måte som Christian, Emil og Grete sier også Ada at hun velger å samle x på høyre side for det er der den største x-en er. Hun klarer ikke svare på hvorfor dette kan være hensiktsmessig. Da Ada, Christian, Emil og Grete går i samme klasse, og svarer ordrett det samme på dette spørsmålet er det rimelig å anta at de følger en algoritme lært i undervisningen. Hvilke aspekter ved mathematical proficiency som kommer til uttrykk gjennom intervju med Ada er vist i Tabell 8.

Tabell 8: Aspekter ved mathematical proficiency type b - tradisjonell oppgave

Aspekter ved strategien	**Begrepsforståelse**	**Prosedyrekunnskap**	**Fleksibel tenkning**	**Annet***
Likhet		Ada		
Negative tall		Ada		

*besvarelsene der jeg på bakgrunn av spørsmålene alene ikke fikk nok informasjon til å si noe om informantens forståelse.

Type c) Samme operasjon på begge sider av likhetstegnet, galt svar.

Denne kategorien omfavner en besvarelse der informanten utfører samme operasjoner på begge sider av likhetstegnet, men får feil løsning. Besvarelsen tilhører Frode og skiller seg fra type a) da han ikke klarer å finne ut hvorfor svaret blir feil. Han skiller seg også fra de andre ved at han i steg 1 velger å samle alle heltall på høyre side av likhetstegnet. Dette medfører feil løsning da han i steg 2 ikke tar med seg fortegnet.

IV. $Oppgave\ 1: \quad 31 - 2x = 5x + 4 + 2x$

$$Steg\ 1: \quad 31 - 31 - 2x = 5x + 4 + 2x - 31$$

$$Steg\ 2: \quad 2x = 5x + 4 + 2x - 31$$

$$Steg\ 3: \quad 2x - 5x = 5x - 5x + 4 + 2x - 31$$

$$Steg\ 4: \quad -3x = 4 + 2x - 31$$

$$Steg\ 5: \quad -3x - 2x = 4 + 2x - 2x - 31$$

$$Steg\ 6: \quad -5x = 4 - 31$$

$$Steg\ 7: \quad -5x = -26$$

$$Steg\ 8: \quad 5x = 26$$

Det kan være flere årsaker til at Frode skriver $2x$ i stedet for $-2x$, en av disse kan rett og slett skyldes intervjusituasjonen. En annen årsak kan være at informanten tror at negative tegn kun refererer til subtraksjonsoperasjonen (Booth & Davenport, 2013). Når han hadde løst oppgaven ferdig spurte jeg om han kunne se hvor han hadde gjort feil, dette klarte han ikke. Jeg pekte så på steg nummer to og spurte om han kunne se hva som var feil der, dette klarte han heller ikke. På bakgrunn av dette kan en anta at årsaken til feil skyldes en misoppfatning knyttet til fortegn. Videre ser det ut til at Frode har skjønt prinsippet for likningsløsning, dette på tross av at han tidligere i intervjuet ikke differensierte mellom en likning og et bokstavuttrykk. Da Frode tidligere i intervjuet viser at han har et operasjonelt syn på likhetstegnet kan det argumenteres for at informanten har det Lithner (2008) refererer til som algoritmisk tankegang. Kjennetegnene på algoritmisk tankegang er at strategivalget går ut på å hente frem en passende løsningsalgoritme fra hukommelsen. Denne antagelsen forsterkes ytterligere da han svarer «jeg vet ikke» på spørsmål om hvorfor han adderer og subtraherer med samme tall på begge sider. Hvilke aspekter ved mathematical proficiency som kommer til uttrykk gjennom intervju med Frode er vist i Tabell 9.

Tabell 9: Aspekter ved mathematical proficiency type c - tradisjonell oppgave

Aspekter ved strategien	Begrepsforståelse	Prosedyrekunnskap	Fleksibel tenkning	Annet*
Likhet		Frode		
Negative tall				Frode

*besvarelsene der jeg på bakgrunn av spørsmålene alene ikke fikk nok informasjon til å si noe om informantens forståelse.

5.2.2 Utforskende oppgave

Den utforskende oppgaven gikk ut på at elevene skulle se på likningen $y = x + 5$ og fortelle hva de kunne si om x i forhold til y. Besvarelsene fra intervjuet er plassert under tre kategorier utarbeidet av (Blomhøj, 2016). Disse besvarelsene analyseres med hensyn til fleksibel tenkning og strategisk kompetanse i valg av løsningsstrategi, samt hvilken form av forståelse informantene utviser for variabler og likhet.

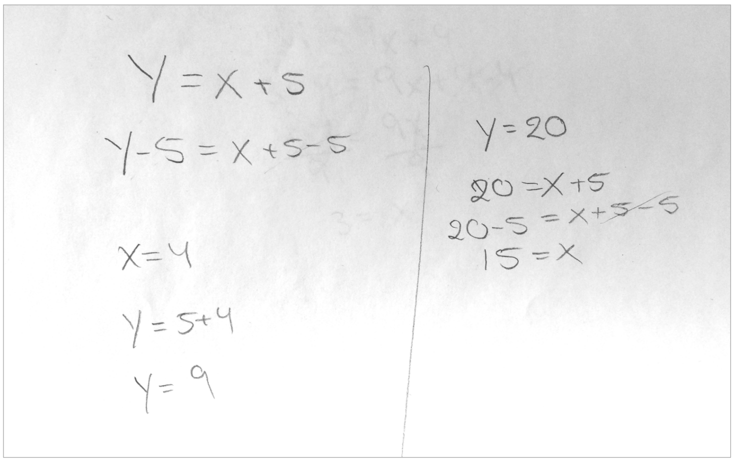
Type a) Muntlige svar x er (5) mindre enn y.

Denne kategorien omfatter fire besvarelser som alle inneholder den matematisk opplagte løsningen på oppgaven. Blant de fire besvarelsene kom det frem tre ulike aspekter ved elevenes tenking.

I. David og Emil: «y er summen av $x + 5$, det vil si x er 5 mindre enn y». Begge informantene leser først av likningen, deretter svarer de på oppgaven. Det kommer ikke frem av samtalen om informantene anser x og y som variabler eller faste ukjente tall. Ved spørsmål om de kunne forklare hvordan de kom frem til svaret svarer begge informantene «det står her» og peker på likningen. Denne oppgaven skapte ikke en kognitiv konflikt hos informantene og de fikk derfor ikke anledning til å vise fleksibel tenkning gjennom denne oppgaveløsningen.

II. Bente: «x er mindre enn y. x er 5 mindre enn y. Her kan x være ganske mye, fordi y endres etter verdien til x». Besvarelsen tyder på at Bente først leser mening inn i likningen og konstaterer at x er mindre enn y. I andre omgang konstaterer hun at x må være 5 mindre enn y. Bente er den eneste som uoppfordret utdyper hva x og y kan representere, og av svaret kommer det frem at hun anser x og y som variabler. Uten å bruke begrepene uavhengig og – avhengig variabel viser hun at hun skjønner hvordan de ulike variablene påvirker hverandre.

III. Grete: «Kan si at x er det samme som y – 5». Denne uttalelsen kom i sammenheng med at hun forsøkte å løse oppgaven på samme måte som den tradisjonelle. Etter hun hadde snudd om på likningen slik at x sto alene sa hun: «x er mindre enn y». Ved spørsmål om hun kan forklare hvordan hun tenker setter informanten inn ulike verdier for x og y, illustrasjon av løsningen er vist i figur 4.



Figur 5: Besvarelse oppgave 2, Grete

Grete viser gjennom denne oppgaveløsningen fleksibilitet i møte med vanskelige oppgaver. Hun forsøker først å løse oppgaven på samme måte som den tradisjonelle, når hun oppdaget at denne strategien ikke førte til en konkret verdi formulerte hun svaret sitt muntlig. For å begrunne svaret sitt satte hun inn ulike verdier av x og y for å bevise at y alltid vil ha høyest verdi. Grete løser på denne måten en ukjent oppgave ved hjelp av kjente løsningsstrategier, hun begrunner og evaluerer også sin egen løsning og viser derfor fleksibel tenkning. Hun viser også gjennom sin utregning at hun skjønner at verdien av y vil påvirkes av verdien til x. Hennes skriftlige besvarelse viser at hun behandler x og y som variabler og ikke ukjente.

Tabell 10 og 11 viser til de ulike aspektene av *mathematical proficiency* som kom til uttrykk under type a - utforskende oppgave.

Tabell 10: Begrepsforståelse, strategisk kompetanse og fleksibel tenkning type a - utforskende oppgave

	Strategisk kompetanse	**Fleksibel tenkning**	**Annet***
Valg av løsningsstrategi	Bente, David, Emil og Grete	Grete	

*besvarelsene der jeg på bakgrunn av spørsmålene alene ikke fikk nok informasjon til å si noe om informantens forståelse.

Tabell 11: Begrepsforståelse og prosedyrekunnskap av variabler og likhet, type a - utforskende oppgave

	Begrepsforståelse	**Prosedyrekunnskap**	**Annet***
Variabler	Bente, Grete		David, Emil
Likhet	Bente, David, Emil og Grete		

Type b) Besvarelser som tolker likningen, uten å svare på spørsmålet. Denne kategorien inneholder Ada og Christian sine besvarelser. Disse besvarelsene skiller seg fra de andre da begge informantene gjorde det tydelig, gjennom verbale utsagn eller ved å skyve oppgaven vekk, at de ikke ønsket å arbeide mer med oppgaven utover de svarene som presenteres nedenfor.

IV. Ada: «Begge er variabler, men de har ikke samme verdi».

Denne besvarelsen viser at informanten gjør en fortolkning av likningen i den forstand at hun beskriver de ukjente mengdene. Det kommer frem at Ada anser x og y som variabler av ulik verdi, noe jeg tolker til at likningen gir en viss mening for informanten. Hun skjønner at variablene har ulik verdi og viser derfor forståelse for likhetstegnets mening. Derimot er det tydelig at informanten ikke klarer å løse oppgaven korrekt, og hun anvender ikke den kunnskapen hun har om variabler og likhet til å løse oppgaven. Dette kan være en indikasjon på manglende begrepsforståelse og strategisk kompetanse. Siden intervjusituasjonen med denne informanten stopper her, har jeg på bakgrunn av dette svaret alene ingen anledning for å si om hun har prosedyrekunnskap eller begrepsforståelse av variabler.

V. Christian: «Alt jeg vet til nå er at $y - 5 = x$. Jeg klarer ikke å finne x, blir forvirret av denne oppgaven».

Christian forsøker å løse likningen på samme måte som den tradisjonelle oppgaven, ved å snu om på likningen slik at x står alene. Da denne fremgangsmåten ikke førte frem gav informanten opp. Christian anvender konseptet om likhet når han snur om på likningen, men han klarer ikke knytte denne kunnskapen til variabler. Dette er et av kjennetegnene på prosedyrekunnskap (Kilpatrick et al., 2001). Christian uttrykker også at han blir forvirret av oppgaven, noe som kan bunne i den utradisjonelle oppgaveformuleringen. Han klarer ikke se på oppgaven fra en ny vinkel, og viser derfor ikke strategisk kompetanse gjennom denne oppgaven.

Felles for disse besvarelsene er at begge informantene er fiksert i oppgaveløsningen, da de ikke klarer å endre strategi (Haylock, 1997). Ada og Christian sine forståelser er illustrert i Tabell 12 og Tabell 13.

Type c) Besvarelser som verken tolker likningen eller svarer på spørsmålet.

Denne kategorien inneholder kun én besvarelse som viser at informanten ikke klarte å uttrykke en løsning på oppgaven.

VI. Frode: «x er.. huff dette er vanskelig. Jeg ville bare satt to streker under svaret og gått videre».

Denne besvarelsen, og besvarelsene av type b, viser at det er vanskelig å forstå likningen som en størrelsesrelasjon når både høyre og venstre side i likningen varierer. Å se dette krever begrepsforståelse både for variabler og likhet, informantene må også skjønne at symbolet x ikke lengre referer til en spesifikk verdi slik som den tradisjonelle oppgaven. At Ada, Christian og Frode ikke klarer å bruke kunnskapen de har om likhet og variabler til å løse denne oppgaven tyder på at de mangler begrepsforståelse for disse aspektene ved likninger.

Den undersøkende oppgaven setter i tillegg større krav til strategisk kompetanse enn den tradisjonelle oppgaven. Dette fordi informantene i undervisningen ikke har lært en algoritme eller en prosedyre for å løse en slik oppgave. For å løse denne oppgaven må informantene forstå at oppgaven ikke ber om en spesifikk verdi, men å angi størrelsesrelasjonen som en språklig formulering. Dette er kognitivt utfordrende for mange.

Tabell 12 og Tabell 13 illustrer hvordan aspektene ved *mathematical proficiency* kommer til utrykk gjennom oppgaveløsningen til informantene under type b og c.

Tabell 12: Begrepsforståelse, strategisk kompetanse og fleksibel tenkning type b og c - utforskende oppgave

	Strategisk kompetanse	Fleksibel tenkning	Annet*
Valg av løsningsstrategi			Ada, Christian, Frode

*besvarelsene der jeg på bakgrunn av spørsmålene alene ikke fikk nok informasjon til å si noe om informantens forståelse.

Tabell 13: Begrepsforståelse og prosedyrekunnskap av variabler og likhet, type b og c - utforskende oppgave

	Begrepsforståelse	Prosedyrekunnskap	Annet*
Variabler			Ada, Christian, Frode
Likhet		Christian	Ada, Frode

*besvarelsene der jeg på bakgrunn av spørsmålene alene ikke fikk nok informasjon til å si noe om informantens forståelse.

6 Resultat

Overordnet er analysen av intervjuene en dokumentasjon på at elevene ikke nødvendigvis har en forståelse av de matematiske begrepene de tar i bruk som er i overenstemmelse med begrepenes matematiske betydning. Det er liten sammenheng mellom det å bruke begreper for å forklare et fenomen og det å faktisk forstå begrepene. Et eksempel på dette er at kun én av tre informanter i kategori 1: *Besvarelser som tar høyde for likhet, samt ukjente eller variabler* viste begrepsforståelse for variabler og ukjente i en likning. Samtlige av informantene under kategori 1 klarte å løse den tradisjonelle oppgaven korrekt, men når det kom til den utforskende oppgaven var det kun én som klarte løse denne.

Under kategori 2: *Besvarelser som kun tar høyde for likhet* klarte derimot begge informantene å løse både den tradisjonelle og den utforskende oppgaven korrekt. Selv om disse informantene ikke anså variabler som et kjennemerke på likninger klarte de å anvende kunnskapen om begrepene for å løse en utforskende oppgave.

Kategori 3: *Besvarelser som ikke skiller mellom likninger og bokstavuttrykk* omfatter informantene som ikke skiller mellom likninger og bokstavuttrykk og er derfor den kategorien som representerer lavest forståelse. Det er derfor litt overraskende at Grete havnet i denne kategorien da hun er en av de som viste strategisk kompetanse og fleksibilitet ved løsning av den utforskende oppgaven. Hun løste også den tradisjonelle oppgaven ved å utføre samme operasjon på begge sider av likhetstegnet, og forklarer godt hvorfor hun utfører de ulike stegene. Forskjellen mellom besvarelsene innad i kategori 3 er så store når det kommer til forståelse av likhet og variabler at jeg anser det som en mulighet at Gretes første besvarelse kan skyldes nervøsitet eller usikkerhet knyttet til intervjusituasjonen. Når dette er sakt oppfattet jeg ikke Grete som synlig nervøs i intervjusituasjonen.

For å få oversikt over hvordan de ulike informantene innen hver kategori løste de matematiske oppgavene har jeg satt opp en tabell som illustrerer sammenhengen mellom kategori og resultat på de matematiske oppgavene. Denne sammenhengen er illustrert i Tabell 14.

Tabell 14: Sammenheng mellom kategori og besvarelser på de matematiske oppgavene

	Kategori 1: *Besvarelser som tar høyde for likhet, samt variabler eller ukjente*	**Kategori 2:** *Besvarelser som kun tar høyde for likhet.*	**Kategori 3:** *Besvarelser som ikke skiller mellom likninger og bokstavuttrykk*
Oppgave 1			
Type a) Samme på begge sider, korrekt svar	Christian og Bente	David og Emil	Grete
Type b) Flytt og bytt, korrekt svar	Ada		
Type c) Samme på begge sider, galt svar			Frode
Oppgave 2			
Type a) Muntlige svar x er (5) mindre enn y	Bente	David og Emil	Grete
Type b) Besvarelser som tolker likningen, uten å svare på spørsmålet	Ada og Christian		
Type c) Besvarelser som verken tolker likningen eller svarer på spørsmålet			Frode

Av denne tabellen fremkommer det ingen tydelig sammenheng mellom kategori og korrekt løsning på de matematiske oppgavene. Det fremkommer derimot fra analysen en tydelig sammenheng mellom de som ikke klarte å løse den utforskende oppgaven, og deres forståelse av variabler i likninger.

Av Tabell 14 fremkommer det at de tre informantene som ikke klarte løse oppgave 2 (type b og c) befant seg i kategori 1 og 3. Besvarelsene tilhører Ada, Christian og Frode og felles for disse informantene er at de under intervjuet ikke utviste begrepsforståelse for variabler. For å illustrere denne sammenhengen utarbeidet jeg tre kategorier som representerer de ulike forståelsene av variabelbegrepet som fremkommer i datamaterialet:

1. De som skiller mellom variabler og ukjente (begrepsforståelse).
2. De som mener variabler kan være hva som helst.
3. De som ikke skiller mellom variabler og ukjente.

Tabell 15 viser sammenhengen mellom de ulike forståelsene av variabler og de som ikke klarte å løse oppgave 2. Christian sin besvarelse faller under to kategorier, jeg har derfor valgt å skrive han opp to ganger.

Tabell 15: Forståelse av variabler, kategori og galt resultat på utforskende oppgave

Forståelse av variabler	**Kategori 1: klarte ikke svare på oppg.2**	**Kategori 2: klarte ikke svare på oppg. 2**	**Kategori 3: klarte ikke svare på oppg. 2**
1. Begrepsforståelse- Skiller mellom ukjent og variabel			
2. Variabel kan være hva som helst	Christian		
3. Skiller ikke mellom ukjent og variabel	Ada og Christian		Frode

Tabellen viser at verken Ada, Christian eller Frode skiller mellom en ukjent og en variabel i likninger. Felles for disse besvarelsene er at de ikke utviser begrepsforståelse for likhetstegnets mening eller variabler gjennom intervjuet. Et annet likhetstrekk mellom Ada, Christian og Frode er de ikke utviser tegn til strategisk kompetanse gjennom arbeidet med den utforskende oppgaven.

Ser en på informantene som klarte å løse den utforskende oppgaven er et fellestrekk blant disse at de gjennom intervjuet har vist begrepsforståelse for prinsippet om likhet og variabler i sine besvarelser. Den eneste som skiller seg ut blant de som løste oppgave 2 korrekt er Emil. Emil klarer å løse både den tradisjonelle og den utforskende oppgaven korrekt, men han utyper ikke sine svar og det er derfor vanskelig å si noe om hans forståelse.

6.1 Hovedfunn

Ser en på alle intervjuene som en helhet viser resultatene fra analysen at informantene finner det vanskelig å skille mellom variabler og ukjente. De som ikke skiller mellom når variabelen har en fast verdi i likningen, og når variabelen viser til et element som varierer, utviser heller ikke begrepsforståelse for likhetstegnets betydning. Informantene unngår også å håndtere negative tall uten at dette ser ut til å være et bevisst valg.

Fellestrekk blant de som ikke klarte å løse oppgave 2 er også en manglende strategisk kompetanse.

Analysen av spørsmålene viser at 5 av 7 informanter ikke har prosedyrekunnskap eller begrepsforståelse for variabler og ukjente. Samlet resultat fra analysen av spørsmålene er illustrert i Tabell 16.

Tabell 16: Samlet resultat fra spørsmålene

	Begrepsforståelse	**Prosedyrekunnskap**	**Annet***
Likhet	Bente, Christian, David og Emil	Ada, Frode	
Ukjent	Bente og David		Ada, Christian, Emil, Grete og Frode
Variabel	Bente og David	Ada	Christian, Emil, Grete og Frode

*besvarelsene der jeg på bakgrunn av spørsmålene alene ikke fikk nok informasjon til å si noe om informantens forståelse

Analysen av oppgave 1, den tradisjonelle oppgaven, viser at 6 av 7 løste likningen korrekt. Fra informantenes besvarelser kan en se at 6 av 7 utviste både prosedyrekunnskap og begrepsforståelse for stegene i prosedyren, med respekt til likhet. Derimot viste bare 2 av 7 informanter begrepsforståelse for stegene i prosedyren med respekt til negative tall. Av denne oppgaveløsningen fremkom det også at alle informantene behandlet x som en ukjent. Samlet resultat fra den tradisjonelle oppgaven er illustrert i Tabell 17.

Tabell 17: Samlet resultat fra oppgave 1

Aspekter ved strategien	**Begrepsforståelse**	**Prosedyrekunnskap**	**Fleksibel tenkning**	**Annet***
Likhet	Bente, Christian, David, Emil og Grete	Ada, Bente, Christian, David, Emil, Grete og Frode	Bente	
Negative tall	Bente og David	Ada, Christian, Emil og Grete		Frode

*besvarelsene der jeg på bakgrunn av spørsmålene alene ikke fikk nok informasjon til å si noe om informantens forståelse.

Analysen av oppgave 2, den utforskende oppgaven, viser at 3 av 7 informanter ikke får til oppgaven. Fellestrekk ved disse informanten er at de ikke viser begrepsforståelse for variabler, og at de ikke utviser strategisk kompetanse i oppgaveløsningen.

Tabell 18: Samlet resultat strategisk kompetanse og fleksibel tenkning, oppgave 2

	Strategisk kompetanse	**Fleksibel tenkning**	**Annet***
Valg av løsningsstrategi	Bente, David, Emil og Grete	Grete	Ada, Christian og Frode

*besvarelsene der jeg på bakgrunn av spørsmålene alene ikke fikk nok informasjon til å si noe om informantens forståelse.

Tabell 19: Samlet resultat begrepsforståelse og prosedyrekunnskap, oppgave 2

	Begrepsforståelse	**Prosedyrekunnskap**	**Annet***
Variabler	Bente, Grete		Ada, Christian, David, Emil og Frode
Likhet	Bente, David, Emil og Grete	Christian	Ada, Frode

*besvarelsene der jeg på bakgrunn av spørsmålene alene ikke fikk nok informasjon til å si noe om informantens forståelse.

Et resultat som er gjennomgående fra del 1 av intervjuet er at informantene har problemer med å utvise forståelse av variabler.

7 Diskusjon

I dette kapittelet vil de mest sentrale funnene fra intervjuene diskuteres med utgangspunkt i det teoretiske rammeverket, presentert i kapittel 2, og eksisterende forskning på området. Det er viktig å understreke at hensikten med denne studien er å avdekke fellestrekk ved elevers forståelse, ikke årsaker for disse. På bakgrunn av funnene i spørsmålene vil det første delkapittelet i diskusjonen omhandle variabelbegrepet. Videre vil jeg diskutere de ulike aspektene ved forståelse som fremkommer i den tradisjonelle og den utforskende oppgaven separat. Avslutningsvis vil jeg diskutere begrepsforståelse og prosedyrekunnskap, og strategisk kompetanse og fleksibel tenkning på bakgrunn av resultatene fra analysen.

7.1 Variabelbegrepet

Analysen av datamaterialet viser at det blant informantene residerer tre ulike forståelser for variabelbegrepet 1) de som skiller mellom en ukjent og variabel, 2) de som mener variabler kan være hva som helst og 3) de som ikke skiller mellom en ukjent og variabel.

Jeg har lyst å trekke frem gruppe 2, de som mener variabler kan være hva som helst. Denne misoppfatningen går igjen hos tre av informantene i studien og kan finnes igjen hos elever helt opp på universitetsnivå. En studie gjort av Rosnick (1981) ved Universitetet i Massachusetts viser at første års ingeniør og – matematikkstudenter misforstår bruken av bokstaver i likninger. Studentene i denne undersøkelsen ble gitt likningen $S = 6P$ sammen med teksten «det er seks ganger så mange professorer som studenter». Det viste seg at over 40% av de 152 studentene som deltok leser likningen som «en student for hver sjette professor» i stedet for det korrekte «antall studenter er lik seks ganger antallet professorer» (Rosnick, 1981, s. 419). Studien viste at studenter, helt opp på universitetsnivå, har en tendens til å anse bokstaver i ligninger som etiketter som refererer til konkrete enheter. For eksempel «professorer» over det mer abstrakte «antall professorer». Dette resultat går igjen hos de tre informantene som i min analyse er plassert under kategorien 2. Christian refererer til at x kan være biler, båter eller penger, og ikke de mer abstrakte størrelsene antall biler, antall båter og pris. Grete beskriver at x kan være en fotball eller en volleyball, og Emil sier at en variabel kan være hva som helst. Blant de tre elevene som hadde denne misoppfatningen var det kun Christian som ikke klarte løse den utforskende oppgaven. På bakgrunn av min undersøkelse kan jeg derfor ikke si at oppfatningen av at «variabler kan være hva som helst» har negativ innvirkning på elevenes oppgaveløsning. Derimot kan denne oppfatningen medføre problemer om elevene skal lære seg matematikk på et høyere nivå, og det er derfor viktig å bli kvitt denne misoppfatningen.

Resultatene viser at informantene som ikke klarer å differensiere mellom en variabel og en ukjent ikke klarer å løse den utforskende oppgaven. Malisani og Spagnolo (2009) beskriver at de fleste elever mellom 13 og 15 år har lettere for å behandle bokstaver i likninger som ukjente, enn variabler. Forståelse for begrepet ukjent vil derimot ikke være tilstrekkelig for å tolke bokstavers rolle i lineære likninger med *to* variabler. Dette kom også til uttrykk i min undersøkelse da informantene som tidligere i intervjuet klarte å løse den tradisjonelle oppgaven, ikke fikk til den utforskende. Malisani og Spangolo (2009) forklarer at elever som håndterer variabler som ukjente ikke vil anse bokstavene i likningen som kontinuerlige variabler. Dette vil være spesielt synlig når vanskelighetsgraden på oppgaven øker og løsningen ikke kan finnes ved hjelp av algoritmer, men defineres gjennom tolkning av symboler.

Elevene i utvalget benytter læreverket Faktor og begrepene variabel og ukjent defineres i deres grunnbok. Begrepet variabel defineres kun under delkapittelet bokstavuttrykk hvor det står følgende:

> *Uttrykk som inneholder bokstaver kaller vi for bokstavuttrykk. Bokstavene står da i stedet for tall. Hver bokstav kaller vi en variabel. En variabel er noe som varierer, det betyr den kan ha ulik verdi.* (Hjardar & Pedersen, 2014a, s. 38)

Læreverket sier her at bokstaver i matematikk kalles variabler, settes bokstaver sammen med andre tall kalles det et bokstavuttrykk.

Det er vanlig at læreverkene bruker begrepet ukjent for bokstaver som opptrer i lineære likninger, dette gjør også Faktor. Det nærmeste jeg finner en definisjon av begrepet ukjent er: «vi bruker ofte x for den ukjente i en likning, men vi kan også bruke andre bokstaver, som for eksempel a, t eller y» (Hjardar & Pedersen, 2014a, s. 47). Det som ikke fremkommer her er at den ukjente i en likning er et fiksert tall og ikke elementer i en mengde som kan variere. Læreverket visker ut skille mellom begrepene ytterligere med å skrive: «Vi kan løse en likning ved å addere, subtrahere, multiplisere eller dividere med det samme tallet eller bokstavuttrykket på begge sider av likhetstegnet» (Hjardar & Pedersen, 2014a, s. 51). Bokstavuttrykk er tidligere definert til å være utrykk som inneholder variabler, ved å skrive denne «regelen» sier læreboken indirekte at x i en likning kan holde flere ulike verdier. At læreverket er såpass utydelig kan forklare informantenes forvirring ved spørsmål om disse begrepene.

7.2 Tradisjonell oppgave

Analysen av den tradisjonelle oppgaven viser at 6 av 7 informanter løste likningen korrekt. Av disse seks benyttet én metoden flytt og bytt og de fem andre utførte samme operasjon på begge sider av likhetstegnet.

Av de 6 som fikk korrekt svar på likningen viser alle begrepsforståelse for prinsippet om likhet. Deres svar knyttet til likhetstegnets betydning faller alle innenfor det Knuth et al. (2006) definerer som å ha begrepsforståelse for symbolets mening. Bare 2 av disse 6 informantene viste begrepsforståelse for negative tall i likninger.

Frode var den eneste som ikke endte opp med korrekt løsning. Han fulgte samme algoritme som de andre, men glemte å ta hensyn til negativt fortegn. Som beskrevet i analysen kapittel 5.2.1 er det vanskelig å si om dette skyldes en manglende forståelse eller bare en hastig feil. Vlassis (2002) har forsket på hvordan elever løser likninger med en ukjent på hver side av likhetstegnet. Resultatet fra undersøkelsen viser to hovedtyper av feil elevene gjør når likningen inneholder negative tall.

1. Overser negative fortegn
2. Klarer ikke isolere x når det er negativt fortegn foran koeffisienten

Sammenlikner en Vlassis resultater med min analyse, vil Frodes besvarelse kunne plasseres under type 1 overser negative fortegn. Booth & Davenport (2013) beskriver at en årsak til at elever overser negative fortegn er at de konkluderer feilaktig og tror at negative tegn kun refererer til subtraksjonsoperasjonen. Da de andre informantene ungikk å håndtere negative tall kan jeg ikke si noe utover at de har lært en algoritme for å unngå problemet.

En feil det er forventet at elever gjør i møte med negative tall i likninger er å subtrahere med et negativt uttrykk for å kansellere et annet negativt uttrykk, slik:

$$4 - x - x = 20 - x$$

I min analyse kapitel 5.2.1 kan en se at Bente utførte nøyaktig denne feilen, men raskt korrigerte seg selv. Bortsett fra dette tilfellet var det ingen informanter i min undersøkelse som gjorde dette. Vlassis (2002) understreker at negative uttrykk er med å abstrahere likningen. Dette begrunnes ved at det ikke lengre er mulig for eleven å referere tilbake til en konkret modell fra aritmetikken. I en likning bestående av kun positive tall: $4 + x = 20$ kan eleven løse likningen ved å tenke: «Hva må legges til 4 for å få 20». Ved tilstedeværelse av negative uttrykk kan det oppleves som vanskelig å gi likningen en konkret mening. Utvidelsen av det numeriske domenet, fra naturlige tall til heltall er dermed et avgjørende element for å utvikle kompetanse gjennom oppgaveløsning.

7.3 Utforskende oppgave

Den utforskende oppgaven er hentet fra Blomhøj (2016) og resultater fra analysen viste at bevarelsene kunne plasseres under 3 av 4 kategorier utarbeidet i tilknytning til Blomhøj sin undersøkelse:

- Type a): Muntlig svar: x er (5) mindre enn y. (fire besvarelser)
- Type b): Besvarelser som tolker likningen, uten å svare på spørsmålet. (to besvarelser)
- Type c): Besvarelser som verken tolker likningen eller svarer på spørsmålet. (en besvarelse)

Fire av informantene klarer å lese den matematisk korrekte mening inn i likningen, og beskrive sammenhengen mellom de to variablene. Dette på tross av at de ikke har kjennskap til denne type oppgave fra undervisningen. Blant de fire besvarelsene under type a) kommer det frem at Bente og Grete anser x og y som avhengige variabler.

De to siste kategoriene type b) og c) viser at det for totalt tre elever var problematisk å svare på oppgaven. Felles for disse elevene er at de utviste fiksering i oppgaveløsningen. Haylock (1997) beskriver at en av årsakene til at elever ikke får til å løse ukjente oppgaven er at de ikke klarer å bryte ut av sitt eget tankemønster, og dermed mangler fleksibilitet. Resultatene viser at informantene under type b) og c) ikke viste tegn til fleksibilitet under oppgaveløsningen og de utviser heller ikke begrepsforståelse for variabler.

Som beskrevet i kapittel 3.1.3 hadde ingen av informantene som ble intervjuet blitt presentert for funksjoner eller grafer på skolen, og som forventet var det ingen i min undersøkelse som anså likningen som et funksjonsuttrykk. Et interessant aspekt ved resultatene er at ingen elever i min undersøkelse falt inn under den 4. kategorien til Blomhøj (2016): «*Besvarelser, der angiver at x er 5 større end y*» (s.16). Resultatene fra Blomhøj sin artikkel viser at omkring 30% av besvarelsene i hans undersøkelse kunne plasseres under denne kategorien. En av årsakene til at denne typen av besvarelser ikke finnes igjen i min undersøkelse kan bunne i ulik utvalgsstørrelse, og mitt kriterium til høy måloppnåelse. Likevel hadde det vært interessant å undersøke om det blant norske elever, som har hatt undervisning om funksjoner, vil forekomme besvarelser som kan plasseres under kategori 4.

Blomhøj (2016) viser til at en mulig forklaring på hvorfor elevene mener x er større enn y kan skyldes at de anser likningen som maskin som endrer tallene som puttes inn. En hypotese er at analogien mellom en funksjon som en maskin (som omgjør x– verdiene til y–verdier) for noen elever gir opphav til en feilaktig tolkning av likninger. Denne antagelsen forsterkes da informantene i min undersøkelse, uten formell undervisning om funksjoner, ikke tolket likningen på denne måten.

7.4 Begrepsforståelse og prosedyrekunnskap

Resultatene fra de matematiske oppgavene viser at 6 av 7 informanter klarte å løse den tradisjonelle oppgaven, mens bare 4 av 7 klarte å løse den utforskende oppgaven. Den utforskende oppgaven utfordrer, i større grad en den tradisjonelle, elevenes begrepsforståelse og strategiske kompetanse. Det er derfor ikke overraskende at færre klarte å løse denne oppgaven. Samlet viser resultatene at det er vanskelig for informantene å løse oppgaver som bryter med det tradisjonelle mønsteret om de mangler begrepsforståelse.

Hva elever anser som viktig å forstå i matematematikkfaget gjenspeiler hva som testes i skolen og på eksamener. Schoenfeld (2007c) fremholder at eksamen i hovedsak utformes for å måle elevenes kompetanse, og siden prosedyrekunnskap er lettest å teste blir denne type oppgaver vektlagt i størst grad. Lærere ønsker å forberede elevene best mulig på eksamenssituasjonen og legger derfor opp undervisningen etter hva de anser som viktig å kunne med tanke på eksamen. Hva og hvordan undervisningen legges opp vil igjen påvirke elevens forståelse av hva som er viktig matematisk kompetanse. Forståelse og problemløsning får dermed ikke den plassen skolesektoren (lærere, rektorer, matematikere) gjerne ønsker. En analyse av tidligere sentralgitte eksamensoppgaver i Norge konkluder med det samme:

Kunnskapsdepartementet vektlegger prosedyrekunnskap over begrepsforståelse (Rossnes, 2015).

En konsekvens av dette er fenomenet (Schoenfeld 2007c, s 12) kaller: *What You Test Is What You Get*. Med andre ord: Om eksamener tester elevens prosedyrekunnskap vil lærerne i stor grad legge opp undervisning med bakgrunn i dette, og begrepsforståelse får dermed et mindre fokus. Dette samsvarer med det Blomhøj (2016) beskriver som en av konsekvensene av den didaktiske kontrakt. Desto mer presset en lærer føler seg til å følge opp sin del av den didaktiske kontrakt, desto større vil fokuset være på å hjelpe elever med å løse oppgaver som samsvarer med det som kan forventes å få på prøver og eksamener. Et stort fokus på å lære elever å løse oppgaver som forventes å komme på eksamen kan resultere i det Schoenfelt (2007c) refererer til som *illusion of competence*. Kompetanseillusjon oppstår når resultater fra prøver, som ofte kun utfordrer elevenes prosedyrekunnskap blir det eneste referansepunkt for elevenes kompetanse. Eleven kan på en prøve få en karakter som indikerer forståelse og evne til å anvende kunnskap, mens kompetansen i realiteten er begrenset til innøvde metoder og reproduksjon. Elevene i min undersøkelse er valgt ut basert på faglærerens subjektive vurdering av elevens kompetansenivå, og som resultatene viser løste en større andel av informanten den tradisjonelle oppgaven korrekt kontra den utforskende. At en stor andel av informantene ikke klarte den utforskende oppgaven kan være et resultat av kompetanseillusjon. [4]

7.5 Strategisk kompetanse og fleksibel tenkning

De matematiske oppgavene er utformet slik at elevene har mulighet til å utvise strategisk kompetanse og fleksibel tenkning i oppgaveløsningen. Å være strategisk kompetent innebærer fleksibilitet i valg av løsningsmetode. Da 5 av 7 informanter løste den tradisjonelle oppgaven korrekt på første forsøk gir denne oppgaven lite, eller ingen informasjon om de aktuelle informantenes *intra – task flexibility*[5]. Jeg opplevde ikke at det oppstod en kognitiv konflikt hos noen av informantene ved løsning av oppgave 1, og det er derfor vanskelig å identifisere tegn til fleksibilitet gjennom denne oppgaveløsningen. Jeg vil også understreke at det ikke

[4] Avsnitt hentet fra: Sagerup (2018a)

[5] *Intra – task flexibility*: å endre strategi innad i oppgaven

kan utelukkes at elevene er fleksible i oppgaveløsningen da alle 5 informantene valgte den strategien som var mest nyttig med hensikt på oppgavens utforming.

Bente er den eneste som gjennom arbeid med den tradisjonelle oppgaven eksplisitt viser tegn til fleksibilitet, da hun endrer prosedyre gjennom oppgaveløsningen. Hun bruker tre forsøk, og kommer frem til den korrekte løsningen ved å reflektere over hver operasjon hun utfører. Bente evaluerer svarene sine gjennom hele utregningen, og utviser derfor også fleksibel tenkning. Selv om Bente bruker tre forsøk holdt hun seg til strategien «samme operasjon på begge sider av likhetstegnet» og basert på denne oppgaven kan en derfor ikke si noe om informantens *intra – task flexibility.*

Den utforskende oppgaven er i større grad utformet slik at det ikke fremstår en åpenbar løsningsstrategi, og denne er dermed bedre egnet til å utfordre elevenes strategiske kompetanse. Siden den utforskende oppgaven ble løst sist er det først gjennom løsning av denne oppgaven det er mulig å si noe om informantenes *inter – task flexibility*[6]. Blant de fire informantene som svarte korrekt brukte Bente, David og Emil en annen strategi enn på den tradisjonelle oppgaven, og utviser med dette fleksibilitet på tvers av oppgaver. Grete er den eneste som benyttet flere strategier innad i sin oppgaveløsning. Hun forsøkte først å løse oppgaven ved å benytte strategien «samme operasjon på begge sider av likhetstegnet». Når denne strategien ikke førte frem, leste hun oppgaven på nytt og formulerte svaret sitt muntlig. Grete er dermed den eneste av informantene som utviser *intra – task flexibility*.

Elia et al. (2009) har i en studie undersøkt strategibruken til elever med høy måloppnåelse i møte med utforskende oppgaver. Resultater fra undersøkelsen viser at elever med *inter – task flexibility* i flere tilfeller klarer å løse ukjente oppgaver, enn elever som holder seg til samme strategi. Av deres resultat fremkommer det også at elevene som utviser *intra – task flexibilitet* ikke lyktes i større grad enn elevene som holdt seg til én løsningsstrategi.

Resultatene fra Elia et al. (2009) sin undersøkelse samsvarer med min undersøkelse på noen områder. Et fellestrekk ved begge undersøkelsene er at alle elevene som klarte den utforskende oppgaven utviste *inter – task flexibility.* Dette resultatet reflekterer også oppgaveløsningen til de som ikke fikk til den utforskende oppgaven da de utviste fiksering. I

---

[6] *Inter – task flexibility*: å endre strategi på tvers av oppgaver

undersøkelsen til Elia et.al (2009) kom det også frem at elever som utviser *intra – task flexibility* ikke lykkes i større grad enn elevene som holder seg til én løsningsstrategi. Dette stemmer ikke overens med min undersøkelse, da Grete byttet strategi innad i oppgaven og kom frem til korrekt løsning.

En faktor det ikke tas høyde for i denne masteroppgaven, men som uten tvil vil ha innvirkning på elevenes oppgaveløsning er individuelle forskjeller knyttet til elevenes selvsikkerhet og trygghet. Det krever uomtvistelig fagligtrygghet og selvsikkerhet å tørre og teste ut en ny strategi når det opprinnelige strategivalget ikke fører frem, særlig når oppgaveløsningen finner sted i en intervjusituasjon.

8 Avslutning

Formålet med forskningen er å få et innblikk i hvilke oppfatninger elever med høy måloppnåelse har om likninger og hvordan disse oppfatningene påvirker deres arbeid med emnet. I denne studien har jeg svart på følgende forskningsspørsmål: *Hvilke aspekter ved lineære likninger er vanskelig for elever å forstå?*

Hovedfunnene fra denne undersøkelsen viser at det i tilknytning til likninger er vanskelig for elever å forstå:

- Variabelbegrepet
- Negative tall
- Likhet

Med bakgrunn undersøkelsens resultat burde elever utvikle en dypere forståelse for begrepet variabel. Mer spesifikt burde de være i stand til å skille mellom når en bokstav refererer til en spesifikk verdi og når en bokstav brukes som en variabel for å representere antall objekter. Studien viser at elever som har en klar oppfatning av forskjellen mellom en ukjent og en variabel har større sjanse for å løse oppgaver med ukjent formulering korrekt.

Utvidelsen av det numeriske domenet, fra naturlige tall til heltall er også et avgjørende aspekt for å utvikle kompetanse gjennom oppgaveløsning. Det er viktig at elevene skjønner hvordan de ulike stegene i den valgte prosedyren påvirker likningen med hensyn til negative tall. Lærer elevene seg algoritmer for å unngå å behandle negative tall, er det risiko for at elevene utvikler prosedyrekunnskap som ikke støttes opp av begrepsforståelse.

Av undervisningen burde det også fremkomme tydelig at prinsippet med en likning er at det skal være lik verdi på begge sider av likhetstegnet. For at elevene skal kunne utvikle en fullstendig kompetanse på dette område må de forstå hvordan likhet henger sammen med de andre aspektene nevnt over.

Resultatene fra denne undersøkelsen viser også at de informantene som var fleksibel i oppgaveløsningen i større grad lyktes med den utforskende oppgaven enn de andre. Basert på hovedfunnene vil jeg forslå noen grep som kan gjøres i undervisningen for å fremme elevenes forståelse, og bevissthet omkring betydningen av disse begrepene:

- Vektlegge relasjoner mellom ulike begreper og unngå «isolerte biter av kunnskap»
- Sammenlikne og kontrastere ulike løsningsstrategier til samme oppgave, og på den måten hjelpe elever å bli mer fleksible.
- Øve på muntlige ferdigheter slik at elevene får mulighet til å forbedre evnen til å forklare, resonnere og validere egne løsninger.

Resultater fra TIMMS 2015 viser at det brukes relativ lite tid å arbeide med kognitivt utfordrende oppgaver og problemstillinger i norske klasserom, individuell oppgaveløsning med oppgaver hentet fra læreverket tilegnes mest tid (Bergem et al., 2016). Denne trenden kan han en negativ innvirkning på elevenes begrepsforståelse, fleksibel tenkning og strategiske kompetanse. Dette fordi læreverkene har en tendens til å utarbeide oppgaver som i stor grad underbygger elevenes prosedyrekunnskap (Ref. kapittel 7.4). Om elevene ikke får mulighet til å arbeide med kognitivt utfordrerne oppgaver vil de i liten grad ha mulighet til å utvikle fleksibilitet og strategisk kompetanse.

I 2020 trer den nye lærerplanen i kraft i norske skoler, og våren 2018 vedtok Kunnskapsdepartementet kjerneelementer i alle fag. Kunnskapsdepartementet fastslår at den største endringen fra K06 er at elevene skal arbeide slik at de får en større forståelse for faget (KUD, 2018b). To av kjerneelementene i den nye læreplanen kan relateres direkte til min studie, disse er *utforsking og problemløsning* og *resonnering og argumentasjon*. Disse kjerneelementene setter andre krav til undervisningen enn K06 og viser til at eleven skal utvikle løsningsmetoder på ukjente problemer, samt forstå og begrunne både fremgangsmåter og løsninger. Utviklingen en ser i den nye læreplanen er i tråd med funnene i denne undersøkelsen, og ved implementering av kjerneelementet i undervisningen kan både begrepsforståelse, strategisk kompetanse og fleksibel tenkning kunne fremmes.

8.1 Videre forskning

Denne studien omhandler aspekter med likninger som er vanskelig for elever å forstå. En åpenbar implikasjon for videre forskning er hvordan undervisningen burde legges opp for å gi elevene forståelse for begrepene som oppleves vanskelig. Videre vil det også være spennende å undersøke hvordan norske elever som har hatt undervisning om funksjoner løser den utforskende oppgaven i denne studien.

Undersøkelsen min viser at de aspektene ved *mathematical proficiency* elevene mestrer i størst grad samsvarer med kompetansene Schoenfeld (2007c) og (Rossnes, 2015) hevder blir mest vektlagt i eksamensoppgaver. Den nye læreplanen som trer i kraft 2020 vektlegger i større grad enn K06 begrepsforståelse, det vil derfor være interessant å undersøke hvordan eksamensoppgavene påvirkes av den nye læreplanen.

Resultatene viser at halvparten av de som klarte å løse den utforskende oppgaven var fleksible i oppgaveløsningen. Fleksibilitet er et begrep som i litteraturen knyttes til kreativitet. Av denne grunn vil det også vært interessant å se om det er en sammenheng mellom elevenes oppgaveløsning og kreativitet, eventuelt hvordan det kan tilrettelegges for kreativitet i undervisningen.

Referanseliste

Alseth, B., Tangen, J. & Tofteberg, G. N. (2015). *Maksimum 10, Grunnbok*: Gyldendal Norsk forlag.

Attorps, I. & Tossavainen, T. (2009). Is there always truth in equation? I C. Winsløw (Red.), *Nordic Research in Mathematics Eduvation. Proceedings from NORMA08 in Copenhagen, April 21 - April 25, 2008.* (s. 143 - 149). Rotterdam: Sense Publishers.

Attride-Stirling, J. (2001). Tematic networks:an analytic tool for qualitative research. *Qualitative Research 1*, 385-405.

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag - Resultater og analyser fra TIMSS 2015*: Universitetsforlaget.

Bjørndal, C. R. (2015). *Det vurderende øyet*: Gyldendal norsk forlag.

Blomhøj, M. (2013). Hvad er undersøgende matematikundervisning? - og virker den? . I M. Andersen Whal & P. Weng (Red.), *Håndbog om matematik i grundskolen - læring, undervisning og vejledning* (s. 172 -188): Dansk Psykologiske Forlag.

Blomhøj, M. (2016). *Fagdidaktik i matematik*. Fredriksberg: Frydenlund.

Boaler, J. (1993). The Role of Contexts in the Mathematics Classroom: Do They Make Mathematics More "Real"? *For the Learning of Mathematics, 13*(2), 12-17. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/40248079

Booth, J. L. & Davenport, J. L. (2013). The role of problem representation and feature knowledge in algebraic equation-solving. *Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 415-423. 10.1016/j.jmathb.2013.04.003

Borowski, E. J. & Borwein, J. M. (1989). Dictionary of mathematics. . UK: Collins.

Botten, G. H. (2016). *Matematikk med mening - mening for alle*: Caspar Forlag.

Boyatzis, R. E. (1998). *Transforming qualitative information : thematic analysis and code development*. Thousand Oaks, Calif: Sage Publications.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101. 10.1191/1478088706qp063oa

Brekke, G. (2000). *Veiledning til algebra: F, H og J* Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Carraher, D. & Schilemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (bd. 1): Charlotte.

Carraher, D. & Schilemann, A. D. (2014). Early Algebra teaching and lerarning I*Enclopedia of Mathematics Education*: Springer Science Business Media

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 1-6. 10.1007/s10857-013-9234-7

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*: Abstrakt forlag.

Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work IF. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (bd. 1, s. 3-38). Charlotte.

Cohen, L., Morrison, K. & Manion, L. (2007). *Research methods in education* (6th ed. utg.). London: Routledge.

Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy felxibility in nonroutine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM, 41*(5), 605-618.

Goldin, G. A. (1997). Observing mathematical problem solving through task -based interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph 9*, 289-320. 10.2307/749946

Gray, S. S., Loud, J. B. & Sokolowski, C. (2007). Calculus Students Difficulties in Using Variables as Changing Quantities. *Electronic Proceedings for the Tenth Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education: Confrence on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1-15. Hentet fra http://scholarworks.merrimack.edu/mth_facpub/8

Grønmo, L. S., Bergem, O. K., Kjærnsli, M., Lie, S. & Turmo, A. (2004). *Hva i all verden har skjedd i realfagene? Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2003*. Oslo: Institutt for Lærerutdanning og Skoleutvikling. Universitetet i Oslo.

Haylock, D. (1997). Recognising mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM, 29*(3), 68-74. 10.1007/s11858-997-0002-y

Hjardar, E. & Pedersen, J. A. (2014a). *Fakor 9 Grunnbok*: Cappelen Damm.

Hjardar, E. & Pedersen, J. A. (2014b). *Faktor 8 Grunnbok*: Cappelen Damm.

Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y. & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 36*, 20-32.

Kieran, C. (1992). The learning an teaching of school algebra. I D. A. Grouws (Red.), *Hanbook of research on mathematics teaching and learning* (s. s. 390-419). New York: Macmillan.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, M. N. & Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*, 297-312.

Kunnskapsdepartementet. (2013). *Læreplanen i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Oslo: Utdanningsdirektoratet. Hentet fra http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf?lang=http://data.udir.no/kl06/nob

Kunnskapsdepartementet. (2015). *Generell del av læreplanen*. Utdanningsdirektoratet.

Kunnskapsdepartementet. (2016). *Matematikk- kjenneteikn på måloppnåing.*: Utdanningsdirektoratet. Hentet fra https://www.udir.no/globalassets/upload/vurdering/kjennetegn/matematikk_kjennetegn_bm.pdf

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Høring - læreplaner i matematikk*. Utdanningsdirektoratet. Hentet fra https://hoering.udir.no/Hoering/v2/343?notatId=686

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2 utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Lithner, J. (2006). A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning. *Department of Mathematics and Mathematical Statistics, Umeå Universitet*.

Lithner, J. (2008). A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276. 10.1007/s10649-007-9104-2.

Lyngnes, K. & Rismark, M. (2013). *Didaktisk arbeid*. Oslp: Gyldendal norsk forlag.

Maher, A. C. & Sigley, R. (2014). *Task-Based Interviews in Mathematics Education*: Dordrecht: Springer Netherlands.

Malisani, E. & Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: The role ot the «variable». *Educational Studies in Mathematics, 71*, 19-41. 10.1007/s10649-008-9157-x

Mason, J., Graham, A. & Wilder, S. J. (2011). *Å lære algebraisk tenkning*: Caspar forlag
Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet: En undervisningslære*. Bekkestua: NKI - forlaget
Mellin-Olsen, S. (1991). *Hvordan tenker lærere om matematikkundervisning*. Bergen: Bergen Lærerhøgskole.
Mellin-Olsen, S. (1996). Oppgavediskursen i matematikk. *Tangenten, 2*.
Merriam, S. B. (2014). *Qualitative Research: A Guide to Design and Impelemtation*. San Francisco: Jossey-Bass.
NESH. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humanoria, juss og teknologi*. Oslo Forskningsetiske komiteer. Hentet fra https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/60125_fek_retningslinjer_nesh_digital.pdf
Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult? : a study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency* (no. 154). Faculty of Educational Sciences, University of Oslo, Oslo.
Olsen, H. (2002). *Kvalitative kvaler : kvalitative metoder og danske kvalitative interviewundersøgelsers kvalitet*. København: Akademisk.
Rosnick, P. (1981). Some Misconceptions Concerning the Concept og Variable. *The Mathematics Teacher, 74*(6), 418-420. Hentet fra https://www.jstor.org/stable/27962524?seq=1&cid=pdf-reference#references_tab_contents
Rossnes, J. F. (2015). *Relasjonell og instrumentell forståelse etter Kunnskapsløftet* (Masteroppgave). Universitet i Oslo.
Ryan, G. W. & Bernard, H. R. (2000). Data management and analysis methods. . I N. K. Denzin & Y. S. Lincon (Red.), *Handbook of qualitative research* (Andre utg., s. 769-802): Sage.
Sagerup, S. (2018a). Elevers forståelse av likninger. *Upublisert semsteroppgave i PFF-3000 profesjonsfag år 4 i lektorutdanning for trinn 8-13. Tromsø, UIT - Norges arktiske universitet*.
Sagerup, S. (2018b). Lærerlogg. *Upublisert lærerlogg skrevet i forbindelse med praksis i emnet PED - 3001*.
Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Matehematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. I D. Grouws (Red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (A Project of the National Council of Teachers of Mathematics)* (s. 334-370). New York: MacMillan.
Schoenfeld, A. H. (2007a). What is mathematical proficiency and how it can be assessed? I *Assessing Mathematical Proficiency* (s. 57-73). New York Cambridge University Press.
Schoenfeld, A. H. (2007b). Method. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 69-107): NCTM.
Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding *Mathematics Teaching in the Middle School, 12 (2)* 89-95. Hentet fra http://ccsesa.org/wpcontent/uploads/2016/08/Relational-Understanding-and-Instrumental-Understanding.pdf
Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I O. Skovsmose & M. Blomhøj (Red.), *Kan det virkelig passe? - om matematiklæring* København: L&R Utdannelse.
Slovin, H. (1990). A study of the effect of an in-service course in teaching algebra through a problem-solving process. . *Paper presented at the research presession of the annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Salt Lake City, UT.*

Thwaites, G. N. (1982). Why do Childern find Algebra Difficult? *Mathematics in School, 11*(4), 16-17.

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables IB. Moses (Red.), *Algebraic Thinking, Grades K-12: Readings from NCTM´s School - Based Journals and Other Publications*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 341-359. 10.1023/a:1020229023965

Vlassis, J. (2004). Making Sense of the Minus Sign or Becoming Flexible in "Negativity". *Learning and Instruction, 14*(5), 469-484. 10.1016/j.learninstruc.2004.06.012

Wagner, S. (1983). What Are These Things Called Variables? *The Mathematics Teacher, 76, No.7*, S. 474-479. Hentet fra https://www.jstor.org/stable/27963648

Weisstein, E. (2019). Equation. I *Wolfram Mathworld Web*.http://mathworld.wolfram.com/Equation.html

Vedlegg 1 – Intervjuguide

Intervjuguide

Spørsmål 1

Hva er en likning?

> **Oppfølgning til spørsmål 1, a:**
>
> Hvordan vil du forklare hva en likning er?
>
> **Oppfølgning til spørsmål 1 b:**
>
> I likninger og matematiske oppgaver ser en ofte dette symbolet «=» vet du hva dette symbolet betyr?

Spørsmål 2:

De likningene vi har arbeidet med inneholder ofte én eller flere *x*-er, hva representerer *x* i en likning?

Spørsmål 3:

Hvordan vil du forklare hva en variabel er?

Oppgave 1

Løs likningen under

$$31 - 2x = 5x + 4 + 2x$$

Oppgave 2:

$$y = x + 5$$

Hva kan du si om *x* i forhold til *y*?

Vedlegg 2 – Informasjonsskriv og samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet *«Elevers forståelse av lineære likninger»*?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan elever arbeider og forstår lineære likninger. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med dette masterprosjektet er å undersøke hvordan elever arbeider med lineære likninger. For å belyse dette spørsmålet vil jeg intervjue seks 9. klassinger med antatt høy måloppnåelse i matematikk.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

UIT – Norges arktiske universitet /Institutt for lærerutdanning og pedagogikk og institutt for matematikk og statistikk

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å delta i prosjektet innebærer dette at du må delta på et intervju. Intervjuet vil finne sted på skolen og det vil ta ca. 30 minutter. Intervjuet vil i hovedsak gå ut på at du skal løse to matematiske oppgaver og du vil få spørsmål om dine tanker knyttet til oppgaveløsningen. Jeg vil være tilstede hele tiden å hjelpe om det trengs.

Samtalen mellom oss vil bli tatt opp med en lydopptaker, og løsningen på oppgavene samlet inn. Opplysningene om deg (navnet ditt) vil bli anonymisert i oppgaven.

Deltagelse i prosjektet innebærer også at jeg får vite dine tidligere karakterer i matematikkfaget.

Opplysningene om deg vil kun brukes til formålene det er fortalt om i dette skrivet og lydfilen vil bli oppbevart på en ekstern harddisk.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, ta kontakt med:

- Sunniva Sagerup tlf: 45440516 epost: ssa052@uit.no
- Institutt for lærerutdanning og pedagogikk ved Anne Birgitte Fyhn tlf*:* 77660243 epost: anne.fyhn@uit.no

Med vennlig hilsen Sunniva Sagerup og Anne Birgitte Fyhn

Samtykkeerklæring

Jeg ....har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *«Elevers forståelse av førsteordens likninger»* og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta på et intervju
- ☐ at mine skriftlige oppgavesvar kan brukes i prosjektet
- ☐ at lærer kan gi opplysninger om mine tidligere karakterer i matematikkfaget til prosjektet

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. *01.06.2019*

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

(Signert av foresatte, dato)

Vedlegg 3 – Godkjenning NSD

NSD NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Elevers forståelse av førsteordens likninger

Referansenummer

258753

Registrert

21.09.2018 av Sunniva Sagerup - ssa052@post.uit.no

Behandlingsansvarlig institusjon

UiT Norges arktiske universitet / Fakultet for humaniora, samfunnsvitenskap og lærerutdanning / Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Anne Birgitte Fyhn, anne.fyhn@uit.no, tlf: 77660243

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Sunniva Sagerup , ssa052@post.uit.no, tlf: 45440516

Prosjektperiode

15.10.2018 - 01.06.2019

Status

03.10.2018 - Vurdert

Vurdering (1)

03.10.2018 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD, den 03.10.18. Behandlingen kan starte.

MELD ENDRINGER
Dersom behandlingen av personopplysninger endrer seg, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. På våre nettsider informerer vi om hvilke endringer som må meldes. Vent på svar før endringer gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 01.06.19.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD finner at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:
- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
De registrerte vil ha følgende rettigheter i prosjektet: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20). Rettighetene etter art. 15-20 gjelder så lenge den registrerte er mulig å identifisere i datamaterialet.

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.
Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).
For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.