UiT
NORGES ARKTISKE UNIVERSITET

Institutt for lærerutdanning og pedagogikk - UiT

Bevisproduksjon i Ungdomsskolen

En kvalitativ studie av ungdomsskoleelevers bevisprosess i arbeid med generaliserte aritmetiske påstander.

—

Marianne Didriksen

Masteroppgave i Lærerutdanning 5.-10. trinn, mai 2018
LRU-3903 Matematikkdidaktikk

Sammendrag

I dette mastergradsprosjektet har jeg undersøkt hva som kjennetegner flinke ungdomsskoleelevers bevisprosess i arbeid med generaliserte aritmetiske påstander. Hensikten med prosjektet har vært å avdekke spesielle kjennetegn ved bevisprosessen, for å skaffe innsikt i ungdomsskoleelevers kjennskap til konseptet bevis. Bakgrunnen for prosjektet var et ønske om å aktualisere bevis i grunnskolen, for å styrke koblingen mellom skolematematisk praksis og matematikkens egenart.

Studien har en kvalitativ tilnærming, er motivert av et konstruktivistisk kunnskapssyn og bygger på prinsipper fra kognitiv psykologi. Med utgangspunkt i syv oppgavebaserte intervjuer, har jeg gjennom en induktiv tilnærming til datamaterialet, utviklet åtte kategorier som utgjør studiens funn. Kategoriene er: 1) setter inn tilfeldige tall; 2) undersøker en tallrekke; 3) uttrykker at sjekk av noen få tilfeller er utilstrekkelig; 4) forstår eksemplers begrensning; 5) forsøk på generell begrunnelse; 6) visuell begrunnelse; 7) begrunner ved hjelp av plassverdisystemet; og 8) algebraisk begrunnelse. Videre fant jeg at kategoriene passet til en foreslått utviklingsprogresjon i konseptet bevis, beskrevet av Knuth, Choppin og Bieda (2009) gjennom fire nivå (0-3). Kategori 1-2 ble plassert på nivå 1; kategori 3 på et mellomnivå 1.5; kategori 4-7 passet på nivå 2; og kategori 8 på nivå 3. Bare én av elevene kom til nivå 3, noe som ser ut til å ha sammenheng med begrenset kjennskap til bevis, og utfordringer med algebraiske representasjoner. Ingen av elevene i denne studien viste nivå 0.

Kategoriene detaljerer og nyanserer Knuth m.fl. (2009) sine fire nivå, ved at kategoriene viser at noen av nivåene til Knuth m.fl. (2009) har flere ulike og hierarkiske nivå. I tillegg er det innenfor hvert nivå en viss progresjon, som synliggjøres gjennom mine spesifikke kategorier, med tydelige karakteristikker. Funnene er gjeldene for mine data, og et naturlig neste steg er å undersøke om dette også gjelder for andre elever, større utvalg, og med andre typer bevisoppgaver.

Forord

Avhandlingen markerer slutten på en femårig Master i lærerutdanning 5.-10.trinn ved Universitetet i Tromsø, UiT – Norges arktiske Universitet. Det har vært fem innholdsrike år, som jeg vil se tilbake på med stor glede! Tusen takk til mine medstudenter som har bidratt til en fantastisk studietid.

Masterprosjektet har vært krevende, interessant og lærerikt. Det er med lettelse og stolthet jeg endelig har krysset mållinja. Jeg vil rette en spesiell takk til skolene og lærerne som ga meg mulighet til å gjennomføre prosjektet, og ikke minst til de flotte, entusiastiske elevene som deltok.

Videre vil jeg takke min veileder Ove Gunnar Drageset for enestående hjelp fra begynnelse til slutt.

Sist vil jeg takke min samboer, familie og venner som har støttet, motivert og heiet meg frem i prosessen. Takk til store, lille Milla som gjør hver eneste dag til en solskinnsdag – du hjelper meg stadig å sette livet i perspektiv.

Innholdsfortegnelse

Tabelliste

Figurliste

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for prosjektet

Gjennom høstens fordypning i matematikkdidaktikk var det mest tilsynelatende enkle, dog komplekse spørsmålet jeg ble stilt ovenfor: *hva er matematikk?* For mange vil nok matematikk kobles til undervisningsfaget, og dermed assosieres med aktiviteter slik de husker det fra klasserommet. Det viser seg imidlertid at skolematematikken ikke alltid reflekterer matematikk for det matematikk egentlig handler om. Boaler (2009) skriver at i mange klasserom er matematikkundervisningen fremstilt som et veldig begrenset emne. Hun forklarer at et vanlig scenario er at læreren demonstrerer en prosedyre som elevene skal gjenskape, om og om igjen. Dette er langt fra den praksisen som utøves av matematikere.

Schoenfeld (2009) skriver at i kjernen er matematikk meningsskaping. Forskjellige matematikere forklarer dette ulikt. Campbell og Zazkis (2002) hevder at matematikk handler om mønstre og forhold, mens Pólya (1957) fremmer matematikk som studien av sammenhenger, egenskaper og generalitet. Boaler (2009) mener at vi lærere må flytte fokus fra spørsmål om rett og galt, til spørsmål som involverer problemløsning, kreativitet og utforskning. På den måten vil undervisningen motivere til matematisk resonnering, og utvikle elevens evne til logisk tenkning. En slik tilnærming vil ifølge Boaler (2009) gjøre matematikken meningsfull, stimulere til undring og refleksjon, og føre til at flere elever lykkes i matematikk.

I valg av forskningsprosjekt var jeg derfor motivert til å undersøke hvordan vi som lærere kan gå frem for å skape situasjoner der elevene får mulighet til å utforske matematiske ideer, og forklare *hvorfor* ting er som de er. I denne sammenhengen belyser Ross (1998) et viktig aspekt ved matematikk når han sier at mens naturvitenskapen verifiserer gjennom observasjon, verifiseres matematikk gjennom logisk resonnering. Dette ledet meg til konseptet bevis. Videre hevder Waring (2000) at den viktigste hensikten med å undervise i bevis, er at når de første ideene om matematiske bevis blir introdusert til elevene, lærer de at matematiske utsagn kan, og når det er mulig, bli bevist eller forklart.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000) løfter frem ideen om at bevis bør være en del av elevers matematiske erfaring fra småskolen til videregående. Schifter (2009) undersøker mulighetene for, og aktualiteten av bevis for elever helt ned i 8-årsalderen. Hun belyser hvordan yngre barn utforsker og vurderer generelle sammenhenger i tallsystemet, og finner at selv yngre elever er i stand til å rettferdiggjøre generelle påstander. Videre hevder NCTM (2000) at elever i slutten av ungdomsskolen bør ha forståelse for, og kunne produsere matematiske bevis – fra hypoteser via logisk deduksjon til rimelige konklusjoner, og ikke minst bør elever verdsette verdien i slike argument. Likevel viser Lithner (2000) at elever har vanskeligheter i håndtering av matematiske bevis, og ifølge Harel og Sowder (1998) er ikke elever vant til å bruke bevis som en metode for å lære, forstå eller gi mening til matematikk.

NCTM (2000) skildrer at typisk for skolematematikken er at bevis først tas i bruk i emnet geometri, men at resonnering og bevis bør være en naturlig, pågående del av matematikkundervisningen uavhengig av emne og tema. I den norske læreplanen, kunnskapsløftet (Udir.no, 2013) brukes ikke begrepet bevis eksplisitt, men logiske resonnement nevnes som en del av matematikkfaget. I samsvar med NCTM (2000) sine beskrivelser, er utforming av logiske resonnement en del av kompetansemålene først etter 10.årstrinn i emnet geometri. Læreplanen formulerer likevel at elever både skriftlig og muntlig skal utvikle evne til å argumentere, resonnere, og vurdere gyldigheten av løsninger.

Med dette som bakteppe fant jeg det interessant å undersøke hva som skjer når elever på ungdomstrinnet blir bedt om å bevise matematiske påstander. Hvilken forståelse har de for konseptet bevis? Og hva kjennetegner bevisprosessen? Samtidig er det en del av prosjektets hensikt å aktualisere bevis i skolen, og vise at et nyansert perspektiv på bevis gjør det mulig å ta i bruk bevis på alle trinn.

Ettersom egenskaper ved tallsystemet er sentralt på alle nivå i skolematematikken, valgte jeg i likhet med Schifter (2009) å undersøke bevis i relasjon til generalisert aritmetikk. Dette valget var også inspirert av Carraher og Schliemann (2007) som i gjennomgang av tidligere forskning skriver at ungdomsskoleelever har utfordringer i algebra, og videre foreslår arbeid med generalisering i aritmetisk kontekst. I tillegg mener Campbell og Zazkis (2002) at utforskning av tallsystemet vil forsterke ideen om at matematikk i kjernen handler om mønstre og forhold.

En siste motivasjon for å undersøke hvordan elever forstår konseptet bevis er Schoenfeld (2009) sin beskrivelse av matematikkens egenart:

> "If problem solving is the heart of mathematics, then proof is its soul."
> (Schoenfeld, 2009, s. xiv)

1.2 Forskningsspørsmål

Med dette som utgangspunkt, stiller jeg følgende forskningsspørsmål:

Hva kjennetegner flinke ungdomsskoleelevers bevisprosess i arbeid med generaliserte aritmetiske påstander?

Forskningsspørsmålet rettes mot flinke elever, forstått som elever vurdert til karakteren 4 eller høyere i matematikk. Bakgrunnen for dette er at tidligere forskning på konseptet bevis viser at selv eldre elever ikke har mye kjennskap til bevis, og verken er vant til å bevise eller rettferdiggjøre matematiske prosesser (Dreyfus, 1999, s. 94). Det synes derfor ekstra interessant å undersøke en elevgruppe som er vurdert til å prestere høyt i faget.

1.3 Gjennomføring av studien

Prosjektet tar utgangspunkt i et konseptuelt rammeverk, som utgjør undersøkelsens teoretiske fundament. For å skaffe innsikt i elevenes bevisprosess har jeg valgt å ta i bruk oppgavebasert intervju, med tre forhåndsbestemte oppgaver. I analysedelen argumenterer jeg for at analyse og funn sentreres omkring den ene av de tre oppgavene. Til slutt drøfter jeg funnene i lys av tidligere forskning.

2 Teori

2.1 Forskningsprosjektets rammeverk

Lester (2005) hevder at et forskningsrammeverk er en grunnleggende strukturering av ideer som er relevant for det fenomenet som skal undersøkes. Å bruke et rammeverk vil ifølge Lester (2005) gi minst fire fordeler i forskningsprosessen. Han sier at et godt rammeverk vil; 1) tilby en struktur for konseptualisering og forskningsdesign; 2) gjøre det mulig å gi mening til data; 3) gi forskeren innsikt utover det som baseres på sunn fornuft, og; 4) hjelpe forskeren til å utvikle dyp forståelse av hvordan ting fungerer, heller enn å bare finne løsninger på problemer, det vil si funn som forteller «hva som virker». Videre presenterer Lester (2005) tre forskjellige typer rammeverk: teoretiske, praktiske, og konseptuelle rammeverk. Teoretiske og praktiske rammeverk baseres på, henholdsvis formell teori, og praksisbasert kunnskap. Denne studien støttes av et konseptuelt rammeverk, som også kan ta i bruk teori og erfaringer, men i større grad baseres på tidligere forskning. Mitt konseptuelle rammeverk vil slik Lester (2005) anbefaler, fungere som argumentasjon for at de konseptene som undersøkes er relevant for å besvare forskningsspørsmålet, og samtidig tjene som begrunnelse for studiens aktualitet og nytteverdi i undervisningssammenheng.

2.1.1 Bevis

Pólya (1957) skriver at for en bestemt type logikere er det bare fullstendige bevis som eksisterer. Hva som er ment å være et bevis, må ikke inneholde noen brudd eller åpning, ingen huller og ingen rom for usikkerhet eller tvil, for i så tilfelle er det ikke et bevis (Pólya, 1957, s. 215). Hersh (2009) forklarer det samme og skriver at for en matematiker er et bevis verken mer eller mindre enn et konkluderende argument, som overbeviser hvem som helst som forstår de involverte konseptene, og der ingen mot-bevis kan gis. Denne typen formelle bevis er knapt å finne i hverdagslivet, ikke en gang i fysikk-vitenskapen (Pólya, 1957), så det synes nødvendig å nyansere begrepet i undervisningssammenheng.

Hersh (2009) skriver at ideen om bevis ikke er absolutt. I utdanningskontekst utvikles begrepet gradvis fra grunnskole til videregående og høyere utdanning, hvor det etter hvert fusjonerer med begrepet slik det er forstått av profesjonelle matematikere. Harel og Sowder (2007) mener også at konseptet gis et ekspanderende innhold, og definerer derfor begrepet bevis fra et mer subjektivt perspektiv. De skriver at *et bevis* er det som etablerer sannhet for en person eller et samfunn (Harel & Sowder, 2007). Det betyr at hva som utgjør et bevis, bestemmes av den som beviser og de som skal overbevises. En slik tilnærming gjør det mulig å betrakte bevisbasert matematikk på alle klassetrinn, for alle elever, og utgjør derfor det begrepsmessige standpunktet for denne studien.

Bevisprosessen

Harel og Sowder (2007) skriver at elever kan komme med påstander enten som formodninger eller som fakta. Påstanden er en formodning dersom eleven er usikker på påstandens gyldighet. Harel og Sowder (2007) mener at det kritiske spørsmålet i matematisk kontekst, er hvordan elever gjør en formodning om til et faktum. Denne overgangen beskrives som bevisprosessen. I en bevisprosess forsøker eleven å fjerne tvil om sannheten til en påstand, og går dermed fra usikkerhet til sikkerhet; fra formodning til fakta. Videre skriver Harel og Sowder (2007) at bevisprosessen innebærer to delprosesser: å fastslå for seg selv, og overbevise andre.

Basert på overnevnte definisjoner, innfører Harel og Sowder (1998) begrepet bevisskjema (*proof-schemes).* Et bevisskjema utgjør et kognitivt stadium, en persons intellektuelle evne til å nettopp fastslå for seg selv og overbevise andre om en påstands gyldighet. De klassifiserer ulike bevisskjema i tre kategorier; ekstern overbevisning; empiriske bevis; og deduktive bevis. Karakteristisk for hver av kategoriene er at de representerer et stadium i elevers matematiske utvikling, og består av de strategier og handlinger en person tar i bruk for å oppnå overbevisning (Harel & Sowder, 1998, 2007). Det synes derfor mer presist å oversette proof-scheme til bevisstrategi, der en bevisstrategi er det en person eller et samfunn oppfatter som et bevis.

Bevis i undervisningen

Harel og Sowder (1998) gjør en viktig presisering, og sier at selv om definisjonene er subjektive, er målet med undervisning i bevis entydig: å gradvis raffinere og utvikle elevers bevisstrategier, mot bevisstrategier slik de praktiseres av matematikere. En slik utviklingsprogresjon gjenspeiles i Waring (2000), som beskriver utvikling av elevers forståelse for bevis gjennom seks nivåer, fra oppdagelsen av bevisets eksistens (nivå 0) til produksjon av uformelle induktive bevis (nivå 1-2), via økende generalisering (nivå 3-5), til produksjon av formelle bevis (nivå 6).

Waring (2000) hevder at læring av bevis skjer i tre faser: lære om bevis; lære å bevise; og forbedring av bevisferdigheter. Implisitt i alle stegene er spørsmålet «kan du bevise det?». Innledningsvis er det læreren som stiller spørsmålet til elevene, for å øke bevisstheten om at konseptet bevis eksisterer. Etter hvert som elever lærer å forvente at rettferdiggjørelser og begrunnelser nesten alltid er mulig, oppfordres elever til å spørre læreren om å bevise nye påstander. Ifølge Waring (2000) er et viktig mål med undervisningen at elevene til slutt begynner å spørre seg selv slike spørsmål. Når elever tror på en strategi, en løsning eller en påstand, vil spørsmålet «kan du bevise det?» oppfordre elevene til å begrunne *hvorfor* det er slik de tror det er. Schoenfeld (2009) skriver at i forsøk på å begrunne, vil elevene noen ganger lykkes, andre ganger ikke, men selv feilaktige begrunnelser kan bidra til bedre forståelse av det fenomenet eleven prøver å skape mening om. Med dette viser Waring (2000) og Schoenfeld (2009) hvordan bevis kan brukes aktivt i undervisningen for å gi matematikken mening. Matematisk meningsskaping er også et essensielt poeng med Harel og Sowder's (2007) subjektive tilnærming til bevis. De skriver at meningsskaping skjer når elever fastslår for seg selv og overbeviser andre om at et argument eller en konklusjon gir mening. Sjelden opptrer disse prosessene separat, og dermed vokser bevis frem som en respons på kognitive så vel som sosiale behov (Harel & Sowder, 2007).

2.1.2 Resonnement

Matematisk meningsskaping og bevis står i nær relasjon til resonnering, fordi resonnering handler om evne til logisk tenkning omkring forhold mellom konsepter og situasjoner (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Hersh (2009) diskuterer sammenhengen mellom bevis og resonnement, og hevder at bevis i sin bredeste forstand er nettopp forsiktig resonnering, som leder til konkrete, pålitelige konklusjoner.

Ifølge Yackel og Hanna (2003) blir begrepet resonnement ofte brukt av matematikkforskere uten en spesifikk definisjon, under en implisitt antakelse om en slags felles enighet om hva resonnering betyr. Kilpatrick m.fl. (2001) skriver at mange oppfattelser av matematisk resonnering har vært begrenset til formelle matematiske bevis. Kilpatrick m.fl. (2001) bruker begrepet *adaptiv resonnering* om evnen til logisk tenkning, refleksjon, forklaring og begrunnelse. Ifølge Kilpatrick m.fl. (2001) henviser adaptive resonnement både til formelle matematiske bevis, uformelle forklaringer og argumentasjoner, og intuitiv, induktiv resonnering basert på mønstre, analogier og metaforer. Niss og Jensen (2002) definerer et matematisk resonnement som en kjede av skriftlige eller muntlige argumenter som gis for å støtte en påstand, og på samme måte som Kilpatrick m.fl. (2001) betrakter også Niss og Jensen (2002) uformelle argumenter, basert på intuisjon eller betraktning av spesialtilfeller, som resonnement.

Samtidig varierer det hvor selvstendige resonnementene er, noe Lithner (2008) beskriver gjennom forskjellen på imitative og kreative resonnement. Imitative resonnement er tilfeller der eleven imiterer en prosedyre eller algoritme for å komme til et svar, og resonnementet er basert på utenatlæring eller pugging (*rote learning).* Lithner (2008) skiller mellom to typer imitative resonnement; memorert og algoritmisk resonnering. I memorert resonnering er strategivalget basert på tilbakekalling av et komplett svar, og implementering av strategien handler bare om å skrive det ned. Det kan for eksempel være at eleven gjengir et bevis han husker fra læreboka, men der eleven ikke nødvendigvis forstår beviset. Algoritmisk resonnering innebærer å huske en algoritme. En algoritme henviser her til alle typer forhåndsdefinerte prosedyrer, ikke bare kalkuleringer. Strategivalget innebærer i så tilfelle å velge en prosedyre, og implementeringen består i å enkelt gjennomføre den.

Den motsatte typen resonnering er kreativ. Kreative resonnement kan ifølge Lithner (2008) gjenkjennes av tre karakteristikker: 1) *Novelty.* Strategien som velges er ny for den som resonnerer, enten fordi eleven ikke har møtt strategien tidligere, eller at en glemt strategi gjenoppdages og rekonstrueres. 2) *Plausibility.* Eleven vurderer strategiens rimelighet ved å gi argumenter som støtter strategivalget, og begrunner hvorfor konklusjonene er sanne eller troverdige. 3) *Mathematical foundation.* Resonnementet har et matematisk grunnlag. Det innebærer at argumentene baseres på matematiske egenskaper ved de komponentene som er involvert i resonnementet.

Lithner (2008) beskriver resonnering som den tankerekken, måten å tenke på, som tas i bruk for å produsere påstander og nå konklusjoner i oppgaveløsning. Heller ikke her er resonnementet nødvendigvis basert på formell logikk, og er dermed ikke begrenset til formelle matematiske bevis. Resonnementet kan til og med være feil, så lenge det inneholder fornuftige (for den som resonnerer) begrunnelser, og gir mening til den eleven som fører resonnementet (Lithner, 2008). Mens Lithner (2008) hevder at resonnementet også handler om tankeprosessen, ikke bare produktet, så er Vinner (1997) opptatt av at vi bare får innsikt i det som kan observeres, det elevene sier, skriver og kommer frem til.

Lithner (2000) forklarer at resonnementsprosessen inneholder et sett argumenter. Et argument kan være en faktaopplysning eller en antakelse, og utgjør den delen av resonnementet som tar sikte på å overbevise seg selv eller noen andre om at resonnementet er valid. Å argumentere for å overbevise er ifølge Harel og Sowder (2007) essensen i bevisprosessen. Argumentene som fremkommer i en resonnementsprosess, vil derfor utgjøre elevens begrunnelse for løsningen. I bevisoppgaver, vil begrunnelsen utgjøre et bevis så snart eleven er tilstrekkelig overbevist (Harel & Sowder, 2007).

2.1.3 Forklaring

Hanna (1995) hevder at bevis i skolematematikken har en forklarende funksjon, men bevisets forklarende rolle synes ifølge Harel og Sowder (2007) å være mindre anerkjent blant lærere. De sier videre at flere lærere oppfatter bevis som et konsept aktuelt bare for en minoritet av elevene, og dermed ikke vurderer bevis og begrunnelse som et sentralt tema i skolematematikken. Sierpinska (1994) gjør et viktig poeng ut av forholdet mellom bevis og forklaring, og sier at både når vi beviser teoremer og setninger, og når vi forklarer påstander, konsepter og sammenhenger, søker vi svar på det samme *hvorfor*-spørsmålet. I utvikling av matematisk forståelse, er derfor bevis og forklaringer sammenvevd.

Ifølge Yackel (2001) er forklaringer en type kommunikasjon som brukes for å klargjøre aspekter ved matematisk tenkning som kanskje ikke er så lett synlige for andre. I likhet med Yackel (2001) poengterer også Balacheff (1988) det sosiale aspektet ved forklaringer, og hevder at forklaring er diskursen der et individ forsøker å etablere validiteten av en påstand for noen andre. Dette betyr at forklaring er spesielt viktig i prosessen der eleven forsøker å overbevise andre om riktigheten av en løsning eller påstand. Mens resonnement omfatter både indre tankeprosesser og implisitte begrunnelser, er en forklaring noe som uttrykkes eksplisitt, enten skriftlig eller muntlig. I sammenheng med Harel og Sowder (2007) sin todeling av bevisprosessen, vil forklaringer hovedsakelig kobles til det å overbevise andre.

Perry (2000) peker ut to typer forklaringer, en fokusert på hvordan et problem er løst, og den andre fokusert på hvorfor metoder virker og når de skal brukes. Drageset (2018) beskriver disse forklaringsformene som forklaring av handling (eleven refererer prosedyrer eller prosesser) og forklaring med hensikt om å begrunne (hvorfor fungerer metoden). I tillegg påpeker Drageset (2018) en tredje type forklaring: forklaring av begreper. Den typen forklaring som tar sikte på å begrunne, handler om å overbevise. Hensikten med både forklaringer, resonnement og bevis er i stor grad den samme, nemlig å gi mening til matematiske påstander, og dermed overbevise seg selv og andre om at påstander eller løsninger er valid.

Dreyfus (1999) oppsummerer forholdet mellom forklaringer, argumenter og bevis. Han sier at skillet mellom termene er vag, og at det derfor er gunstig å betrakte likheter heller enn forskjeller. Han hevder at for matematikklærere ser det ut til å være et kontinuum fra forklaring, via argumentasjon og begrunnelse, til bevis. I undervisningssammenheng mener Dreyfus (1999) at den typen forklaringer elever ofte er spurt om å gi, er argumenter, muligens også matematiske bevis. Videre hevder han at lærere må være bevisst hvilke forklaringer som etterspørres, og etterstrebe den vanskelige oppgaven å hjelpe elever til å forstå hva vi forventer fra dem.

På samme måte som Waring (2000) stiller spørsmålet «kan du bevise det?» mener Dreyfus (1999) at det er hensiktsmessig å endre det sentrale spørsmålet «hva er resultatet?» til «er det sant at..?». Waring (2000) og Dreyfus (1999) viser til en type spørsmålsformulering der det stilles krav om at elever forklarer og begrunner sin tankegang. Ifølge Dreyfus (1999) kan slike spørsmål bidra til at elevene betrakter matematikk som et felt av sammensatte, relaterte strukturer. Dette vil kreve at elevene utvikler mer sofistikerte former for kunnskap.

Å si at bevis bør ha en forklarende rolle, betyr ikke at formen på beviset er gitt. Hanna (1995) understreker at et forklarende bevis kan være både beregninger og visuelle demonstrasjoner, uformelle bevis eller til og med bevis som overholder strenghet og formalitet. Igjen gis konseptet bevis ekspanderende innhold, der måten det utformes på avhenger av klassetrinn og kontekst. Likevel sier Hanna (1995) at felles for alle trinn, er at elevene lærer matematikk som er ny for dem, men som består av kjente resultater. De vet altså at resultatet er sant, utfordringen er å forstå hvorfor påstanden stemmer, og det er denne formen for kunnskap Dreyfus (1999) etterlyser.

Oppsummering
En subjektiv tilnærming til bevis, gjør at bevis og resonnement tilsynelatende utgjør to sider av samme sak, fordi et resonnement består av en kjede argumenter som begrunner at en løsning er valid (Niss & Jensen, 2002). Likevel er et resonnement et mer overordnet begrep, som også omfatter indre tankeprosesser og implisitte begrunnelser (Lithner, 2000). En forklaring er noe som uttrykkes eksplisitt, enten skriftlig eller muntlig, og i sammenheng med Harel og Sowder's (2007) todeling av bevisprosessen, ble forklaringer koblet til det å overbevise andre. Konseptualiseringen av disse sentrale begrepene utgjør bakteppet for den neste sekvensen, som beskriver en foreslått utviklingsprogresjon (Knuth m.fl., 2009)i konseptet bevis, gjennom fire nivå.

2.1.4 Elevers bevisproduksjon
Flere forskere foreslår at elevers forståelse og kompetanse i bevis følger en utviklingsprogresjon, fra induktive bevisformer mot deduktive bevis, med økende grad av generalitet. Noen av disse vil bli presentert under.

Nivåer og typer bevis i Balacheff (1988)

Balacheff (1988) undersøker bevis i skolematematikken, og presenterer en studie basert på elever i alderen 13-14 år. Begrepet bevis henviser, som hos Harel og Sowder (1998) til elevers matematiske praksis, og ikke til bevis slik det defineres av matematikere. Balacheff (1988) gjør et skille mellom to typer bevis, henholdsvis pragmatiske og konseptuelle bevis. Pragmatiske bevis kjennetegnes av faktiske handlinger, konkrete tilfeller og konkretiseringer. Det kan for eksempel være bruk av fysiske gjenstander, tegninger, eller analogier. Balacheff (1988) presenterer tre undergrupper av pragmatiske bevis; *naiv empirisme; avgjørende eksperiment;* og *generisk eksempel*. De første to typene etablerer ikke sannheten av en påstand, men resonnementene er godkjent som bevis av de som produserer dem. Konseptuelle bevis utgjør motsetningen til pragmatisk bevisføring, og krever en løsrivelse fra konkrete tilfeller. I stedet hviler beviset på formuleringer av de aktuelle egenskapene det spørres om, og forholdet mellom dem. Blant konseptuelle bevis beskrives to underkategorier; *tankeeksperiment* og *beregning av påstand.*

Kategoriene har ifølge Balacheff (1988) en privilegert posisjon i elevers kognitive utvikling i forståelse av konseptet bevis. Bevistypene har en hierarkisk plassering, og vil derfor presenteres fortløpende i redegjørelsen av fire bevisproduksjonsnivåer (nivå 0-3).

Nivåbeskrivelser

Knuth m.fl. (2009) presenterer en studie av *Middle School Students'* (11-13 år) produksjon av bevis. Knuth m.fl. (2009) gjør en modifisering av Waring's (2000) rammeverk, og beskriver elevers produksjon av bevis gjennom fire nivåer; fra ekstern overbevisning; via empiribaserte begrunnelser og forsøk på generalitet; til generelle bevis.

Nivå 0 – ekstern overbevisning

Både Waring (2000) og Knuth m.fl. (2009) begynner på bevisnivå 0. Elever på nivå 0 er uvitende om behovet for å gi en matematisk begrunnelse for å demonstrere sannheten til et forslag eller en påstand. Typisk er at elever fjerner tvil ved å søke bekreftelse hos eksterne kilder, for eksempel ved at læreren, foreldre eller læreboka «sier» at det stemmer. Denne typen begrunnelse svarer til det Harel og Sowder (1998) kategoriserer som autoritær bevisstrategi, som er en av underkategoriene i det første stadiet; ekstern overbevisning. Elever befinner seg på nivå 0 enten fordi eleven ikke er klar over at konseptet bevis eksisterer (Waring, 2000), eller fordi elever er vant til å følge prosedyrer, memorere og fokusere på sannhet heller enn begrunnelse for sannhet (Harel & Sowder, 1998).

Knuth m.fl. (2009) føyer til at andre ikke-matematiske begrunnelser på nivå 0, er tilfeller der elever hevder at noe er sant «fordi det bare er slik», uten å henvise til hvorfor påstanden eller løsningen er sann.

Nivå 1 – empiribaserte begrunnelser

Elever på nivå 1 er oppmerksom på behovet for en matematisk begrunnelse, men begrunnelsene er ikke generelle, og Knuth m.fl. (2009) skriver at i de fleste tilfeller er elevenes begrunnelser empiribaserte. Nivå 1 består av mindre delnivåer med noe progresjon; sjekk av noen få tilfeller; systematisk sjekk av noen tilfeller; vurdering av ekstreme eller «tilfeldige» tilfeller; og bruk av generisk eksempel. Waring (2000) beskriver denne progresjonen over flere nivå, slik at generisk eksempel ifølge hennes rammeverk havner på nivå 2. Generisk eksempel er en av underkategoriene til Balacheff (1988) og utgjør en type pragmatisk bevis. Bruk av generisk eksempel viser større innslag av generalisering enn sjekk av tilfeller (Stylianides & Stylianides, 2009), og kategorien vil derfor presenteres som en bevisstrategi på nivå 2.

Fordi nivå 1 kjennetegnes av at elevene sjekker spesielle tilfeller, så tilsvarer det Balacheff (1988) sin kategori, naiv empirisme, som omfatter de situasjonene der elever verifiserer enkelttilfeller for å bevise generelle påstander. Balacheff (1988) skriver at denne formen for bevisføring er veldig elementær (og utilstrekkelig), og at naiv empirisme utgjør det første steget i prosessen mot generalisering.

Naiv empirisme (Balacheff, 1988) og nivå 1 slik det beskrives av Knuth m.fl. (2009), ligner på Harel og Sowder (1998) sin kategori; induktiv bevisstrategi, som kjennetegnes av at elevene kvantitativt evaluerer ett eller flere konkrete tilfeller, for å fastslå for seg selv og overbevise andre om sannheten til en påstand. Induktive bevisstrategier er ifølge Harel og Sowder (1998) en underkategori i stadiet for empiriske bevisstrategier, og typisk er at elever på dette stadiet appellerer til fysiske fakta eller sensoriske erfaringer, for å validere og underbygge påstander eller antakelser.

I tillegg til naiv empirisme presenterer Balacheff (1988) kategorien avgjørende eksperiment, som kjennetegnes av at eleven presenterer påstanden generelt, men verifiserer ved å sjekke et spesielt tilfelle. Avgjørende eksperiment skiller seg fra naiv empirisme fordi eleven mener at det valgte tilfellet ikke er alt for typisk, og vurderer at «hvis det virker her, vil det alltid fungere». Kategorien er beskrivende for Knuth m.fl. (2009) sitt nivå 1, fordi eleven rettferdiggjør påstanden ved å vurdere et ekstremt eller «tilfeldig» tilfelle.

Nivå 2 – forsøk på generalitet

Det som skiller nivå 1 og 2 er bevissthet om nødvendigheten av generelle argumenter. Knuth m.fl. (2009) skriver at elever på nivå 2 ofte forsøker å produsere generelle argument, men begrunnelsene kommer til kort for å være aksepterte bevis. At eleven «kommer til kort» kan skje på to måter; enten ved at eleven uttrykker et behov for å gi et generelt argument, men argumentet er matematisk ukorrekt, eller leder ikke til et akseptert bevis; eller at forsøket er ufullstendig, i den forstand at hvis det fullføres vil det gi et akseptert bevis. Poenget er at eleven forsøker å behandle det generelle tilfellet.

At nivå 2 representerer en økt generalitet i elevens begrunnelser, leder til diskusjonen om nivåplasseringen av Balacheff (1988) sin kategori; generisk eksempel. Om generisk eksempel skriver Balacheff (1988) følgende:

> *"The generic example involves making explicit the reasons for the truth of an assertion by means of operations or transformations on an object that is not there in its own right, but as a characteristic representative of its class" (Balacheff, 1988, s. 219).*

Et generisk eksempel er altså et utvalgt tilfelle (eller et matematisk objekt) som ikke bare representerer seg selv, men er representativt for en hel klasse av tilfeller. Mason og Pimm (1984) skriver at et generisk eksempel er et faktisk eksempel, men presenteres med hensikt om å bære frem det generelle. Det synes derfor hensiktsmessig å forstå overgangen fra verifikasjon av enkelttilfeller (nivå 1) til bruk av generisk eksempel som en vesentlig endring i betraktning av generalitet. I tillegg skriver Balacheff (1988) at generisk eksempel utgjør en overgangsfase fra pragmatiske til konseptuelle bevis, og det synes derfor riktig å plassere denne overgangen på nivå 2. Som et alternativ kunne generisk eksempel utgjort en overgangsfase mellom nivå 1 til 2, men fordi nivå 2 ifølge Knuth m.fl. (2009) omfatter alle forsøk på generelle begrunnelser, velger jeg å plassere generisk eksempel på nivå 2.

Stylianides og Stylianides (2009) gjør også en viktig presisering om bruk av generisk eksempel. De diskuterer hvordan undervisningen kan tilrettelegge overgangen fra empiriske argument til formelle bevis, der målet er å hjelpe elevene å innse begrensningen i empiriske argumenter. De refererer til Balacheff (1988), og skriver at generisk argumentasjon er generelle argumenter illustrert i et spesielt tilfelle, sett på som en prototype. Argumentet tilbyr konkluderende bevis for en matematisk generalisering og de mener derfor at argumentet ikke har empirisk status.

I Harel og Sowder’s (1998) taksonomi hører generisk eksempel til i stadiet for deduktive bevisstrategier, herunder kategorien transformativ bevisstrategi. Transformative bevisstrategier involverer på samme måte som generiske bevis, målrettede operasjoner på objekter, der hensikten er å betrakte de generelle aspektene i påstanden (heller enn en det spesielle objektet) (Harel & Sowder, 1998). Forskjellen er at Harel og Sowder (1998) i større grad vektlegger logisk deduksjon, der argumentasjonen utledes av aksepterte regler og sannheter, og dermed stiller høyere krav til bruk av språk og formuleringer enn for generisk eksempel som hovedsakelig bygger på elevenes hverdagsspråk (Balacheff, 1988).

Knuth m.fl. (2009) påpeker at nivå 2 i tillegg inkluderer de elevresponser som demonstrerer en bevissthet om at empiriske bevis ikke er tilstrekkelige bevis – enten ved å uttrykke behov for å håndtere alle tilfeller (uttømmende bevis), eller uttrykker eksemplers begrensning som bevis, men der elever ikke evner (eller forsøker) å produsere et generelt argument. Elevene er dermed oppmerksomme på behovet for generelle bevis, selv om de ikke er i stand til å bygge et gyldig bevis uten hjelp.

Nivå 3 – generelle bevis

Knuth m.fl. (2009) skriver at på nivå 3 er elever klar over behovet for generelle argument, og er i stand til å fremstille slike argumenter selv. Argumenter på dette nivået betraktes ifølge Knuth m.fl. (2009) som aksepterte bevis fordi argumentene demonstrerer at en egenskap eller påstand er sann i alle tilfeller. Selv om argumentene elevene produserer, kan mangle den strengheten eller formaliteten som kreves av formelle matematiske bevis, viser argumentene likevel det generelle tilfellet. Videre skriver Knuth m.fl. (2009) at begrunnelser kategorisert på nivå 3 vanligvis innebærer at elevene refererer til noen antakelser eller noe som er «gitt», og utformer med det en kjede av deduktive steg, som ender i et konkluderende bevis. I Waring (2000) tilsvarer dette nivå 4 og 5. Waring (2000) hevder at elever på dette nivået har oppnådd en dypere forståelse for konseptet bevis; de forstår hvilken rolle bevis har i matematikk, og er oppmerksom på behovet for bevis.

Nivå 3 inkluderer det Balacheff (1988) klassifiserer som konseptuelle bevis, henholdsvis tankeeksperiment og beregning av påstand. Balacheff (1988) hevder at både for generisk eksempel (nivå 2) og tankeeksperiment er det ikke lenger et spørsmål om å «vise» at resultatet er sant fordi «det fungerer», men å etablere den nødvendige sannheten ved å gi generelle begrunnelser. Det karakteristiske kjennetegnet ved tankeeksperimentet, og også i Knuth m.fl. (2009) sine beskrivelser av nivå 3, er at beviset frigjør seg fra det spesielle. Balacheff (1988) skriver at i et tankeeksperiment hviler argumentene på egenskapene til objektene det spørres om, og egenskapene er ikke lenger bevist ved tilfeller, men formulert generelt. Bevegelsen mot konseptuelle bevis (Balacheff, 1988) og nivå 3 (Knuth m.fl., 2009) krever økt generalisering og evne til abstraksjon. Ifølge Balacheff (1988) er dekontekstualisering den sentrale prosessen av generalisering, og innebærer å «fjerne» alle spor av det spesielle i en formulering. Å utforme bevis på nivå 3 involverer dermed både kognitive og språklige utfordringer, der den språklige utfordringen handler om å uttrykke operasjoner på et abstrakt objekt. Denne evnen må beherskes for å være i stand til å konstruere det Knuth m.fl. (2009) definerer som et akseptert bevis.

Balacheff's (1988) siste kategori, beregning av påstand, henviser til intellektuelle konstruksjoner, som baseres på aksepterte definisjoner og eksplisitte karakteristikker av de aktuelle egenskapene i påstanden. Ifølge Harel og Sowder (2007) er beregning av påstand basert på utelukkende transformasjon av symboler, og svarer i deres taksonomi til kategorien referensiell-symbolsk bevisstrategi. Referensiell-symbolsk bevisstrategi innebærer å bevise (eller motbevise) en påstand ved hjelp av algebraisk representasjon, ved å gjennomføre algebraiske manipulasjoner med hensikt om å utlede informasjon som er relevant for problemet som skal løses (påstanden som skal bevises) (Harel & Sowder, 2007).

Ulike typer bevis

Nivå 3 omfatter ifølge Knuth m.fl. (2009) aksepterte bevis; forstått som mer enn bare formelle matematiske bevis, men der begrunnelsen beskriver det generelle tilfellet. Det betyr at formen på beviset kan variere, noe Hanna (1995) påpekte i lys av bevisets forklarende rolle. Hanna (1995) hevdet at et forklarende bevis kan bestå av beregninger så vel som visuelle demonstrasjoner. For eksempel kan hverdagslige analogier, eller mer hverdagslig og ordrikt språk være begrunnelser som viser at en påstand stemmer i alle tilfeller. Denne bevisføringen kalles ofte intuitive bevis (Hinna, Gustavsen & Rinvold, 2011). Visuelle bevis kan også være intuitive, og innebærer bruk av illustrerende diagrammer, figurer og tegninger. Tripathi (2008) hevder at slik visualisering kan bidra til at elever oppdager sammenhenger, og er derfor spesielt viktig i arbeid med ukjente problemoppgaver. Arcavi (2003) anerkjenner visualisering som en nøkkelfaktor i problemløsning og bevis. Både intuitive og visuelle bevis kan være til hjelp for å forstå strukturen og tankegangen i mer kortfattede, formelle bevis. En annen type bevis er uttømmende bevis (*proof by exhaustion),* som innebærer å sjekke alle mulige tilfeller (Knuth m.fl., 2009). For eksempel kan påstanden «*tallet 7 er et primtall*» bevises ved å stadfeste at 7 ikke er delelig med noen av tallene fra 2 til 6, men slike bevis er ikke alltid gjennomførbare. Uansett mener Hanna (i Weber, 2014) det er viktig at eleven har god forståelse for det spesifikke matematiske temaet som betraktes, og har kjennskap til de involverte begrepene, fordi det vil påvirke muligheten til å forstå og utforme ulike bevis (Weber (2014) sitt kapittel består av deler fra flere andre forfattere).

Oppsummering

Nivåbeskrivelsene viser hvordan elever går fra å benytte eksterne autoriteter for å bekrefte sannheten til et forslag eller en løsning, til å selv konstruere matematiske argument som gjennom logisk deduksjon underbygger sikkerheten i en påstand. Deduktiv bevisføring, eller deduksjon betyr å utlede slutninger med logisk nødvendighet basert på visse premisser. Dersom premissene er sanne, må konklusjonen nødvendigvis være sann (Morris, 2002). I induktiv bevisføring derimot utledes konklusjonen basert på erfaringer, og premissene er sannsynlige, men leder ikke nødvendigvis til en valid konklusjon (Morris, 2002). Nivåene viser dermed en tydelig utviklingsprogresjon, der hvert nivå inneholder økt grad av generalitet og abstraksjon. Balacheff (1988) mener at skillet mellom de ulike bevisnivåene karakteriseres av overgangen fra sannhet basert på erklæring av fakta (påstanden stemmer for dette tilfellet, derfor stemmer påstanden) til erklæring av påstanden basert på generelle argumenter. Det som likevel er likt på tvers av nivåene, er at bevisprosessen hele veien handler om å fastslå for seg selv, og overbevise andre om gyldigheten i en løsning eller påstand (Harel & Sowder, 2007).

2.2 Bevis i ungdomsskolen

2.2.1 Bevis og matematisk kompetanse

Bevis finner vi i Niss og Jensen (2002) sin beskrivelse av resonnementskompetanse. De skriver at resonnementskompetanse innebærer å kunne følge og bedømme et matematisk resonnement, og spesielt å vite å forstå hva et matematisk bevis er, og hvordan det skiller seg fra andre former for matematiske resonnement, for eksempel resonnementer hvilende på intuisjon eller betraktning av spesial-tilfeller, og å kunne avgjøre når et matematisk resonnement faktisk utgjør et bevis og når ikke (Niss & Jensen, 2002, s. 54). Her peker Niss og Jensen (2002) på to spesielt sentrale aspekter ved bevis: *å forstå hva et matematisk bevis er;* og *å kunne avgjøre når et matematisk resonnement faktisk utgjør et bevis og når ikke.* Waring (2000) hevder at for å forstå hva et matematisk bevis er, må eleven først gjøres oppmerksom på at bevis eksisterer. Spørsmålet «kan du bevise det?» ble presentert som avgjørende for denne første fasen. Videre viser nivåbeskrivelsen til Knuth m.fl. (2009) hvordan forståelse for bevis er en gradvis prosess, der både uformelle og intuitive bevis inngår som en del av utviklingsprogresjonen, men der målet er det samme som for resonnementskompetansen, nemlig å etter hvert forstå hva som utgjør et akseptert matematisk bevis. Ifølge Niss og Jensen (2002) består resonnementskompetanse også av å kunne gjennomføre uformelle og formelle resonnement, herunder gyldige bevis. Dette hører til Waring's (2000) andre fase; lære å bevise. Basert på Harel og Sowder (1998) forstås dette som en omfattende fase, der eleven gradvis må raffinere og utvikle sine bevisstrategier, mot bevisstrategier slik de praktiseres av matematikere. Å forbedre sine bevisstrategier inngår i Waring's (2000) siste fase, og først i denne fasen vil eleven være i stand til å vurdere hva som utgjør et formelt bevis. I sammenheng med Knuth m.fl. (2009) sine nivåbeskrivelser vil elever først på nivå 3 kunne avgjøre når et matematisk resonnement utgjør et bevis slik Niss og Jensen (2002) etterlyser i resonnementskompetansen.

I likhet med Niss og Jensen (2002) presenterer også Kilpatrick m.fl. (2001) resonnement som en viktig komponent for at elever skal lykkes i matematikk. Som tidligere nevnt bruker Kilpatrick m.fl. (2001) termen adaptiv resonnering, om evnen til logisk tenkning, som innebærer at eleven har kunnskap om hvordan en konklusjon kan begrunnes. I likhet med Niss og Jensen (2002) poengterer også Kilpatrick m.fl. (2001) forskjellen mellom bevis og begrunnelse, og skriver at bevis er en form for begrunnelse, men at ikke alle begrunnelser utgjør et bevis. Både Niss og Jensen (2002) og Kilpatrick m.fl. (2001) skriver at resonnering er sentralt når elever skal bestemme legitimiteten til en setning eller en påstand, men Niss og

Jensen (2002) er tydelig på at resonnementskompetansen også går utover dette. De skriver også at resonnementskompetanse ikke bare er rettferdiggjørelse av setninger, men også av løsninger og problemer. Det betyr at resonnementskompetansen kommer i spill overalt, og er nært forbundet med både tankegangs-, og problembehandlingskompetansen. Selv om alle komponenter i kompetansemodellene til Niss og Jensen (2002) og Kilpatrick m.fl. (2001) må ses i sammenheng, hevder Niss og Jensen (2002) at i deres modell er tankegangs-, resonnements-, og problembehandlingskompetansene spesielt tett forbundet, men at de vektlegger forskjellige sider av matematikken. I tankegangskompetansen er vekten på begreper, spørsmål og svar som er typisk for matematikk; problembehandlingskompetansen fokuserer på strategier som kan benyttes for å besvare spørsmålene; mens resonnementskompetansen angår rettferdiggjørelsen av påstander, herunder korrektheten av løsninger – resonnementskompetansen utgjør dermed matematikkens «juridiske» side (Niss & Jensen, 2002).

Kilpatrick m.fl. (2001) argumenterer for viktigheten av å beherske resonnement, og skriver at på samme måte som matematikere bruker deduktiv resonnering for å avgjøre diskusjoner og uenigheter, kan elever bruke resonnement for å begrunne gyldigheten av sine løsninger. God resonnementskompetanse gjør at elever ikke trenger å være avhengig av å sjekke fasit eller spørre læreren for å vite om et svar er riktig, i prinsippet trenger de bare å sjekke av resonneringen er valid.

2.2.2 Resonnerende aktiviteter og algebra

Knuth m.fl. (2009) hevder at elevers forståelse av generalitet, er spesielt kritisk for å utvikle forståelse for konseptet bevis. Generalisering er nært knyttet til algebra, fordi algebra er den systematiske måten å uttrykke generalitet og abstraksjon (Kilpatrick m.fl., 2001). Kieran (2004) kategoriserer skolealgebra ut i fra de typiske aktivitetene elever deltar i og skiller mellom genererende aktiviteter, transformerende aktiviteter og resonnerende aktiviteter (*global meta-level activities*), der sistnevnte inkluderer arbeid med generalisering, begrunnelser og bevis. I resonnerende aktiviteter fungerer algebra som et verktøy, men er ikke en nødvendighet, som betyr at denne typen oppgaver også kan løses uten bruk av algebraiske notasjoner. Dette er også tilfellet for bevisoppgaver, som fra et subjektivt perspektiv (Harel & Sowder, 1998), kan løses på mange nivåer, der algebra først vil være aktuelt når eleven forsøker å bevise det generelle tilfellet (nivå 2 og 3). Genererende aktiviteter er en annen type algebraisk aktivitet, og omhandler utforming og behandling av algebraiske uttrykk og ligninger som representerer en problemsituasjon. I tillegg til ligninger og uttrykk for geometriske og numeriske rekker, inkluderes også det å uttrykke numeriske forhold. Kieran (2004) hevder at mye av meningsskapingen for algebraiske objekter og symboler, skjer i genererende aktiviteter. De transformeredene aktivitetene handler hovedsakelig om å manipulere algebraiske uttrykk og ligninger, basert på algebraiske regler. Selv om Kieran (2004) skiller mellom ulike aktiviteter, påpeker hun at en enkelt oppgave ofte kan inkludere flere av de kategoriserte aktivitetene.

2.2.3 Tallteori og algebra

Verschaffel, Greer og De Corte (2007) skriver at et viktig aspekt ved algebra, er generalisert aritmetikk. Aritmetikk er studien av tall, mengder og størrelser (Carraher & Schliemann, 2007), og noen emner i aritmetikken, for eksempel delelighet av heltall er sentralt i grunnskolen så vel som i tallteori eller «høyere aritmetikk» (Davenport, 1992). Tallteori er studien av egenskaper ved tallsystemet (Verschaffel m.fl., 2007), og handler om mønstre og relasjoner blant de naturlige tallene. Typisk innenfor tallteori, er blant annet figurtall, tallrekker, multipler, faktorer, divisorer, primtall, og delelighet (Campbell & Zazkis, 2002).

Campbell og Zazkis (2002) argumenterer for større anerkjennelse av tallteori innenfor læreplanen på alle nivåer. Begrunnelsen for denne anbefalingen er blant annet at tallteorien gir en kontekst for å fremme algebraisk tenkning, og gir mulighet for matematisk meningsskaping, resonnement, argumentasjon og bevis for kjente matematiske objekter. Med algebraisk tenkning menes grunnleggende prosesser som å identifisere strukturer og sammenhenger, og framfor alt, generalisering. Verschaffel m.fl. (2007) skriver at algebraisk tenkning ikke er avhengig av algebra som den intensive studien av bokstaver, men involverer fokus på å analysere prosesser og sammenhenger, i stedet for et utelukkende fokus på å generere svar. Kieran (2004) mener også at et fokus på relasjoner framfor beregninger av numeriske svar, kan fremme utvikling av algebraisk tenkemåte, og dermed styrke overgangen fra aritmetikk til symbolsk algebra. I liket med Kieran (2004) hevder Verschaffel m.fl. (2007) at et fokus på algebraiske ideer i skolearitmetikken vil gi komplementære fordeler, fordi det legger grunnlaget for symbolsk algebra, samtidig som det styrker aritmetisk kunnskap. I tillegg vil utforskning av tallsystemet forsterke ideen om at matematikk i kjernen handler om mønstre og forhold (Campbell & Zazkis, 2002).

3 Metode

Metodekapittelet er en systematisk redegjørelse for forskningsprosessen, og beskriver hvordan jeg har gått frem for å besvare forskningsspørsmålet. Hensikten er å gjøre prosessen transparent for leseren, argumentere for valgene jeg har tatt, og på den måten sørge for studiens pålitelighet. Jeg vil først redegjøre for forskningsdesignet, med hensyn på forskningsspørsmål, epistemologi og metodologi. Videre beskrives valg av informanter, og metode for innsamling av data og analyse. Avslutningsvis diskuteres studiens validitet og reliabilitet; metodekritikk; og etiske betraktninger.

3.1 Forskningsdesign

3.1.1 Forskningsspørsmål og epistemologi

Studiens forskningsspørsmål er: *Hva kjennetegner flinke ungdomsskoleelevers bevisprosess i arbeid med generaliserte aritmetiske påstander?*

Forskningsspørsmålet impliserer tre krav til undersøkelsen: utvalget må bestå av flinke ungdomsskoleelever, datamaterialet må gi innsikt i bevisprosessen, og det matematiske innholdet må rettes mot generaliserte aritmetiske påstander.

En bevisprosess ble definert som en todelt prosess (Harel & Sowder, 2007), og omfatter det å fastslå for seg selv, og å overbevise andre. Selv om prosessene ofte foregår parallelt, vil det å fastslå for seg selv være en resonneringsprosess som ikke nødvendigvis uttrykkes eksplisitt (Lithner, 2008). For å finne svar på forskningsspørsmålet var jeg derfor avhengig av et datamateriale som ga innsikt i hvordan eleven tenker, og hva eleven gjør for å bevise en matematisk påstand. Tankeprosesser er menneskelig kognisjon, og dermed relateres studien til prinsipper fra kognitiv psykologi. Studien er motivert av et konstruktivistisk kunnskapssyn, og for å besvare forskningsspørsmålet har jeg valgt en kvalitativ tilnærming.

At tankeprosesser kan gjøres til gjenstand for observasjon er en subjektiv antakelse, som bygger på kognitiv psykologi. I kognitiv psykologi undersøkes mentale prosesser, og generelt bygger tradisjonen på studier av menneskers oppfatning, hvordan mennesker tolker og håndterer informasjon; hukommelse, hvordan informasjon lagres og gjenfinnes; og tenkning, som innebærer hvordan mennesker bruker informasjonen i forskjellige mentale aktiviteter som resonnering og språk (Fernald, 2008). Målet med kognitive tilnærminger er å utforske hva som foregår i menneskers sinn, altså «inni hodet» på elevene. Videre skriver Fernald (2008) at kunnskap og forståelse er en del av menneskets kognisjon, og at disse mentale prosessene ikke kan observeres direkte, men at en persons tanker kan komme til uttrykk gjennom språket, enten skriftlig eller muntlig. Cobb (2007) hevder at fokus i kognitive studier er å beskrive hvordan personer handler og tenker i en bestemt setting. Dette er også fokus i denne studien, der målet er å beskrive hvordan elever handler og tenker når de skal bevise en matematisk påstand.

Kognitiv psykologi handler om å forstå personers mentale prosesser gjennom observerbar atferd. Det innebærer en viss form for subjektiv tolking (Caelli, Ray & Mill, 2003). Disse subjektive tolkningene er styrende for kunnskapen som etableres, og utgjør koblingen til det konstruktivistiske kunnskapssynet. Thagaard (2013) hevder at det konstruktivistiske perspektivet representerer et radikalt brudd med den tradisjonelle positivistisk orienterte forskningen. Den tradisjonelle tilnærmingen betrakter vitenskapelige fakta som objektive, og kunnskapen ses på som uavhengig av sosiale prosesser. I konstruktivismen derimot, blir kunnskap oppfattet som en konstruksjon av forståelse og mening skapt i møte mellom mennesker i sosial samhandling, og kunnskapen ses på som dynamisk, i stadig endring og utvikling (Postholm, 2010).

Ifølge Creswell (2014) er konstruktivistiske perspektiv typisk sett som en tilnærming til kvalitativ forskning. Dette er også tilfelle for min studie. Ved å velge en kvalitativ tilnærming får jeg mulighet til å gå i dybden på prosesser hos enkeltelever, for å fremheve egenskaper ved elevers bevisprosess som ikke kan måles i kvantitet eller frekvenser (Thagaard, 2013). Oppmerksomheten dras vekk fra opptelling og numeriske data, som er typiske elementer i kvantitativ forskning (Creswell, 2014). I stedet rettes fokus mot færre individer og fyldigere beskrivelser av enkeltindividers tanker og handlinger i bevisprosessen.

3.1.2 Metodologi

Tradisjonelle metodologiske tilnærminger i kvalitativ forskning, er blant annet fenomenologi, grounded theory, etnografi og kasusstudier (Creswell, 2014). Fenomenologi kan fremstå som mest relevant, fordi det handler om å utforske prosesser og aktiviteter, der hensikten er å gi fyldige beskrivelser av det fenomenet som undersøkes. Likevel er det aspekter ved mitt prosjekt som bryter med de tradisjonelle fremgangsmåtene.

Fenomenologiens interesse er individers følelser og opplevde erfaringer omkring et fenomen (Percy, Kostere & Kostere, 2015). I denne studien ekskluderes informantenes refleksjoner omkring et lært emne, og informantenes følelser om eller holdning til matematikk. Dermed rettes ikke fokus mot hva elever føler og opplever når de løser et matematisk problem, men hvordan de gjør det og hva det kan bety. I tillegg er mitt prosjekt sentrert omkring det matematiske begrepet bevis, og fokuset er på konkrete kognitive prosesser i relasjon til bevisoppgaver. Intervjuguiden er derfor utformet med bakgrunn i eksisterende teori, og elevene som deltar i studien tas ut av sin naturlige setting. Dette bryter med de tradisjonelle metodologiene slik de beskrives av Creswell (2014), og derfor vil en generisk kvalitativ tilnærming passe.

Caelli m.fl. (2003) skriver at generisk kvalitative studier viser kvalitative kjennetegn, men ikke struktureres og følger en kjent tradisjonell metode. I stedet søker studien å gjøre en av to ting: enten kombinere flere metoder eller tilnærminger; eller ikke uttrykke noe metodologisk synspunkt i det hele tatt. Det innebærer at jeg som forsker i større grad står fritt til å anvende de prosedyrer som synes hensiktsmessig for å besvare forskningsspørsmålet, heller enn å følge bestemte metodologiske prosedyrer.

Konsekvensen ved bruk av generisk metodologi, er at rapporten må inneholde en detaljert beskrivelse av studien, slik at leseren kan evaluere studien på riktig måte (Caelli m.fl., 2003). Videre foreslår Caelli m.fl. (2003) å underbygge studiens troverdighet ved å redegjøre for fire hovedområder: forskerens teoretiske posisjonering; konsistens mellom metodologi og metoder; strategier som tas i bruk for å beholde presisjon; og det analytiske synet data tolkes gjennom. Poenget er å sikre en fremgangsmåte der epistemologi, forskningstilnærming og metode henger sammen, og unngå en usammenhengende sammensetning av metoder eller teknikker. Dette er ivaretatt ved at jeg i rapporten redegjør for min teoretiske posisjonering med hensyn på kognitiv psykologi, konstruktivistisk kunnskapssyn, og begrepsapparatet jeg har utformet i oppgavens rammeverk (kapittel 2). Konsistens mellom metode og metodologi er bevart i valg av datainnsamlingsmetode, da oppgavebasert intervju er innenfor generisk tilnærming. Videre la operasjonaliseringen av beviskonseptet føringer for intervjuguiden, og analyseprosessen. Presisjon er besørget gjennom nøye transkribering, tydelig beskrivelse av analyseprosessen, rike beskrivelser av resultater og synliggjøring av datamateriale. Videre har jeg redegjort for analyseprosessens induktive og teoretiske tilnærming.

3.2 Utvalg

Cohen, Manion, Morrison og Bell (2011) mener at utvalget bør bestemmes med hensyn på fem faktorer: utvalgsstørrelse; representativitet; tilgang; utvalgsstrategi; og hvilken type forskning som gjøres.

Fordi avhandlingen er en avsluttende Master i lærerutdanning for 5.-10. trinn, var det naturlig at forskningsspørsmål og utvalg ble rettet mot elever på mellom- eller ungdomstrinnet. Ettersom konseptet bevis står i nær relasjon til generalisering og algebra (se avsnitt 2.2.2), ville jeg sikte meg inn på en elevgruppe som var forventet å ha kjennskap til algebraisk notasjon, og valget ble derfor elever på ungdomstrinnet. Forskningsspørsmålet rettes mot flinke elever. Bakgrunnen for dette er, som nevnt innledningsvis, at tidligere forskning på konseptet bevis viser at selv eldre elever ikke har mye kjennskap til bevis, og verken er vant til å bevise eller rettferdiggjøre matematiske prosesser (Dreyfus, 1999, s. 94). Jeg ønsket derfor at utvalget skulle bestå av elever som er vurdert til å prestere på et middels- til høyt nivå (karakter 4-6), fordi jeg så for meg at det ville bedre forutsetningene for å mestre bevisoppgaven, og følgelig gi innholdsrike data.

Jeg kontaktet to ungdomsskoler i nærområdet, og informerte muntlig og skriftlig om prosjektet. Skolelederne var positive til prosjektet, og jeg inngikk samarbeid med begge skolene. Videre utarbeidet jeg et informasjonsskriv med krav om samtykke fra foreldre (se vedlegg 3). Elevene som ble spurt om å delta ble bestemt av lærerne ved de aktuelle skolene. Forutsetningen for å delta i prosjektet var at elevene var vurdert til karakteren 4 eller høyere. Det ble også ytret ønske om verbale elever, gruppert parvis med hensyn på samarbeid og kjennskap til hverandre. Dette for å gjøre situasjonen trygg for elevene, noe som også påvirker datamaterialet. Utvalget ble bestemt på bakgrunn av spesifikke karakteristikker som er hensiktsmessig for forskningsspørsmålet (Cohen m.fl., 2011), og er ikke representativt for populasjonen.

Antall informanter ble styrt av forskningsspørsmål, forskningsdesign, studiens hensikt og omfang (Cohen m.fl., 2011). Ifølge Onwuegbuzie og Leech (2007) skal størrelsen på utvalget være stort nok til å generere rik data, og muliggjøre rike beskrivelser. Det betyr at en kvantitativ servey-undersøkelse vanligvis vil kreve et større utvalg enn kvalitative studier, som kan baseres på mindre utvalg. Antall informanter er også betinget av prosjektets kontekst, tid til rådighet og antall forskere (Cohen m.fl., 2011).

Adler og Adler (2003) skriver også om naturlige begrensninger i bestemmelse av utvalg, med sikte spesielt på universitetsstudenter. De anbefaler et utvalg på 12 informanter. Antallet gir erfaring i planlegging og strukturering av intervjuer, innsamling og transkribering, og gir tilstrekkelig datamateriale til avhandlingen. Et større utvalg beskrives som upraktisk. Basert på disse anbefalingene, prosjektets forskningsdesign, studiens hensikt og praktiske overveielser bestemte jeg at utvalget skulle bestå av 10-16 elever. Fordi ønsket om deltakelse viste seg å være høyt blant elevene som ble spurt, endte utvalget i totalt 16 elever. Ettersom jeg valgte å intervjue elevene i par, og gjennomførte ett prøveintervju, ble antall deltakere redusert til 14 elever.

3.3 Datainnsamling

3.3.1 Oppgavebasert intervju

For å besvare forskningsspørsmålet var jeg avhengig av et datamateriale som muliggjorde analyse av elevers tenkning og fremgangsmåte i arbeid med bevisoppgaver. Zazkis og Hazzan (1998) argumenterer for at den eneste måten å spekulere omkring elevers tenkning og forståelse, er ved å analysere deres ord og handlinger, og sier videre at kliniske intervju er en egnet metode. Ettersom det var viktig at intervjuet hadde en orientering mot det matematiske emnet bevis, valgte jeg å gjennomføre et oppgavebasert intervju. Ginsburg (1981) hevder at målet med denne typen intervju i skoleforskning er å oppdage kognitive prosesser i elevenes tilnærminger til problemsituasjoner, identifisere og beskrive underliggende kognitive prosesser, og fastslå elevens kompetanse, altså evnen til å utføre en bestemt oppgave.

Goldin (1997) sier at generelt brukes oppgavebaserte intervju i forskning for å tjene to mål: a) observere matematisk atferd hos barn og voksne, vanligvis i en utforskende problemløsningskontekst, og b) trekke slutninger fra observasjonene, for å si noe om problemløserens mulige meninger, kunnskapsstrukturer, kognitive prosesser, eller forandringer av disse i løpet av intervjuet. Videre foreslår Goldin (1997) fem generelle prinsipper for valg av oppgaver og utforming av intervjuguide, med hensikt om å etablere et sterkt vitenskapelig grunnlag og maksimere informasjonen som samles gjennom intervjuet. Intervjuguiden i dette prosjektet ble utformet med utgangspunkt i Goldin's (1997) prinsipper.

3.3.2 Valg av oppgaver og utforming av intervjuguide

Ideen bak oppgavene var at elevene skulle ta stilling til en matematisk påstand, og bevise påstandens gyldighet. Videre bestemte jeg at påstandene skulle avgrenses til emnet tallteori fordi egenskaper ved tallsystemet er sentralt på alle nivå i skolematematikken. I tillegg var avgrensingen motivert av ungdomsskoleelevers utfordring i algebra (Carraher & Schliemann, 2007), der en av anbefalingene er å fremme algebraisk tenkning i aritmetisk kontekst.

I Hinna m.fl. (2011) presenteres noen matematiske påstander som passet mine kriterier. Jeg valgte å bruke følgende påstander.

Påstand 1: *Tallet 7 er et primtall*
Påstand 2: *Hvis siste siffer i et heltall er 5, er tallet delelig med 5*
Påstand 3: *Produktet av to oddetall er alltid et oddetall*

Rekkefølgen på oppgavene ble bestemt på bakgrunn av generalitet. Påstand 1 er ikke-generell, mens påstand 2 og 3 er generelle påstander. Det var et poeng at påstandene hadde ulik grad av generalitet. På den måten besørget undersøkelsen elevers tenkning og strategivalg både for generelle og ikke-generelle påstander. Kun oppgave 3 ble brukt i analysen (se begrunnelse kapittel 3.4).

Alle oppgavene var utformet likt (se vedlegg 1), med en innledende påstand og to delspørsmål a) og b).

Elevene fikk presentert oppgavene på denne måten:

OPPGAVE 3

PÅSTAND: *Produktet av to oddetall er alltid et oddetall.*

a) Vurder om påstanden stemmer
b) Hvordan vil dere bevise at påstanden stemmer?

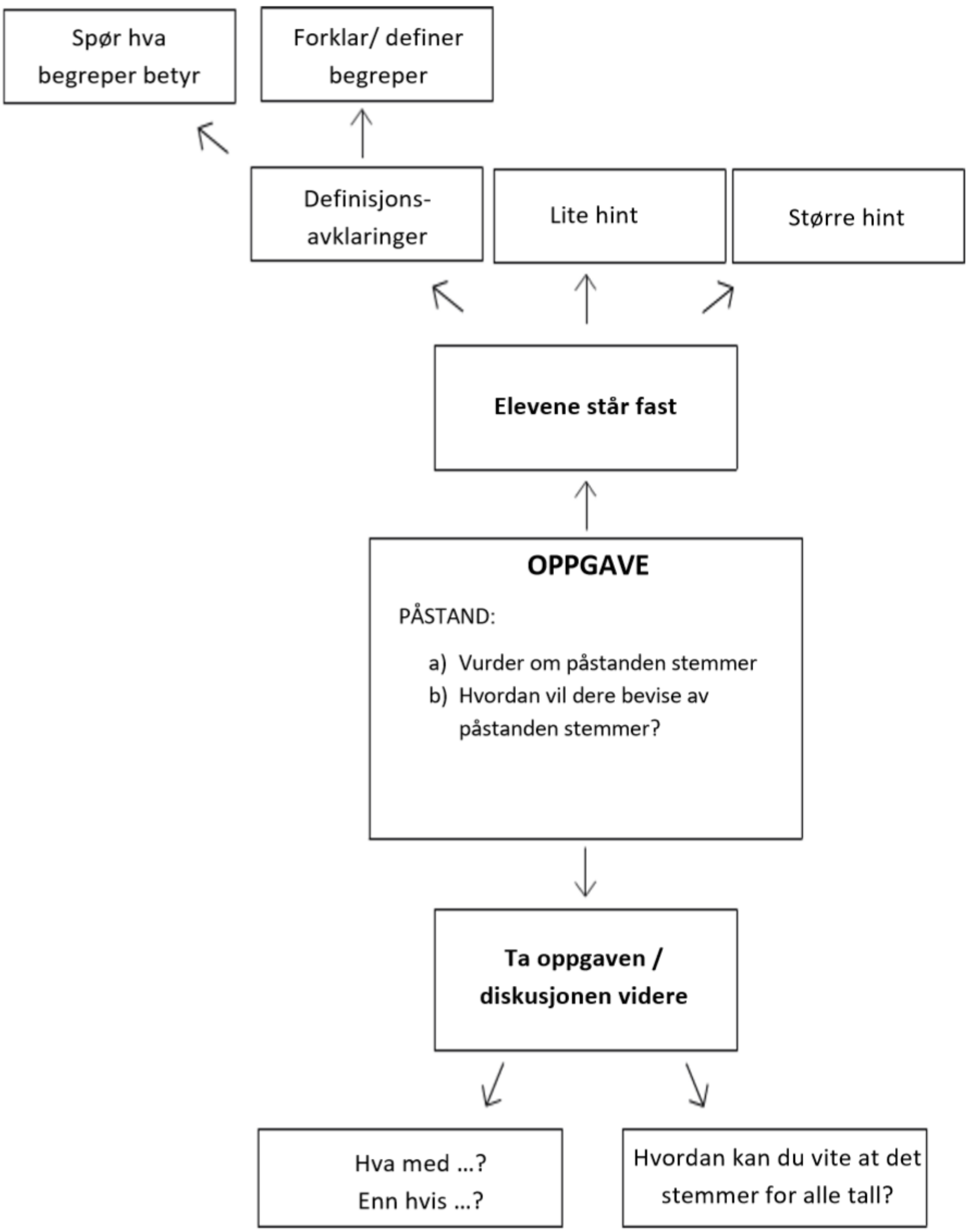
Bilde 1 Illustrasjon av elevoppgave 3

Hensikten med delspørsmål a) var at elevene skulle vurdere om de var enig eller uenig i påstanden. Meningen med delspørsmål b) var at elevene skulle strukturere sin matematiske tenkning og eksplisitt redegjøre for hvordan en slik påstand kan bevises.

Oppgavens utfordring skulle relateres til valideringen (hvordan vil dere bevise påstanden?), ikke til det å forstå påstanden i seg selv. Jeg valgte derfor påstander knyttet til egenskaper som skulle være kjent for elevene: *primtall, oddetall, delelighet og produkt.* Dette er i tråd med det første prinsippet til Goldin (1997); oppgavens tilgjengelighet, som handler om at innholdet i oppgaven skal være tilpasset elevgruppens forutsetninger. I tillegg var påstandene valgt med tanke på oppgavens fleksibilitet og struktur. Det innebærer at påstandene kan begrunnes på flere måter, både verbalt, visuelt (ved bruk av figurer), og algebraisk, noe som belyses i Goldin's (1997) andre prinsipp; rik representasjonsstruktur. Oppgavens fleksibilitet, ble besørget gjennom formulering av deloppgave b. I stedet for å kreve et matematisk bevis, spurte oppgaven hvordan *dere* vil bevise at påstanden stemmer. Dette ivaretar både elever som har lite erfaring med matematiske bevis, og sørger samtidig for at elever med større forståelse for konseptet bevis gis mulighet til å utforme dette.

Videre påpeker Goldin (1997) viktigheten av å tillatte fri problemløsning. Det innebærer å gi elevene mulighet til å utforske oppgaven på egenhånd, uten at intervjueren stiller ledende spørsmål. Dette prinsippet ble ivaretatt ved at jeg som intervjuer var lite involvert, og eventuelle hint og aktuelle oppfølgingsspørsmål var bestemt på forhånd.

Jeg så for meg at presentasjon av oppgaven i første omgang kunne få to utfall: elevene går i gang med å diskutere og løse oppgaven; eller elevene står fast. På bakgrunn av dette utformet jeg en intervjuguide for hver av oppgavene (se vedlegg 2). Spørsmålene ble utformet med tanke på eventuelle scenarier som kunne oppstå i intervjuet, med utgangspunkt i følgende mal (Figur 1).



Figur 1: mal for utforming av hint og aktuelle spørsmål

Malen har ingen kronologisk utforming, som betyr at eventuelle spørsmål og avklaringer er styrt av elevens respons i intervjuet. Intervjuguiden er dermed semi-strukturert (Kvale & Brinkmann, 2015). Oppfølgingsspørsmål utover denne skissen, var av typen «hva tenker du nå?» eller «kan du utdype det?».

Spørsmålene skulle gi elevene mulighet til å komme videre med oppgaven, og muliggjøre eventuelle selv-korrigeringer uten at jeg som intervjuer kom med utsagn av typen «rett» eller «galt». Dette er i tråd med Goldin's (1997) fjerde prinsipp, og handler om å bedre muligheten for repliserbarhet og generalisering. Goldin's (1997) siste prinsipp handler om å gi informantene ulike representasjonsmuligheter. I dette intervjuet ble elevene gitt oppgavearket, blanke A4-ark og blyanter.

3.3.3 Gjennomføring av intervju

Jeg valgte å filme intervjuene for å samle inn både verbale og ikke-verbale data. I tillegg samlet jeg inn alle notater elevene hadde gjort underveis. Dette ga meg mulighet til å utarbeide nøyaktige transkripsjoner der elevenes verbale utsagn, handlinger og skriftlig data ble satt i sammenheng og samlet i samme dokument. Fordi jeg var interessert i hvordan elevene løste oppgaven var filmkameraets fokus rettet mot bordet der elevene utarbeidet løsninger.

Elevene ble intervjuet parvis, for å trygge situasjonen for elevene, og samtidig tilrettelegge for at samtalen kunne foregå elevene imellom. Hensikten var at jeg som intervjuer skulle være minst mulig involvert, og dermed kunne observere mer enn å delta. Intervjuene ble gjennomført på et grupperom ved de respektive skolene i skoletiden, og hadde en varighet på om lag 45 minutt. Før oppstart av hvert intervju ble elevene igjen informert om hensikt; anonymisering; og destruering av datamaterialet. Jeg fortalte at jeg ville innta en passiv rolle, og at de ikke måtte bli usikre dersom jeg ikke responderte på løsningsforslagene. Videre sa jeg at det var mange måter å løse oppgavene på, at jeg var interessert i hvordan de tenkte for å komme til et svar, og elevene ble oppfordret til å «tenke høyt».

Jeg gjennomførte et prøveintervju for å gjøre meg kjent med situasjonen. Da jeg så igjennom filmopptaket, oppdaget jeg at jeg i spørsmålsformuleringen avvikte noe fra intervjuguiden, og at jeg var snar å bidra hvis samtalen stoppet opp. Denne erfaringen gjorde at jeg i de neste intervjuene var mindre involvert, lot elevene få mer tid til å tenke, og forholdt meg til spørsmålsformuleringene slik de var planlagt i intervjuguiden.

3.4 Analyseprosessen

Del 1: Induktiv tilnærming

Dataanalyse er prosessen som brukes for å svare på forskningsspørsmålet (Merriam, 2009). I kvalitative studier er prosessen oftest induktiv, som innebærer at forskeren tar utgangspunkt i innsamlet data, og utarbeider kategorier eller temaer basert på datamaterialet (Creswell, 2014). Ettersom hensikten med denne studien er å undersøke kjennetegn ved bevisprosessen, var fokus i analysen å identifisere typiske og spesielle strategier og begrunnelser som framkom i intervjusituasjonene, og jeg valgte derfor en induktiv, tematisk analysetilnærming.

Tematisk analyse innebærer ifølge Braun og Clarke (2006) å søke i datamaterialet på tvers av datasettene, for å identifisere og rapportere gjentakende mønster (eller tema) i datamaterialet. De skriver videre at tematisk analyse er en grunnleggende metode for kvalitativ analyse, og at det er den første kvalitative metoden for analyse som forskere bør lære. Braun og Clarke (2006) gir en beskrivelse av den tematiske analyseprosessen, gjennom seks faser. Fasene trenger ikke nødvendigvis å betraktes som en lineær framgangsmåte, og forskeren kan velge å bevege seg mellom fasene etter behov. Denne stegvise beskrivelsen ga likevel en systematisk retning for min analyseprosess.

Intervjuene ble gjennomført ved to skoler over en periode på ni dager. I tiden mellom intervjuene startet jeg transkriberingen. Transkribering er en skriftliggjøring av verbale data, og utgjør en del av Braun og Clarke's (2006) fase én, som handler om å skaffe kjennskap til datamaterialet. Jeg transkriberte på normalisert bokmål, og illustrerte korte pauser med (..), lengre pauser over 4 sekund med (…). Denne fasen var tidkrevende, men opplevdes interessant da jeg til stadighet oppdaget nye sekvenser ved elevenes bevisprosess, som jeg ikke hadde lagt merke til mens intervjuet pågikk. I løpet av transkripsjonsprosessen hadde jeg utviklet en grundig innsikt i datamaterialet. Etter at all data var transkribert, leste jeg igjennom transkripsjonene samtidig som jeg hørte på videoklippene for å sikre at ingen data var gått tapt i overgangen fra video til tekst. Når transkripsjonene var fullført, satt jeg tilbake med syv dokumenter, ett for hvert av parene.

Videre tok jeg utskrift av dokumentene, og startet en manuell koding for hvert av informantparene. Å generere innledende koder er en del av fase to i Braun og Clarke (2006). Merriam (2009) beskriver en kode som et notat, en kommentar eller observasjon som noteres ved siden av data som virker interessant, potensielt relevant eller viktig for studien. Fordi jeg ikke var bestemt på hva jeg så etter, kodet jeg alt som kunne være nyttig, og gjorde med det en åpen koding (Merriam, 2009), som er en induktiv prosess. Braun og Clarke (2006) beskriver en induktiv analyse som en prosess der forskeren koder data uten å forsøke å tilpasse dataene til allerede eksisterende rammeverk, og der forskerens analytiske forutsetninger legges til side. Denne formen for tematisk analyse er styrt av dataene, og forskeren tar altså ikke hensyn til kategorier som er identifisert i tidligere forskning. Braun og Clarke (2006) påpeker imidlertid at forskere ikke kan frigjøre seg fullstendig fra sine teoretiske og epistemologiske standpunkt.

Fordi jeg hadde store mengder datamateriale gjorde jeg i denne fasen en selektering. Elevresponsene på oppgave 1 og 2 genererte lite data (korte besvarelser). I tillegg så det ut til å være lite variasjon på tvers av intervjusettene. Jeg valgte derfor å fortsette analyseprosessen med fokus på oppgave 3, fordi data fra denne oppgaven var innholdsrik (mye interessant data), og responsen fra de ulike parene hadde større variasjon. Valget ble tatt med støtte i Cohen m.fl. (2011), som skriver at smalt fokusert forskning, kan gi bemerkelsesverdige resultater.

Analyse av oppgave 3

Hensikten med innledende koding er å identifisere en egenskap ved datasekvenser, som synes interessant for den som analyserer (Braun & Clarke, 2006). Kodene var beskrivende for innholdet som var markert, slik som for eksempel: *definerer et oddetall, tester påstanden med tall, snakker om potenser, refererer til gangetabellen, diskuterer algebraiske uttrykk, påpeker begrensninger i strategivalg, etc.* På denne måten organiserte jeg dataene, og skaffet oversikt over elevenes utsagn og handlinger i bevisprosessen.

Etter kodingen gikk jeg gjennom datamaterialet og grupperte sekvensene som lignet, på tvers av intervjuene. Denne delen av analysen utgjør fase tre i Braun og Clarke (2006), og innebærer å sortere de forskjellige kodene i potensielle kategorier. Å kategorisere datamaterialet kalles noen ganger analytisk koding (Merriam, 2009) fordi grupperingen gjøres på bakgrunn av tolkninger og refleksjoner om hva data kan bety. Etter grupperingen hadde jeg i alt 10 induktive kategorier, som jeg organiserte hierarkisk basert på grad av generalitet: 1) *setter inn tilfeldige tall; 2) undersøker en tallrekke; 3) uttrykker at sjekk av noen få tilfeller er utilstrekkelig; 4) uttrykker at eksempler ikke er nok; 5) uttrykker behov for generalisering; 6) leter etter egenskaper ved de matematiske begrepene; 7) forsøker å begrunne mer generelt; 8) begrunner med figur; 9) begrunner ved hjelp av plassverdisystemet; og 10) algebraisk begrunnelse.* I tillegg til disse hadde jeg kategorien: *ikke relevant.* Den sistnevnte kategorien samlet all resterende data som ikke hadde med oppgaven å gjøre, eller elevresponser som inneholdt for lite informasjon til å gis mening. På denne måten sikret jeg at kategoriene var uttømmende; det vil si at all data fra oppgave 3 var plassert i kategorier (Merriam, 2009).

Braun og Clarke's (2006) siste faser innebærer; å gjennomgå kategoriene (*reviewing themes*); å definere og navngi kategoriene (*defining and naming themes*) og skrive rapport (*producing the report*). Disse fasene foregikk parallelt i analyseprosessens del 2.

Del 2: Teoretisering

I denne delen av analyseprosessen arbeidet jeg med å definere, teoretisere, og raffinere de innledende kategoriene. Teoretisering handler om å oppdage og manipulere abstrakte kategorier, og undersøke forholdene mellom dem (Merriam, 2009), ofte i tilknytning til tidligere forskning (Braun & Clarke, 2006).

I gjennomgang av tidligere forskning, fant jeg nivåbeskrivelsene til Knuth m.fl. (2009) spesielt appellerende. Knuth m.fl. (2009) har ikke avgrensede kategorier, men redegjør for fire bevisproduksjonsnivå. Med utgangspunkt i mitt datamateriale, og de utarbeidede kategoriene, fant jeg igjen data som passet med Knuth m.fl. (2009) sine nivåbeskrivelser. Knuth m.fl. (2009) sitt rammeverk ble brukt som en støtte for å beskrive og presisere mine kategorier, og videre en hjelp for å systematisere kategoriene inn i de fire nivåene. Denne systematiseringen minner om en mer deduktiv analysetilnærming.

I bearbeidelse og nivåplassering av kategoriene, oppdaget jeg at noen kategorier i stor grad overlappet hverandre. Følgende kategorier ble slått sammen:

<table>
<tr><td>4) uttrykker at eksempler ikke er nok</td><td rowspan="2">4) Forstår eksemplers begrensning</td></tr>
<tr><td>5) uttrykker behov for generalisering</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>6) leter etter egenskaper ved de matematiske begrepene</td><td rowspan="2">5) Forsøk på generell begrunnelse</td></tr>
<tr><td>7) forsøker å begrunne mer generelt</td></tr>
</table>

Tabell 1: Sammenslåing av kategorier etter teoretisering

I tillegg endret jeg den innledende kategorien *begrunnelse med figur*, til *visuell begrunnelse*. De åtte endelige kategoriene utgjør studiens funn, og presenteres i rapportens kapittel 4, analyse og funn.

3.5 Kvalitet i studien

Cohen m.fl. (2011) skriver at kvaliteten på all forskning kan vurderes gjennom begrepene validitet og reliabilitet. Måten forskeren sørger for studiens validitet og reliabilitet er avhengig av forskningstilnærmingen, men målet er uansett å besørge troverdigheten og gyldigheten til forskningen som er gjort, og resultatene som presenteres (Merriam, 2009). I sammenheng med begrepsbruken til Tjora (2017) vil reliabilitet henspille til studiens pålitelighet, mens validitet handler om gyldighet og generaliserbarhet, henholdsvis indre og ytre validitet (Cohen m.fl., 2011).

3.5.1 Validitet

Kvale og Brinkmann (2015) skriver at validitet handler om gyldigheten av de resultatene som presenteres. Cohen m.fl. (2011) gjør et skille mellom indre og ytre validitet. Indre validitet omhandler i hvilken grad funnene i forskningsprosjektet samsvarer med datamaterialet, altså om resultatene er gyldige for det utvalget en har studert. Ytre validitet handler om hvorvidt resultatene kan generaliseres. Generaliserbarhet er knyttet til forskningens relevans utover de enheter som faktisk er undersøkt (Tjora, 2017). Thagaard (2013) refererer til dette som overførbarhet, og dermed knyttes ytre validitet til hvorvidt tolkninger som er utviklet innenfor et prosjekt, også kan ha gyldighet i andre sammenhenger. Kvale og Brinkmann (2015) presenterer ulike former for generalisering. Ettersom utvalget i dette prosjektet ikke er representativt for en større populasjon, er naturalistisk generalisering mest relevant for mitt prosjekt. Naturalistisk generaliserbarhet forbindes med gjenkjennelsesaspektet, og krever at rapporten gir en klar, detaljert og dyptgående beskrivelse av studien, slik at leseren selv gis muligheten til å vurdere om forskningsresultatene har relevans for og kan overføres til andre situasjoner.

I denne studien er validiteten ivaretatt med utgangspunkt i Kvale og Brinkmann (2015) sine syv stadier for validering av forskning: *tematisering, planlegging, intervjuing, transkribering, analysering, validering og rapportering.* Forskningsspørsmålet ble utledet med bakgrunn i egne interesser, teori og tidligere forskning. På den måten er problemstillingen en logisk følge av prosjektets tema, noe som ifølge Kvale og Brinkmann (2015) styrker validiteten til studien. Videre ble det gjort grundig planlegging, der jeg tok hensyn til hvilke metoder som var gunstige for å finne svar på problemstillingen. Dette ble diskutert i oppgavens del 3.3, datainnsamling. I planleggingen ble det også tatt hensyn til etiske aspekter (se avsnitt 3.7). Validitet i intervjusituasjonen handler om intervjupersonens troverdighet, og kvaliteten på intervjuet. Prøveintervjuet bidro til å styrke kvaliteten på de neste intervjuene, fordi jeg fikk erfaring med intervjuguiden, ga elevene mer betenkningstid, og unngikk ledende spørsmål. Jeg var opptatt av at intervjuet skulle oppleves behagelig for informantene, men det er likevel sannsynlig at elevenes svar var påvirket av situasjonen. Et annet aspekt som kan være truende for den indre validiteten er hvorvidt elevenes handlinger i intervjusituasjonen virkelig gjenspeiler deres tankeprosess. Validitet i funn er avhengig av at vi aksepterer den subjektive antakelsen om at elevenes respons i intervjuet er en troverdig kilde til de mentale prosessene.

Den fjerde fasen til Kvale og Brinkmann (2015) handler om transkriberingen og valg av språklig stil, der målet er å gjøre en gyldig overføring fra muntlig til skriftlig form. I transkripsjonen ble dialekten til elevene omgjort til bokmål. Dette kan føre til tap av mening, men fordi jeg selv er av samme opprinnelse som elevene i studien, og har god forståelse for meningen i ord og uttrykk, anser jeg denne oversettelsen av liten betydning for validiteten i transkriptene. Nøyaktighet i transkripsjonen ble også sikret ved at jeg parallelt med videoavspilling, leste i gjennom transkripsjonen.

I analyseprosessen hadde jeg en induktiv tilnærming til datamaterialet, noe som ifølge Cohen m.fl. (2011) styrker validiteten sammenlignet med studier der kategoriene er forhåndsbestemt. Den teoretiske analysedelen ble gjennomført med støtte i tidligere forskning, for å styrke validiteten i fortolkningene. De siste fasene i Kvale og Brinkmann (2015) er validering og rapportering, og ses opp imot studiens ytre validitet. Utvalget ikke er representativt, og målet med studien er heller ikke å generalisere til en større populasjon. Den ytre validiteten er styrket gjennom en presis beskrivelse av forskningsforløpet, rike beskrivelser og synliggjøring av datamateriale. Slik har jeg tilrettelagt for naturalistisk generalisering, der leseren gis mulighet til å vurdere hvorvidt resultater kan overføres til andre situasjoner.

3.5.2 Reliabilitet

Reliabilitet har med forskningsresultatenes konsistens og troverdighet å gjøre (Kvale & Brinkmann, 2015), og innebærer hvordan data samles inn, anvendes og bearbeides. I utgangspunktet hevder Thagaard (2013) at reliabilitet refererer til spørsmålet om en annen forsker som anvender de samme metodene, vil komme frem til samme resultat. Det er imidlertid et spørsmål om slik repliserbarhet er et relevant kriterium i kvalitativ forskning. Merriam (2009) påpeker at personers holdninger og kunnskap ikke er statisk, men forandres over tid. Dermed vil to like studier, med like betingelser generere ulike resultater.

Tillitt til forskningen er et uttrykk for troverdigheten. Reliabilitet kan dermed knyttes til spørsmålet om en kritisk vurdering av prosjektet gir inntrykk av at forskningen er utført på en pålitelig og tillitvekkende måte (Thagaard, 2013). Et middel for å styrke reliabiliteten er å gjøre forskningsprosessen transparent for leseren. Dette vil gjøre det mulig for leseren å vurdere kvaliteten på prosjektet, og verdien av resultatene, gjennom vurdering av hvorvidt det som rapporteres om, oppleves som troverdig (Cohen m.fl., 2011).

Reliabiliteten i denne studien er styrket ved at jeg viser eksempler fra datamaterialet, og på den måten tydeliggjør skillet mellom den informasjonen jeg har fått gjennom intervjuene, og de vurderingene jeg gjør av informasjonen (Thagaard, 2013). Min uerfarenhet i forskningsfeltet har også betydning for studiens reliabilitet. Metodedelen i rapporten er utformet med hensikt om å styrke påliteligheten, ved at leseren får god innsikt i prosessen, og gjøres oppmerksom på begrunnelsene for valgene jeg har tatt. I tillegg er bruk av oppgavebaserte intervjuer med på å styrke reliabiliteten, fordi oppgavene enkelt kan testes av andre forskere. Likevel er intervjuguiden semi-strukturert, som betyr at rekkefølgen og aktuelle spørsmål er styrt av intervjueren og informantene, noe som vil påvirke resultatene.

3.6 Metodekritikk

I diskusjonen om studiens kvalitet, var jeg innom repliserbarhet, mulighet for sammenligning og generalisering. Metodevalget svekker studiens ytre validitet, fordi utvalget er lite og ikke-representativt, og dermed kan ikke resultatene generaliseres til en større populasjon (Cohen m.fl., 2011). Dersom jeg hadde valgt en kvantitativ tilnærming kunne jeg for eksempel tatt i bruk en survey-undersøkelse der elevene løste bevisoppgaver skriftlig, noe som ville muliggjort statistisk generalisering. Det ville imidlertid hindret meg i å generere informasjon om elevenes tankeprosesser, og følgelig gjort det vanskelig å besvare forskningsspørsmålet. Kvalitative studier er umulig å gjenskape helt presist, fordi resultatene er betinget av kontekst og samspillet mellom personene som er tilstede i intervjuet (Postholm, 2010).

Et annet kritikkverdig aspekt er at elevene ble tatt ut av sine naturlige omgivelser. Schoenfeld (2007) omtaler dette som konteksteffekten, og sier at mennesker vil opptre forskjellig avhengig av omgivelsene. Dersom elevene arbeidet med oppgavene i klasserommet uten påvirkning av meg som forsker, kan det være at bevisprosessen hadde utspilt seg på en annen måte. I tillegg ble analysen avgrenset til én av de tre oppgavene. Dersom jeg hadde tatt i bruk alle oppgavene, kunne jeg oppdaget flere nyanser ved bevisprosessen.

Et siste aspekt som jeg velger å trekke frem er at studien bygger på et konstruktivistisk kunnskapssyn. Det innebærer at kunnskapen som er etablert, er subjektiv. Resultatene kan derfor ikke forstås som en objektiv sannhet på virkeligheten om studeres.

3.7 Etiske betraktninger

Forskningsetiske overveielser er en del av hele forskningsprosessen. De generelle krav til samfunnsforskning er formulert av Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) (2016). Som hovedregel skal forskningsprosjekter som forutsetter aktiv deltakelse settes i gang bare etter deltakernes informerte og frie samtykke (NESH, 2016). Jeg utarbeidet informasjonsskriv og samtykkeskjema (se vedlegg 3). Informasjonsskrivet skulle sikre at informantene deltok frivillig, og at de var godt informert om studiens formål. Jeg informerte om studiens hensikt; ivaretakelse av elevens anonymitet; at data skulle oppbevares innelåst og atskilt fra personopplysninger; og videre at data ville destrueres ved prosjektslutt. Fordi elevene som ble spurt var i alderen 14-16 år, ble det i tråd med NESH (2016) innhentet samtykke fra både eleven selv og elevens foresatte.

Prosjektet ble i en tidlig fase meldt til Norsk senter for forskningsdata (NSD) (se vedlegg 4). Informasjonen jeg var interessert i å skaffe, innebar ingen sensitive opplysninger utover alder og vurdering i faget. NSD gjorde en forenklet vurdering, og godkjente prosjektet under forutsetning av at krav til behandling av personopplysninger (anonymitet og oppbevaring av data) ble oppfylt.

Anonymiteten ble ivaretatt ved at filmkameraet var rettet mot bordet der elevene arbeidet, og ingen ansikter var synlige. I tråd med Thagaard (2013) sine anbefalinger for sikring av konfidensialitet, ble alle informantene i rapporten gitt fiktive navn. Som nevnt er også informantenes dialekt skjult, ved at jeg oversatte dialektene til bokmål. All data ble lagret på ekstern harddisk, oppbevart i låst skap, og innsyn var forbehold meg og min veileder.

Ifølge Thagaard (2013) er det et viktig etisk prinsipp av deltakelse ikke på noen måte får uheldige konsekvenser for informantene. Intervjuene skulle gjennomføres i skoletiden, og elevene måtte tas ut av undervisning. Intervjuet hadde en planlagt varighet på 45 minutter, og innebar løsning av matematikkoppgaver, som i beste tilfellet ga elevene en læringsmulighet. Oppgavene ble også lagt fram som en gunstig øvelse før 10.klassingenes eventuelle muntligeksamen i matematikk, fordi tema var argumentasjon og begrunnelse for matematiske påstander. I samråd med lærerne ble konsekvensene vurdert som heldige mer enn uheldige.

4 Analyse og funn

I dette kapitlet vil jeg presentere studiens funn, ved å redegjøre for de åtte kategoriene som jeg utviklet for å beskrive bevisprosessen til elevene i dette prosjektet.

Informantene presentert parvis med fiktive navn; Anders og Patrik; Martin og Espen; Viktor og Henrik; Jonas og Simen; Sofie og Ada; Johan og Emma; Emil og Milla.

4.1 Oppgave 3

OPPGAVE 3

PÅSTAND: *Produktet av to oddetall er alltid et oddetall.*

a) Vurder om påstanden stemmer

b) Hvordan vil dere bevise at påstanden stemmer?

Kategori 1: «Setter inn tilfeldige tall»

I arbeid med oppgave 3, var det to elever som forsøkte å løse oppgaven på denne måten.

> Eksempel 1:
>
> Anders: eh, ni ganger tre er tjuesyv, og eh, syv ganger syv er førtini
> Patrik: tre ganger fem
> Anders: er femten, ja, eh, det stemmer, det må jo være noe
> Patrik: ja, det må være sant
> Anders: det stemmer jo, for det blir uansett. Tre ganger tre er ni, eh, sytten ganger tre, ja, det stemmer, nei, ja, det stemmer
> Patrik: ja, produktet av to oddetall
> Anders: er et oddetall.

Her ser vi at Anders forsøker med $9 * 3$ og Patrik med $3 * 5$, og erfarer at tilfellene stemmer med påstanden. De fire første forsøkene er oddetall under 10. Det ser ut som at elevene setter inn tilfeldige oddetall og sjekker at produktet gir oddetall.

Å sette inn tilfeldige tall slik Anders og Patrik ser ut til å gjøre, tilsvarer beskrivelsene av Schifter (2009) sin kategori; slutning fra tilfeller, og omfatter situasjoner der eleven sjekker spesielle tilfeller for å støtte en generell påstand. Hun skriver at elever ofte er svært tilfredsstilt med denne typen rettferdiggjøring. *«It works in the cases I tried, so it must be true»* (Schifter, 2009, s. 74). Å sjekke noen få tilfeller er ifølge Knuth m.fl. (2009) en type empiribasert begrunnelse på bevisnivå 1. Det var flere andre par som satte inn tilfeldige tall på samme måte som Anders og Patrik.

En annen elev prøvde med tall på denne måten.

> Eksempel 2:
>
> Martin: det har jeg ikke tenkt på før, men eh, det høres riktig ut. Hvis man bare tar normale tall, for eksempel tre ganger tre som blir ni, og fem ganger fem blir tjuefem, syv ganger syv blir førtini, ni ganger ni blir åttien.

Akkurat som i eksempel 1 bruker Martin oddetall under ti. Eksemplet er likevel forskjellig fordi Martin bruker kvadrattall. I Schifter (2009) sin studie, vurderer elevene påstanden *summen av to partall er alltid partall.* Hun presenterer en elev-begrunnelse begrenset til doblinger slik som 4+4 og 8+8, og beskriver doblinger som en spesiell «klasse» av tilfeller. Dette ligner på det Martin gjør når han tester med like faktorer. Selv om strategien er utilstrekkelig, kan forsøket betraktes som mer systematisk enn forsøkene til Anders og Patrik, fordi Martin sjekker de første kvadratene i oddetallsrekka.

Å teste med bestemte klasser av tall, eller å følge en bestemt systematikk, kan være nyttig når elever tester en generell påstand, fordi de kan lykkes i å finne tilfeller som motbeviser kravene. Samtidig kan det å finne eksempler som støtter påstanden, gi større innblikk i påstandens krav. Men som Schifter (2009) presiserer, vil akkumulering av forekomster til syvende og sist ikke gi en tilstrekkelig matematisk begrunnelse. To av de andre parene brukte også kvadrattall under ti for å sjekke påstandens gyldighet.

Et siste eksempel på lignende forsøk, er hentet fra samtalen mellom Viktor og Henrik.

> Eksempel 3:
>
> Viktor: kan vi jo sette, tre ganger tre er jo ni, så det er et oddetall, og tre ganger fire, nei fire er jo ikke. Og tre ganger fem er femten. Hm. Ja det er jo kanskje noe.
> Henrik: tre gange syv er tjueen

Fortsatt ser vi at elevene tester enkle multiplikasjonsstykker med tall under ti. Det som er forskjellig her, er at Viktor og Henrik forholder seg til tre-gangen. De beholder en av faktorene konstant, og varierer den andre, noe som er hakket mer systematisk enn eksempel 1, og en annen type systematikk enn Martin viste i eksempel 2. Systematisk sjekk av noen få tilfeller inngår som et av eksemplene på empiribaserte begrunnelser på nivå 1 i Knuth m.fl. (2009). Den samme strategien ble benyttet av et av de andre parene, da med multiplikasjoner i fem-gangen.

Oppsummering av kategori 1

Det som er felles for de tre eksemplene er at elevene setter inn tilfeldige, enkle oddetall for å sjekke at påstanden stemmer. Elevenes begrunnelser er dermed empiribasert og utilstrekkelig. Å verifisere flere tilfeller for å vurdere gyldigheten av en påstand, slik elevene gjør i eksempel 1, 2 og 3, utgjør en av de første formene for generalisering, og beskrives av Balacheff (1988) som naiv empirisme.

Forskjeller i de tre eksemplene er relatert til systematikk og grad av overbevisning. Systematikken i tall-valg varierer fra helt tilfeldige tall, til kvadrattall, fast og variabel faktor. Selv om systematikken øker, er det fremdeles tilfeldige tall som settes inn. Systematisk sjekk av tall er en strategi som kan gi et uttømmende bevis (*proof by exhaustion*), for ikke-generelle påstander (slik som: *tallet 7 er et primtall).* Det innebærer imidlertid å teste hele settet av muligheter (Knuth m.fl., 2009), og fungerer ikke for generelle påstander slik som her.

Eksemplene viser også at det er forskjell i elevenes grad av overbevisning. Anders og Patrik i eksempel 1, ser ut til å være fornøyde (*ja, det stemmer)*, mens de andre parene i eksempel 2 og 3, uttrykker vurderinger som er mer hypotetiske (*det høres riktig ut; ja, det er kanskje noe).* Ifølge Balacheff (1988) er pragmatiske bevis, slik som naiv empirisme, godkjent som bevis av de som produserer dem. Noen synes sjekk av tall er et tilstrekkelig bevis, andre ser ut til å forstå at beviset ikke er akseptert. Hypotetiske utsagn kan derfor bety at elevene er i en utforskende fase.

Kategori 2: «Undersøker en tallrekke»

Jonas og Simen forsøkte å løse oppgaven slik.

> Eksempel 4
>
> Jonas: La oss si at. Vi tar tre som et eksempel. Ikke sant. Så ser vi her at [skriver 3,6,9,12,15] tre ganger en er tre, tre ganger to er seks, tre ganger tre er ni, tolv, femten. Her ser vi at annethvert er oddetall, ikke sant. Og det er jo på det som er ganget med et oddetall.
> Simen: Også kommer det til å fortsette slik.

Jonas tar utgangspunkt i tre-gangen, og påpeker at annethvert tall er oddetall. Han sier videre at det er *«på det som er ganget med oddetall».* Simen fastslår at rekka kommer til å fortsette slik. Det kan tyde på at elevene utforsker regelmessigheten til tallrekka.

Jonas og Simen var det eneste paret som brukte denne strategien som et umiddelbart første forsøk på å løse oppgaven. Andre par gjorde lignende forsøk først etter at samtalen hadde pågått en stund. På oppfølgingsspørsmålet «hvordan kan du vite at det stemmer for alle oddetall?» responderte Anders og Patrik på denne måten.

> Eksempel 5
>
> Anders: altså, hvis du (..) eh (..) for eksempel hvis vi tar fem-gangen nå, så når det ganges med partall, så blir det jo partall, mens hver gang det ganges med et oddetall, så blir det et oddetall.
> (…)
> Anders: Hvis du tar fem ganger to, så blir det ti, også hvis du tar fem ganger tre, så blir det femten, også fem ganger fire
> Patrik: er tjue
> Anders: også blir det igjen tjuefem, når det ganges med et oddetall, og slik er det i, jeg tror det er i alle gangene ja. Når det ganges med et partall, så blir det, når oddetall ganges med partall, så blir det partall, mens når oddetall ganges med oddetall så blir det oddetall.

Her bruker Anders fem-gangen som utgangspunkt, og sier at hver gang faktorene er oddetall, er produktet oddetall. Han viser de første tilfellene ved oppramsing, men det kan se ut som at Anders antyder en regelmessighet i tallrekka når han sier «o*gså blir det igjen tjuefem*».

Karakteristisk for begge eksemplene i denne kategorien er at elevene påpeker et gjentakende mønster i de utvalgte tallrekkene. Forskjellen er at Jonas og Simen bare betrakter regelmessigheten i tre-gangen, mens Anders bemerker at regelmessigheten gjelder for alle «gangene» i gangetabellen. Eksemplene ligner på det Viktor og Henrik gjorde i eksempel 3 (kategori 1), når de beholdt en faktor konstant og varierte den andre. Ulikheten er at elevene i kategori 2, ikke bare sjekker noen få tilfeller, men beskriver et gjentakende mønster. Den eksplisitte bemerkningen av tallrekkas regularitet, utgjør forskjellen fra kategori 1 «setter inn tilfeldige tall».

Oppsummering av kategori 2

Det som er felles for begrunnelsene i denne kategorien, er at elevene henviser til kjente tallrekker og uttrykker en regelmessighet. Til forskjell fra kategorien «setter inn tilfeldige tall» er det ikke de spesifikke tilfellene som er i fokus, men mønsteret av oddetallsprodukter i tallrekkene. Å forholde seg til tallrekker er en enda tydeligere systematikk enn forsøkene i kategori 1, og progresjonen er tydelig fordi elevene forsøker å forklare en generell regularitet. Selv om regulariteten kan vise seg å være sann i alle tilfeller – kan et antatt mønster være misvisende (Schoenfeld, 2009) og begrunnelsene er derfor utilstrekkelig. I likhet med kategori 1 appellerer elevene også her til empiriske representasjoner (multiplikasjoner med faktor tre eller fem), som er kjennetegnet for induktive bevisstrategier (Harel & Sowder, 1998). Kategori 2 er altså en type empiribasert forsøk, og kategorien tilhører derfor nivå 1 i Knuth m.fl. (2009).

Kategori 3: «Uttrykker at sjekk av noen få tilfeller er utilstrekkelig»

I arbeid med oppgavene gjorde elevene stadige vurderinger av egne strategier. Etter Martins test av de første kvadrattallene i eksempel 2 (kategori 1), var responsen fra Espen slik.

> Eksempel 6
>
> Espen: men hvis man regner lenger ut så kan det jo hende at det endrer seg
> Martin: mm
> Espen: enn de typisk første oddetallene

Espen hevder at resultatet kan endre seg for andre (større) oddetall. Fra Schoenfeld (2009) vet vi at uten et fullverdig bevis, finnes det en risiko for å bli lurt av et falskt mønster. Espen bemerker at tilfellene kan endre seg, og antyder dermed at sjekk av noen få tilfeller er utilstrekkelig bevis. Selv om Espen peker på en begrensning ved Martins tall-valg, sier han ikke eksplisitt at sjekk av tilfeller (for eksempel med større tall) er en snever strategi.

En annen elev vurderte tallrekke-strategien i kategori 2 på denne måten.

> Eksempel 7
>
> Jonas: Men, jeg tror man fortsatt trenger litt sterkere bevis på, eh (..) hvorfor det stemmer.

Her hevder Jonas at de trenger et «*sterkere bevis*». Det kan tyde på at Jonas forstår at begrunnelsen med tallrekka ikke er et akseptert bevis. I likhet med responsen til Espen, gir heller ikke Jonas en forklaring på hva som må til for at beviset skal være godt nok. Forskjellen på eksemplene er at Espen er tydelig på at det fortsatt kan finnes tilfeller der påstanden ikke stemmer, mens Jonas bare indikerer at begrunnelsen ikke er god nok, uten å si hva som er svakheten.

Oppsummering av kategori 3

Kategorien inkluderer responser der elevene vurderer empiriske begrunnelser som utilstrekkelig, men der elevene ikke eksplisitt uttrykker et behov for å sjekke alle mulige tilfeller, og heller ikke konstaterer at akkumulering av flere eksempler vil være en utilstrekkelig bevisstrategi. Karakteristisk for kategori 3 er at elevene gjør kritiske vurderinger, og bemerker svakheter ved empiriske begrunnelser, og viser dermed en progresjon fra nivå 1. Utsagnene gir likevel ikke nok informasjon til å oppfylle kravene for progresjonsnivå 2 i Knuth m.fl. (2009). Kategorien er derfor passende mellom nivå 1 og 2. Det var flere av elevene som kom med lignende utsagn som Jonas i eksempel 7 i løpet av bevisprosessen.

Kategori 4: «Forstår eksemplers begrensning»

Etter å ha testet for noen få tilfeller fortsetter samtalen mellom Viktor og Henrik slik.

> Eksempel 8
>
> Henrik: ja, vi kan jo ta et hvilket som helst tilfeldig oddetall da, og gange det med et annet
> Viktor: vi kan jo prøve det, men
> Henrik: også gjøre det til evig tid

Henrik foreslår å teste for flere tilfeller, og fortsette i det uendelige. Det kan bety at Henrik foreslår å gjøre et uttømmende bevis, ved å sjekke alle mulige kombinasjoner av oddetall. Knuth m.fl. (2009) skriver at begrunnelser på nivå 2 inkluderer responser der elevene viser en bevissthet om begrensningen i empiribaserte bevisstrategier, ved for eksempel å uttrykke et behov for å håndtere alle tilfeller, slik det ser ut som at Henrik gjør her. Selv om forslaget ikke er praktisk gjennomførbart, viser Henrik med dette et progresjonssteg fra bevisnivå 1 til nivå 2.

Viktor fortsetter vurderingen slik.

> Eksempel 9
>
> Viktor: men man kan jo ikke sjekke absolutt alle oddetallene opp mot hverandre. Vi må finne en annen måte å begrunne det (..) uten å kaste inn et par eksempler på en måte. Og begrunne det utover eksemplene, på en annen måte.

Her sier Viktor at det ikke er mulig å sjekke alle kombinasjoner av oddetall, og at de må finne en annen måte å begrunne det på. Viktor fastslår dermed at uttømmende bevis i dette tilfellet ikke er mulig, og viser med det til eksemplers begrensning som bevis for generelle påstander. Forskjellen på eksempel 8 og eksempel 9 er bevissthet om behovet for generalitet. Viktor sier at de må begrunne det «*utover eksemplene, på en annen måte*», noe som kan bety at han ser et behov for mer generelle argumenter.

Oppsummering av kategori 4

Karakteristisk for denne kategorien er at elevene viser kjennskap til at empiriske bevis ikke er tilstrekkelig som bevis; ved enten å foreslå hva som må til, for eksempel å sjekke alle tilfeller slik Henrik gjør i eksempel 8; eller ved å påpeke eksemplers begrensninger, slik Viktor gjør i eksempel 9. Knuth m.fl. (2009) skriver at selv om elevene ikke forsøker å utforme et generelt argument, skal utsagn der elevene foreslår uttømmende bevis eller uttrykker et behov for mer generelle argument, inkluderes på nivå 2.

Kategori 5: «Forsøk på generell begrunnelse»

Etter å ha sjekket at påstanden stemte for noen spesielle tilfeller, fortsatte samtalen mellom Sofie og Ada på denne måten.

> Eksempel 10
>
> Sofie: Oddetall kan ikke deles på to, så det å gange to oddetall, vil alltid gi summen av
> Ada: av et oddetall.
> Sofie: av et nytt oddetall. Fordi (…) fordi at når man tar [peker på $3 * 3 = 9$], altså begge de tallene kan ikke deles på to [tegner streker under faktorene], og da blir jo det ni, og ni kan jo ikke heller deles [tegner strek under produktet].

Bilde 2 Sofies eksempel

Sofie definerer oddetall som et tall som ikke kan deles på to. Hun sier videre at i tilfellet $3 * 3 = 9$ er det ingen av sifrene som kan deles på to. Det ser ut som Sofie leter etter noen felles egenskaper ved sifrene i regnestykket.

Måten Sofie skriver streker under hvert av sifrene, ligner på en av faktoriseringsmetodene som presenteres i norske lærebøker (se f.eks. Bakke & Bakke, 2011). Det kan tyde på at Sofie utforsker faktorisering som et mulig hjelpemiddel i bevisprosessen, men forsøket stopper her.

En annen elev definerte partall på denne måten.

> Eksempel 11
>
> Jonas: et eller annet partall, det er et eller annet gange to. Et partall [skriver $P = x * 2$] er, kan skrive to gange x, men nå ble det det x gange to.

(…)

Jonas: oddetall kan være [skriver $O = 2x - 1$] to x minus én.

Jonas sier at partall er *«et eller annet»* gange to. Det ser ut som at Jonas bruker primtallsfaktoren to, for å definere egenskapene til partall.

Selv om Sofie definerer oddetall, og Jonas partall, kan vi likevel sammenligne definisjonene. Sofie definerer oddetall som «tall som ikke er delelig med to», og en lignende definisjon for partall vil da være «et tall som er delelig med to». Jonas beskriver at alle partall består av faktoren to, og uttrykker med det en annen type definisjon.

Jonas var den eneste som uttrykte partall på denne måten, og kom via definisjonen kjapt til det algebraiske uttrykket $2x$, og fulgte opp med at oddetall da kan uttrykkes som $2x - 1$.

En annen elev forklarte oddetall på denne måten.

Eksempel 12

Johan: hvis det var et skoleball, ville alle unntatt én fått en partner på ballet, én står alltid utenfor.

Emma: Hvis vi kanskje kan bruke det da.

Johan sier at dersom oddetall organiseres i par vil det alltid bli én til overs. Johan uttrykker en generell struktur for alle oddetall. Emma foreslår å bruke den definisjonen for å begrunne påstanden. Diskusjonen ser ut til å ha beveget seg bort fra sjekk av spesielle tilfeller, og mot undersøkelse av mer generelle strukturer. Dette er et forsøk på å utvikle generelle argumenter, noe som plasseres på nivå 2 i Knuth m.fl. (2009). Johan var den eneste eleven som brukte denne typen definisjon av oddetall. Knuth m.fl. (2009) finner at svært få elever baserer seg på en slik struktur-beskrivelse av partall og oddetall.

Det som skiller eksemplene er at Sofie ser etter felles egenskaper ved bruk av et tilfelle, Jonas uttrykker partall og oddetall generelt ved hjelp av algebraisk notasjon, mens Johan påpeker at alle oddetall har samme struktur. Felles for responsene i denne kategorien er at elevene ikke lenger er opptatt av å verifisere spesielle eksempler, men her betrakter generelle egenskaper ved begreper og tilfeller. Elevene uttrykker med det en bevissthet omkring behovet for generelle argumenter, som er et karakteristisk kjennetegn for nivå 2 i Knuth m.fl. (2009).

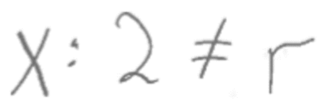
Hanna (i Weber, 2014) hevder at muligheten til å forstå et bevis, eller å utforme et bevis, er avhengig av en god forståelse for det spesifikke matematiske temaet som betraktes, og kjennskap til de involverte begrepene. Det er interessant å betrakte hvilke definisjoner elevene tar i bruk når de skal arbeide med generalisering av oddetallsprodukter, fordi Knuth m.fl. (2009) hevder at elevens forståelse av et begrep (her: oddetall/partall), vil påvirke hvilke argumenter eleven evner å produsere.

Eksempel 10, 11 og 12 viser tre ulike tilnærminger til oddetall og/eller partall: delelighet slik som Sofie, primtallsfaktorer slik som Jonas og struktur slik som Johan. Flere av elevene uttrykte samme definisjon som Sofie, og fokuserte på tallets delelighet med to. Dette var den hyppigst brukte definisjonen av oddetall. Denne observasjonen er viktig, fordi måten elevene tenker om og definerer oddetall, kan påvirke hvorvidt elevene kommer seg videre fra nivå 2, eller om det stopper her.

Viktor og Henrik var et av parene som i likhet med Sofie betraktet delelighet når de definerte oddetall. De gjorde et forsøk på generalisering.

Eksempel 13

Henrik: oddetall er jo partall pluss én. Da må du ha benevnelsen for partall også. Et tall som kan deles på to pluss én
Viktor: ja, hvordan beskriver vi et tall som kan deles på to?
Henrik: eh [skriver $x: 2 \neq$] Et rasjonalt tall da, et heltall, hvordan skriver vi det? en typ r eller noe sånt.
Viktor: ja
Henrik: [skriver $x: 2 \neq r$] altså at x delt på to ikke er et rasjonalt tall, det er ikke et heltall da, det går ikke, det vil da et oddetall være.

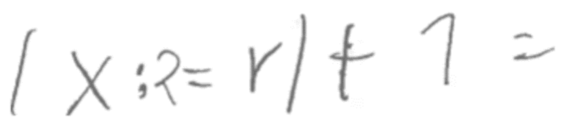


Bilde 3 Henriks uttrykk for oddetall

Det er flere viktige poeng med denne sekvensen. Først sier Henrik at et oddetall er «*partall pluss 1*», og at han derfor trenger en benevnelse for partall. Det ser ut som Henrik forsøker å finne et generelt algebraisk uttrykk for oddetall, og at han har oppdaget at han først må uttrykke et partall. Viktor fortsetter samtalen og spør hvordan de kan uttrykke et tall som kan deles på to. Viktor bruker her samme type definisjon som Sofie i eksempel 10, og betrakter tallets delelighet. Dette ser ut til å skape utfordringer for elevene.

Basert på definisjonen foreslår Henrik å skrive $x\colon 2$, og videre at uttrykket ikke skal være likt et rasjonalt tall. Et rasjonalt tall er tall som kan skrives som brøk, men det ser ut til at Viktor og Henrik egentlig mener at $x\colon 2$ ikke skal være lik et naturlig tall (heltall). Viktor fortsetter slik:

> Viktor: eller du kan også ta at du har [skriver $x\colon 2 = r$] x delt på to når det er likt et rasjonalt tall, også plusse på
> Henrik: én
> Viktor: én, da har du et oddetall [fullfører uttrykket slik |x:2=r|+1]



Bilde 4 Viktors uttrykk for oddetall

Viktor foreslår å bruke likhet i stedet for ikke-lik. De ender opp med et uttrykk som de beskriver som et tall som kan deles på to pluss én.

Å representere påstanden algebraisk, slik Viktor og Henrik forsøker her, er ifølge Kieran (2004) en genererende aktivitet, som blant annet innebærer å uttrykke numeriske forhold. Selv om uttrykket er feil, har forsøket potensiale, fordi utgangspunktet er riktig (partall pluss én). Likevel får guttene problemer når de skal bruke algebraisk notasjon, og forsøket stopper her.

Flere av elevene gjorde forsøk på å utforme generelle begrunnelser, der forsøket besto i å uttrykke det numeriske forholdet algebraisk, men der uttrykket var matematisk feil, eller ufullstendig. Knuth m.fl. (2009) beskriver slike tilfeller som forsøk på generell begrunnelse der elevene «kommer til kort», og inkluderes på nivå 2.

Oppsummering av kategori 5

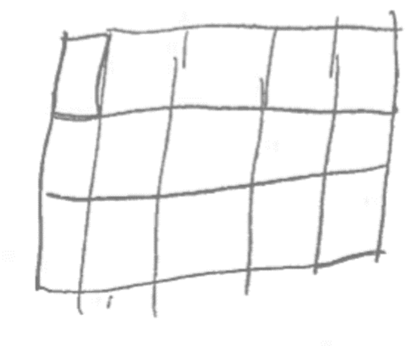
Kategorien omfatter utsagn der elevene undersøker generelle egenskaper ved de matematiske begrepene som er sentral i påstanden (her: oddetall), slik som i eksempel 11, 12 og 13, eller ved å lete etter generelle kjennetegn i spesielle tilfeller slik Sofie forsøker i eksempel 10. Elevene er ikke lenger opptatt av å verifisere spesielle eksempler, men utforsker generelle egenskaper, og synliggjør dermed at de er bevisst behovet for generelle argumenter, som er et karakteristisk kjennetegn for nivå 2 i Knuth m.fl. (2009).

Kategori 6: «Visuell begrunnelse»

Etter at bevisprosessen hadde pågått en stund, forsøkte Viktor å løse oppgaven på denne måten.

Eksempel 14

Viktor: det går an å sette det opp (..) et eller annet kvadrat tenkte jeg på (..) noe begrunnelse der, med at det ikke går an å halvere den
Henrik: ja
Viktor: ja! Kanskje! Jeg tror jeg (..) For hvis du har et kvadrat [tegner figur, Bilde 5], tar vi eh én, to, tre, fire, fem også tar vi én, to, tre



Bilde 5 Viktors figur

Viktor: så kan du jo ikke halvere den her [demonstrerer en loddrett linje i lufta med blyanten, midt i rektangelet]
Henrik: nei [nikker]
Viktor: og bli riktig. Ikke sant. Og du kan ikke halvere den her [demonstrerer en vannrett linje i lufta i midten av rektanglet]. Så når. Ganging det er jo, du kan jo se på det som lengder i et kvadrat [peker på kort- og lang-side i rektangelet], så når begge er
Henrik: oddetall
Viktor: eh, oddetall, så vil du ikke kunne [halverer rektangelet i lufta med blyanten] halvere det på en måte. Hvis vi har et partall på den ene siden, så kan vi halvere den ene siden og ikke den andre

Henrik: mhm

Viktor: så, så det er da begrunnelsen

Viktor starter med å tegne en figur (Bilde 5), og sier at multiplikasjon kan betraktes som lengder i et kvadrat (i et kvadrat er alle sidene like lange, så det Viktor egentlig refererer til er et rektangel). Videre forklarer Viktor at når begge sidene i kvadratet (rektangelet) er oddetall, vil det ikke være mulig å halvere figuren, verken på tvers eller på langs. Han presiserer også at dersom den ene siden hadde vært et partall, ville det vært mulig å halvere figuren.

Viktor velger å representere produktet av to oddetall som lengder i et rektangel, med sidelengdene tre og fem. Eksemplet illustrerer et spesifikt tilfelle ($3 * 5$), men Viktors forklaring er likevel forankret i generelle egenskaper ved oddetall. Det ser derfor ut til at tilfellet skal representere et hvilket som helst produkt av oddetallsfaktorer, og med det viser Viktor en betydelig progresjon fra nivå 1.

Tilfeller der eleven benytter spesielle tilfeller for å argumentere for generelle egenskaper og strukturer, er ifølge Balacheff (1988) sin taksonomi, kategorisert som generisk eksempel. I et generisk eksempel er eksemplet (her i form av en figur) presentert med hensikt om å bære frem det generelle. Det ser ut til at Viktor forsøker å se det generelle gjennom det spesielle, noe Mason og Pimm (1984) hevder er karakterisk for generiske eksempler.

Videre gjør Viktor en tenkt transformering av figuren når han sier *«hvis vi har et partall på den ene siden kan vi halvere den …»,* noe som er kjennetegnet for Harel og Sowder (1998) sin kategori; transformative bevisstrategier. Også dette forstås som et forsøk på å redegjøre for de generelle aspektene, heller enn det spesielle objektet. Fordi Viktor er bevisst behovet for generelle argument, er begrunnelsen plassert på nivå 2 (Knuth m.fl., 2009).

Avslutningsvis sier Viktor at *«så da er det begrunnelsen»*. Det ser ut til at Viktor er fornøyd, og dermed mener at begrunnelsen er tilstrekkelig overbevisende. I slike tilfeller betraktes begrunnelsen som et bevis, fordi et bevis er det som etablerer sannhet for personen som fører beviset (Harel & Sowder, 2007).

Kategori 7: «Begrunner ved hjelp av plassverdisystemet»

I eksempel 6 (kategori 3), var Espen tvilsom til Martins begrunnelse om at påstanden ville gjelde for alle tilfeller. Martin svarer med en ny begrunnelse. Jeg har jeg valgt å dele resonnementet i flere avsnitt, som jeg kommenterer fortløpende. Martin begynner slik.

Eksempel 15

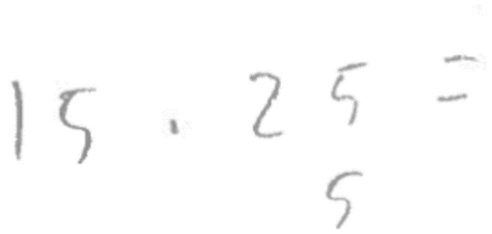
> Martin: ja men altså, det vil ikke endre seg. For hvis du tenker mellom én og ti-gangen for eksempel igjen, så én ganger, eller det siste sifferet vil jo alltid være i ti-gangen, ikke sant, så hvis du har tjuetre ganger tjuetre, så er det tre ganger tre de siste sifrene, og det vil ende på ni, uansett, så det er nok å bare ta de tallene innenfor ti-gangen. Fordi syv ganger syv blir førtini, så om jeg tar sytten ganger sytten, så vil det ende på ni uansett.

Martin hevder at mønsteret ikke vil endre seg for større tall. Han sier at det siste sifferet (i faktorene) alltid vil være i ti-gangen, og at det derfor er nok å bare teste tallene innenfor ti-gangen. Han illustrerer med tilfellet $23 * 23$. Det ser ut som at Martin mener det er nok å sjekke tilfeller med faktorer fra én til ti. Han forsetter slik.

> Martin: altså, hvis de to siste sifrene i et gangestykke, er oddetall, så vil svaret bli et oddetall, eller vil det siste sifferet bli et oddetall, og da vil hele tallet bli et oddetall. Hvis det siste sifferet er et oddetall.

Her sier Martin at det er de to siste sifrene i multiplikasjonsstykket som avgjør om produktet blir et oddetall. Espen responderer ikke på Martins begrunnelse. Martin forklarer videre.

> Martin: Altså, når du regner så starter du alltid med de bakerste tallene [peker på tilfellet $15 * 25 =$, Bilde 6], så fem ganger fem, så har du jo fem der uansett, du starter jo alltid med de bakerste tallene. Og da vet du at tallet vil ende på fem. For selv om du har liksom to i mente, så vil jo det komme på sifrene lenger til venstre
> Espen: som ikke har noe betydning for om det er et oddetall eller ikke
> Martin: så det er liksom entallplassen som har betydning for om det er et oddetall eller ikke. Det er de to siste sifrene man ganger først, og de vil også være det siste sifferet i svaret, som bestemmer om det er et oddetall eller ikke. Om det står 160 foran fem-tallet, så har ikke det noe å si. Det er jo det siste tallet som har noe å si.



Bilde 6 Martins eksempel

I denne delen av resonnementet bruker Martin tilfellet $15 * 25$. Han sier at når du regner, så vil du alltid starte med de bakerste tallene, og at det derfor er entallplassen som har betydning for om produktet er oddetall eller ikke. Det ser ut som at Martin refererer til multiplikasjonsalgoritmen for å vise at alle utregninger utover enerplassen ikke vil påvirke hvorvidt produktet er et oddetall.

Å bruke flere konkrete tilfeller for å illustrere en begrunnelse, slik Martin gjør her, er i utgangspunktet en empiribasert begrunnelse. På samme måte som tidligere (kategori 1, eksempel 2), bruker Martin kvadrattall når han eksemplifiserer. Likevel er Martins forklaring her mer generell, fordi han påpeker at for alle multiplikasjoner er det enerplassen som er avgjørende for om produktet er oddetall. Med dette viser han at det er tilstrekkelig å sjekke alle tilfeller innenfor den lille multiplikasjonstabellen. Dette kan tolkes som et forslag om å gjøre et uttømmende bevis.

I eksempel 8 (kategori 4) hadde Henrik et lignende forslag, der han foreslo å sjekke alle tilfeller i det uendelige. Det som skiller Martin fra Henrik er at Martins forslag er gjennomførbart, fordi han ved hjelp av plassverdisystemet begrunner at det er tilstrekkelig å sjekke faktorer under ti. Martin gjennomfører ikke beviset, men viser en forståelse for nødvendigheten av å sjekke alle tilfeller, og oppfyller dermed kravet for nivå 2 i Knuth m.fl. (2009) sitt rammeverk.

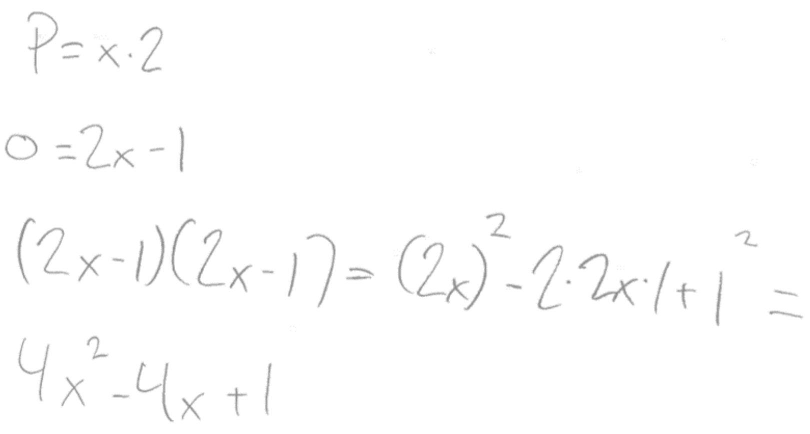
Kategori 8: «Algebraisk begrunnelse»

Jonas og Simen utformet algebraiske uttrykk for partall og oddetall (eksempel 11, kategori 5). Etter å ha vært stille en stund, forsøkte Jonas å løse oppgaven slik.

Eksempel 16

Jonas: Hvis vi tar produktet av to oddetall, da kan vi ta dette her [peker på $O = 2x - 1$, Bilde 7] og gange det med seg selv for eksempel.

Jonas: [Skriver, Bilde 7] to x minus én ganger to x minus én, eller to x i andre, det er det samme hvordan vi skriver det. Og det blir jo, skal vi se. [Skriver] bare skriv slik to x i andre minus to gange to x ganger én pluss én i andre eller bare én. Skal vi se om det var riktig. Ja, jeg har sikkert skrevet det riktig. Ja. Så har vi fire x i andre, minus fire x, pluss én. Så står vi med dette [peker på $4x^2 - 4x + 1$]



Bilde 7 Jonas' algebraiske begrunnelse

Jonas: og her har vi da et partall [peker på $4x^2$] fordi ja, fire ganger et eller annet er et partall, på samme måte som to ganger et eller annet er et partall, ja, også minus enda et partall [peker på 4x] fordi fire ganger et eller annet er et partall, så partall minus partall blir jo et partall, også har vi pluss én på slutten som da resulterer i at det må være et oddetall.

Jonas foreslår å bruke det generelle uttrykket for oddetall og multiplisere det med seg selv. Videre manipulerer han produktet ved hjelp av algebraiske regler, og ender opp med uttrykket $4x^2 - 4x + 1$. Så følger han opp med en forklaring der han sier at $4x^2 - 4x$ er partall, fordi fire ganger *«et eller annet»* (her: $x^2 og\ x$) er partall, før han til slutt forklarer at det siste leddet (pluss én) gjør at produktet må være et oddetall.

Å ta i bruk algebraisk notasjon for å representere påstanden, slik Jonas gjør her, er en systematisk strategi for å uttrykke generalitet og abstraksjon (Kilpatrick m.fl., 2001). Jonas' begrunnelse er ikke lenger koblet til spesielle tilfeller, men formulert generelt, noe som ifølge Balacheff (1988) kategoriseres som konseptuell bevisføring. Til forskjell fra de foregående kategoriene, for eksempel Viktors visuelle begrunnelse (eksempel 14, kategori 6), er Jonas' begrunnelse her frigjort fra konkrete tilfeller. Basert på Harel og Sowder's (2007) klassifisering kan begrunnelsen plasseres i kategorien referensiell-symbolsk bevisstrategi, fordi Jonas' gjennom algebraiske manipulasjoner utleder informasjon som er relevant for å bevise at produktet av to oddetall er et oddetall. På denne måten utformer Jonas et argument som har til hensikt å demonstrere at påstanden er sann i alle tilfeller, noe som ifølge Knuth m.fl. (2009) er kravet for nivå 3.

Det er likevel en svakhet med den algebraiske fremstillingen til Jonas. Å bruke $(2x-1)(2x-1)$ er å bruke det samme spesielle oddetallet to ganger, og uttrykket gjelder derfor ikke alle kombinasjoner av oddetallsfaktorer (Mason & Pimm, 1984). Dette fører til at begrunnelsen ikke er representativ for absolutt alle tilfeller, men tross i denne detaljen har jeg likevel valgt å koble begrunnelsen til nivå 3 i Knuth m.fl. (2009) fordi Jonas gjør en tydelig dekontekstualisering (Balacheff, 1988), som betyr at han «fjerner» alle spor av det spesielle.

5 Drøftingsdel

I dette kapitlet vil jeg først diskutere mine åtte kategorier i relasjon til bevisproduksjonsnivåene i Knuth m.fl. (2009). Videre vil jeg presentere en utviklingsplansje som viser hvordan elevparene arbeidet med oppgaven på flere nivå i løpet av bevisprosessen. Her vil jeg diskutere typiske trender som fremkommer i datamaterialet, i lys av tidligere forskning.

5.1 Kategorier og progresjonsnivå

Etter at jeg hadde utviklet kategoriene oppdaget jeg en tydelig kobling til Knuth m.fl. (2009) sine fire bevisproduksjonsnivå. Nivåene beskriver en forventet utviklingsprogresjon i forståelse av konseptet bevis, og omtales derfor som progresjonsnivå.

Elever på nivå 0 er uvitende om behovet for matematiske begrunnelser, og rettferdiggjør påstander ved å søke til eksterne autoriteter eller hevder at noe er sant fordi «det bare er slik» (Knuth m.fl., 2009). Ingen av elevene i denne undersøkelsen viser begrunnelser på nivå 0, noe som basert på Waring (2000) betyr at ungdomsskoleelevene er klar over at matematiske bevis eksisterer, og forstår nødvendigheten av matematiske begrunnelser.

Nivå 1 inkluderer begrunnelser der eleven verifiserer ett eller flere tilfeller for å bevise en generell påstand (Knuth m.fl., 2009). Kategori 1 «setter inn tilfeldige tall» og kategori 2 «undersøker en tallrekke» har en tydelig sammenheng med nivå 1 (Knuth m.fl., 2009), fordi elevene forsvarer påstanden uten å ta hensyn til det generelle tilfellet. Felles for alle eksempler i begge kategoriene, er at begrunnelsene er empiribasert. Variasjoner på dette nivået er knyttet til grad av systematikk i tallvalg.

På nivå 2 er eleven bevisst på behovet for, og ser nødvendigheten av generelle argumenter. Nivå 2 inkluderer alle forsøk på generelle argument, og utsagn der eleven uttrykker at empiriske bevis er utilstrekkelig eller foreslår å kontrollere alle tilfeller (uttømmende bevis) (Knuth m.fl., 2009). Typisk for kategori 3 «uttrykker at sjekk av noen få tilfeller er utilstrekkelig» er at eleven peker på en utilstrekkelighet ved eksempler, men ikke avslører hva de mener må til for ytterligere overbevisning. Elevene reflekterer over eksemplers begrensning, og viser dermed en progresjon fra nivå 1. Likevel forkastes ikke ideen om empirisk bevisføring, og utsagnene gir dermed for lite informasjon til å nå nivå 2. Kategori 3 havner mellom nivå 1 og 2, og jeg valgte derfor å plassere kategorien på et «mellomnivå»: nivå 1.5.

Kategori 4 «forstår eksemplers begrensning» og kategori 5 «forsøk på generell begrunnelse», samsvarer med Knuth m.fl. (2009) sin beskrivelse av nivå 2, fordi elevene enten sier at de må teste alle mulige tilfeller, eller påpeker at bruk av eksempler er en utilstrekkelig strategi. Når elevene forsøker å begrunne med utgangspunkt i generelle egenskaper, viser de en bevissthet omkring nødvendigheten av generelle bevis. Elever kan altså vise nivå 2, selv om de ikke evner å utforme et generelt bevis.

Kategori 6 «visuell begrunnelse» er også plassert på nivå 2. I eksempel 14 presenterer Viktor en visuell begrunnelse. Figuren er forstått som en prototype på et hvilket som helst produkt av to oddetall, og begrunnelsen ble derfor klassifisert som et generisk tilfelle, i samsvar med Stylianides og Stylianides (2009) sin definisjon. Fordi Viktor begrunner med hensyn på generelle egenskaper ved oddetall, viser han en forståelse for behovet for generelle bevis, og derfor ble kategorien visuell begrunnelse plassert på nivå 2. Dette er forskjellig fra Knuth m.fl. (2009), som hevder at generisk eksempel tilhører nivå 1.

Kategori 7 «begrunner ved hjelp av plassverdisystemet» er også passende med nivå 2 slik det beskrives av Knuth m.fl. (2009). I eksempel 15 er Martin opptatt av å begrunne hvilke kombinasjoner av oddetallsfaktorer som er nødvendig å sjekke, og viser med dette at han er klar over at beviset må ta hensyn til alle tilfeller. Dette er en tydelig progresjon fra nivå 1, der elevene bare sjekker noen få tilfeller for å verifisere påstandens riktighet.

Nivå 3 inkluderer begrunnelser som viser det generelle tilfellet, og beskrives som aksepterte bevis (Knuth m.fl., 2009). Elevene på nivå 3 er klar over behovet for generelle argument, og er i stand til å fremstille slike argumenter selv. Kategori 8 «algebraisk begrunnelse» passer med nivå 3. I eksempel 16 behandler Jonas det generelle tilfellet ved hjelp av algebraisk notasjon. Jonas uttrykker det samme oddetallet to ganger, og argumentet mangler dermed den strengheten eller formaliteten som kreves for matematiske bevis. Likevel ble begrunnelsen vurdert til nivå 3, fordi han frigjør seg fra spesielle tilfeller, og utleder en kjede av deduktive steg, som ender i en rimelig tilstrekkelig konklusjon (Balacheff, 1988; Harel & Sowder, 1998). Et annet argument for å plassere Jonas' begrunnelse på nivå 3 er grad av tydelighet. Knuth m.fl. (2009) påpeker at det som skiller nivå 2 og 3, er graden av tydelighet i begrunnelsen, og jeg mener Jonas' viser en klarhet i måten han resonnerer.

I sammenheng med Knuth m.fl. (2009) sine nivåbeskrivelser, er kategoriene fordelt slik.

Progresjonsnivå	**Kategorifordeling**
NIVÅ 0	
NIVÅ 1	Kategori 1: Setter inn tilfeldige tall Kategori 2: Undersøker en rekke av tall
NIVÅ 1.5	Kategori 3: Uttrykker at sjekk av noen få tilfeller er utilstrekkelig
NIVÅ 2	Kategori 4: Forstår eksemplers begrensning Kategori 5: Forsøk på generell begrunnelse Kategori 6: Visuell begrunnelse Kategori 7: Begrunner ved hjelp av plassverdisystemet
NIVÅ 3	Kategori 8: Algebraisk begrunnelse

Tabell 2: Oversikt over kategorier og progresjonsnivå

5.2 Elevenes bevisprosess

Tabellen viser hvordan bevisprosessen utspilte seg for hvert av parene. Med utgangspunkt i kategoriene viser tabellen spredningen av datamaterialet over fire nivå.

Nivå	Kategori	Anders Patrik	Martin Espen	Viktor Henrik	Jonas Simen	Sofie Ada	Johan Emma	Emil Milla
1	1: Setter inn tilfeldige tall	X	X	X		X	X	X
	2: Undersøker en tallrekke	X			X			
1.1	3: Uttrykker at sjekk av noen få tilfeller er utilstrekkelig		X		X	X	X	X
2	4: Forstår eksemplers begrensning			X				
	5: Forsøk på generell begrunnelse			X	X	X	X	X
	6: Visuell begrunnelse			X				
	7: Begrunner ved hjelp av plassverdisystemet		X					X
3	8: Algebraisk begrunnelse				X			

Tabell 3: Oversikt over bevisprosessen slik den utspilte seg for hvert av parene

En tydelig tendens i datamaterialet er at alle parene starter på nivå 1, og sjekker at påstanden stemmer for spesielle tilfeller. Harel og Sowder (1998) hevder at empiriske bevisstrategier, slik som kategori 1 og 2, er dominerende selv blant elever ved høyere utdanning. Videre hevder de at det ikke er en urimelig strategi i bevisprosessen. Elevene er vant til at evaluering av hypoteser i hverdagen ofte støttes av verifikasjon av tilfeller, og at vi baserer våre antakelser ut i fra hva som virker sannsynlig. Dette funnet var derfor som forventet.

Jonas og Simen skiller seg fra de andre parene, ved at de ikke «satt inn tilfeldige tall», men tok utgangspunkt i et gjentakende mønster i en multiplikasjonsrekke.

Anders og Patrik var det eneste paret som forble på nivå 1. Ettersom de i en tidlig fase ga uttrykk for å være tilstrekkelig fornøyd med begrunnelsene på nivå 1, kan det bety at de oppfatter verifikasjon av tilfeller som et tilfredsstillende bevis.

Videre uttrykte seks av syv par at sjekk av noen få tilfeller er utilstrekkelig (kategori 3 og 4). Ifølge Harel og Sowder (1998) kan elever uttrykke at eksempler ikke er tilstrekkelig, men likevel tilby eksempler som begrunnelse. Elever på nivå 1 kan altså ha en forståelse for hva et forventet bevis bør inneholde, selv om de ikke evner å utforme slike bevis på egenhånd.

Fem av parene på nivå 2 forsøkte å uttrykke oddetall ved hjelp av algebraisk notasjon. I kategori 4 ble det presentert tre ulike definisjoner av oddetall og partall: delelighet, eksempel 10; primtallsfaktorer, eksempel 11; og struktur, eksempel 12. Jonas var den eneste som betraktet primtallsfaktorer når han utforsket egenskapene til partall, og var også den eneste av elevene som kom til et gyldig algebraisk uttrykk for oddetall. Fra Knuth m.fl. (2009) vet vi at hvordan elevene forstår og tenker om de involverte begrepene, påvirker hvilke argumenter elevene utformer.

Bruk av symbolsk algebra som bevisform, krever at eleven først representerer det numeriske forholdet algebraisk. Her stoppet det opp for fire av parene. Denne overgangen er en genererende aktivitet, og ifølge Kieran (2004) skjer mye av meningsskapingen for algebraiske objekter og symboler i nettopp slike overganger. Balacheff (1988) hevder også at slik dekontekstualisering er den mest sentrale prosessen i generalisering. Funnene tyder på at denne overgangen var problematisk, og et hinder for å oppnå nivå 3.

Når Viktor i eksempel 14 går over til å betrakte produkt som areal (strukturform) klarer han å utforme en endelig begrunnelse. Selv om begrunnelsen er plassert på nivå 2, virker det som Viktor selv mener resonnementet er tilstrekkelig overbevisende. Bevisstrategien er interessant, og i bevisprosessen kan denne typen visuelle representasjoner være en nøkkelfaktor til suksess (Arcavi, 2003). Ifølge Tripathi (2008) kan en slik tilnærming være til hjelp for å forstå struktur og tankegang for mer kortfattede, formelle bevis.

Et annet interessant aspekt ved bevisprosessen var at ingen av elevene så ut til å basere seg på imitative strategier for å besvare oppgaven. De eneste tydelige tegn til imitative resonnement (Lithner, 2008) var i kategorien «forsøk på generell begrunnelse», der elevene muligens forsøkte å uttrykke et oddetall generelt basert på noe de husket fra tidligere. Ifølge Lithner (2008) viser resultater i tidligere studier at imitativ resonnering ofte dominerer, mens kreative resonnement er sjelden. Blant annet sier Harel og Sowder (1998) at elever er vant til å følge prosedyrer, memorere og fokusere på sannhet heller enn begrunnelse for sannhet. Derimot hadde bevisprosessene preg av kreativ resonnering. Målet med kreative resonnement er at eleven tar i bruk sin matematiske kunnskap og forståelse (Lithner, 2008). Det jeg oppdaget var at elevene vurderte ulike tilnærminger til oppgaven. I tilfellene der elevene kom til endelige begrunnelser, var det ingenting som tydet på at strategien var allerede kjent for elevene, og elevene utformet begrunnelser ved hjelp av «verktøy» som visuell figur (eksempel 14) og algebra (eksempel 16), eller ved å referere til kjente egenskaper ved plassverdisystemet (eksempel 15). *Novelty* er Lithner (2008) sitt første krav for kreative resonnement og det så ut til at strategiene som ble valgt, i bevissammenheng, var ny (for elevene). Videre gjorde elevene stadige vurderinger av egne begrunnelser, noe som kobles til Lithner's (2008) andre krav*, plausibility,* og i denne studien vil omfatte de situasjonene der elevene ga uttrykk for hvorvidt begrunnelsen var tilstrekkelig overbevisende. Lithner (2008) sitt siste krav for kreative resonnement er *mathematical foundation*, som krever at resonnementet er forankret i matematiske egenskaper ved de involverte begrepene i påstanden. Ingen av elevene ble vurdert til nivå 0, som betyr at alle utsagn var fokusert på matematiske ideer. En mulig forklaring på hvorfor imitative resonnement hadde begrenset fremtredelse i mitt datamateriale, er at oppgavene trolig var ukjent for elevene, og at ingen imitative strategier derfor var mulig.

Funnene viser at elevene tar i bruk bevisstrategier både på nivå 1, 2 og 3 (Knuth m.fl., 2009). Basert på Warings (2000) tre faser for bevisforståelse, betyr dette at elevene i denne undersøkelsen er i ulike faser. Anders og Patrik ser ut til å være i en overgang fra fase én til to, fordi de viser begrenset innsikt i hva som kreves av et matematisk bevis. De andre seks parene utforsker generalitet, og dermed kan det tyde på at de er i fase to og tre, som handler om å lære å bevise og forbedring av bevisferdigheter.

Bare én av elevene kom til nivå 3. Årsak til utfordringer med å bevise påstanden ser ut til å ha sammenheng med to faktorer: lite kjennskap til bevis, og utfordring med genererende algebraaktiviteter (Kieran, 2004). Sammenlignet med resultater i Balacheff (1988) er det ikke uvanlig at elevenes bevisforståelse er begrenset til pragmatisk bevisføring (slik som nivå 1 og 2). Knuth m.fl. (2009) skriver at det kan være urimelig å forvente mer avanserte bevisformer fra elevene, fordi bevis verken er vektlagt i typiske matematikkoppgaver, eller i undervisningen generelt. Harel og Sowder (1998) hevder imidlertid at bekymringen her ikke handler om at elevene tenker induktivt, men heller at deres bevisstrategier ikke videreutvikles utover de empiribaserte begrunnelsene. Likevel viser elevene god matematisk kompetanse fordi de arbeider kreativt, og bruker tidligere kjent kunnskap i denne (tilsynelatende) nye bevissituasjonen.

6 Avslutning

Innledningsvis stilte jeg spørsmålet: *Hva kjennetegner flinke ungdomsskoleelevers bevisprosess i arbeid med generaliserte aritmetiske påstander?*

6.1 Hva har jeg funnet ut?

Gjennom analyseprosessen utarbeidet jeg åtte kategorier som er beskrivende for bevisprosessen til elevene i denne studien. Kategoriene er hierarkiske og kan dermed vise en prosess i utviklingen av bevis. Videre fant jeg at mine kategorier passet med nivåbeskrivelsene til Knuth m.fl. (2009).

Jeg utviklet to kategorier som viste seg å passe med det Knuth m.fl. (2009) kaller nivå 1. Kategori 1 «setter inn tilfeldige tall» omfatter tilfeller der elevene setter inn tall for å sjekke at påstanden stemmer, og samsvarer med Knuth m.fl. (2009) sin beskrivelse av nivå 1, fordi elevene verifiserer påstander gjennom empiribaserte begrunnelser. I kategori 2 «undersøker en tallrekke» er elevene opptatt av å undersøke et gjentakende mønster i spesielle tallrekker, og kategorien passer med nivå 1 i Knuth m.fl. (2009) fordi regulariteten rettferdiggjøres med bruk av spesielle eksempler.

I kategori 3 «uttrykker at sjekk av noen få tilfeller er utilstrekkelig» er elevene kritisk til empiribaserte begrunnelser, og viser dermed en progresjon fra nivå 1. Likevel inneholder utsagnene for lite informasjon til å nå nivå 2 i Knuth m.fl. (2009), og kategorien fremmet behov for et «mellomnivå» 1.5.

Fire av kategoriene mine passet med det Knuth m.fl. (2009) kaller nivå 2. Kategori 4 «forstår eksemplers begrensning» inkluderer vurderende utsagn der elevene uttrykker behov for generelle begrunnelser, eller etterlyser uttømmende bevis. Kategorien passer med nivå 2, fordi eleven forstår behovet for generelle bevis. Kategori 5 «forsøk på generell begrunnelse» kjennetegnes av at elevene går bort i fra spesielle tilfeller, og undersøker generelle egenskaper ved de matematiske begrepene i påstanden. Slike forsøk passer med Knuth m.fl. (2009) sin beskrivelse av nivå 2.

I kategori 6 «visuell begrunnelse» bruker eleven en figur for å illustrere påstandens generelle egenskaper. Kategorien tilsvarer Balacheff (1988) sin kategori, generisk eksempel, som ifølge Knuth m.fl. (2009) tilhører nivå 1. Kategorien «visuell begrunnelse» og generisk eksempel synes likevel å innfri kravene for nivå 2 i Knuth m.fl. (2009), ettersom det utvalgte tilfellet forstås som et forsøk på generell begrunnelse, og kategorien plasseres derfor på nivå 2.

Kategori 7 «begrunner ved hjelp av plassverdisystemet» omfatter forsøk der eleven forsøker å gjøre et uttømmende bevis. Eleven er dermed oppmerksom på behovet for å sjekke alle tilfeller, og en slik forståelse tilfredsstiller beskrivelsene for nivå 2 i Knuth m.fl. (2009).

Den siste kategorien min passet med det Knuth m.fl. (2009) klassifiserer som nivå 3. I kategori 8 «algebraisk begrunnelse» uttrykkes påstanden ved hjelp av algebraisk notasjon, og kategorien passer med nivå 3 i Knuth m.fl. (2009) fordi eleven frigjør seg fra det spesielle og rettferdiggjør det generelle tilfellet.

Kategoriene detaljerer og nyanserer Knuth m.fl. (2009) sine fire nivå, ved at kategoriene viser at noen av nivåene til Knuth m.fl. (2009) har flere ulike og hierarkiske nivå. I tillegg er det innenfor hvert nivå en viss progresjon. Denne progresjonen beskrives også av både Knuth m.fl. (2009) og Waring (2000), men i mine funn synliggjøres denne progresjonen gjennom spesifikke kategorier, med tydelige karakteristikker. Kategoriene kan dermed fungere som et verktøy for å skaffe innsikt i hvordan elever arbeider med bevis, og for å kartlegge og vurdere hvilket nivå elevene befinner seg på. Videre antyder kategoriene ulike måter å jobbe med bevis på, og fremmer forskjellige tenkemåter.

Bevisprosessen utspilte seg på flere nivå i løpet av hvert intervju. Alle elevene startet med empirisk bevisføring (nivå 1), mens bare et av parene kom til en generell begrunnelse for påstanden (nivå 3). Fire av de åtte kategoriene er plassert på nivå 2, og utgjør det nivået med flest nyanser.

Resultatene i denne studien viser at bevisoppgaver som er forankret i egenskaper ved tallsystemet, kan være en måte å arbeide med generalisering og algebraisk tenkning. Fokus er ikke nødvendigvis bruken av algebraisk notasjon, men heller matematisk meningsskaping. Oppgavene stimulerer til analyse av sammenhenger og utforskning av relasjoner blant de naturlige tallene, heller enn beregninger av numeriske svar. Dette kan ifølge Kieran (2004) styrke overgangen fra aritmetikk til algebra. Å arbeide med bevis i aritmetisk kontekst kan derfor gi komplementære fordeler, fordi denne typen resonnerende aktiviteter legger grunnlaget for symbolsk algebra samtidig som det styrker aritmetisk kunnskap (Campbell & Zazkis, 2002). Fra Waring (2000) vet vi at spørsmål om bevis, stiller krav til at elever forklarer og begrunner sammenhenger. Dette krever at elevene utvikler mer sofistikerte former for kunnskap (Dreyfus, 1999). Elevene vet altså at resultatet er sant, utfordringen er å forstå hvorfor påstanden stemmer, og det er denne formen for kunnskap Dreyfus (1999) mener vi må etterstrebe.

6.2 Videre forskning

I denne studien har jeg aktualisert bevis i skolematematikken, og synliggjort at bevis er mulig på alle klassetrinn. Med utgangspunkt i et lite utvalg, har jeg utviklet nyanserte steg i bevisprosessen. Funnene er gjeldene for mine data, og et naturlig neste steg er å undersøke om dette også gjelder for andre elever, større utvalg, og med andre typer bevisoppgaver. Elevene i denne studien ble tatt ut av sin naturlige kontekst. For videre forskning vil jeg foreslå å undersøke hvordan bevis kan implementeres som en naturlig del av matematikkundervisningen, på tvers av emner, og en mer dyptgående, langtidsrettet studie kan si noe om hvordan arbeid med bevis kan påvirke elevers matematiske kompetanse.

Referanseliste

Adler, P. A. & Adler, P. (2003). How Many Qualitative Interviews is Enough? I S. E. Baker (Red.), *How Many Qualitative Interviews is Enough?* (s. 8-10). National Centre for Research Methods.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241. Hentet fra https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Bakke, B. & Bakke, I. N. (2011). *Grunntall 8. Matematikk for ungdomstrinnet.* Drammen: Elektronisk Undervisningsforlag.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-235). London: Holdder & Stoughton.

Boaler, J. (2015). *The elephant in the classroom: helping children learn and love maths* (Rev. utg.). London: Souvenir Press.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology, 3*(2), 77-101.

Caelli, K., Ray, L. & Mill, J. (2003). 'Clear as mud': toward greater clarity in generic qualitative research. *International journal of qualitative methods, 2*(2), 1-13.

Campbell, S. R. & Zazkis, R. (2002). *Learning and teaching number theory: research in cognition and instruction*. Westport, Conn: Ablex Pub.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 669-705). Charlotte, N.C: Information Age.

Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work. Coping with Multiple Theoretical Perspectives I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 3-38). Charlotte, NC: Information Age.

Cohen, L., Manion, L., Morrison, K. & Bell, R. C. (2011). *Research methods in education* (7. utg.). London: Routledge.

Creswell, J. W. (2014). *Research design : qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4. utg.). United Kingdom: SAGE Publications

Davenport, H. (1992). *The higher arithmetic: an introduction to the theory of numbers* (6. utg.). Cambridge: Cambridge University Press.

Drageset, O. G. (2018). *Teaching Explanations: How Students Explain and How Teachers Initiate and Respond*. Submitted for review.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny Can't Prove. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1), 85-109. Hentet fra https://doi.org/10.1023/A:1003660018579

Fernald, L. D. (2008). *Psychology: six perspectives*. Los Angeles: Sage.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the learning of mathematics, 1*(3), 4-11.

Goldin, G. A. (1997). Chapter 4: Observing mathematical problem solving through task-based interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 40-177.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of mathematics, 15*(3), 42-49.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. I A. H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Red.), *Research in collegiate mathematics education III* (s. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 805-842). Charlotte, N.C: Information Age.

Hersh, R. (2009). What I Would Like My Students to Already Know About Proof. I D. A. Stylianou, Blanton, Maria L., Knuth, Eric J. (Red.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective*. London og New York: Routledge

Hinna, K., Gustavsen, T. S. & Rinvold, R. A. (2011). *QED 5-10: matematikk for grunnskolelærerutdanningen* (B.1). Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Knuth, E., Choppin, J. & Bieda, K. (2009). Middle school students' production of mathematical justifications. I D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. Knuth (Red.), *Teaching and learning proof across the grades : a K-16 perspective* (s. 153-170). London og New York: Routledge.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3.utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik, 37*(6), 457-467.

Lithner, J. (2000). Mathematical Reasoning in School Tasks. *Educational Studies in Mathematics, 41*(2), 165-190. Hentet fra https://doi.org/10.1023/A:1003956417456

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276.

Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 277-289. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/3482181

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research: a guide to design and implementation* (3. utg.). San Francisco: Jossey-Bass.

Morris, A. K. (2002). Mathematical reasoning: Adults' ability to make the inductive-deductive distinction. *Cognition and Instruction, 20*(1), 79-118.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

NESH. (2016). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. Hentet fra https://www.etikkom.no/forskningsetiske-retningslinjer/Samfunnsvitenskap-jus-og-humaniora/

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr 18 - 2002). København: Undervisningsministeriet.

Onwuegbuzie, A. J. & Leech, N. L. (2007). Sampling designs in qualitative research: Making the sampling process more public. *The qualitative report, 12*(2), 238-254.

Percy, W. H., Kostere, K. & Kostere, S. (2015). Generic qualitative research in psychology. *The Qualitative Report, 20*(2), 76-85.

Perry, M. (2000). Explanations of mathematical concepts in Japanese, Chinese, and US first- and fifth-grade classrooms. *Cognition and Instruction, 18*(2), 181-207.

Pólya, G. (1957). *How to solve it. The classic introduction to mathematical problem solving*: London: Penguin Books.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American Mathematical Monthly, 105*(3), 252-255.

Schifter, D. (2009). Representation-based Proof in the Elementary Grades I: D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. Knuth (Red.), *Teaching and learning proof across the grades: a K-16 perspective* (s. 71-86). London og New York: Routledge.

Schoenfeld, A. H. (2007). Method. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 69-107): NCTM.

Schoenfeld, A. H. (2009). Series Editor's Foreword: The Soul of Mathematics I D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. Knuth (Red.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective*. New York og London: Routledge.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London, UK: Falmer Press.

Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 314-352.

Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitativ metode* (4. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Tjora, A. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (3.utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438-445.

Udir.no. (2013, august). Læreplan i matematikk fellesfag. Hentet fra https://www.udir.no/kl06/mat1-04

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. I: F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 557-628). Charlotte, N.C: Information Age.

Vinner, S. (1997). The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(2), 97-129.

Waring, S. (2000). *Can you prove it? Developing Concepts of Proof in Primary and Secondary Schools.* Leicester: The Mathematical Association.

Weber, K. (2014). Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground. I: M. N. Fried & T. Dreyfus (Red.), *Advances in Mathematics Education* (s. 237-257). Dordrecht: Springer

Yackel, E. (2001). *Explanation, Justification and Argumentation in Mathematics Classrooms*. Foredrag holdt ved Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Utrecht, The Netherlands.

Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. I J. Kilpatrick, G. W. Martin & D. Schifter (Red.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (s. 227-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Zazkis, R. & Hazzan, O. (1998). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(4), 429-439.

Vedlegg 1. Oppgaver

<u>OPPGAVE 1</u>

PÅSTAND: *Tallet 7 er et primtall*

a) Vurder om påstanden stemmer
b) Hvordan vil dere bevise at påstanden stemmer?

<u>OPPGAVE 2</u>

PÅSTAND: *Hvis siste siffer i et heltall er 5, er tallet delelig med 5.*

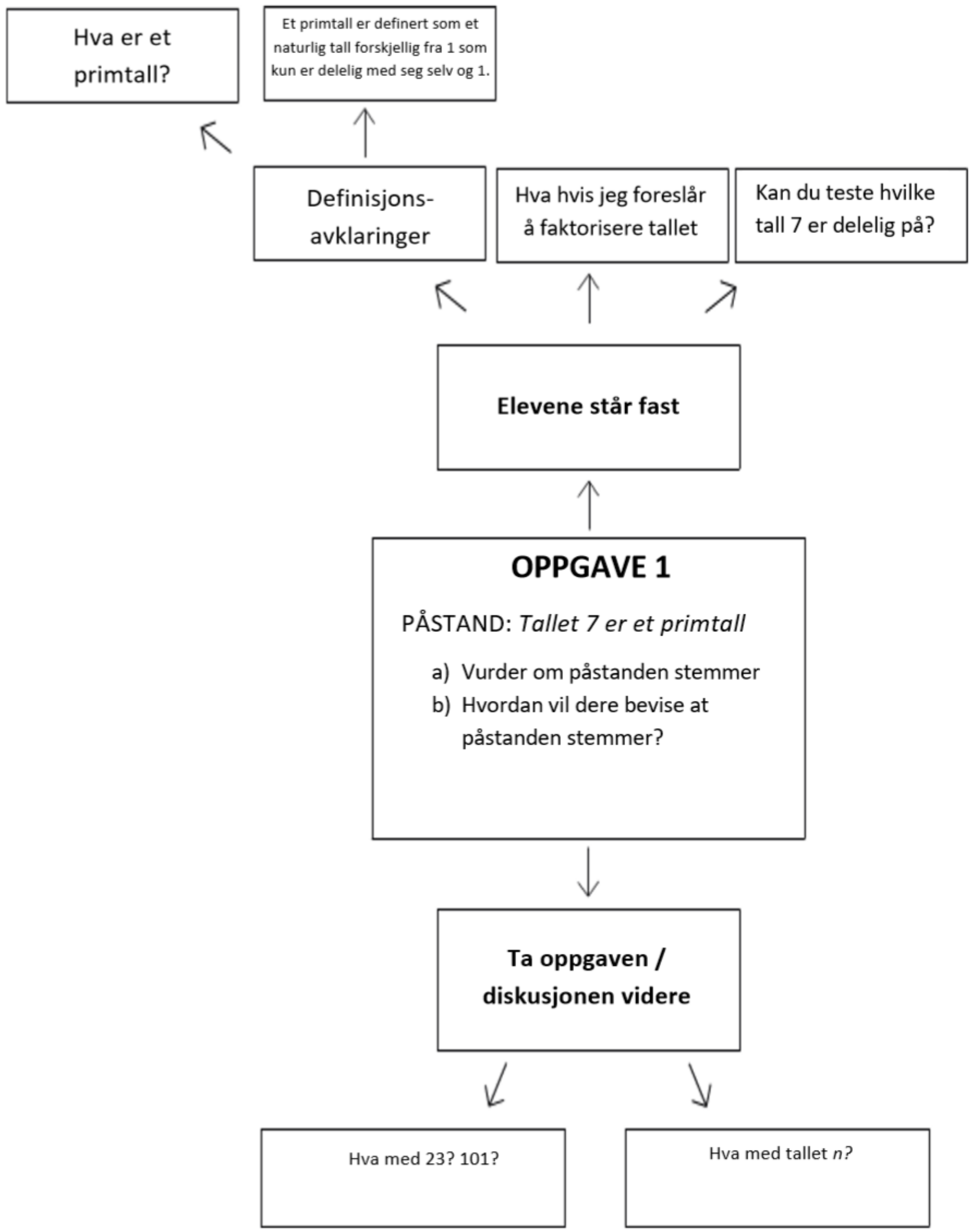
a) Vurder om påstanden stemmer
b) Hvordan vil dere bevise at påstanden stemmer?

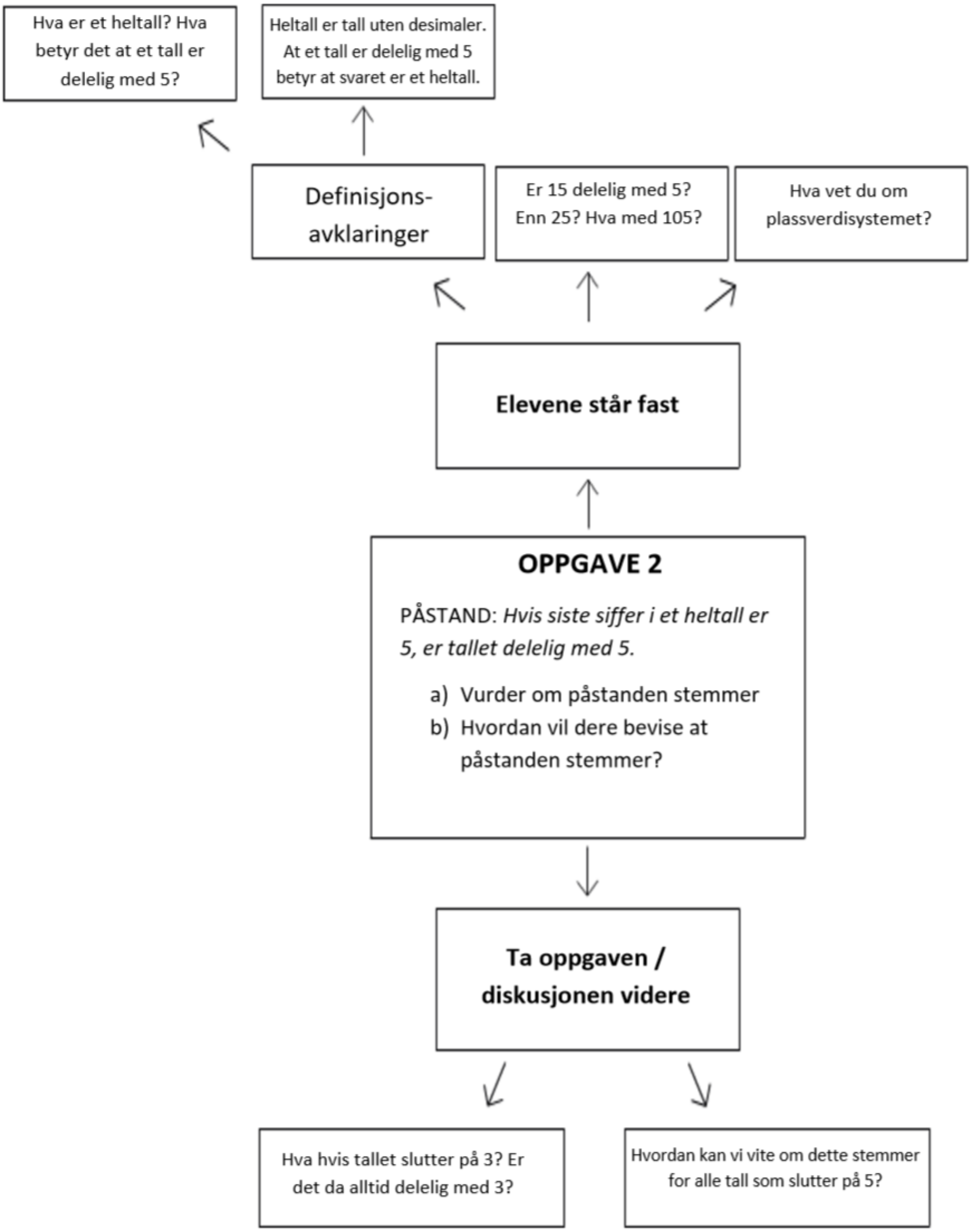
<u>OPPGAVE 3</u>

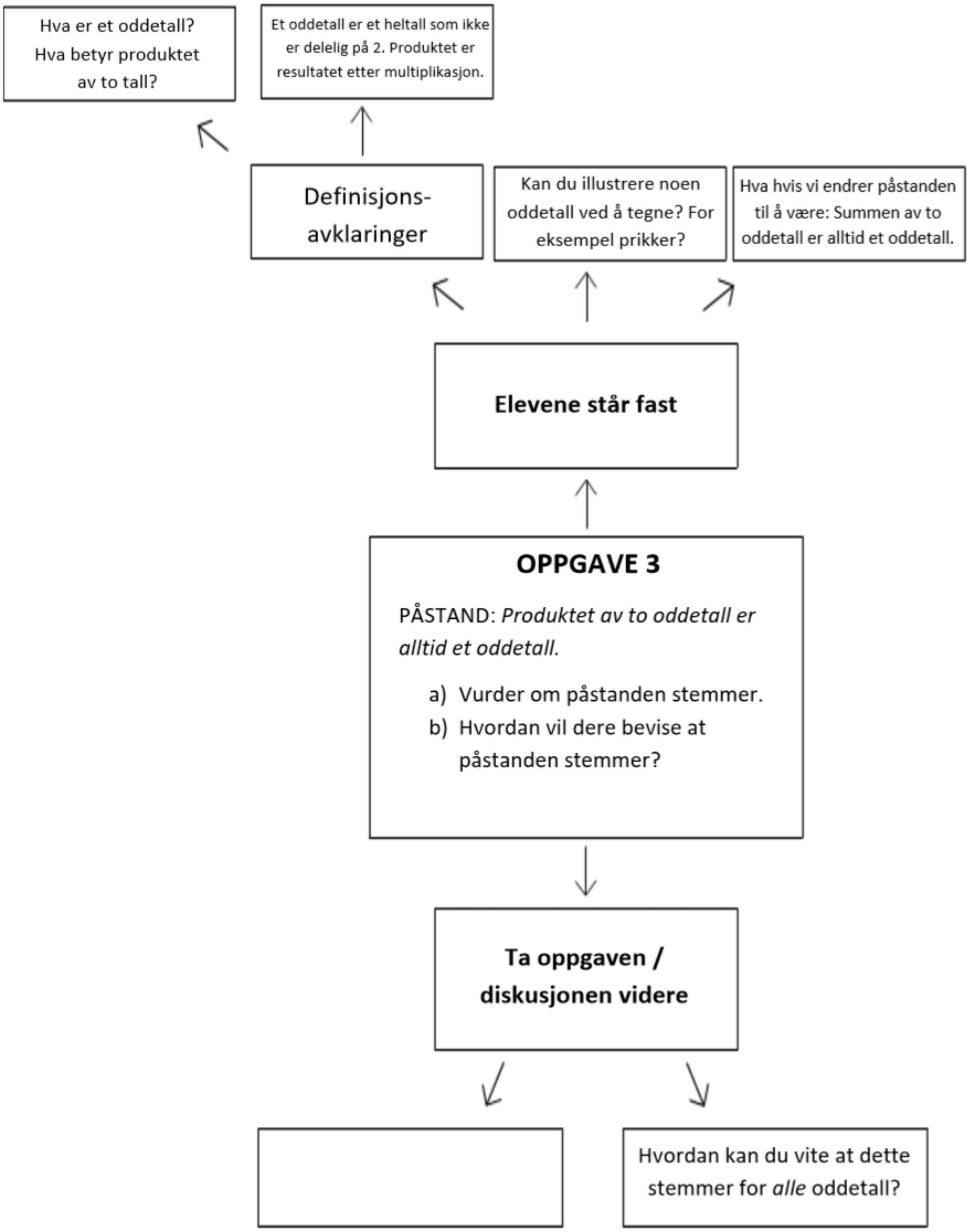
PÅSTAND: *Produktet av to oddetall er alltid et oddetall.*

a) Vurder om påstanden stemmer
b) Hvordan vil dere bevise at påstanden stemmer?

Vedlegg 2. Intervjuguide




Hva er et heltall? Hva betyr det at et tall er delelig med 5?
Heltall er tall uten desimaler. At et tall er delelig med 5 betyr at svaret er et heltall.
Definisjons-avklaringer
Er 15 delelig med 5? Enn 25? Hva med 105?
Hva vet du om plassverdisystemet?
Elevene står fast
OPPGAVE 2
PÅSTAND: Hvis siste siffer i et heltall er 5, er tallet delelig med 5.
a) Vurder om påstanden stemmer
b) Hvordan vil dere bevise at påstanden stemmer?
Ta oppgaven / diskusjonen videre
Hva hvis tallet slutter på 3? Er det da alltid delelig med 3?
Hvordan kan vi vite om dette stemmer for alle tall som slutter på 5?


Hva er et oddetall? Hva betyr produktet av to tall?
Et oddetall er et heltall som ikke er delelig på 2. Produktet er resultatet etter multiplikasjon.
Definisjons-avklaringer
Kan du illustrere noen oddetall ved å tegne? For eksempel prikker?
Hva hvis vi endrer påstanden til å være: Summen av to oddetall er alltid et oddetall.
Elevene står fast
OPPGAVE 3
PÅSTAND: Produktet av to oddetall er alltid et oddetall.
a) Vurder om påstanden stemmer.
b) Hvordan vil dere bevise at påstanden stemmer?
Ta oppgaven / diskusjonen videre
Hvordan kan du vite at dette stemmer for alle oddetall?

Vedlegg 3. Informasjonsskriv og samtykkeskjema

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

Matematisk argumentasjon

I forbindelse med mitt masterprosjekt, ved Universitetet i Tromsø, Institutt for lærerutdanning og pedagogikk, vil jeg undersøke flinke elevers tenkning i arbeid med argumentasjonsoppgaver.

Skolen som studien gjennomføres på er tilfeldig valgt. Elever som blir forespurt om å delta i studien, er valgt ut i samarbeid med den aktuelle skolen.

Hva innebærer deltakelse i studien?
Deltakelse i studien innebærer at elevene parvis deltar i et oppgavebasert intervju, med en varighet på 45-60 minutter. Elevene vil bli presentert for ulike oppgaver, som de skal løse sammen. Elevene blir bedt om å «tenke høyt» i løsningsprosessen, altså fra oppgaven presenteres til en eventuell løsning blir gitt.

Det vil gjøres filmopptak av intervjusekvensen, for å registrere elevenes respons. Dette gjøres for å lette mitt arbeid i etterkant. Innsyn i opptakene vil være forbeholdt undertegnede og veileder på masterprosjektet, samt mulighet for innsyn av rektor/skoleleder ved skolen. Det vil også innhentes informasjon om elevenes karakterer i matematikkfaget.

Dersom foreldre ønsker, kan intervjuguide forevises ved forespørsel pr. mail, før eventuelt samtykke om elevens deltakelse i studien gis.

Hva skjer med informasjonen om deg?
Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Filmopptakene vil oppbevares innelåst og adskilt fra andre personopplysninger (alder, skole, karakterer).

De eneste personopplysningene som er relevant for prosjektet, er elevens alder og karakter i faget. Informasjon som brukes i min masteravhandling, vil være anonymisert, og deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 15.05.2018, og all data vil da destrueres.

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert.

Spørsmål om studien kan rettes til:

Marianne Didriksen (masterstudent)
Tlf. 47624955
Mail: marianne.didriksen@uit.no

Ove Gunnar Drageset (veileder/daglig ansvarlig)
Tlf. 91723314
Mail: ove.gunnar.drageset@uit.no

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg samtykker herved at ___________________________________ (fornavn, etternavn, fødselsdato), kan delta i intervju i henhold til overstående vilkår. Jeg kan når som helst trekke mitt samtykke, uten begrunnelse.

____

underskrift foresatte, dato

____

underskrift elev, dato

Vedlegg 4. Godkjenning fra NSD[i]

Ove Gunnar Drageset

9006 TROMSØ

Vår dato: 13.12.2017 Vår ref: 57559 / 3 / STM Deres dato: Deres ref:

Forenklet vurdering fra NSD Personvernombudet for forskning

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 04.12.2017.
Meldingen gjelder prosjektet:

57559	*Tenkning i Sannsynlighet. En kvalitativ studie av elevers tenkning i arbeid med sannsynlighetsoppgaver.*
Behandlingsansvarlig	*UiT Norges arktiske universitet, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Ove Gunnar Drageset*
Student	*Marianne Didriksen*

Vurdering

Etter gjennomgang av opplysningene i meldeskjemaet med vedlegg, vurderer vi at prosjektet er omfattet av personopplysningsloven § 31. Personopplysningene som blir samlet inn er ikke sensitive, prosjektet er samtykkebasert og har lav personvernulempe. Prosjektet har derfor fått en forenklet vurdering. Du kan gå i gang med prosjektet. Du har selvstendig ansvar for å følge vilkårene under og sette deg inn i veiledningen i dette brevet.

Vilkår for vår vurdering

Vår anbefaling forutsetter at du gjennomfører prosjektet i tråd med:

- opplysningene gitt i meldeskjemaet
- krav til informert samtykke
- at du ikke innhenter sensitive opplysninger
- veiledning i dette brevet
- UiT Norges arktiske universitet sine retningslinjer for datasikkerhet

Veiledning

Krav til informert samtykke

Utvalget skal få skriftlig og/eller muntlig informasjon om prosjektet og samtykke til deltakelse.
Informasjon må minst omfatte:

- at UiT Norges arktiske universitet er behandlingsansvarlig institusjon for prosjektet
- daglig ansvarlig (eventuelt student og veileders) sine kontaktopplysninger
- prosjektets formål og hva opplysningene skal brukes til

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no

[i] I en tidlig fase vurderte jeg to ulike prosjekter: tenkning i sannsynlighet; og argumentasjon og bevis. I søknaden til NSD var temaet sannsynlighet. Da prosjektet ble forandret meldte jeg endringen til NSD. Endringsmeldingen ble registrert, men ikke saksbehandlet som en reell endring da prosjektopplegget skulle gjennomføres i tråd med det som tidligere var innmeldt. 13.02.2018 skrev NSD i en mail at endring i prosjekttittel og formål var tatt til orientering.