Fakultet for humaniora, samfunnsvitenskap og lærerutdanning

# En kvalitativ studie av elevers misoppfatninger i forbindelse med algebraoppgaver fra TIMSS

—

**Ola Eliassen og Cato Mathisen**

*Masteroppgave i lærerutdanning 5.-10. trinn, mai 2018*

*LRU-3903 Matematikkdidaktikk*

# Sammendrag

Norske elevers prestasjoner på den internasjonale matematikktesten TIMSS, viser at emneområdet algebra er noe elevene her til lands har problemer med. De andre emneområdene som testes i TIMSS er geometri, tallregning og statistikk. I disse områdene har norske elever prestert bedre de siste årene, sammenlignet med tidligere år. Hva er grunnen til at nettopp algebra er en utfordring?

Problemstillingen for denne oppgaven er dermed: *Hvilke misoppfatninger har norske 9. trinns elever i emnet algebra som gjør at de skårer lavt på TIMSS 2015?*

I gjennomføringen av denne kvalitative studien er det avholdt individuelle intervju basert på oppgaver fra emneområdet algebra i TIMSS 2015. Disse oppgavene er blitt valgt på bakgrunn av norske elevers lave prestasjoner. Vi har gjennomført intervjuene med fem elever fra en skole i Tromsø. På tross av et relativt lite utvalg elever avdekkes det flere ulike misoppfatninger knyttet til algebraoppgavene fra TIMSS 2015.

Gjennom analysen av våre funn, fremkommer det klare indikatorer på at elevene er avhengige av faste fremgangsmåter og regler for å kunne regne utvalgte algebraoppgaver fra TIMSS 2015.

Funnene er sett i sammenheng med Kierans GTG-modell, ulike typer forståelse og misoppfatninger. Hovedtyngden av våre funn havner under kategoriene *misoppfatninger variabler* og *avkodingsproblemer* hos elevene. Det er også problemer knyttet opp mot oppgavens utforming, aritmetiske regnefeil og begrepsforståelse. Misoppfatninger og avkodingsproblemene til elevene kan knyttes direkte opp mot elevenes forståelse.

# Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på vår femårige utdannelse innen integrert master i lærerutdanning 5.-10.trinn. Arbeidet med denne oppgaven har vært spennende og utfordrende. Vi har lært mye, både om oss selv og med tanke på matematikkdidaktisk teori. Spesielt innenfor emnet algebra, misoppfatninger og forståelse.

Vi vil takke våre veiledere Arne Hole og Jan N. Roksvold for uvurderlige tilbakemeldinger og hjelp underveis i arbeidet med oppgaven. Vi må også få rette en takk til skolen der prosjektet ble gjennomført. En spesiell takk til våre informanter som sa seg villig til å delta.

Takk til våre foreldre, søsken, venner og kjærester. Takk for at dere har bidratt med godt humør og oppmuntrende ord i en travel periode.

Til slutt vil vi takke våre medstudenter for mange gode faglige og ikke faglige diskusjoner. Lunsjpausene på masterkontoret har i stor grad bidratt til et godt arbeidsmiljø. Vi vil også takke lærerutdanningen ved UiT og TSI Håndball for fem fine år.

Ola Eliassen og Cato Mathisen

Tromsø, mai 2018

# Innholdsfortegnelse


1 Innledning ..... 1

1.1 Bakgrunn ..... 1

1.2 Formål og problemstilling ..... 1

1.3 Masteroppgavens oppbygning ..... 2

2 Teori ..... 3

2.1 Historisk aspekt og algebraens sider ..... 3

2.2 Kilder til algebraisk mening i GTG-modellen ..... 6

2.2.1 De generaliserende aktivitetene ..... 6

2.2.2 Transformerende aktiviteter ..... 7

2.2.3 Global/meta-nivå ..... 7

2.3 Misoppfatninger i algebra ..... 8

2.3.1 Likhet/ulikhet ..... 9

2.3.2 Negativitet ..... 10

2.3.3 Variabler ..... 10

2.3.4 Brøk ..... 10

2.3.5 Regnerekkefølge ..... 11

2.4 Avkodingsproblemer og forståelse ..... 11

2.5 Algebraisk generalisering ..... 12

2.6 Ulike typer av forståelse ..... 13

2.6.1 Lithners resonnering ..... 14

2.6.2 Skemps forståelse ..... 15

2.6.3 Piagets læringssyn ..... 17

2.6.4 Prosedyremessig og konseptuell kunnskap ..... 18

2.7 Tidligere forskning ..... 19

3 Metode ..... 21

3.1 Læringssyn ..... 21

3.2 Metodevalg ..... 21

3.2.1 Generisk kvalitativ metode ..... 22

3.2.2 Intervju ..... 22

3.2.3 Utvalg ..... 26

3.2.4 Valg av oppgaver ..... 27

3.3 Validitet og reliabilitet i vårt forskningsprosjekt ..... 28

3.3.1 Reliabilitet i vårt forskningsprosjekt ..... 28

3.3.2 Validitet i vårt forskningsprosjekt ..... 29

3.4 Kritikk mot valg av metode ..... 32

4 Analyse ..... 35

4.1 Transkribering ..... 35

4.2 Analysemetode ..... 37

4.2.1 Induktiv og deduktiv tilnærming ..... 38

4.2.2 Kodekategorier ..... 39

4.3 Kritikk mot egen analyse ..... 41

5 Funn og resultater ..... 43

5.1 Gjennomgang av oppgavene ..... 43

5.1.1 Oppgave 22 ..... 43

5.1.2 Oppgave 19 ..... 44

5.1.3 Oppgave 5 ..... 47

5.1.4 Oppgave 10 ..... 49

5.1.5 Oppgave 7 ..... 50

5.1.6 Oppgave 18 ..... 52

5.2 Analyse av oppgavene ..... 53

5.2.1 Oppgave 22A ..... 53

5.2.2 Oppgave 22B ..... 54

5.2.3 Oppgave 19 ..... 55

5.2.4 Oppgave 5 ..... 56

5.2.5 Oppgave 10 ... 58
5.2.6 Oppgave 7 ... 59
5.2.7 Oppgave 18 ... 61
5.3 Sammendrag av sentrale funn ... 61
6 Diskusjon ... 63
6.1.1 Forståelse ... 63
6.1.2 Avkodingsproblemer ... 66
6.1.3 GTG-modellen ... 70
6.1.4 Misoppfatninger ... 73
7 Avslutning ... 77
7.1 Oppsummering av sentrale funn ... 77
7.2 Begrensinger i studien. Veien videre. ... 78
Referanseliste ... 80
8 Vedlegg ... 83
Vedlegg 1: Godkjennelse IEA ... 83
Vedlegg 2: Godkjennelse NSD ... 86
Vedlegg 3: Intervjuguide ... 89
Vedlegg 4: TIMSS-oppgaver ... 90
Vedlegg 5: Tilleggsoppgaver ... 93

# Figurliste

Figur 1: Svarprosent algebraoppgaver TIMSS 2015 ... 28

Figur 2: Oppgave 22A fra algebradelen i TIMSS 2015 ... 43

Figur 3: Oppgave 19 fra algebradelen i TIMSS 2015 ... 44

Figur 4: Tilleggsoppgave 19.1 og 19.2 ... 46

Figur 5: Oppgave 5 fra algebradelen i TIMSS 2015 ... 47

Figur 6: Tilleggsoppgave 5.1 ... 48

Figur 7: Oppgave 10 fra algebradelen i TIMSS 2015 ... 49

Figur 8: Oppgave 7 fra algebradelen i TIMSS 2015 ... 50

Figur 9: Tilleggsoppgave 7.1 og 7.2 ... 51

Figur 10: Oppgave 18 fra algebradelen i TIMSS 2015 ... 52

# 1 Innledning

## 1.1 Bakgrunn

Den norske rapporten fra TIMSS 2015 viser at norske elever på 8. og 9. trinn gjør det svakere enn man burde forvente, sammenlignet med mange av de andre europeiske landene som deltar (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016). Spesielt innenfor emnet algebra gjør de norske elevene det svakere. Også etter TIMSS 2011 viste resultatet at norske elever gjorde det svakt i algebra (Grønmo m.fl., 2012). Elevene på 9. trinn gjennomførte ikke TIMSS i 2011. Undersøkelsene viser også at elevene har hatt en kontinuerlig forbedring i resultatet på de tre andre emneområdene, tall, geometri og statistikk siden 2007. Dette gjelder ikke emneområdet algebra. Derfor ønsker vi å se nærmere på hvorfor de norske elevene skårer svakere på dette emnet. Den norske rapporten fra TIMSS 2011 påpeker at det ikke er noen kjønnsforskjeller på elevenes matematikk-kompetanse i Norge, og vi velger derfor å ikke ta hensyn til kjønn i vårt prosjekt (Grønmo m.fl., 2012). Vi vil videre omtale de ulike elevene i denne avhandlingen som eleven i stedet for han/hun, dette for å anonymisere våre informanter.
Algebra er et verktøy for elevens kognitive arbeid innen matematikkfaget og muliggjør for eleven å skape en enkelthet og struktur i komplekse sammenhenger. Algebra er altså en viktig prosess innenfor utviklingen av matematisk forståelse (Bergsten m.fl., 1997). Grønmo m.fl (2012) støtter opp om at algebra er et viktig verktøy innenfor matematikk, og dermed viktig for dem som skal anvende matematikk i videre utdanning og/eller i yrkessammenheng.
TIMSS-testene ble gjennomført i ca. 60 land i 2015 (Bergem m.fl., 2016). Norge deltok med 4., 5., 8., og 9. trinn, der 4./5. trinn og 8./9. trinn gjennomførte den samme testen. Det er ca. 7 % av elevene fra disse trinnene i den norske skolen som deltar i undersøkelsen. Elevene som deltok var plukket ut fra 140 barneskoler og 144 ungdomsskoler.

## 1.2 Formål og problemstilling

Vår masteravhandling er på 30 studiepoeng, noe som gjør at det også er begrensninger knyttet til gjennomføringen. Vi hadde selvfølgelig ikke anledning til å evaluere alle 9. trinnselevene som har deltok på TIMSS 2015. Vi måtte dermed finne et passende utvalg som ga oss svar på hva ulike elever tenker når de løser oppgavene.

Problemstillingen for denne avhandlingen er dermed:

**Hvilke misoppfatninger har norske elever på 9. trinn i emnet algebra som gjør at de skårer lavt på TIMSS 2015?**

Vi har i denne avhandlingen kun benyttet oss av elever fra 9. trinn. Dette fordi statistikken fra TIMSS 2015 (IEA, 2018) viser at elevene på 9. trinn skårer høyere enn elever på 8. trinn i emneområdet algebra. Elever på 9. trinn har hatt mer opplæring i algebra enn 8. trinn i skoleløpet. I gjennomføringen av våre pilotintervju, der vi benyttet oss av elever ved 10. trinn, la vi merke til at disse elevene hadde problemer med de ulike oppgavene. Vi valgte derfor å ta for oss elever på 9. trinn i håp om å få tak i misoppfatninger, da vi tenkte at 8. trinns elever ville ha problemer med oppgavene.

## 1.3 Masteroppgavens oppbygning

Vi vil i denne avhandlingen først gjøre rede for teori som er relevant for problemstillingen, før vi tar for oss tidligere forskning på området. Det at matematikkområdet algebra er tett dokumentert med tidligere forskning, medfører at vi har måtte velge ut relevant forskning for vårt studie. Når teorien er gjort rede for vil vi videre redegjøre og argumentere for metoden som er benyttet. Vi vil deretter ta for oss hva som ble vektlagt for å kunne analysere det innsamlede materialet. Deretter vil vi komme med funn og resultater. Når dette er presentert vil vi ta for oss de ulike funnene og knytte dette opp mot teorien som er benyttet. Til slutt vil vi komme med en konklusjon, samt at vi reflekterer rundt hvordan forskning kan videreføres og utvikles i lys av denne studien.

# 2 Teori

I denne delen av oppgaven tar vi for oss relevant teori som vi mener kan knyttes til de ulike funnene som vil bli presentert i kapittel 5.

## 2.1 Historisk aspekt og algebraens sider

Både geometri og aritmetikk har vokst frem fra menneskenes behov opp gjennom tidene, da med tanke på blant annet utviklingen av handel og konstruksjoner. Disse to grenene av matematikken ble utviklet i de tidligere kulturene rundt Middelhavet, i tillegg til områdene rundt Eufrat og Tigris, samt i Kina og India. Det vi i dag kaller algebra er ikke på samme måte koblet til det hverdagslige slik som geometrien og aritmetikken. Historien viser at algebraen har vokst frem der aritmetikken og geometrien har møtt på problemer, og der en mer generell løsningsmetode har vært påkrevd (Bergsten m.fl., 1997). Gjennom å innføre bokstavsymboler som skulle representere siffer i regnestykker, ble det mulig å generalisere. Dermed kunne man beskrive en løsningsmetode som gjaldt for alle mulige tall. Utviklingen i algebra har da gått fra den retoriske algebraen til den symbolske som kom frem på 1600-tallet (Bergsten m.fl., 1997).

Mason (2011) mener at å uttrykke det generelle er en naturlig del av mennesket. Den algebraiske tenkningen oppstår naturlig hos elevene gjennom å oppnå matematisk mening. Algebraen gir oss dermed tilgang til et utvalg av symboler som vi kan håndtere og uttrykke det generelle med. Det å kunne uttrykke seg fra det spesielle til det generelle er altså en naturlig del av mennesket (Mason m.fl., 2011).

Kongelf (2015) deler opp algebraen i fire deler, *operasjonell symbolisme*, *tenkemåte*, *generalisert tallære* og *strukturer*. Algebraiske *strukturer* er det som kalles abstrakt algebra og behandles ikke før på universitetsnivå (Kongelf, 2015).

Algebra som *operasjonell symbolisme* handler om hvordan vi har brukt algebra opp gjennom tidene, denne er igjen delt opp i tre deler, *retorisk*, *synkopert* og *symbolsk algebra* (Bergsten m.fl., 1997; Kongelf, 2015). Den *retoriske algebraen* kjennetegnes ved at løsninger til ulike problemer gis gjennom språklige forklaringer. Det benyttes ingen symboler for ukjente størrelser. Den *symbolske algebraen* ble utviklet på 1600-tallet og innebar da at en benyttet seg av variabler i form av bokstavsymboler i stedet for tall (Bergsten m.fl., 1997). Her benyttes bokstaver for både kjente og ukjente tall, og gjennom denne måten kan vi uttrykke oss generelt. Den *synkoperte algebraen* kjennetegnes ved at symboler benyttes i løsningen for ukjente størrelser. Den synkoperte algebraen er altså en mellomting mellom det som uttrykkes språklige og det rent matematiske (Bergsten m.fl., 1997). Altså en kombinasjon av retorisk og symbolsk algebra.

*Algebraisk tenkemåte* er det ingen entydig definisjon av. Men Kieran (2007) og Mason (2011) uttrykker generalisering som en viktig del av tenkemåten i algebra, faktisk som essensen i all læring (Mason m.fl., 2011). Dersom en utvikler elevenes evner til å generalisere i algebra, vil dette bidra til en forståelse og legge grunnlaget for videre læring.

Den siste kategorien til Kongelf (2015) er *generalisert tallære,* også kalt generalisert aritmetikk. Å betrakte algebra som dette er ifølge Lee (2001), kanskje det som dominerer undervisning og læreverk i skolen mest. Ifølge Mason (2011) kan *generalisert tallære* tolkes på to ulike måter. Der den første måten å tolke det som er algebra, som å gjøre aritmetiske beregninger med bokstaver. Tolkning nummer to er algebra som et uttrykk for reglene til aritmetikken, og utvidelsen av disse reglene til symboler som reglene blir uttrykket med. Ifølge Mason (2011) er det å kunne gjøre aritmetiske beregninger med bokstaver nytteløst for elever dersom det ikke settes i sammenheng med generalisering.

For mange elever kan algebra være synonymt med bokstavregning. Dette kan tyde på en generalisert aritmetisk tilnærming til temaet i skolen. Dette bekrefter både Lee (2001) og Mason (2011). I skolens algebra blir elevene utfordret til å regne med symboler i stedet for rene siffer i form av tall. Sifrene er også symboler, men etter flere år i skolen har elevene internalisert disse symbolene. Dette medfører at elevene ikke tenker over at tallet 2 representerer en mengde i form av et symbol (Bergsten m.fl., 1997).

Kieran (2007) presenterer en modell kalt GTG-modellen, som hun mener beskriver de ulike delene av skolealgebraen. Denne modellen blir presentert senere i teorikapittelet.

Studier over flere tiår på emnet algebra, har vist at en ren regneteknisk tilnærming til undervisningen ikke nødvendigvis betyr at elevene presterer godt (Kieran, 2007). Inntoget av datateknologi i skolen har bidratt til å endre grunntanken om hva som skal læres i skolealgebraen (Kieran, 2007). Dette i kombinasjon med at forskning på algebra har vært under innflytelse av det sosiokulturelle synet på læring, som har fått innpass i skolepedagogikken, har gjort at fokuset på faget i dag er annerledes enn tidligere (Kieran, 2007; Lyngsnes & Rismark, 2007).

Forskningen på algebra har bevegd seg bort fra å ha et fokus på empiriske funn av hva elevers forståelse er, altså hvilke resultater elever oppnår når de løser ulike typer oppgaver.

Utviklingen har gått videre til å forske på hva algebraisk mening er og hvor denne meningsskapelsen kommer fra. Dette har endret vår tankemåte om hvordan elever skaper sin forståelse rundt algebraiske objekter og prosesser. I dag er altså fokuset i større grad enn før på hvordan en skal skape forståelse innen faget, og ikke på hvordan elever presterer på det regnetekniske (Kieran, 2007).

Ifølge Kieran (2007) har måten å betrakte algebra i skolen på vært delt, med hensyn på den tradisjonelle og den reformerte måten. Den tradisjonelle måten kjennetegnes ved at det har en sterk symbolsk orientering. Da den inkluderer forenklingen av uttrykk, ligningsløsning, løsning av ukjente og systemer av ligninger med formelle metoder. Dette i tillegg til faktorisering av polynomer og andre uttrykk. Funksjoner i kombinasjon med grafiske representasjoner og tabeller inngår også i den tradisjonelle måten, men de blir generelt tildelt en mye mindre rolle. Hovedfokuset er polynomiske-, og rasjonelle uttrykk (Kieran, 2007).

I motsetning til den tradisjonelle måten har vi den reformerte måten (Kieran, 2007). Her vektlegges blant annet funksjoner i mye større grad enn i den tradisjonelle måten. Da med fokusområde på ulike måter å representere situasjoner, og som videre knyttes mot funksjoner og løsninger til hverdagsproblemer.

Dette med andre metoder enn ren symbolsk manipulasjon, for eksempel teknologiske hjelpemidler. Disse to ulike betraktningene kan knyttes opp mot forståelse i matematikkfaget som vi senere i teorikapittelet skal utrede mer om. Den tradisjonelle måten vektlegger symbolmanipulasjon, mens den reformerte tar for seg ulike måter å representere funksjoner, og med hensyn på situasjoner som kan knyttes mot hverdagen. Det tradisjonelle kan da sees i sammenheng med prosedyremessig kunnskap, der vi lærer gitte prosedyrer som kan gjengis i ulike oppgaver (Hiebert & Lefevre, 1986). Den reformerte betraktningen på algebra kan se ut som en mer konseptuell tilnærming til forståelse (Hiebert & Lefevre, 1986).

Diskusjonen om hva som skal vektlegges i skolefaget algebra har vært delt mellom disse to betraktningene. Forskning viser at læreplanene i ulike land praktiserer algebra ulikt. Noen forholder seg til den tradisjonelle måten, mens andre praktiserer den reformerte (Kieran, 2007). Et gjentagende spørsmål i matematikken, som både matematikere og lærere i faget spør seg, er hva som er viktig og som skal vektlegges i temaet? For å kunne ta et standpunkt i en slik debatt er en nødt til å se på hva som skaper mening i faget (Kieran, 2007).

## 2.2 Kilder til algebraisk mening i GTG-modellen

Hvorfor forstår man algebra, og hvor kommer denne forståelsen fra? Kieran (2007) presenterer en modell som hun har adoptert fra Radford (2004). Til denne modellen har hun i lagt til et punkt, punkt 1b. De fire områdene som gir algebraisk mening er:

1(a): *Mening fra matematikken i seg selv. Da med mening fra den algebraiske strukturen i seg selv, denne involverer symbolsk form. Vår evne til å manipulere algebraiske symboler krever at vi først forstår de strukturelle egenskapene i matematiske operasjoner og deres relasjoner i forhold til transformasjoner.*

1(b): *Mening fra andre matematiske representasjoner. Muligheten til å se et objekt i ulike representasjoner slik som grafisk og symbolsk form, er ment av mange til å være vesentlig i skapelsen av forståelse i algebra*.

2: *Mening fra problemets kontekst. Dette kan til forskjell fra punkt 1a og 1b sees på som den eksterne kilden til mening, da de to tidligere nevnte var fra matematikken i seg selv. Problemets kontekst gir algebraisk mening da konteksten lar elevene se sammenhengen mellom symboler og ulik notasjon med hendelser og situasjoner. De skaper derfor en ekstern forståelse for et objekt eller en prosess i algebra.*

3: *Mening fra det som ikke er det rent matematiske eller fra problemets kontekst. Den omhandler elevers prosessering av mening gjennom for eksempel språklig aktivitet, kroppsspråk, metaforer, opplevde erfaringer og bildedanning.*

Disse ulike kildene til å skape mening blir vevd sammen under gjennomføringen av matematiske aktiviteter (Kieran, 2007). De fire kildene til mening har Kieran lagt til grunne for utarbeidelsen av sin GTG-modell. Dette i tillegg til at hun beskriver hvordan flere ser på hva algebra er. Hun henviser blant annet til Lee (2001), som kommer med 7 temaer om hva algebra er. Et fag i skolen, generaliserende aritmetikk, et verktøy, et språk, en kultur, en tenkemåte og en aktivitet (Kieran, 2007). Gjennomgående i disse temaene kommer det frem at algebra er en aktivitet, altså noe man gjør. Med utgangspunkt i at algebra er en aktivitet utviklet Kieran en modell som deler skolealgebraen i tre deler, nemlig GTG-modellen. Modellens tre deler er: *den generaliserende, den transformerende* og *global/meta-nivå.*

### 2.2.1 De generaliserende aktivitetene

I denne delen er det forming av ligninger og uttrykk det arbeides med (Kieran, 2007). Eksempler på dette kan være 1) arbeid med ligninger med variabler eller ukjente som representerer en situasjon eller et problem, 2) arbeid med å generalisere uttrykk fra numeriske eller geometriske mønstre (Kieran, 2007). Kieran mener at mye av meningsbyggingen til algebraiske objekter skapes gjennom arbeid med generaliserende aktiviteter. Arbeid med likhetstegnet, variabler, og ukjente betegnes som en generaliserende aktivitet. Radford (2001) mener generaliserende aktiviteter skal skape språk som gjør at eleven kan uttrykke mening. Dette for å kunne anvende algebraiske uttrykk i beskrivelser av situasjoner eller sammenhenger. Når man arbeider med generaliserende aktiviteter, er det en forutsetning at elevene kjenner til symbolene som inngår i generaliserende uttrykk, og at elevene kjenner det algebraiske språket (Kieran, 2007).

### 2.2.2 Transformerende aktiviteter

Den andre delen av algebraiske aktiviteter i GTG-modellen, er transformerende aktiviteter, som av noen betegnes som de regelbaserte aktivitetene (Kieran, 2007). Dette fordi det regnetekniske er en aktivitet som ligger under transformerende aktiviteter. I denne formen for aktiviteter er arbeid med de algebraiske verktøyene viktig. Eksempel på arbeid med algebraiske verktøy kan være arbeid med variabler, potenser, parenteser og det matematiske språket. Et annet eksempel på transformerende aktiviteter er faktorisering, forkorting av uttrykk, regning med polynomer, substitusjon av algebraiske uttrykk og arbeid med likningsuttrykk (Kieran, 2007). Det å kunne endre det symbolske uttrykket for å opprettholde likheten er sentralt i transformerende aktiviteter (Kieran, 2007). Li (2014) poengterer at ulike transformerende aktiviteter krever ulike ferdigheter hos elevene, derfor er det viktig arbeide med flere typer transformerende oppgaver. Dette støttes av Kieran (2007).

### 2.2.3 Global/meta-nivå

Global/meta-nivå er aktiviteter der algebra kan bli brukt som et verktøy (Kieran, 2007). Det er aktiviteter som ikke nødvendigvis har krav om bruk av formell algebra, men der algebra blir valgt som verktøy for å løse oppgaven eller problemet. Dette kan for eksempel være en problemløsningsoppgave der det er ulike måter å løse oppgaven på, der algebra kan være et verktøy for å komme med en løsning. Oppgaver på global/meta-nivå krever derfor ikke bruk av algebra, men algebra kan benyttes som verktøy for å løse oppgaven. Kieran (2007) poengterer at aktiviteter med global/meta-nivå kan benyttes som motivasjon for å jobbe med transformerende og generaliserende aktiviteter. Eksempel på aktiviteter som inngår i global/meta-nivå er problemløsning, modellering, argumentasjon og bevis, samt det å lete etter forhold eller strukturer (Kieran, 2007). Det understrekes her at global/meta-nivå ikke er synonymt med problemløsning eller de andre eksemplene som ble nevnt. Aktiviteter fra global/meta-nivå kan anvendes som en tilnærming for å lære algebra.

Petersen (2015) har oversatt global/meta-nivå til «resonnerende aktiviteter». Denne oversettelsen kom hun frem til etter e-post korrespondanse med Kieran. Som nevnt tidligere er det ikke nødvendig med formell algebra for å løse aktiviteter på global/meta-nivå (Kieran, 2007). Dette er felles for alle oppgavene Petersen (2015) betegner som «resonnerende aktiviteter». Aktivitetene handler ikke alltid om å finne et svar, men det kan være å vurdere et svar eller avdekke et problem.

## 2.3 Misoppfatninger i algebra

De siste tiårenes forskning har kartlagt flere *misoppfatninger* som elever innehar når det kommer til matematikkemnet algebra. Misoppfatning menes som en fast oppfattelse av et begrep som ikke får den meningen det skulle hatt (Zernichow & Nygaard, 2006). Et eksempel er at etter likhetstegnet så skal det alltid være et svar bestående av ett tall.

Brekke m.fl (2002, s. 10) tolker misoppfatninger til å være ufullstendige tanker knyttet til et begrep. Bak de ulike misoppfatningene ligger det en bestemt tanke, denne tanken er ikke tilfeldig og vil være gjentakende. Utviklingen av et begrep er ikke fullstendig dersom erfaringene er gjort på et begrenset felt (Brekke m.fl., 2002). Som eksempelet i forrige avsnitt viste, kan en misoppfatning være knyttet til likhetstegnet. Dersom en fra tidlig skolealder ikke lar elevene erfare betydningen av likhetstegnet, kan en slik misoppfatning tas med videre og kan igjen påvirke for eksempel elevens forståelse i algebra.

Det kan være ulike grunner en ufullstendig forståelse av et begrep oppstår, slik som en enkel misforståelse eller manglende oppfatning. Misoppfatninger kan dermed knyttes til elevens forståelse, noe som vil vektlegges i denne avhandlingen. Misoppfatninger kan også skyldes overgeneralisering, altså overføringen av en tenkemåte til andre områder i matematikken. Her menes at den tiltenkte oppfatningen kun gjelder på et bestemt område, men benyttes nå på områder der den ikke er gjeldende (Brekke m.fl., 2002; Zernichow & Nygaard, 2006).

Misoppfatninger kan dermed sees på med et konstruktivistisk syn på læring. Altså at kunnskapen konstrueres av individet og ikke overføres. Piagets konstruktivistiske læringsteori kan da være nærliggende med definisjonen av misoppfatninger (Lyngsnes & Rismark, 2007). Ifølge Piaget lager vi ulike skjemaer når vi erfarer. Vi organiserer tankeprosessene i kognitive strukturer. Skjemaene som vi genererer er nettopp disse kognitive strukturene som inneholder erfaringene, og dermed kunnskapen om de ulike emnene. Dersom vi mangler forståelse for et emne, kan noen erfaringer bli lagt inn i feil skjema, dette kan da påvirke vår videre forståelse av dette emnet (Lyngsnes & Rismark, 2007).

Diagnostiske oppgaver kan benyttes for å skape kognitive konflikter hos elevene (Brekke m.fl., 2002). Det å skape en kognitiv konflikt kan forklares ved at oppfatninger utfordres av andre konflikterende argumenter. Dersom elevene ser at den kunnskapen de innehar er mangelfull, må de akkomodere denne kunnskapen for å tilpasse kunnskapen virkeligheten (Lyngsnes & Rismark, 2007). Diagnostiske oppgaver kan dermed benyttes for å fremheve misoppfatninger, dette for å overvinne dem (Brekke m.fl., 2002). Slike oppgaver kan være med å utvikle eksisterende løsningsstrategier og kan gi læreren informasjon om elevens forståelse.

Noen av de ulike misoppfatningene som tidligere er forsket på er misoppfatninger knyttet til likhet/ulikhet, negativitet, variabler, brøk og regneoperasjoners rekkefølger (Booth, McGinn, Barbieri & Young, 2017). De ulike kategoriene av misoppfatninger som presenteres er tatt utgangspunkt i fra Booth m.fl (2017).

### 2.3.1 Likhet/ulikhet

Mange elever innehar en prosedyremessig forståelse av likhetstegnet, altså en forståelse av at likhetstegnet indikerer hvor svaret skal være i stedet for forståelsen av at likhetstegnet indikerer ekvivalens. En slik forståelse kan være tilstrekkelig i det tidlige skoleløpet for elevene, men kan skape problemer når elever skal arbeide algebraisk. Et eksempel på dette er at en ikke kan skrive $3 + 4 = 5 + 2$ fordi etter likhetstegnet skal det kun stå ett tall.

Elever kan inneha forståelsen av at likhetstegnet ikke kan benyttes i ligninger eller uttrykk som ikke har andre symboler enn likhetstegnet, for eksempel som tegnet for addisjon, subtraksjon, multiplikasjon eller divisjon. Et eksempel på dette er $4 = 4$. I tillegg til denne oppfatningen tror noen elever at alle operatorsymboler må være på venstre siden av likhetstegnet. Denne oppfatningen gjør også at noen tror at innholdet på høyresiden av likhetstegnet må være svaret (Booth m.fl., 2017). Disse oppfatningene av likhetstegnet kan være gjennomgående i skoleløpet og er også observert på høyskole/universitetsnivå (Kieran, 1990).

Misoppfatninger knyttet til ulikheter kan inneha likhetstrekk til misoppfatninger til likhetstegnet, der noen elever kan behandle ulikhet som nettopp likhet. Forståelse for begrepene *mer* eller *mindre* og forståelsen av at løsninger kan være ulike, ved at en benytter seg av symbolet for ulikhet er også et område som skaper kognitive konflikter hos elevene (Booth m.fl., 2017).

### 2.3.2 Negativitet

Elever med en ufullstendig forståelse av negative tegn har større sannsynlighet til å benytte seg av feilaktige strategier når de skal løse algebraiske ligninger (Booth m.fl., 2017). Negativitet kan sies å ha et mer abstrakt konsept enn addisjon, dermed kan elever som går fra aritmetiske operasjoner til algebraisk tenkning ha problemer med nettopp dette (Booth m.fl., 2017).

### 2.3.3 Variabler

Elevers erfaring med bokstaver i ligninger er ofte knyttet til formler i matematikkfaget. For eksempel at arealet til et rektangel kan uttrykkes $A = l \times b$ (Kieran, 1990). En av de mest vanlige misoppfatningene når det kommer til anvendelsen av variabler, er forståelsen av at bokstaven i et numerisk uttrykk står for et aktuelt objekt eller en benevning. Enkelte elever ignorerer variablene og fjerner dem fra uttrykket. Det vil si at dersom elevene får et uttrykk der et eller flere av leddene inneholder variabler, vil de ignorere disse og finne svaret uten å ta hensyn til variabelen/variablene.

Noen elever tror at variabelen er knyttet til dens posisjon i alfabetet. Hvis det for eksempel benyttes $a$ og $x$ i en ligning, kan elever ha den forståelsen av at $a$ ikke kan ha en høyere verdi enn $x$. Elever kan også tro at $a$ har verdien 1, da variabelen er representert først i alfabetet.

Elever viser også problemer med å forstå at en variabel kan være representert flere ganger i et uttrykk, og at variabelen da står for den samme verdien på de ulike posisjonene i uttrykket. En siste misoppfatning innen kategorien variabler er elevenes forståelse av hvordan operasjonssymbolene skal tolkes når de kombineres med variabler. Et eksempel på dette kan være at elever i addisjon er vant til at 2 + 0,3 = 2,3, noe de dermed kan overføre til en misoppfatning at $2 + x = 2x$ (Booth m.fl., 2017).

### 2.3.4 Brøk

Et av kunnskapsområdene som er nødvendig for å forstå algebra, er kunnskap om rasjonale tall og brøk (Booth m.fl., 2017). Elevers forståelse innenfor emnet brøk viser mangler, fordi de har problemer med ulike deler når det kommer til håndtering av brøk og regneoperasjoner knyttet til dette. Eksempler på manglende forståelse vises når de skal uttrykke seg med brøk for å representere deler av en figur, addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon med brøker (Booth m.fl., 2017).

### 2.3.5 Regnerekkefølge

For misoppfatninger knyttet til regnerekkefølge viser det seg at elever i alle aldre har problemer med nettopp hvilken rekkefølge de ulike operasjonene skal utføres i. Elevene har da en tendens til å løse uttrykket fra venstre mot høyre ukritisk til hva som står mellom de ulike variablene eller sifrene (Booth m.fl., 2017).

## 2.4 Avkodingsproblemer og forståelse

Evnen til å avkode et problem, altså evnen til å se hvilken informasjon som er viktig for å kunne svare på en gitt oppgave har vist seg å være viktig innen problemløsning (Booth m.fl., 2017). Tidligere erfart kunnskap har innvirkning på hvordan elever avkoder et problem. Elever viser seg for eksempel å være bedre i avkoding av ligninger som er kjente fra tidligere, altså at strukturen er kjent fra før. En korrekt avkoding krever at elevene ser hva som skal løses i det gitte problemet. Konseptuell forståelse kan dermed bidra til å hjelpe elevene med å se hva som er viktig. Elever som arbeider med algebra og som innehar en konseptuell forståelse har også en bedre evne til å avkode et problem (Booth m.fl., 2017).

Elever med en sterkere konseptuell forståelse er bedre på å løse ligninger, og er mer mottakelig for nye prosedyrer enn elever med mangler i den konseptuelle forståelsen (Booth m.fl., 2017). Forskning viser også at elever som innehar misoppfatninger som omhandler likhetstegnet og negativitet, løser færre ligninger korrekt og har større vanskeligheter med å løse ligninger (Booth m.fl., 2017).

Forståelsen for ulike misoppfatninger hos elevene i algebra er et viktig tema, da disse misoppfatningene som nevnt kan lede til andre misoppfatninger i matematikken. Skolealgebraen kan være starten på mer avansert matematikk som elever senere i livet kan ta del i. Dette med tanke på høyskole og universitetsutdannelser som for eksempel forskningsstillinger, ingeniører, fysikere og lignende (Booth m.fl., 2017; Walick & Burns, 2017).

De ulike misoppfatningene som oppstår i algebra er derfor viktig å ta tak i så snart som mulig når en oppdager disse. Dette for å hindre at de tas med videre i andre matematiske emner. Da algebra er bygget opp på aritmetikk er det viktig å forstå forholdet mellom disse to. Dette med hensyn på hvordan misoppfatninger og feiltolkninger i aritmetikken kan påvirke den videre forståelsen i algebra (Booth m.fl., 2017).

## 2.5 Algebraisk generalisering

Det å kunne generalisere en viktig del av algebraisk forståelse (Mason m.fl., 2011). Aritmetisk generalisering og algebraisk generalisering kan sees på som to ulike måter å generalisere på, ifølge Radford (2010). For å forstå hva skillet mellom disse to er, må en også forstå hva som kjennetegnes i algebraisk tenkning. Algebraisk tenkemåte er ifølge Radford (2010) en egen form for matematisk refleksjon.

Algebraisk tenkemåte kjennetegnes av hovedsakelig tre sammenhengende elementer. Der det første elementet er erkjennelsen av at algebraiske objekter slik som ukjente, variabler og parametere ikke er endelig, men kan representeres av andre algebraiske objekter under gitte betingelser (L. Radford, 2010). Det som menes med dette er at en forstår at de ulike objektene under gitte omgivelser kan erstattes med andre objekter, slik som andre ukjente eller med tall. Det å erstatte tallet 3 med tallet 3 gir liten eller ingen mening, men det å kunne erstatte en ukjent med en annen ukjent, gir mening under gitte betingelser.

Det andre elementet i algebraisk tenkning er at disse algebraiske objektene som blir beskrevet i det første elementet blir håndtert analytisk, en må altså vurdere hva de ulike objektene står for og hva hensikten med å benytte disse er (L. Radford, 2010).

Det tredje og siste elementet er den symbolske representasjonen. Algebraiske objekter må behandles som indeterminerte objekter, altså objekter som ikke er forhåndsbestemt. Dermed må en konstruere representasjonen deres ved hjelp av ulike tegn, altså symbolsk representasjon (L. Radford, 2010). Tallet 3 vil alltid stå for en mengde som representerer 3, en variabel i form av for eksempel $x$ vil kunne stå for ulike verdier i ulike situasjoner.

Aritmetisk generalisering innebærer det å være i stand til å se kjennetegn og likheter i et bestemt mønster. Det innebærer også det å kunne legge merke til lokale likheter mellom enkelte symboler i et mønster. Men denne informasjonen klarer man ikke å benytte til å lage generaliserte uttrykk (L. Radford, 2010). Elevenes løsningsstrategier baserer seg på prøving og feiling i tillegg til andre gjette-strategier, altså mot praktiskbaserte løsningsstrategier. Dette leder ikke til algebraisk resonnering og kalles derfor aritmetisk generalisering (L. Radford, 2010).

Algebraisk generalisering kjennetegnes ved at det utarbeides generelle regler for hvilket som helst tall, gjennom identifisering av de ulike objektene i figurmønstrene. For at generaliseringen skal være algebraisk, må de ulike objektene som identifiseres kunne plasseres inn i et uttrykk som vil gjelde for hvilket som helst nummer i figurrekken (L. Radford, 2010). Algebraisk generalisering kan gjenkjennes med tre ulike nivåer (L. Radford, 2010), *faktabasert generalisering, kontekstbasert generalisering* og *symbolsk generalisering*.

*I faktabasert generalisering* forblir de generelle objektene i sin opprinnelige tilstand. De generelle mønstrene blir ikke anerkjent eller navngitt av eleven, men blir utrykt gjennom kroppsspråk, ord eller ulike fakter. Denne typen av algebraisk generalisering kan beregne konkrete tilfeller av en variabel (L. Radford, 2010). De løsningene og strategiene som elevene danner her vil være grunnlag for en dypere algebraisk forståelse.

Både i den *kontekstuelle* og *symbolske generaliseringen* blir de algebraiske objektene gjort kjent gjennom språket. I *kontekstuell generalisering* blir algebraiske objekter navngitt ved at en benytter både matematiske symboler og begreper gjennom det naturlige språket. For eksempel gjennom situerte beskrivelser slik som, «den neste figuren», «den øverste raden», o.l. Det gjøres da kontekstuelle referanser som knyttes til de ulike variablene i mønsteret (L. Radford, 2010).

*Symbolsk generalisering* kjennetegnes ved at objekter og de ulike operasjonene som utføres, uttrykkes ved hjelp av det alfanumeriske systemet av algebra (L. Radford, 2010). Elever som innehar forståelse for symbolsk generalisering vil være i stand til å beskrive regler og uttrykke disse med symboler. Dette betyr at elever kan beskrive løsningen til en hvilken som helst figur med ord (L. Radford, 2010).

Radford (2010) poengterer at fra et utdanningsperspektiv er det viktig å tenke på at de ulike lagene av generalisering har sine utfordringer. Ved faktabasert og kontekstuell generalisering kan eleven ofte snakke om figuren i stedet for figurnummeret. I den symbolske generaliseringen kan elevenes formulering ofte bare fortelle handlingen og fortsatt være bundet til konteksten (L. Radford, 2010).

## 2.6 Ulike typer av forståelse

Vi vil nå se på ulike typer av forståelse og hvordan dette kan påvirke elevens arbeid i matematikk. Derfor vil vi komme med en redegjørelse for Lithners ulike typer resonnering, Skemps to typer av forståelse, Piagets syn på hvordan kunnskap kan konstrueres og Hiebert og Lefevres kunnskapsteori.

### 2.6.1 Lithners resonnering

I Lithners beskrivelse av resonnering er det viktig å skille tankeprosessen fra resonneringssekvensen, dette fordi det er tankeprosessen som skaper ulike resonneringer (Lithner, 2008). Resonnering kan beskrives på følgende måte: Du adopterer en tanke, lager ut fra denne en antakelse, for deretter å komme med en konklusjon på denne antakelsen (Lithner, 2008). Resonneringen trenger ikke være forankret i formell logikk og trenger heller ikke være korrekt, så lenge det gir mening for den som resonnerer. Selve prosessen starter i det eleven møter oppgaven og fortsetter til eleven kommer frem til en løsning eller et svar på oppgaven.

Lithner beskriver fire steg for resonneringen. I det første steget møter eleven en oppgave, der løsningen på oppgaven ikke er åpenbar for eleven. Eleven tar deretter et strategivalg, altså hvilken strategi eleven ønsker å benytte på denne oppgaven. Det å gjette kan for eksempel være en strategi. I det tredje steget må eleven begrunne for seg selv hvorfor denne strategien kan løse oppgaven, altså implementere strategien. Det siste steget er at eleven kommer til en konklusjon på oppgaven.

Lithner (2008) skiller mellom imitativ og kreativ resonnering. Imitativ resonnering innebærer at fremgangsmåten bestemt på forhånd, et eksempel kan være at eleven følger en algoritme som er kjent fra tidligere. Lithner skiller mellom to hovedtyper imitativ resonnering: memorert resonnering og algoritmisk resonnering.

Memorert resonnering handler om å gjengi et memorert svar, og strategien er å skrive dette svaret ned. For eksempel at det er 10 dl i 1 l. Den andre typen imitativ resonnering er algoritmisk resonnering. Her trenger eleven bare å huske en bestemt fremgangsmåte. Begrunnelsen for fremgangsmåten er ofte ukjent for eleven, noe som gjør at en liten feil i algoritmen kan gjøre at eleven ikke finner korrekt svar. Dersom eleven ikke vet hvorfor ulike algoritmer fungerer på ulike oppgaver, kan det også bli en utfordring for eleven å finne den korrekte algoritmen.

Imitativ resonnering krever ikke at eleven må tilpasse matematikken til problemet. Elever som bare benytter imitativ resonnering har heller ikke mulighet til å tilpasse matematikken til nye situasjoner, da eleven benytter en tidligere innlært fremgangsmåte eller bare gjengir et svar som er memorert.

Motsetningen til imitativ resonnering er kreativ resonnering. Lithner nevner tre kriterier for at resonnering skal være kreativ (Lithner, 2008):

1. En ny strategi (for eleven) skapes eller en gjenglemt strategi skapes på nytt

2. Argumenter støtter valg av strategi
3. Argumentene må være forankret i matematiske egenskaper, altså støttes av matematikken

Kreativ resonnering innebærer at eleven ikke trenger en fast fremgangsmåte, men eleven kan anvende matematikken til å skape en egen strategi for å finne løsning på oppgaven eller problemet. Det er ikke nødvendig at eleven finner en helt ny strategi for at resonneringen skal være kreativ. Eleven kan for eksempel gjenskape en strategi som er gjenglemt. Det viktige er at eleven ikke har en fastsatt fremgangsmåte på hvordan oppgaven skal løses, men at eleven selv velger en strategi eleven ønsker å anvende. Ifølge Lithner (2008) behøver ikke resonneringen å være korrekt, men som nevnt i kriteriene må det være argumenter som støtter opp om strategien, samt at disse argumentene har en matematisk forankring. Lithner (2008) trekker frem at det ikke er mulig å ha kreativ resonnering uten analytisk og konseptuell tenking. Den analytiske tenkningen kan for eksempel være at eleven vurderer sine fremgangsmåter, samt kommentere om løsningen eller svaret passer til konteksten av oppgaven. Konseptuell kunnskap kommer vi tilbake til i kapittel 2.6.4. Dersom elevene kan anvende matematikken fleksibelt, er det enklere for dem å anvende matematikken i nye oppgaver eller andre emner. I kreativ resonnering er det individets tolkning av gyldigheten i argumentene, og logikken eleven benytter, som er det essensielle. I algoritmisk resonnering er denne informasjonen gitt på forhånd.

### 2.6.2 Skemps forståelse

Skemp (1976) hevder det er to forskjellige måter man kan forstå matematikk på. De to typene forståelse er relasjonell og instrumentell.. Skemp mener de to ulike forståelsene kan skape utfordringer i matematikkundervisningen. En av grunnene til at dette kan være problematisk, er for eksempel at læreren underviser instrumentelt, mens elevene ønsker å lære relasjonelt, eller omvendt (Skemp, 1976).

Med instrumentell forståelse trenger eleven bare å «kopiere» en fremgangsmåte, og trenger dermed ikke vite eller ha innsikt i hvorfor denne fremgangsmåten fungerer (Skemp, 1976). Eleven innehar ikke kunnskaper nok til å kunne forklare hvorfor eleven anvender en bestemt algoritme eller hvorfor denne fremgangsmåten gir løsningen på oppgaven. Et eksempel kan være der eleven skal regne ut arealet av et rektangel. Eleven kan benytte regneregelen med at man må multiplisere lengde og bredde for å finne arealet, men eleven trenger ikke nødvendigvis å forstå hva arealet er eller hvorfor denne regelen gjelder for areal. Dette har likhetstrekk med Lithners (2008) imitative resonnering.

Fordelen med instrumentell forståelse er den kan benyttes til å finne et raskt svar. Så raskt at selv matematikere til tider benytter seg av faste algoritmer for å finne korrekte svar kjapt, altså med en instrumentell tilnærming (Skemp, 1976). Instrumentell forståelse kan også være enklere for eleven å «forstå». Dette fordi eleven kan lære mange regler som kan hjelpe han med å løse oppgaven. Dette mener vi kan knyttes opp mot Lithners (2008) imitative resonnering. En sammenheng er blant annet at eleven må huske ulike algoritmer for å kunne løse oppgaven. Eleven trenger ikke vite hvorfor denne fremgangsmåten fungerer, men må følge en oppskrift for å kunne gi et svar på oppgaven.

I en undersøkelse gjort av Carraher og Schliemann (2007) kommer det frem at elever på ungdomstrinnet har vanskeligere for å tilegne seg ny kunnskap, sammenlignet med elever på barneskolen. En av grunnene til dette kan være at elevene på ungdomsskolen har et sett med regler de må huske, og når algebraen innføres klarer de ikke å få dette til å passe med kunnskapen de har fra før. Dette kan tyde på at innlæring av faste fremgangsmåter og regler ikke bare hjelper elevene med å finne et rett svar, men det kan også være et hinder for elevenes læring senere i skoleløpet.

Den andre formen for forståelse er relasjonell forståelse (Skemp, 1976). I denne typen forståelse trenger ikke eleven å ha faste algoritmer eller regler for å kunne løse oppgaven. Eleven kan anvende matematikken fleksibelt og utarbeide en strategi for hvordan oppgaven kan løses, fordi eleven ser sammenhengene i matematikken. Dette gjør det også enklere for eleven og overføre strategier og kunnskap til andre typer oppgaver, noe som gjør at det ikke er nødvendig å huske ulike regler eller algoritmer. Dersom vi tar eksempelet med arealet av rektangelet igjen, har eleven relasjonell forståelse av hva arealet er og trenger derfor ikke pugge/huske formelen for arealet av et rektangel. Dermed kan det bli enklere å anvende forståelsen av arealet til rektangelet når eleven skal finne arealet av andre figurer, som for eksempel arealet av trekanter. Vi mener dette kan sammenlignes med Lithners (2008) kreative resonnering. Lithner mente at i kreativ resonnering måtte eleven ha argumenter som støttet opp om strategien og at strategien kunne forankres matematisk.

Slik vi tolker Skemp kan ikke dette gjøres med instrumentell forståelse, men med relasjonell forståelse. I den relasjonelle forståelsen er ikke eleven nødt til å følge en fast oppskrift, men kan anvende matematikken til å finne alternative eller nye måter å løse oppgaven på. Å få en relasjonell forståelse kan kanskje være mer tidkrevende enn instrumentelt, men når noe er forstått relasjonelt vil det være enklere å overføre til annen matematikk (Skemp, 1976). Skemp (1976) mener at det kan være motiverende for elevene å lære relasjonelt, siden elevene da ser sammenhengene i matematikken. I likhet med kreativ resonnering trenger man ikke å en fast strategi eller oppskrift for å løse oppgaven.

### 2.6.3 Piagets læringssyn

I Piagets læringssyn, er det individet selv som konstruerer kunnskap (Lyngsnes & Rismark, 2007). Piaget beskriver to former for kunnskap en kan inneha: figurativ og operasjonell kunnskap. Figurativ kunnskap er kunnskap som kan gjentas, men ikke anvendes i nye situasjoner. Dette kan for eksempel være fakta eller detaljer som elevene har pugget (Lyngsnes & Rismark, 2007). Figurativ kunnskap har likhetstrekk med Lithners (2008) memorerte resonnering, der man kan gjengi et svar, men det er ikke gitt at denne kunnskapen kan benyttes i nye situasjoner.

Operasjonell kunnskap sees derimot på som kunnskap som er varig og som eleven kan anvende (Lyngsnes & Rismark, 2007). Dette gjør at eleven også kan benytte kunnskapen i nye sammenhenger. Operasjonell kunnskap skapes gjennom assimilasjon og akkomodasjon. Assimilasjon er at eleven prøver å fortolke ny kunnskap med utgangspunkt i kunnskapen eleven allerede har innenfor et bestemt emne. Med dette menes å få ny kunnskap til å passe med eksisterende kunnskap. Akkomodasjon er når eleven må tilpasse det han allerede vet til nye erfaringer, slik at dette stemmer overens med virkeligheten. Operasjonell kunnskap har dermed likhetstrekk med kreativ resonnering og relasjonell forståelse, siden operasjonell kunnskap også kan anvendes i nye oppgaver eller situasjoner. En trenger dermed heller ikke å huske formler, som er tilfellet i instrumentell forståelse.

Det er likhetstrekk mellom instrumentell forståelse, imitativ resonnering og figurativ kunnskap. Blant annet at eleven må huske fremgangsmåter eller en regler. Også mellom kreativ resonnering, relasjonell forståelse og operasjonell kunnskap kan vi se likhetstrekk. Et eksempel her kan være at eleven kan anvende matematikken i nye sitasjoner, siden eleven kan anvende matematikken fleksibelt. I tillegg bør det nevnes at det ikke alltid er et klart skille mellom hva som kan betegnes som instrumentell-, eller relasjonell forståelse. Dette fordi instrumentell,- og relasjonell forståelse er komplementære til hverandre, det vil derfor finnes noen «gråsoner» for hvor den ene slutter og den andre begynner. Dette vil også gjelde Lithners typer av resonnering og Piagets inndeling av kunnskap. På den andre siden er det derimot viktig å kunne se at det finnes ulike måter å forstå matematikk på. Skemp hevder for eksempel at instrumentell og relasjonell forståelse av matematikk er så ulike at det kunne vært to forskjellig fag (Skemp, 1976).

### 2.6.4 Prosedyremessig og konseptuell kunnskap

En annen velkjent teoretisk retning innenfor matematisk forståelse er Hiebert og Lefevres (1986) prosedyremessig-, og konseptuell kunnskap. Skemps (1976) definisjon av forståelse omhandler som nevnt relasjonell og instrumentell forståelse, mens hos Hiebert og Lefevre, snakkes det om prosedyremessig kunnskap og konseptuell kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986). Der Skemps (1976) behandler de ulike begrepene som to separate områder, altså som to typer av forståelse som ikke er inngående i hverandre. Behandler Hiebert og Lefevre konseptuell kunnskap og prosedyremessig kunnskap som to områder som til dels overlapper hverandre.

Kjernen i begge disse to begrepene kan sies å være tydelig, men det å kunne si hvor prosedyremessig forståelse slutter og konseptuell forståelse starter er mindre tydelig. En prosedyre trenger ikke å ha et konsept, men et konsept må alltid ha en prosedyre. Prosedyrer som er koblet til et konsept vil gi bedre forståelse hos elevene (Hiebert & Lefevre, 1986).

Konseptuell kunnskap kjennetegnes ved at det er kunnskap som er rik på relasjoner. Det kan sees på som et sammenhengende nettverk av ulik kunnskap. Utviklingen av konseptuell kunnskap eller forståelse oppnås i relasjonsbyggingen av ulik informasjon.

Prosedyremessig kunnskap kjennetegnes ved at det består av to deler, den ene delen består av den symbolske representasjonen i matematikk. Her inngår kjennskap til de ulike symbolene som er brukt til å representere matematiske ideer og en forståelse for hvordan de ulike symbolene skal skrives for å kunne representere en matematisk situasjon.

Den andre delen består av algoritmer eller regler for å kunne gjennomføre matematiske oppgaver. Disse kan sees på som steg for steg rutiner for hvordan ulike oppgaver kan løses. Et viktig poeng i de ulike prosedyrene som utføres, er at de blir utført i en forhåndsbestemt sekvens. Prosedyrer er forskjellige, der noen prosedyrer manipulerer symboler, mens andre prosedyrer har med det regnetekniske eller behandling av diagrammer å gjøre. De ulike prosedyrene er hierarkisk ordnet og dette gjør at noen prosedyrer kan inneha underprosedyrer (Hiebert & Lefevre, 1986).

Kieran (2013) presiserer at skillet som er laget i forskningen mellom disse to ulike kunnskapstypene har vært skadelig for hvordan algebra læres i skolen, og da hvordan algebra behandles. Det å innse at prosedyrer kan inngå i det konseptuelle og at det konseptuelle kan inneha et prosedyremessig utseende, er viktig i forståelsen av at disse to henger sammen (Kieran, 2013). De ulike prosedyrene endrer seg i takt med at konseptuelle ideer utvikler seg. For å kunne utvikle faget i skolen må en også erkjenne at disse to begrepene henger sammen og påvirker hverandre, for dermed å kunne skape forståelse for de ulike begrepene i skolen.

## 2.7 Tidligere forskning

I en undersøkelse av Booth og Davenport (2013) viser deres funn at det er en sammenheng mellom avkoding, prosedyremessig kunnskap og konseptuell kunnskap. Konseptuell kunnskap påvirker både avkodingen, og den prosedyremessige kunnskapen. I undersøkelsen ble det ikke sagt noe om forholdet mellom prosedyrekunnskap og konseptuell kunnskap.

Det kom også frem at avkodingen hadde en positiv påvirkning på ligningsløsningen. De som hadde riktig avkodning av likhetstegnet løste også flere ligningsoppgaver korrekt. I tillegg kommer det frem at elevene ikke alltid «ser» ligningen på den tiltenkte måten, slik den blir presentert i oppgaven. Derfor blir det antydet at det ikke er tilstrekkelig å bare presentere informasjon til elevene, men få elevens blikk rettet mot det som er hensikten at eleven skal «se». Det foreslås at ulike presentasjonsformer kan hjelpe elevene med korrekt avkoding av det som blir presentert. Konseptuell kunnskap av likhetstegnet og subtraksjonstegnet hadde en positiv innvirkning på elevenes ligningsløsning. Det kommer også frem at konseptuell kunnskap kan hjelpe elevene til å presentere et problem på en riktig og meningsfull måte (Booth & Davenport, 2013).

Molina m.fl (2004) har gjennomført et forskningsprosjekt på 3.,5. og 6. trinn. I dette prosjektet ønsket forskerne å undersøke om det kunne avdekkes noen misoppfatninger knyttet til likhetstegnet hos elevene. I forskningsprosjektet kommer det frem at elevene på 3. trinn har flere forskjellige misoppfatninger knyttet til likhetstegnet, blant annet at på høyre siden av likhetstegnet må det komme et svar. En av årsakene til dette kan være ensrettet fokus på likhetstegnet når eleven lærer aritmetikk (Molina m.fl., 2004), noe som gjør at elevene kan få feil oppfattelse av likhetstegnet. Et eksempel her kan være at vi leser uttrykket fra venstre til høyre. Dette kan ha påvirkning når elevene skal begynne med algebra.

Prosjektet viste også at elevene på 5. og 6. trinn ikke har så mange misoppfatninger knyttet til likhetstegnet, og at disse elevene hadde en god forståelse av likhetstegnet. Det blir nevnt at dette funnet bryter med tidligere forskning som har vist at elever på 5. og 6. trinn ofte har misoppfatninger knyttet til likhetstegnet (Molina m.fl., 2004).

Etter gjennomføringen av TIMSS Advanced 2015 kom det frem at de norske elevene skårer svakere enn forventet i matematikk, sammenlignet med de andre landene som deltok. Dette gjelder spesielt i emneområdet algebra (Grønmo, Hole & Onstad, 2016). Pedersen (2013) gjennomførte en studie hvor det ble studert hvordan norske elever skårer i TIMSS Advanced. I TIMSS Advanced deltar elever ved 3. årskull på videregående, som har valgt matematikk som fordypning. I undersøkelsen kommer det frem at de norske elevene i TIMMS Advanced gjorde det bedre i tekstoppgaver der elevene måtte finne informasjonen selv, kontra oppgaver der uttrykket eller formelen var gitt (Pedersen, 2013). Funn tyder også på at norske elever gjorde det svakere på oppgaver der det var høye krav til å manipulere symbolske uttrykk. Dette sammenlignet med oppgaver som hadde lavere krav til symbolmanipulasjon. TIMSS Advanced er som nevnt ment for elever ved videregående utdanning. Vi har valgt å ta dette med fordi det gir oss en indikasjon på hvordan norske elever gjør det i algebra senere i skoleløpet.

I en undersøkelse gjort på lærerstudenter kommer det frem at undervisningsmetode og oppgaveformulering kan skape utfordringer knyttet til generalisering av mønster. Det er med andre ord ikke bare mønstergjenkjenning som kan være problematisk i generalisering (Strømskag, 2017).

I en studie fra 2015 utført av Kongelf (2015) analyseres det seks ulike lærebøker i matematikk på ungdomstrinnet, da for å se på hvordan algebra introduseres i de ulike lærebøkene. Lærebokens bruk i skolen styrer ofte både lærer, innhold og progresjon i faget (Kongelf, 2015). Studiet analyserer derfor seks ulike læreverk med hensyn på hvordan de fremmer læring i emnet algebra. Kongelf (2015) mener funnene i dette studiet tyder på at det til dels er manglende samsvar mellom hvordan læreplanen kan tolkes, og fremstilling av algebra i lærerbøkene. De ulike verkene som er analysert inneholder feilaktige formuleringer, illustrasjoner og resonnement som kan bidra til å skape misoppfatninger hos elevene. De ulike kapitlene fremstår som lite påvirket av forskning på feltet algebra eller intensjonen med hovedområdet tall og algebra fra læreplanen. Resultatet av denne studien kan benyttes som en delforklaring på hvorfor norske elever skårer svakt på algebradelen i internasjonale og nasjonale tester (Kongelf, 2015).

# 3 Metode

I dette kapittelet vil vi redegjøre for metodene vi benyttet for å finne ut hvilke misoppfatninger norske 9. trinns elever har i emne algebra som gjør at de skårer lavt på TIMSS 2015?

## 3.1 Læringssyn

Ulike læringssyn ser på hvordan læring dannes hos individene. De tre hovedkategoriene av læringssyn som en studie kan kategoriseres som er det kognitivistiske-, det positivistiske- og det konstruktivistiske læringssynet (Postholm & Moen, 2009). Dette prosjektet har et konstruktivistisk læringssyn.

Et konstruktivistisk læringssyn innebærer at vi utvikler og konstruerer våre begreper i interaksjon med det sosiale og det kulturelle miljøet vi er en del av (Postholm & Moen, 2009). Kunnskap er med dette i stadig endring og fornyelse, den er altså ikke gitt på forhånd hos de ulike individene (Postholm, 2010). Det konstruktivistiske synet kan da oppsummeres med at mening ikke oppdages, men konstrueres av de ulike individene.

## 3.2 Metodevalg

En kvalitativ tilnærming til forskningen mente vi ville gi oss muligheten til å gå i dybden av de ulike misoppfatningene som kom frem, samt prøve å få et innblikk i hvilken forståelse eleven innehar. En kvalitativ tilnærming ga oss muligheten til å stille oppfølgingsspørsmål dersom dette skulle være nødvendig under gjennomføringen av intervjuene. Dette til forskjell fra kvantitativ tilnærming, og et eventuelt spørreskjema, der vi ikke ville hatt muligheten til å kunne stille oppfølgingsspørsmål.

Kvalitativ metode ga oss muligheten til å være fleksibel i forskningen ved at vi kunne gjøre endringer underveis. Det ga oss også muligheten til å kunne oppdage uforutsette hendelser som mest sannsynlig ikke ville blitt oppdaget dersom vi hadde benyttet oss av en kvantitativ tilnærming til studiet (Creswell, 2014). Med dette menes når elevene må formidle muntlig hva de tenker og hvorfor de tenker slik, kan det oppstå ulike nye problemstillinger hos oss som intervjuere. Dette i motsetning til at elevene kun løser oppgavene på papir uten å måtte formidle sine tanker eller valg.

Det at kvalitative studier er mer fleksible, vil si at de i større grad tillater spontane hendelser og ulike tilpasninger i de ulike interaksjonene som oppstår mellom forsker og informant (Christoffersen & Johannessen, 2012). En kvantitativ studie ville gitt oss muligheten til å benytte oss av et større omfang elever til å løse oppgavene enn i en kvalitativ tilnærming. På den andre siden ville vi ikke fått tak i misoppfatninger på samme måte, som ved en kvalitativ tilnærming. En kvantitativ tilnærming ville også ha vært enklere å generalisere basert på de ulike funnene enn vår kvalitative tilnærming (Creswell, 2014), blant annet på grunn av større utvalg.

Vår forskning tar for seg misoppfatninger og forståelse hos elevene når de løser algebraoppgaver fra TIMSS. I utgangspunktet mente vi at denne masteren havnet under en fenomenologisk retning som er en underkategori for kvalitativ metode (Postholm, 2010), med hensyn mot den psykologiske fenomenologien. Etter nærmere innblikk i teorien om denne metoden så vi at fenomenologiske studier beskriver meningen som menneskene legger i en opplevelse (Postholm, 2010). Vi ønsker ikke å kunne gjengi hva elevene føler når de løser en oppgave, men hva elevene tenker matematisk. En annen metode enn fenomenologisk tilnærming ble da nødvendig.

Etter å ha satt oss mer inn i kvalitative metoder oppdaget vi at vi befant oss innenfor en generisk kvalitativ metode (Caelli, Ray & Mill, 2003).

### 3.2.1 Generisk kvalitativ metode

Generisk kvalitativ metode defineres av Caelli (2003) som studier der en ikke har et tydelig sett av filosofiske betraktninger i en form som inngår i de ulike konkrete kvalitative metodene, som for eksempel fenomenologi, etnografi eller kasusstudier (Caelli m.fl., 2003; Postholm, 2010).

I denne oppgaven er misoppfatninger og forståelse hovedfokus, ikke på de indre strukturene av opplevelsen i seg selv som det fokuseres på i fenomenologien (Percy, 2015). Som Percy m.fl (2015) poengterer, kan vi da benytte oss av generisk kvalitativ tilnærming som metode. Denne metoden inkluderer ulike kvalitative metoder i en mikset design. Innsamling av data til en generisk kvalitativ metode krever et delvis strukturert opplegg, slik som for eksempel semistrukturerte intervju (Percy, 2015).

### 3.2.2 Intervju

Det kvalitative forskningsintervjuet er en samtale med enn viss struktur og et formål, og går dermed dypere enn den spontane meningsutvekslingen som gjennomføres i det daglige. Formålet med å gjennomføre et slikt intervju er å få frem ulike erfaringer og opplevelser hos intervjuobjektet. Ulike typer intervju, har ulik rollefordeling, men det er forskeren som definerer og kontrollerer samtalen i de ulike intervjuene. Hovedhensikten er å forstå eller beskrive noe hos intervjuobjektet i gjennomføringen av de ulike intervjuene (Kvale & Brinkmann, 2015)

#### 3.2.2.1 Vårt valg av intervju

Da vi tidlig i prosjektet ønsket å ha en kvalitativ tilnærming var det naturlig å ikke benytte seg av spørreundersøkelser eller undersøkelser i store omfang. Observasjon av elevene ble drøftet som en mulig metode tidlig i prosessen, men på bakgrunn av problemstillingen mente vi at dersom dette skulle gjennomføres, ville det bli våre personlige beskrivelser av elevenes misoppfatninger. Det ville da blitt våre tolkninger av elevenes besvarelser, basert på det de ville utrykt til hverandre i en eventuell muntlig sammenheng eller når de løste oppgavene på papir (Postholm, 2010). Intervju som metode ble da naturlig i henhold til vår problemstilling. I kvalitative metoder er det kvalitative intervjuet den mest brukte metoden for å samle inn data (Christoffersen & Johannessen, 2012). Ved å benytte oss av intervju som metode mente vi at vi kunne få fatt i mulige svar til problemstillingen på en reel måte, da vi underveis i intervjuet kunne stille oppfølgingsspørsmål for å få bekreftet/ avkreftet våre oppfatninger av elevenes tankemønstre.

#### 3.2.2.2 Ulike typer intervju

Ulike typer intervju skiller seg fra hverandre ut fra strukturen på intervjuet. Med dette menes hvor mye av intervjuets innhold og intervjuers rolle som er bestemt på forhånd. De ulike typene intervju er *ustrukturert-*, *semistrukturert-*, *strukturert-*, og *strukturert intervju med faste svaralternativer* (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Det *ustrukturerte intervjuet* er uformelt og har åpne spørsmål rundt det aktuelle temaet som skal undersøkes. Verken spørsmålene eller rekkefølgen er bestemt på forhånd. I gjennomføringen av slike intervju kan relasjonsforholdet mellom forsker og informant påvirke informasjonen som blir delt. Et *semistrukturert intervju* kjennetegnes ved at en har en overordnet intervjuguide som utgangspunkt (Christoffersen & Johannessen, 2012). Spørsmål, tema og rekkefølge kan variere. Det *strukturerte intervjuet* kjennetegnes ved at det har forhåndsbestemte tema, spørsmål og rekkefølge. I *strukturerte intervju med faste svaralternativer* er også tema, spørsmål og rekkefølge bestemt på forhånd, men til forskjell fra *strukturerte intervju* har denne typen faste svaralternativer som informantene må velge mellom. Dette gir en mer overfladiske svar enn ved *strukturerte intervju,* der en får mer utfyllende og unike svar for hver informant (Christoffersen & Johannessen, 2012).

#### 3.2.2.3 Semistrukturert intervju og intervjuguide

I gjennomføringen for denne avhandlingen benyttet vi oss av et semistrukturert intervju (Christoffersen & Johannessen, 2012). Intervjuet som ble gjennomført hadde seks oppgaver fra TIMSS 2015 som elevene skulle løse. Vår intervjumetode ble da et semistrukturert oppgavebasert intervju (Goldin, 1997). Oppgavebaserte intervju kan benyttes for å kartlegge elevers tankemønstre underveis i oppgaveløsning (Goldin, 1997).

Vi hadde i forkant av gjennomføringen av vårt semistrukturerte intervju laget en intervjuguide som skulle følges. En intervjuguide kan defineres som et manuskript som strukturerer intervjuforløpet mer eller mindre stramt (Kvale & Brinkmann, 2015). En kan altså se på det som en kjøreplan der visse holdepunkter er satt, men det betyr ikke at veien mellom disse holdepunktene er eksakt like for hvert intervju. Vår intervjuguide besto av ulike temaer som skulle gjennomgås i forkant av selve oppgaveløsningen. De ulike temaene hadde vi bestemt selv etter en kort gjennomgang av Postholms (2010) intervjuguide. Ulike temaer som ble tatt opp med informantene var fritidsinteresser, yndlingsfag på skolen, hva eleven synes om matematikkfaget i skolen. Dette valgte vi å gjøre da både vi og elevene var ukjente for hverandre. For å gjøre elevene trygge på hva som kom til å skje, valgte vi å gjennomføre en liten samtale i forkant på ca. 10 minutter der de ulike forhåndsbestemte tema ble tatt opp.

Når de ulike temaene var gjennomgått med eleven startet selve intervjuet, da startet selve lydopptaket. Når lydopptaket var startet ble det «lest opp» en felles informasjonsdel om hva eleven nå skulle blir intervjuet om. Videre gikk vi over til oppgaveløsning der rekkefølgen på de seks ulike oppgavene var forhåndsbestemt, dette basert på pilotintervjuene som ble gjennomført november 2017. I tillegg til at rekkefølgen på de ulike oppgavene var satt, hadde vi på forhånd gjort ulike begrepsavklaringer på bakgrunn av pilotintervjuene. I tillegg hadde vi laget noen tilleggsoppgaver som kunne bli gitt til elevene dersom de ikke klarte å løse, eller satt fast på en av oppgavene fra TIMSS.

#### 3.2.2.4 Pilotintervju

Vi ønsket å teste ut intervjuet før selve datainnsamlingen skulle starte. Dette var for at vi skulle få teste ut intervjuformen, samt gjøre endringer der vi mente dette var nødvendig. Bakgrunnen til dette valget var våre veiledere Arne Hole og Jan N. Roksvold, som anbefalte oss å gjennomføre pilotintervju. For å få gjennomført pilotintervjuene tok vi kontakt med en tidligere praksislærer ansatt i Tromsø kommune. Læreren var kontaktlærer for 10. trinn, men det viktigste for oss på dette stadiet var å få testet intervjumetoden og de ulike oppgavene. Derfor mente vi det ikke gjorde noe at pilotintervjuene ble gjennomført på 10. trinn. Vi bestemte oss for å gjennomføre to pilotintervju. Begge pilotintervjuene ble gjennomført uten lydopptak. Vi tok heller ikke vare på noen av elevenes skriftlige besvarelser fra intervjuene.

Etter gjennomføringen av pilotintervjuene gjorde vi noen endringer i den opprinnelige planen. Blant annet la vi merke til at måten vi satt på rundt bordet, der eleven satt på den ene siden og vi på den andre, gjorde noe med settingen til intervjuet. Denne settingen kunne minne om et slags avhør. Det var også vanskelig for eleven å «stikke» av med blikket siden begge intervjuerne satt foran eleven. Vi ble derfor enige om at dette skulle vi endre til gjennomføringen, slik at eleven kunne føle seg tryggere i en ellers så uvant situasjon. Dette mente vi forhåpentligvis kunne være med på å skape trygge rammer rundt intervjuene.

Vi merket også at den tidsmessige lengden på intervjuene ble lengre enn vi hadde tenkt. Derfor la vi dette inn som en del av informasjonen til elevene slik at de kunne forberede seg på intervjuenes lengde.

I pilotintervjuene hadde vi med oss seks oppgaver fra TIMSS 2015, der vi senere skulle velge ut fem oppgaver som vi skulle benytte i prosjektet. Underveis i pilotintervjuene merket vi oss at de seks oppgavene ga oss relevant og forskjellig informasjon, noe som gjorde at vi bestemte oss for å benytte oss av alle seks oppgavene, selv om dette gjorde intervjuene noe lengre.

Et siste funn som ble avdekket under pilotintervjuene var at det var vanskelig å avgjøre hvor mye vi kunne hjelpe elevene. Dette resulterte i at vi laget en «guide» av spørsmål som vi kunne benytte på de ulike oppgavene for å hjelpe elevene. I oppgavebaserte intervju er det vanlig å gjøre seg opp ulike spørsmål i forkant av gjennomføring (Goldin, 1997).

#### 3.2.2.5 Gjennomføring av intervju

Før rundene med intervju startet, hadde vi samlet inn samtykke fra de foresatte. De gjennomførte intervjuene varte mellom 40 til 50 minutter og ble transkribert i etterkant av intervjuene.

Ved å benytte seg av lydopptak kan intervjueren konsentrere seg om informantenes ulike beskrivelser til de ulike oppgavene. Dette i tillegg til at intervjueren får et bedre inntrykk av intervjuets dynamikk enn hvis en skulle ha notert ned alt informantene svarte (Kvale & Brinkmann, 2015).

Det at vi benyttet oss av lydopptak gjorde at vi i større grad kunne konsentrere oss om besvarelsene til de ulike elevene underveis. Vi klarte delvis å analysere besvarelsene og fikk dermed mulighet til å stille oppfølgingsspørsmål til elevene, der de kunne bekrefte eller avkrefte vår forståelse av deres besvarelser. Dette gjorde at vi kunne spare oss for arbeid i det senere analysearbeidet, da elevene selv godkjente våre analyser underveis av deres besvarelser.

### 3.2.3 Utvalg

Vi bestemte oss for å gjennomføre prosjektet med elever fra 9. trinn, blant annet på bakgrunn av at elevene på 9. trinn i Norge er på samme alder som elevene fra de andre landene som deltar i TIMSS (Grønmo m.fl., 2012). I tillegg viste statistikken at også 9. trinns elever hadde problemer med å løse oppgavene i algebra, sammenlignet elever fra 8. trinn (IEA, 2018).

Selve gjennomføringen av intervjuene ønsket vi å ha i Tromsø, dette fordi det var det mest praktisk for oss selv, både tidsmessig og økonomisk. For å få tak i informanter sendte vi mail til en skole der vi tidligere hadde hatt praksisopphold. Det kom aldri noen svar på denne henvendelsen, så vi måtte jobbe videre for å få informanter. Vi kom deretter i kontakt med en bekjent som jobbet som lærer i Tromsø kommune. Han var villig til å la oss gjennomføre datainnsamlingen i hans klasse. Videre sendte vi mail til rektor på denne skolen, der vi viste til at en lærerne var positiv til å delta i prosjektet. Rektoren ga tillatelse til dette og vi kunne starte planleggingen og gjennomføringen i samarbeid med læreren.

Læreren hadde valgt ut fem elever som oppfylte våre krav til informanter, kravene som ble stilt blir beskrevet senere. Alle fem elevene som ble forespurt godkjente deltakelsen til prosjektet. Datainnsamlingen ble fordelt over to dager, da dette passet best for skolen. Den første dagen intervjuet vi tre elever og de to siste elevene ble intervjuet dag to.

I dette prosjektet benyttet vi oss av fem informanter, som skulle løse seks oppgaver fra TIMSS 2015, der noen oppgaver hadde deloppgaver. Vi startet i utgangspunktet med å ha 20 informanter, men etter videre diskusjon med veiledere kom vi frem til at med tanke på tid og arbeidsmengde, var det hensiktsmessig å bare benytte seg av fem elever. Vi mente fem elever ville være tilstrekkelig for å gi oss en indikasjon på misoppfatninger i algebraoppgavene.

Fem informanter er for lite til å kunne generalisere våre funn. Vi planla å intervjue elever som hadde karakteren tre eller høyere i matematikk. Statistikken fra oppgavene som ble valgt viser at det er relativt få elever på 8. trinn og 9. trinn som klarer å løse disse oppgavene (IEA, 2018). Det kan være lite motiverende for elever som strever i matematikk å måtte gjennomføre oppgaver som de færreste andre norske elever klarer å løse. Derfor menter vi at det ikke var hensiktsmessig å intervjue elever som hadde karakter lavere enn tre.

Alle de fem elevene som ble forespurt fikk et informasjonsskriv om vårt prosjekt. Siden elevene ikke er myndige måtte de foresatte godkjenne og skrive under på at de samtykket i at eleven kunne delta i prosjektet. Elevene fikk også spørsmål rett før intervjuene startet om de fortsatt ønsket å delta i prosjektet, samt informasjon om at de kunne trekke seg dersom de ønsket dette.

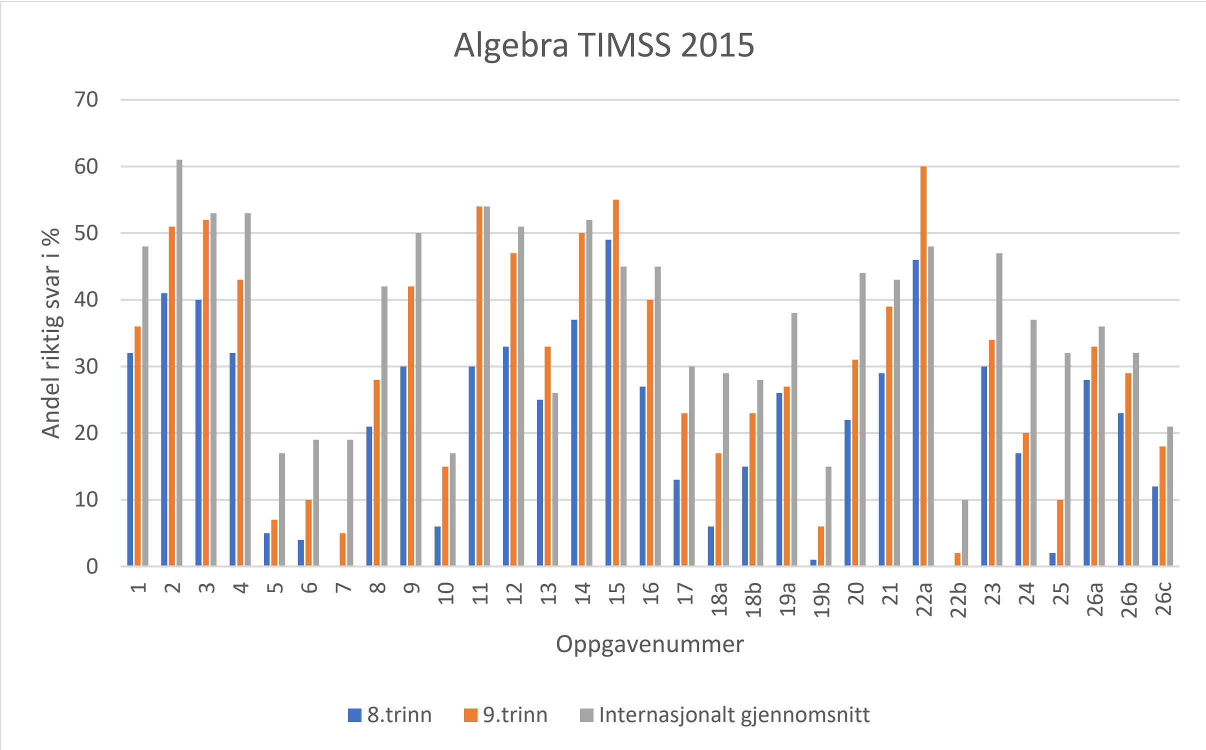
Antallet forskningsdeltakere var på fem elever. En generalisering av resultatene vil dermed være vanskelig. Resultatene fra denne studien kan altså ikke sies å gjelde alle norske elever. De ulike misoppfatningene knyttet til algebraoppgavene som avdekkes kan kun sees i sammenheng med de fem elevene som har besvart oppgavene. De ulike resultatene kan dermed kun benyttes til å si noe om hvilke misoppfatninger våre elever innehar. Vår undersøkelse kan allikevel benyttes som et trinn i hva som eventuelt skal forskes på videre i emnet dersom dette er av interesse.

### 3.2.4 Valg av oppgaver

Etter hver gjennomføring av TIMSS blir det frigitt noen oppgaver, mens noen oppgaver videreføres til neste gjennomføring av TIMSS, og blir dermed ikke offentliggjort. Dette gjøres fordi det skal være mulig å sammenligne resultatene av testene fra år til år. Vi ønsker å se på hvorfor elever skårer svakere på algebradelen i TIMSS 2015, og mener derfor det er hensiktsmessig å ta i bruk oppgaver som er brukt i TIMSS-undersøkelsen fra 2015. Ved hjelp av statistikken fra 2015 ble det mulig å se på hvordan elevene skåret på de forskjellige oppgavene som ble frigitt. Deretter valgte vi oss ut et utvalg av oppgaver som de norske elevene skårer spesielt svakt på.

I pilotintervjuene ble vi oppmerksomme på at intervjuene kunne bli veldig lange, noe som gjorde at vi ble enige om at vi ikke burde ha for mange oppgaver. Samtidig ønsket vi å se på forskjellige oppgavetyper, slik at vi fikk muligheten til å se om det var ulike misoppfatninger som gjorde at få elever klarer å løse oppgavene. Vi vil i kapittel 5.1 presentere de ulike oppgavene og en kort begrunnelse hvorfor disse ble valgt, samt hvilke misoppfatninger som kan knyttes til hver oppgave. De ulike oppgavene fra TIMSS ligger vedlagt i vedlegg 4. Felles for alle er at norske elever skårer relativt svakt på hele eller deler av oppgavene**.**

Vi valgte som nevnt oppgaver der statistikken viser at norske elever har problemer med å løse oppgaven korrekt. Blant annet er oppgave 6 og 25 oppgaver som kanskje burde vært med, dersom man ser på statistikken, se Figur 1. Oppgave 6 og 25 ble derimot ikke tatt med til intervjuene da vi etter en gjennomgang så at de var veldig like oppgave 19 som vi allerede hadde tatt med.




*Figur 1: Svarprosent algebraoppgaver TIMSS 2015*

## 3.3 Validitet og reliabilitet i vårt forskningsprosjekt

I dette avsnittet følger noe om vårt prosjekts reliabilitet og validitet.

### 3.3.1 Reliabilitet i vårt forskningsprosjekt

Kravene til reliabilitet kan være problematiske i kvalitative forskning (Postholm, 2010). Reliabiliteten kan knyttes opp til påliteligheten til resultatene, altså hvor vidt resultatene kan reproduseres og gjentas. Dette kan være vanskelig å gjøre i kvalitative undersøkelser. Dette fordi hvert møte mellom informant og forsker er unik. Med dette menes at de ulike informantene vil forklare og vektlegge ulikt innhold i intervjuene. Dette kan bidra til å skape et bredere og et mer balansert bilde av temaet som undersøkes.

Vi hadde noen tema som var forhåndsbestemt, mens kategoriene ble til i analysearbeidet. Kategoriene som ble til underveis i prosjektet var kategorier som vi mente gikk igjen i vårt datamateriale og som var nødvendig for å analysere vårt datamateriale. Siden møte mellom forsker og hver informant vil være unikt, betyr dette at dersom vi skulle gjennomført prosjektet på nytt, hadde vi kunne avdekket andre funn og resultater. Dersom vi hadde benyttet andre informanter enn våre fem elever, kunne dette medføre at vi kanskje benyttet andre kategorier.

Relabilitet i prosjektet kan knyttes opp mot hvor konsekvent undersøkelsen er gjennomført (Postholm, 2010). For eksempel hvor godt analysen forsvarer tolkningene som blir utført. Relabiliteten til forskningen kan derfor knyttes opp mot hvordan data ble samlet inn, hvordan denne anvendes og hvordan den blir analysert. Vi har derfor prøvd å beskrive selve gjennomføringen av metoden og hvordan vi gikk frem når vi skulle analysere datamaterialet, slik at det kommer frem hvordan dette ble gjennomført i vårt forskningsprosjekt. Dette gjør vi for at det skal være mulig å vurdere om vi har vært konsekvent i gjennomføringen av prosjektet.

For at intervjuene skulle bli gjennomført så identisk som mulig hadde vi utarbeidet en intervjuguide med spørsmål som vi kunne benytte for å hjelpe eleven i gang med oppgavene. I intervjuguiden hadde vi skrevet opp tilleggsopplysninger som kunne gis, samt hvilke spørsmålstema vi kunne stille elevene. Dette gjorde vi for at elevene skulle få den samme informasjonen og de samme opplysningene. I ettertid viser transkripsjonene at det er vanskelig å gi eleven nøyaktig samme opplysninger. Elevene innehar ulike utfordringer eller forståelse av oppgavene, noe som gjorde at elevene stilte oss ulike spørsmål. Dermed var det vanskelig for oss å vurdere hvilke opplysninger vi kunne svare på. Da vi hørte på lydfilene merket vi oss at måten vi stilte spørsmålene på varierte fra elev til elev. Siden vi prøvde å sette oss inn i misoppfatningene og forståelsen til elevene ser vi i ettertid at vi i enkelte tilfeller kommer med små bekreftelser, uten at dette var bevisst fra vår side.

### 3.3.2 Validitet i vårt forskningsprosjekt

Validitet er knyttet til tolkning av data (Thagaard, 2013). Når vi skal validere ønsker vi å se på kunnskapens gyldighet (Malterud, 2003). Derfor er det viktig å stille kritiske spørsmål til sitt eget prosjekt, blant annet om metoden vi har brukt kan benyttes for å gi svar på problemstillingen. Dermed kan man få frem at valgene som er gjort underveis i prosjektet kan ha påvirket kunnskapen som kommer frem. Vi har blant annet diskutert med hverandre, og våre veiledere om ulike valg som er gjort i oppgaven. I disse diskusjonene har vi sett fordeler og ulemper ved ulike valg. Eksempler er forskjellen mellom kvalitativ og kvatitativ studie, og antall informanter. Vi mener diskusjonene blant annet knyttet til hvilken metode vi skulle benytte, har vært med på å styrke vår validitet. Dette fordi vi har sett fordeler og ulemper tilknyttet de ulike valgene.

Kontinuerlig valideringsprosess kan bidra til læring og nye erfaringer i forskningsprosessen, noe som gjør at vi kan tilpasse vårt design etter dette. Det å se de ulike funnene i sammenheng med helheten er her viktig (Malterud, 2003). Ved å sammenligne resultatene med andre undersøkelser kan man argumentere for validiteten på egen studie (Thagaard, 2013). Malterud (2003) hevder også at samsvar mellom funn fra forskere kan være viktig for gyldigheten, men det poengteres at ikke alt blir mer sant bare fordi det er flere som mener det er slik, dette støttes også av Thagaard (2013). Vi vet at våre funn ikke kan generaliseres, men funnene i denne avhandlingen kan indikere ulike misoppfatninger som våre elever kan inneha. Dette kan være misoppfatninger andre lærere kan være oppmerksomme på i egen undervisning. For eksempel viktigheten av at begrepene blir utviklet over flere felt og ikke bare på et begrenset felt. Dette knyttet opp mot Brekkes definisjoner av misoppfatninger (Brekke m.fl., 2002). Hvor anvendelig dette er for andre har også innvirkning på prosjektet validitet (Malterud, 2003).

Thagaard (2013) mener også at det er viktig at forskeren reflekterer over egen posisjon i forskningsarbeidet. Dette med tanke på blant annet relasjonen til informantene, stillingsforholdet mellom forskeren og informantene, eller forskerens kjennskap til miljøet der forskningen finner sted. Vi hadde ingen kjennskap til elevene fra tidligere og dette var en av grunnen til at vi fikk læreren til å velge elever som kunne delta i undersøkelsen. Intervjuene ble gjennomført på skolen til elevene, slik at gjennomføringen kunne skje i kjente omgivelser.

Kvale og Brinkmann (2015) understreker at validiteten er en del av hele forskningsprosessen og ikke bare en bestemt undersøkelsesfase. For å sikre validitet under en hel intervjuundersøkelse har de utviklet syv stadier for validering (Kvale & Brinkmann, 2015). De syv stadiene er tematisering, planlegging, intervjuing, transkribering, analysering, validering og rapportering.

Fem av de ulike stadiene følger under, dette fordi Kvale og Brinkmann (2015) viser til at en skal ta utgangspunkt i de stadiene som er relevant for sitt studie. Vi har beskrevet de ulike stadiene som vi mener er relevant til dette prosjektet.

*Tematiseringen* omhandler forankringen prosjektet har til teori og om dette er i samsvar med problemstillingen (Kvale & Brinkmann, 2015). Vi prøvde å sette oss inn i resultatene til TIMSS for å se på hvordan norske elever gjør det sammenlignet med det internasjonale gjennomsnittet. I tillegg har vi i løpet av høsten 2017 og våren 2018 satt oss inn i ulik teori knyttet til forståelse, algebra og misoppfatninger i algebra. Vi mener derfor vi har teori som forankring til vårt forskningsprosjekt og at det er en logisk sammenheng mellom teorien og problemstillingen.

*Planleggingen* er gyldigheten til kunnskapen, blant annet knyttet til metoden og formålet med studien (Kvale & Brinkmann, 2015). Vi har underveis i prosessen diskutert ulike valg og metoder, dette for at vi skal kunne stille kritiske spørsmål til vårt eget prosjekt. Dette har fått oss til å reflektere over hvilke konsekvenser våre valg har for prosjektet. Vi har tatt i bruk generisk kvalitativ metode (Percy, 2015), som er en metode som egner seg for å se på elevenes kognitive strategier, dette har vi tenkt å benytte i tilknytning til oppgavene fra TIMMS. Dermed mener vi denne metoden er godt egnet for å svare på vår problemstilling.

Det neste stadiet går på oss som intervjuere og betegnes som *intervjuing*. Dette stadiet handler om kvalitet under intervjuene, blant annet på hvor grundig utspørringen er og kontroll på informasjon som gis av informanten (Kvale & Brinkmann, 2015). Vi benyttet oss av en intervjuguide, men merket oss at måten vi stilte spørsmålene på, varierte i intervjuene. Vi benyttet oss også av *member-checking* (Lincoln & Guba, 1985), der vi gjentar det elevene sier. Dette fordi vi skulle sjekke at vi hadde forstått elevenes besvarelser korrekt.

*Transkribering* er Kvale m.fl (2015) fjerde stadie. Som nevnt tidligere er det viktig å tenke på at noe av datamaterialet kan misforstås når det overføres fra muntlig til skriftlig språk. Vi bestemte oss for at alt skulle transkriberes, samt at vi tok vare på lydfilene slik at vi kunne gå tilbake for å sjekke dersom det var noe i transkripsjonene vi ble usikre på. Vi hørte også over lydfilene, mens vi leste transkripsjonene, slik at vi kunne sjekke «oversettelsen». Postholm (2010) mener at under transkriberingen foregår det analyser og anbefaler derfor forskerne til selv å transkribere sitt materiale. Dette arbeidet gjorde vi derfor selv.

*Analyseringen* handler om gyldigheten til spørsmålene i intervjuene, samt om fortolkningen av disse er logiske (Kvale & Brinkmann, 2015). Vi gjennomførte et semistrukturert intervju, der det var forberedt ulike oppfølgingsspørsmål til oppgavene. Derfor mente vi oppgavene i utgangspunktet kunne sees på som spørsmål i vårt prosjekt, siden elevene skulle fortelle hva de tenkte, mens de løste oppgavene. Oppgavene er hentet fra TIMSS og det er også her vi ser at norske elever skårer svakere enn det internasjonale gjennomsnittet. Derfor var det TIMSS-oppgavene vi tok utgangspunkt i når vi skulle finne ut hvorfor eleven gjorde det svakere enn gjennomsnittet. Dette var også en del av begrunnelsen for valg av problemstilling. Tilleggsoppgavene vi hadde utarbeidet, ble blant annet brukt for å kunne skille mellom utfordringer knyttet direkte til emnet algebra og problemer elevene eventuelt kunne ha med det regnetekniske. I tillegg til å avdekke avkodingsproblemer og problemer knyttet til oppgavens utforming.

## 3.4 Kritikk mot valg av metode

Når man skal forske på utdanning kan det være problematisk å få tak i informanter (Christoffersen & Johannessen, 2012). For å få tak i elever fikk vi hjelp av en lærer ved den aktuelle skolen. Denne læreren snakket med våre fem elever og gav dem informasjonsskrivet som vi tidligere hadde sendt til skolen.

At læreren skaffet oss informanter kan ha både positivt og negativ effekt på vår innsamling av data. Derfor bestemte vi oss for å gi læreren noen krav til hvilke elever vi ønsket. Vi ville ha elever med ulike karakterer i matematikk, men høyere enn karakteren to, altså med minimum karakteren tre. Læreren har kjennskap til elevene, så dermed kunne læreren velge elever som hadde ulike karakterer i matematikk. Dette kravet satte vi fordi vi ønsket å se mulige misoppfatninger, uavhengig om elevene hadde høy eller lavere karakterer i matematikk.

Vi valgte å ha fem elever grunnet tidsaspektet ved vårt prosjekt. Dersom vi hadde hatt lengre tid og dermed flere informanter kunne vårt prosjekt kanskje styrket seg. På den andre siden mener vi at fem elever kan gi oss en indikasjon på eventuelle misoppfatninger som elevene innehar, knyttet opp mot oppgavene fra TIMSS 2015. Det er også anbefalt relativt få informanter, slik at en får muligheten til å gjennomanalysere disse intervjuene og få en god fortolkning av materialet (Brinkmann, Tanggaard & Hansen, 2012).

Vi som forskere har ingen kjennskap til elevene som ble benyttet. Det første møtet var under gjennomføringene av intervjuene. Elevenes tidligere erfaringer med måten å løse oppgavene på er også noe vi ikke vet noe om.

Det at elevene skal formidle sine kunnskaper om de ulike oppgavene kan være skremmende og gjøre elevene nervøse. Et mulig resultat av dette er at eleven tror at eleven skal gi et korrekt svar på oppgaven så raskt som mulig. Vi forsøkte å gjøre elevene oppmerksomme på at vi ikke var ute etter å hvor mange korrekte svar elevene hadde, men at vi ønsket å se på hvordan elevene tenkte når oppgaven skulle løses. Elevene hadde ikke noen tidsbegrensninger på oppgavene. Det at de kan inneha den oppfatningen av at de skal komme med et svar så raskt som mulig kan gjøre at eleven ikke utnytter tidspotensialet for intervjuet. Hvis den første fremgangsmåten ikke førte frem ønsket de fleste elevene å gå videre til neste oppgave. I slutten av hvert intervju stilte vi elevene spørsmål om de ønsket å se gjennom noen av oppgavene på nytt.

I ettertid ser vi at hensikten med tilleggsoppgavene som vi hadde laget fungerte. Oppgavene var viktig for å skille mellom regnefeil, misoppfatninger, oppgavens utforming og avkodingsproblemer. Disse oppgavene ble laget etter pilotintervjuene i november 2017. Etter gjennomføringen av dette prosjektet ser vi at oppgave 10 er en oppgave vi skulle ha laget tilleggsoppgaver til. Dette fordi utformingen ser ut til å påvirke resultatet i stor grad på denne oppgaven i TIMSS 2015. De eksisterende tilleggsoppgavene er ikke komplette og kan alltids forbedres, for eksempel ved at vi hadde laget to ulike tilleggsoppgaver til oppgave 5. Dette for å se om det var utformingen eller plasseringen av de ulike variablene som var problematisk for elevene.

# 4 Analyse

I dette kapitelet vil vi redegjøre for hvordan vi har analysert vårt innsamlede datamateriale.

## 4.1 Transkribering

Etter gjennomføringen av de ulike intervjuene startet arbeidet med transkriberingen. I forkant av transkriberingen var det viktig at vi hadde en felles forståelse for hvordan materialet skulle struktureres, med tanke på detaljnivået i transkriberingen. Vi ble vi enige om å ekskludere lydord som hmm, kremt og lignende i transkriberingen. Dette fordi vi mente det hadde liten eller ingen påvirkning på det endelige resultatet i prosjektet.

Overgangen fra lydopptak til tekstformat i form av transkribering er kritisert, da det kan dekontekstualisere selve innholdet fra intervjuet (Kvale & Brinkmann, 2015). Med dette menes at når en gjennomfører intervju vil ordlyden som tilhører innholdet, utgjøre en del av konteksten, og dermed kan innholdet tolkes forskjellig når ordlyden fjernes under transkriberingsprosessen.

Vi ble enige om hvordan vi skulle transkribere innholdet fra de ulike intervjuene på forhånd. Intervjuene ble transkribert individuelt, vi tok for oss hvert vårt intervju og transkriberte dette. I etterkant tok vi for oss transkriberingen til den andre og lyttet på det tilhørende lydopptaket samtidig som vi gjennomførte en gjennomlesning. Dette for å kontrollere om vi hadde transkribert i samsvar til hverandres forståelse av intervjuet.

#### 4.1.1.1 Reliabilitet til transkripsjonene

Det at vi lyttet på lydopptaket samtidig som vi leste gjennom hverandres transkribering øker reliabiliteten i transkripsjonen (Kvale & Brinkmann, 2015). Dette fordi å kunne enes om en felles forståelse for transkripsjonen. Dersom vi kun hadde skrevet transkripsjonene hver for oss uten en felles gjennomgang, ville vi mest sannsynlig hatt forskjellige fokusområder. Dette kunne ført til ulike tolkninger av hvordan vi skulle ha utrykt oss skriftlig, på mange av de ulike besvarelsene som elevene ga.

#### 4.1.1.2 Validitet til transkripsjonene

Vi mener validiteten på transkripsjonene er som reliabiliteten, god. Det at vi valgte å ekskludere mange små lydord som hmm, eller kremting, hosting, hoff eller lignende lyder, mener vi ikke påvirker validiteten. Dette fordi det ekskluderte materialet ikke har påvirkning på våre resultater knyttet til vår problemstilling.

Til forskjell fra større undersøkelser er det vi selv som har gjennomført intervjuene og transkripsjonene. Vi har altså selv erfart både gjennomføringen av de ulike intervjuene og transkriberingsprosessen. Dette gjorde at de opplevde situasjonene fra de ulike intervjuene gjennom transkriberingen ikke ble tolket ulikt (Kvale & Brinkmann, 2015).

#### 4.1.1.3 Etikk

De ulike intervjuene inneholder ingen sensitiv informasjon eller annen informasjon som kan benyttes til å identifisere de ulike elevene. Lydopptakene ble overført fra telefonene som ble benyttet og over til en minnepenn når intervjuene var gjennomført. Dette for at ingen andre enn forfatterne av denne masteren skulle ha tilgang til dette materialet. Transkripsjonene for de ulike intervjuene ble oppbevart på en datamaskin for at vi skulle kunne benytte disse filene på dataprogrammet NVIVO. Datamaskinen som disse filene ble oppbevart på var passordbeskyttet og filene ble ikke lagret i skyløsning.

I våre transkripsjoner nevnes verken elevenes navn, kjønn eller informasjon om hvilken skole de tilhører. Det nevnes heller ingenting om personlige forhold som interesser, familie eller lignende. Vi så det derfor ikke nødvendig å måtte lagre disse transkripsjonene like trygt som selve opptakene (Kvale & Brinkmann, 2015). Vi vet også at opplysninger som kan tilbakeføres til enkeltpersoner, altså til våre elever er taushetsbelagt (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Våre informanter er under 16 år, derfor måtte vi få godkjennelse av deres foresatte før vi kunne starte med datainnsamlingen (Postholm, 2010). Vi sendte derfor ut et informasjonsskriv til elevenes foresatte, slik at de fikk informasjon om prosjektet og vi kunne få skriftlig samtykke om at elevene kunne delta i vårt masterprosjekt. Informantene ble også spurt om de ønsket å delta i prosjektet i starten av intervjuene, dette for at vi skulle være sikre på at elevene ønsket å delta. Elevene ble informert om at de kunne trekke seg fra masterprosjektet dersom de skulle ombestemme seg. Dermed hadde vi sikret oss at både elevene og de foresatte var informert om hva vi skulle undersøke i prosjektet, samt at intervjuene skulle bli tatt opp på lydfil. Vi hadde innhentet godkjennelse fra Norsk senter for forskningsdata (NSD), noe både elevene og foresatte ble informert om, se vedlegg 2.

Tillatelse fra IEA ble også innhentet før intervjuene. Dette for å kunne benytte oss av de ulike oppgavene fra TIMSS 2015, se vedlegg 1.

## 4.2 Analysemetode

For analyseringen av innsamlet data i avhandlingen har vi gjennomført en tematisk analyse (Percy, 2015). Tematisk analyse kan benyttes for å analysere data gjennom en kvalitativ studie, der man ofte benytter semistrukturerte intervju for å avdekke elevenes kognitive erfaringer. Innenfor tematisk analyse finnes det tre underkategorier: induktiv analyse, teoretisk analyse og tematisk analyse med sammenligning. Det vi ønsker å undersøke er som nevnt misoppfatninger knyttet til algebradelen i TIMSS 2015.

Vi hadde på forhånd bestemt oss for at vi ville ha misoppfatninger og forståelse som forhåndsbestemte temaer, dette gjorde at en induktiv analyse ikke var aktuell. Dette fordi i en induktiv analyse har forskeren ingen forhåndsbestemte tema som en vil fokusere på, da de ulike funnene som er aktuelle først blir oppdaget under analysen (Percy, 2015). I en tematisk analyse med sammenligning blir den innsamlede dataen analysert underveis i innsamlingsfasen, dette var heller ikke vårt tilfelle (Percy, 2015). Vi valgte derfor å benytte oss av underkategorien teoretisk tematisk analyse for å analysere vårt datamateriale. I en teoretisk tematisk analyse har forskeren noen tema som er forhåndsbestemt, men forskeren er samtidig åpen for at det kan komme nye tema eller kodekategorier når datamaterialet skal analyseres (Percy, 2015).

I gjennomføringen av analysen av våre intervju ble teorien brukt som grunnlag for forberedelsen til analysen. Samtidig var vi åpne for at det kunne komme nye kodekategorier når vi skulle analysere vårt datamateriale. All innsamlet data ble analysert individuelt, altså elev for elev. De eventuelle mønstrene som da dukket opp ble organisert i de forutbestemte temaene misoppfatninger og forståelse.

Selve kodekategoriene ble til under analyseringen, disse var altså ikke bestemt på forhånd. Noen av kodekategoriene som ble generert tilhørte de forhåndsbestemte temaene misoppfatninger og forståelse. Percy m.fl (2015, s. 82) beskriver 13 punkter som kan benyttes for å analysere og strukturere våre empiriske funn. Disse punktene bør benyttes i to separate faser. Der den første fasen omhandler å bli bedre kjent med området vi skal undersøke, blant annet med å sette oss inn i de forhåndsbestemte temaene som skulle benyttes i analysen. Dette ble gjort før vi samlet inn datamaterialet.

I den første fasen skal en også prøve å plassere det innsamlede datamaterialet inn i de forutbestemte temaene. I fase to analyserer man det datamaterialet som ikke er kategorisert i fase en. Fase to tar altså for seg data som er ikke er kategorisert fra den første fasen og plasserer de ulike funnene i nye kodekategorier eller i eksisterende kodekategorier.

For å organisere vår innsamlede data for å få en oversikt i analysearbeidet, benyttet vi oss av dataprogrammet NVIVO. Dette ble benyttet på en slik måte at hver transkribering fra de ulike intervjuene ble lagt inn i programmet. Deretter tok vi for oss hver av de fem elevenes besvarelser individuelt. Disse ble så delt inn etter oppgavenummer, for deretter inndelt ut fra våre forhåndsbestemte tema, forståelse og misoppfatninger. De ulike kodekategoriene oppsto underveis i analysen etter at transkriberingene var delt inn i de forhåndsbestemte temaene. Når alle informantenes besvarelser var kategorisert gikk vi gjennom de ulike kodekategoriene og evaluerte vårt arbeid. De ulike kodekategoriene som oppsto var avkodingsproblemer, misoppfatning variabler, regnefeil og instrumentell tilnærming. Vi så da at det var nødvendig med en ny gjennomgang av vårt innsamlede datamateriale, dette fordi at kategoriseringen ikke var tilstrekkelig. Det var blant annet ulike begreper som elevene ikke forsto som ikke var kategorisert.

Vi gjennomførte dermed en ny runde med analysering av transkriberingene. I den andre gjennomgangen av analysen oppsto det nye kodekategorier som vi ikke oppdaget i den første gjennomgangen. Når de ulike kodekategoriene var generert kunne vi starte arbeidet med å knytte våre funn til de ulike kodekategoriene. Når runde nummer to med kategorisering var gjennomført gikk vi gjennom transkriberingene for å se om vi var enige i våre kategoriseringer, slik vi gjorde etter første runde med kategorisering. Her så vi derimot at en tredje gjennomgang av transkriberingene var nødvendig, dette for å få en tydeligere definisjon på våre kodekategorier samt at oppgavens utforming så ut til å kunne være en faktor som burde blitt tildelt en egen kodekategori.

En ny gjennomgang ble da utført, der vi gikk gjennom innsamlet data og kategoriserte det etter kodekategoriene vi tok for oss i de tidligere gjennomgangene. Etter at den tredje runden var gjennomført gikk vi over våre resultater og ble enige om at kodekategoriseringen nå var tilstrekkelig for vårt prosjekt.

### 4.2.1 Induktiv og deduktiv tilnærming

I forskning er de ulike situasjonene som oppstår med på å forme studien. Det at innsamlet forskningsdata legger føring for hvordan forskningsarbeidet analyseres kalles induktiv tilnærming (Postholm, 2010). I vårt prosjekt var de ulike oppgavene og rekkefølgen på disse bestemt på forhånd. For vår analyse hadde vi forhåndsbestemte tema. Dette kan sies å være en deduktiv tilnærming. Dette fordi teorien bestemte hva vi skulle se på i analysen. Når de ulike kodekategoriene var generert på bakgrunn av de forhåndsbestemte temaene, var det fortsatt innsamlet data som ikke passet i de ulike kodekategoriene. Vi tok dermed utgangspunkt i den innsamlede dataen som ikke var kategorisert, og genererte ytterligere kodekategorier. I denne fasen brukte vi en induktiv tilnærming. I en kvalitativ analyseprosess er det naturlig å benytte seg av begge disse metodene, altså både induktiv og deduktiv tilnærming (Creswell, 2014).

### 4.2.2 Kodekategorier

Vi vil her presentere de ulike kodekategoriene som ble generert under analysearbeidet i denne avhandlingen. De ulike kodekategoriene som ble benyttet er inspirert fra Booth m.fl (2017).

#### 4.2.2.1 Avkodingsproblemer

Denne kodekategorien omhandler hvordan elever tolker og anvender informasjonen de får oppgitt i oppgaven. Dette gjelder både hva oppgaven ber deg om å gjøre, men også hvilken informasjon du behøver å trekke ut for å løse oppgaven. Dersom eleven for eksempel ikke klarer å koble informasjonen fra en tekstoppgave til en tilhørende formel, vil denne hendelsen kategoriseres til nettopp kodekategorien avkodingsproblemer (Booth m.fl., 2017).

Dersom eleven misforstår oppgaven og for eksempel regner ut sidelengden i et kvadrat der hensikten med oppgaven er å regne ut arealet vil dette kategoriseres som avkodingsproblemer. Dette fordi elevens valg blir tolket på bakgrunn av feil avkoding, og ikke mangler i begrepsforståelse.

#### 4.2.2.2 Problemer vedrørende begrepsforståelse

Kodekategorien ligner på avkodingsproblemer, men skillet mellom disse to kodekategoriene er at eleven ikke forstår et bestemt sentralt matematisk begrep i selve oppgaven. Dette må ikke forveksles med Brekkes (2002) definisjon av misoppfatninger, der ufullstendig begrepsforståelse er definisjonen på misoppfatninger. Kodekategorien vedrørende begrepsforståelse omhandler begreper som elevene ikke har kjennskap til fra før. For eksempel dersom elevene omtaler begreper i oppgaveteksten med å si «dette begrepet forstår jeg ikke». Det er altså ikke informasjonen generelt som eleven har problemer med å avkode, men et bestemt begrep som eleven ikke kjenner til. Eksempel på dette er oppgave 22B der begrepet *n*-te blir presentert for elevene.

Denne kodekategorien ble tatt med i tillegg til den tidligere nevnte kodekategorien avkodingsproblemer da vi i vårt pilotintervju i november 2017 opplevde utydeligheter rundt for eksempel oppgave 22B.

#### 4.2.2.3 Misoppfatning variabler

Kodekategorien misoppfatning variabler omhandler forståelse av nettopp variabler. Dersom eleven ikke forstår hensikten med å ha en variabel i en formel, eller i en tekstoppgave vil dette kategoriseres som misoppfatning variabler. Eksempler på misoppfatninger som omhandler denne kodekategorien kan for eksempel være at $3 + x$ er det samme som $3x$. Forståelsen av at sidelengden i et kvadrat, representert som $x$ kan ha ulike verdier kan være en misoppfatning. Altså at i et kvadrat med sidelengden $x$, er en misoppfatning at de ulike sidene har ulik lengde. Et tredje eksempel som havner inn under denne kodekategorien er at en variabel alltid må løses. For eksempel at $x$ alltid må gis en verdi for at oppgaven skal kunne løses. Dette medfører at en ikke kan uttrykke mønster ved hjelp av variabler (Booth m.fl., 2017).

#### 4.2.2.4 Instrumentell tilnærming

Denne kodekategorien omhandler tilfeller der elevene viser manglende forståelse, og ønsker å benytte en bestemt fremgangsmåte for å løse oppgaven. Eksempler kan være der elever selv sier at dette vet de ikke svaret på fordi de ikke har sett lignede oppgaver tidligere. Eller det kan være eksempler der elever sier at de ikke klarer å løse oppgaven fordi de til tross har arbeidet med slike oppgaver før, ikke klarer å gjengi en formel eller løsningsmetode. Denne kodekategorien omhandler også tilfeller der elever ikke klarer å forklare sin framgangsmåte. I tillegg til at eleven ikke kan gi en enkel begrunnelse på hvorfor akkurat denne strategien fungerer på denne oppgaven.

#### 4.2.2.5 Problemer vedrørende oppgavens utforming

Denne kodekategorien beskriver ikke en kognitiv strategi hos elevene, men på bakgrunn av samstemte forklaringer på oppgave 5 i vår undersøkelse mener vi at denne kodekategorien er nødvendig. Datamateriale som havner under denne kodekategorien er praktiske eller estetiske detaljer ved oppgavene, som kan forvirre elevene og dermed påvirke resultatet mer enn nødvendig. Formålet i vårt prosjekt er å se på misoppfatninger og forståelse når de løser ulike oppgaver. Hvis oppgavenes utforming kan forklare noen av oppgavenes lave svarskåre, eller at de er med på å forstyrre elevenes kognitive valg ser vi det som nødvendig å ta med denne kodekategorien.

#### 4.2.2.6 Regnefeil

Denne kodekategorien tar for seg regnefeil som ikke er direkte knyttet opp mot variablene i de matematiske uttrykkene. Innsamlet data som havner under denne kodekategorien er etter vår mening grunnleggende aritmetiske regnefeil. I gjennomføringen av de ulike intervjuene, hadde vi laget tilleggsoppgaver som skulle være med å avdekke om elevene hadde problemer med TIMSS-oppgavene, eller om de hadde problemer med aritmetiske regnefeil. Når elevene gjentok de ulike regnefeilene både i tilleggsoppgavene og i TIMSS-oppgavene, valgte vi derfor å kategorisere denne dataen som regnefeil. Eksempler på slike feil kan være regnerekkefølge, der elevene må multiplisere før de adderer. Eller når elevene skal regne med potenser, må de først regne selve potensen før de multipliserer eller gjør andre operasjoner som står i tilknytning til tallet som er opphøyet i potens.

Ved å kategorisere aritmetiske regnefeil i en egen kategori, klarer vi å skille mellom aritmetiske feil og feil som kommer fra algebra. De ulike funnene fra denne kodekategorien og kodekategorien misoppfatning variabler, kan da sammenlignes og settes opp mot hverandre.

## 4.3 Kritikk mot egen analyse

I analysen benyttet vi oss av en tematisk analyse, som ikke er et komplett forskningsdesign men et analyseverktøy (Percy, 2015). Tematisk analyse kan anvendes fleksibelt i blant annet kvalitative analyser og generisk kvalitative analyser, ofte der semistrukturerte intervju er benyttet (Percy, 2015). Dette kan kritiseres siden det ikke er et fullstendig forskningsdesign, men vi mener at analyseverktøyet er tilstrekkelig og hensiktsmessig for analysen av vårt datamateriale da det inneholder ulike faser og punkter som en må følge.

De ulike intervjuene ble transkribert etter gjennomføringen, elevene har ikke i fått lest gjennom transkripsjonene. Dette kan være en svakhet i vårt prosjekt.

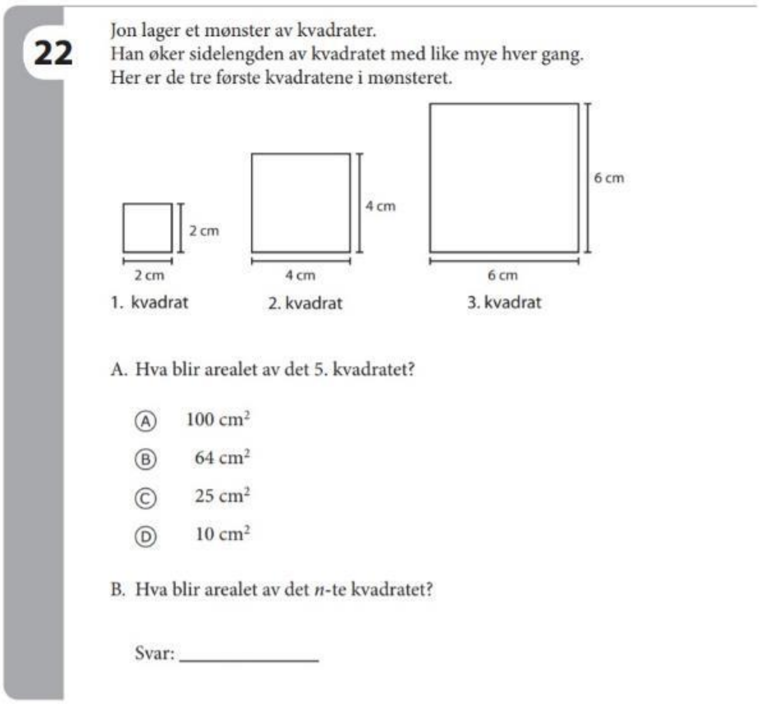
# 5 Funn og resultater

Vi skal i denne delen gå gjennom de seks oppgavene fra TIMSS vi valgte å benytte under intervjuene. Deretter skal vi ta for oss ulike funn og resultater som kom frem under analysen av de ulike intervjuene.

## 5.1 Gjennomgang av oppgavene

Vi vil i dette delkapittelet presentere de seks ulike oppgavene som ble benyttet i dette prosjektet. Oppgavene blir presentert i den rekkefølgen som elevene fikk tildelt de ulike oppgavene. Til noen oppgaver ble det også laget tilleggsoppgaver, disse vil også bli presentert i dette delkapittelet.

### 5.1.1 Oppgave 22




*Figur 2: Oppgave 22A fra algebradelen i TIMSS 2015*

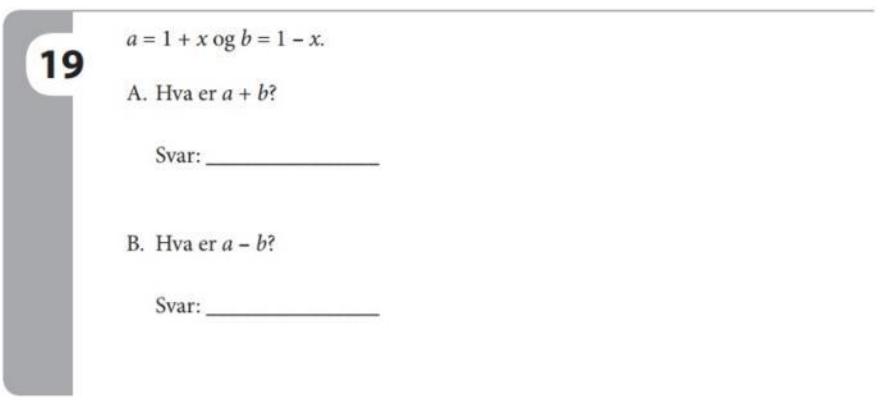
Oppgaven består av to deloppgaver A og B. Oppgave 22A klarte nesten 60 % av elevene på 9. trinn i Norge å løse (IEA, 2018). Vi startet derfor med denne oppgaven, i håp om at elevene skulle få en positiv start på intervjuet. I deloppgave A skal eleven gjenkjenne et mønster og komme med et svar på arealet av det 5.kvadratet. Deloppgave B var det bare 2 % av norske 9. trinnselever som klarte å løse oppgaven korrekt (IEA, 2018). Her skal elevene generalisere mønsteret, men ifølge statistikken til TIMSS 2015 er det svært få som klarer å gjøre dette korrekt. En av grunnene til at vi har valgt denne oppgaven er at over halvparten av norske elever klarer deloppgave A, altså virker det som om de ser mønsteret, men har problemer med den formelle generaliseringen som skal gjøres i deloppgave B. Elevene ble dermed først presentert for deloppgave A og deretter deloppgave B.

#### 5.1.1.1 Vår hensikt med oppgaven

Deloppgave 22A mener vi kan knyttes til Kierans generaliserende aktiviteter i algebra. Da med tanke på at elevene skal arbeide med å generalisere numeriske eller geometriske mønstre (Kieran, 2007). Denne deloppgaven har som hensikt å avdekke om elevene klarer å se mønstergjenkjenningen. Dette fordi vi mener at dersom elevene klarer å se mønsteret, bør de også klare å regne ut arealet av figuren. Deloppgave B i oppgave 22 mener vi også er knyttet til generaliserende aktiviteter i algebra. Dette fordi i denne deloppgaven skal de generalisere et gitt algebraisk mønster (L. Radford, 2010). Elevene skal altså uttrykke det generelle uttrykket for sammenhengen mellom figurnummeret og arealet av kvadratet. Kieran (2007) poengterer at når en skal arbeide med generalisering i algebra, er det en forutsetning at en kjenner til symboler som inngår i generelle uttrykk og at elevene kjenner det algebraiske språket.

For å kunne løse denne deloppgaven må altså elevene ha kjennskap til hva betydningen av *n*-te betyr matematisk. De må også kjenne til hva som kreves for å lage et algebraisk uttrykk. Ulike misoppfatninger som vi kan forvente å finne tilknyttet denne deloppgaven er med tanke på variabler (Booth m.fl., 2017). Etter gjennomgang av pilotintervjuene hadde vi gjort oss noen forventninger om at denne deloppgaven kunne være vanskelig for elevene, dette viser også statistikken fra TIMSS 2015.

### 5.1.2 Oppgave 19



19

$a = 1 + x$ og $b = 1 - x$.

A. Hva er $a + b$?

Svar: ______________

B. Hva er $a - b$?

Svar: ______________

*Figur 3: Oppgave 19 fra algebradelen i TIMSS 2015*

Oppgave 19 er delt opp i to deloppgaver. Det er relativt stor forskjell innad i norske elevers prestasjoner på 9. trinn, der 27 % klarer å løse deloppgave A, men bare 6 % klarer å løse deloppgave B (IEA, 2018). Her var vi nysgjerrige på om det var algebraen eller det regnetekniske som gjorde oppgaven vanskelig for elevene. For å skille mellom regnetekniske feil i aritmetikken og misoppfatninger kun knyttet til algebra, valgte vi å lage noen tilleggsoppgaver som elevene kunne få dersom de hadde problemer med TIMSS-oppgaven. Dette ble gjort etter erfaringer med pilotintervjuet som ble gjennomført november 2017. Tilleggsoppgaven er illustrert i Figur 4.

#### 5.1.2.1 Vår hensikt med oppgaven

Oppgave 19 har vi klassifisert som en transformerende oppgave etter Kierans GTG-modell (Kieran, 2007). Dette fordi elevene skal arbeide med det regnetekniske i algebra, som blant annet regning med parenteser og variabler. Kieran (2007) poengterer at det å kunne endre symbolske uttrykk for å opprettholde likhet er sentralt i transformerende aktiviteter. Ulike misoppfatninger hos elevene som vi kan forvente å finne tilknyttet denne oppgaven er regnerekkefølge, likhet og negativitet (Booth m.fl., 2017).

### 5.1.2.2 Tilleggsoppgave 19.1 og 19.2

Oppgave 19.1)

a = 1+1 og b = 1-1

A. Hva er a + b?

Svar:____________________

B. Hva er a – b?

Svar:____________________

Oppgave 19.2)

a = 1+2 og b = 1-2

A. Hva er a + b?

Svar:____________________

B. Hva er a – b?

Svar:____________________

*Figur 4: Tilleggsoppgave 19.1 og 19.2*

### 5.1.2.3 Vår hensikt med oppgaven

I denne oppgaven har vi gitt *x* leddet fra oppgave 19 to ulike verdier, 1 og 2. Dette gjør at *a* = 2 og *b* = 0 i oppgave 19.1. I oppgave 19.2 har vi gitt *x* leddet verdien 2. Dette er gjort for å se om elevene klarer å regne ut de ulike oppgavene når de får oppgitt alle verdiene, og dermed slipper å forholde seg til en ukjent. Dette ble gjort for å skille mellom regnefeil knyttet til aritmetikk eller forståelse knyttet til algebra.

### 5.1.3 Oppgave 5

**Algebra**

**5**

$$t = x - \frac{6{,}5}{1000}\,y$$

Formelen gir temperaturen $t$° C på et sted $y$ meter over havet når temperaturen ved havflaten er $x$° C. Hva er temperaturen på toppen av et 2000 m høyt fjell når temperaturen ved havflaten er 21° C?

Svar: ________________°C

*Figur 5: Oppgave 5 fra algebradelen i TIMSS 2015*

I denne oppgaven er de fleste opplysningene gitt og det er bare *t* som er ukjent. 7 % av 9. trinnselevene i Norge klarer å løse denne oppgaven korrekt (IEA, 2018). Som illustrert i Figur 5 er ikke det grafiske designet til oppgave 5 optimal. Det kan for eksempel se ut som om hele uttrykket skal divideres med 1000. Plasseringen av *y* leddet er heller ikke optimalt i forhold til brøken, noe som kan forvirre elevene og dermed påvirke resultatet i gjennomføringen av oppgavene. Vi laget derfor en oppgave der dette ble redigert, se Figur 6.

I gjennomføringen av pilotintervjuet utrykte en elev at oppgaven var vanskelig fordi *y* befant seg på høyre side av likhetstegnet. Dette kan indikere at eleven viste manglende forståelse for likhetstegnet og variabelen *y*, med at *y* alltid skulle stå på venstreside av likhetstegnet og at svaret alltid skulle stå på høyreside. Vi laget derfor en tilpasset oppgave der *y* ble plassert på venstre side av likhetstegnet, altså slik Figur 6 illustrerer. Dette for å se om denne misoppfatningen gikk igjen hos flere av elevene. Den tilpassede oppgaven ble kun gitt dersom elevene hadde vanskeligheter med å løse den opprinnelige oppgaven fra TIMSS.

#### 5.1.3.1 Vår hensikt med oppgaven

Informasjonen i denne oppgaven gis i form av tekst, i tillegg til en formel som elevene skal benytte seg av. Vi velger derfor å klassifisere denne oppgaven som en transformerende oppgave i henhold til GTG-modellen (Kieran, 2007). Som Pedersen (2013) nevner i sin avhandling, presterer elevene ved 3. året på videregående utdanning bedre på rene tekstoppgaver der de først må finne informasjonen selv, for deretter å sette dette sammen til en formel som de skal benytte seg av. Hun viser videre til at dersom både informasjonen i form av tekst er gitt i tillegg til formelen, vil elevene ha problemer med å kunne løse oppgaven. Selv om Pedersen presenterer disse resultatene for 3. året ved videregående opplæring er det ikke gitt at elever på 9. trinn vil oppleve de samme problemene. En skåre på 7 % av andelen korrekte svar hos elever på 9. trinn er relativt lav etter vår mening (IEA, 2018). Oppgaven er utformet slik at elevene bare trenger å erstatte variablene i formelen med verdiene som står oppgitt i den tilhørende teksten, for å kunne regne ut *t*. Vi mener at denne oppgaven vil kunne avdekke misoppfatninger knyttet til variabler, regnerekkefølge, brøk og likhet.

#### 5.1.3.2 Tilleggsoppgave 5.1

Oppgave 5.1)

$$y = x - \frac{6,5}{1000}h$$

Formelen gir temperaturen y °C på et sted h meter over havet når temperaturen ved havflaten er x °C. Hva er temperaturen på toppen av et 2000 m høyt fjell når temperaturen ved havflaten er 21°C?

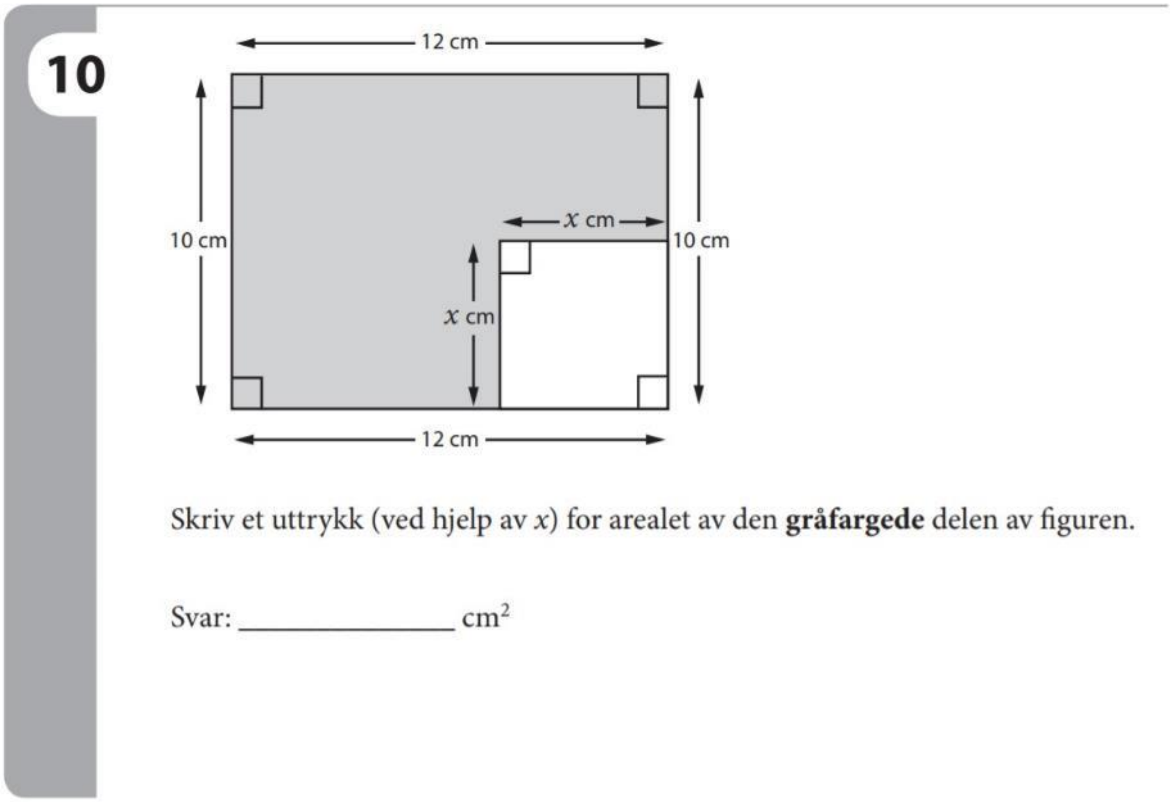
Svar:__________________________°C

*Figur 6: Tilleggsoppgave 5.1*

#### 5.1.3.3 Vår hensikt med oppgaven

I denne tilleggsoppgaven har vi endret på det grafiske designet slik at oppgavens utseende blir penere enn oppgaven fra TIMSS. I tillegg har vi erstattet variabelen *t* med *y*. Dette på bakgrunn av pilotintervjuet der en elev kommenterte hvorfor *y* befant seg på høyre side av likhetstegnet. Variabelen *y* er også byttet ut fra TIMSS-oppgaven med *h*, dette fordi denne variabelen kan være enklere å knytte til høyde. De ulike endringene er gjort for å se om designet påvirker løsningen til oppgaven.

### 5.1.4 Oppgave 10




*Figur 7: Oppgave 10 fra algebradelen i TIMSS 2015*

Statistikken fra TIMSS viser at 15 % av norske elever på 9. trinn klarer å løse denne oppgaven (IEA, 2018). Dette er ikke så mye under det internasjonale gjennomsnittet på 17 %. Vi ønsker å se på hvorfor denne oppgaven byr på utfordringer for elevene.

#### 5.1.4.1 Vår hensikt med oppgaven

Formålet med denne oppgaven er å la elevene lage et generalisert uttrykk for arealet til den grå figuren, elevene må da subtrahere arealet til den hvite figuren fra arealet av hele rektangelet. Arealet til hele rektangelet kan regnes direkte ut da både lengden og bredden er oppgitt. Utfordringene kan være knyttet til det å subtrahere arealet til den hvite figuren, som har sidelengder $x$. Denne oppgaven mener vi er en generaliserende aktivitet. Ulike misoppfatninger som vi tror elevene kan inneha er knyttet til variabelen $x$.

Forskjellen fra denne oppgaven til oppgave 22B mener vi er at oppgave 10 er enklere å løse for elevene, dette fordi de har arealet til en konkret figur som de skal finne. Denne antagelsen støttes også opp av statistikken fra TIMSS 2015 der 15 % klarer denne oppgaven kontra 2 % som klarer oppgave 22B (IEA, 2018). I oppgave 10 må elevene vise forståelse av arealene for å løse oppgaven. Elevene må kunne vise hvordan de kan regne ut arealet av både rektangelet og kvadratet, før de må sette dette sammen til et uttrykk.

### 5.1.5 Oppgave 7

**7**

Fullfør verditabellen for $y = 2x^2 - 3$.

| $x$ | $-2$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | | | |

*Figur 8: Oppgave 7 fra algebradelen i TIMSS 2015*

Denne oppgaven klarer 5 % av de norske elevene på 9. trinn å løse, mens 19 % er det internasjonale gjennomsnittet (IEA, 2018). I denne oppgaven skal elevene sette inn verdier for *x* i uttrykket og dermed finne ulike verdier for *y*. Her har vi også laget to tilleggsoppgaver, se Figur 9.

#### 5.1.5.1 Vår hensikt med oppgaven

I likhet med oppgave 5 er også denne oppgaven en transformerende oppgave, men denne oppgaven inkluderer potensregning til forskjell fra oppgave 5. Eleven skal i denne oppgaven sette inn verdier for *x* i uttrykket *y*. Utfordringer knyttet til denne oppgaven kan være regnerekkefølge, og misoppfatninger til variabler om at *x* ikke kan ha ulike verdier. Hvis de tror at *x* bare kan ha en verdi vil de ha problemer med å kunne forstå denne oppgaven. Elevene kan også inneha misoppfatninger knyttet til regning med negative tall. Som Li (2014) nevner kreves det ulike ferdigheter for å løse ulike transformerende oppgaver. I denne oppgaven kommer potensregning inn, dette inngår ikke i oppgave 19, dermed må elevene arbeide med andre algebraiske verktøy (Kieran, 2007), som igjen krever andre ferdigheter av elevene.

#### 5.1.5.2 Tilleggsoppgave 7.1 og 7.2

Oppgave 7.1)

$$y = 2 * 1^2 - 3$$

Svar:__________________

Oppgave 7.2)

$$2 * (2^2) - 3 =$$

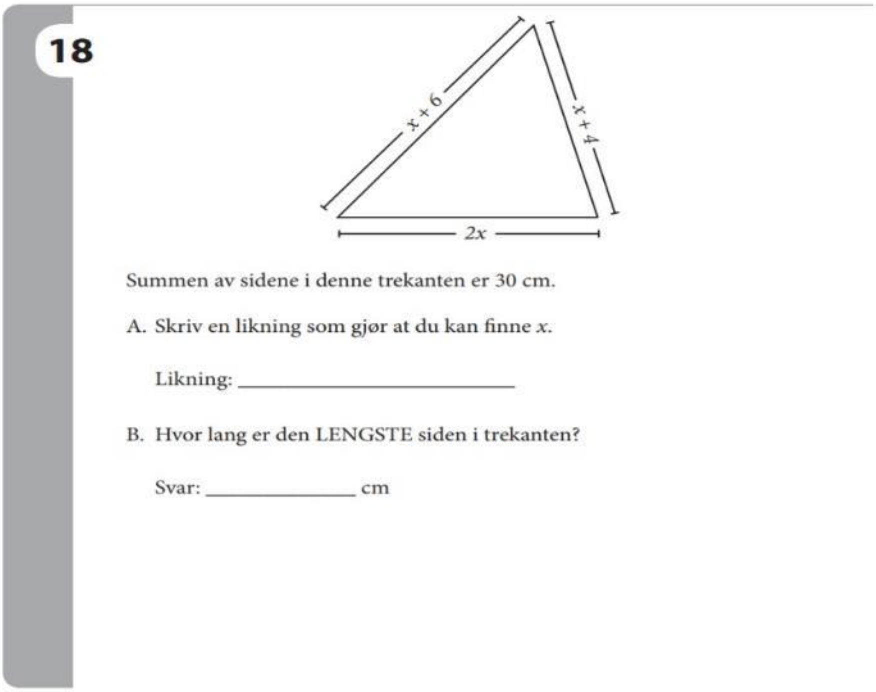
Svar:__________________

*Figur 9: Tilleggsoppgave 7.1 og 7.2*

#### 5.1.5.3 Vår hensikt med oppgaven

Tilleggsoppgaven som ble laget hadde samme formål som tilleggsoppgavene i oppgave 19, nettopp å skille mellom regnetekniske feil i aritmetikken og misoppfatninger knyttet til algebra. I tilleggsoppgaven ble variabelen *x* byttet ut med tall, vi erstattet *x* med to ulike verdier for å se om elevene hadde forståelse for regning med potens. Vi valgte også å benytte oss av parentes i deloppgave 7.2, dette for å se om elevene prioriterte regnerekkefølge korrekt.

## 5.1.6 Oppgave 18




*Figur 10: Oppgave 18 fra algebradelen i TIMSS 2015*

Denne oppgaven består av to deloppgaver. Det som kanskje overasket oss mest er at det er flere som svarer korrekt på deloppgave B, enn på deloppgave A, dette gjelder også internasjonalt (IEA, 2018). For å kunne si med sikkerhet hvilken side som er lengst må man kjenne verdien av *x*, men ut fra statistikken er det færre som klarer å løse deloppgave A enn deloppgave B.

### 5.1.6.1 Vår hensikt med oppgaven

I denne oppgaven får elevene oppgitt det meste av informasjon på forhånd, der de i deloppgave A skal finne ligningen som gjør at du finne *x*. Vi velger å se på denne deloppgaven som en generaliserende aktivitet da det skal arbeides med ligninger og ukjente som representerer en situasjon eller et problem (Kieran, 2007). Dette handler om at elevene skal knytte sidelengdene opp mot omkretsen og dermed sette dette opp som en ligning.

I deloppgave B er hensikten å finne den lengste siden ved å benytte seg av verdien for *x* som man finner ved å løse ligningen i deloppgave A. Deloppgave B klassifiseres dermed av oss som en transformerende oppgave i forhold til deloppgave A som etter vår mening er en generaliserende oppgave (Kieran, 2007). Statistikken fra TIMSS viser altså at det er flere som klarer å løse deloppgave B enn deloppgave A. Resultatene fra intervjuene mente vi forhåpentligvis kunne gi oss en indikator på hva som gjorde at deloppgave B hadde høyere løsningsprosent enn deloppgave A. Ulike misoppfatninger som muligens kan knyttes til denne oppgaven er variabler og likhet (Booth m.fl., 2017).

## 5.2 Analyse av oppgavene

Vi vil videre ta for oss oppgave for oppgave og presentere funnene som er knyttet til oppgavene. Dette for å tydeligere kunne se de ulike funnene, og holde de avskilt basert på hvilken oppgave som gjennomgås. Oppgavene blir presentert i den rekkefølgen de ble gjennomgått under intervjuet. TIMMS-oppgavene ligger vedlagt i vedlegg 4, tilleggsoppgavene i vedlegg 5.

### 5.2.1 Deloppgave 22A

I denne deloppgaven er det ingen av elevene som svarte rett på første forsøk. Fire av fem elever forklarte oss at sidene i mønsteret økte med 2 cm for hver figur, noe som også var riktig. Disse fire elevene utrykte at de forsto mønsteret til kvadratene. Selv om elevene klarte å gjenkjenne mønsteret i figuren, var det ingen som svarte korrekt på spørsmålet i oppgaven. Elevene svarte ikke på hva arealet av den femte figuren skulle være, men hva sidelengdene i denne figuren var. Elevene svarte på spørsmålet at svaret på oppgaven var 10 cm$^2$, dermed ble elevenes svar feil. Elev nummer fem ble stilt spørsmål om hva oppgaven ute etter, der eleven svarte: *«At jeg skal finne hvor lang sidene er i kvadrat nummer 5»*.

Elev nummer tre fortalte oss at sidene i det 5.kvadratet var 10 (uten benevning), men sa samtidig at arealet var 10 (uten benevning). Elev nummer tre hadde tidligere gjort rede for at sidelengdene i kvadratet økte med 2 cm for hver figur, dette tydet på at eleven visste at sidelengdene hadde benevningen centimeter.

Elev nummer en klarte i likhet med de andre elevene å fortelle oss sammenhengen i mønsteret. Utfordringen var at eleven svarte at arealet av kvadratet var 64 cm$^2$.Vi oppfatter det som at elev nummer en trodde det var arealet av kvadrat nummer fire som skulle finnes. Svaret på 64 cm$^2$ er et mer troverdig svar matematisk sett, enn for eksempel 10 cm$^2$, slik de andre elevene har svart. Med hensyn på at sidelengdene må multipliseres med hverandre, vil arealet i denne oppgaven være større enn en sidelengde. Elev nummer en har likevel feil svar på oppgaven da det var det 5.kvadratet eleven skulle finne arealet til.

To av elevene ble underveis i intervjuet gjort oppmerksomme på at de kunne se på deloppgave 22A på nytt, noe som førte til at begge elevene så at det var arealet deloppgaven ønsket svar på. Vi tolker elevenes besvarelser dit hen at elevene har avkodingsproblemer og manglende forståelse av begrepet «areal». Som vi blant annet viste med sitatet ovenfor, mente elevene at de skulle gi svar på hvor lang sidene var i kvadratet, altså hadde de ikke avkodet oppgaven riktig. Besvarelsene til elev nummer to og nummer fem, kan minne om en faktabasert tilnærming til generalisering (L. Radford, 2010). Dette fordi de klarte å se mønsteret, beskrev dette med ord før de regnet ut et konkret eksempel. Dette selv om de ikke klarte å løse oppgaven korrekt.

Både elev nummer tre og elev nummer fem svarte at sidene var 10 (ofte uten benevning), samt at arealet var 10 $cm^2$. Dette kan være en indikasjon på at elevene mangler forståelse av begrepet areal. Denne teorien blir derimot motbevist i oppgave 10, der elevene forklarte oss hvordan man kunne regne arealet av figuren. Vi mener i tillegg at våre oppgaver gir oss for lite data til å fastslå hvilken type forståelse elevene har av begrepet areal. Det bør også nevnes at deloppgave 22A var den første oppgaven som ble gitt til elevene. Dette i tillegg til at elevene ikke hadde møtt oss tidligere. Noe som kunne gjøre at eleven måtte løse oppgaver i en ny kontekst. Dette kunne være med på å stresse eleven og kan være en av grunnene til at samtlige elever i utgangspunktet svarte feil på denne deloppgaven.

### 5.2.2 Deloppgave 22B

Tre av elevene, nummer en, tre og fire, fortalte oss at de ikke skjønte betydningen av begrepet *n*-te. En av elevene forklarte at eleven forsto begrepet *n*-te, men klarte ikke å generalisere dette til å gjelde alle figurene. Elev nummer to trodde at *n* sto for sidelengdene i kvadratet, noe som ble feil, siden *n* skulle være figurnummeret i mønsteret.

Elev nummer fem fortsatte misforståelsen fra deloppgave 22A og lagde en formel for sidelengden i kvadratet. Denne eleven ble senere i intervjuet gjort oppmerksom på at hele oppgave 22 var ute etter arealet. Her er da elevens resonnement:

> ***E5:*** *Det er sidene ganget med hverandre. Men jeg vet ikke hvordan jeg skal skrive det. For det blir… At det er n, gange… n gange…*
> ***C:*** *Hva er lengden til en side?*
> ***E5:*** *Det er det dobbelte av det den der… man legger til to hver gang. Da blir det n ganger 2.. Jeg vet ikke. Jeg vet ikke hvordan jeg skal skrive det.*

Eleven fortalte oss hvor lang sidene var og hvordan vi skulle finne arealet til kvadratet. Eleven klarte derimot ikke å se sammenhengen med det eleven sa og hvordan eleven utrykte dette matematisk, noe som gjorde at denne eleven kan knyttes til faktabasert generalisering (L. Radford, 2010).

### 5.2.3 Oppgave 19

I denne oppgaven har deler fra alle de fem besvarelsene blitt kategorisert under kodekategorien misoppfatning variabler. Det var forskjellige misoppfatninger blant elevene, blant annet at $a + b = ab$ og at $1 + x = 1x$. De ulike misoppfatningene kan dermed knyttes til variablene. Elev nummer fire mente for eksempel at variabelen $a$ skulle komme før variabelen $b$, da variablene skulle stå i alfabetisk rekkefølge. Eleven knyttet variablene opp mot deres posisjon i alfabetet.

Tre av elevene mente at de måtte løse dette som en ligning, at de dermed måtte regne ut hva $x$ var for å kunne løse $a + b$. Elevene fortalte oss at flere ukjente gjorde de usikre på oppgaven, noe som kom tydelig frem hos elev nummer tre:

> ***E3:*** *Det som forvirrer meg er alle de her, at det liksom er rekkefølgen til bokstavene*
> ***O:*** *Okey*
> ***C:*** *Hva mener du med rekkefølgen på bokstavene?*
> ***E3:*** *At det liksom er x og det er liksom på slutten av alfabetet er a og b og..... ja*

Disse funnene kan indikere mangler i forståelsen hos elevene når det kommer til variablene, og deres tilknytning til likhetstegnet. Dette fordi elevene ikke ser at verdien av at $a$ er $x + 1$. Når elevene fikk tilleggsoppgavene som inneholder bare tall, klarte fire av elevene å løse oppgavene. Tilleggsoppgavene ble laget med bare tall for å skille regnefeil og misoppfatning av variabler. Det at elevene måtte løse oppgaver som var like i struktur, men uten variabler mener vi styrker de ulike funnene som kategoriseres som misoppfatninger variabler. Elevene fortalte oss om lignende oppgaver som de hadde gjort tidligere, og hvilke regler de kunne benytte for å løse oppgaven. For eksempel sa elev nummer to at man bare kunne flytte over for å fjerne $x$ i $a + b$. De andre elevene var usikre på om de løste oppgaven riktig, siden de ikke var sikre på om de husket reglene korrekt. Det bør nevnes at de fleste elevene fikk rett svar i tilleggsoppgaven, så reglene de brukte var som oftest korrekte.

Hovedoppgave 19 er det derimot ingen som klarte å løse, men vi mener det er ulike misoppfatninger av variabler som er grunnen til dette. I tillegg til at vi ser et gjentakende mønster i misoppfatninger knyttet til variabler, ser vi også et mønster i elevenes avkodingsproblemer knyttet til oppgaven. For eksempel leste elev nummer to oppgaven som $a = 1$. I resonnementet for denne eleven videre sa eleven at $x$ og $b = x – 1$. Eleven endte dermed opp med $1 + b$, som eleven mente var 1 - 1, dette fordi $x$ på hver side av likhetstegnet nøytraliserte hverandre. Det vi ser er at eleven avkodet oppgaven som at $a = 1$, videre ble oppgaven avkodet som at $x$ og $b = x - 1$. Eleven endte da opp med at $b$ var det samme som –1, altså $b = -1$. En lignende avkodning så vi hos elev nummer tre som leste oppgaven som $a = 1 + x$ og $b$.

Elev nummer fem skrev det utvidede uttrykket for $a + b$, samt $a - b$, men klarte ikke å forenkle disse uttrykkene. Utfordringen til eleven var at eleven fikk regnefeil på begge deloppgavene når eleven løste opp parentesen. Eleven fortalte oss at eleven hadde problemer med å løse oppgaver der eleven skulle regne med negative tall, noe som også kom tydelig frem i tilleggsoppgavene som eleven måtte løse. I tillegg mente eleven at det måtte finnes en verdi for $x$ for å kunne løse oppgaven, derfor er elevens besvarelse også kategorisert under misoppfatning variabler.

De ulike funnene fra elevenes besvarelser i oppgave 19 er kodet under forskjellige kodekategorier, for eksempel innen avkoding, misoppfatninger av variabler eller regnefeil. Det er flere elever som har deler av sin besvarelse fordelt i ulike kodekategorier. Funnene som er gjentagende i denne oppgaven, er at alle fem elevene har fått noe av sin besvarelse kategorisert under kategorien misoppfatninger variabler.

### 5.2.4 Oppgave 5

I oppgave 5 har vi delt kodekategorien avkodingsproblemer inn i to deler, avkodingsproblemer tekst og avkodingsproblemer formel. De fleste av våre elever hadde vanskeligheter med å knytte teksten til formelen eller omvendt, blant annet med å se hvordan de ulike variablene i teksten kunne knyttes til formelen. Det var ulike faktorer som gjorde elevene usikre på hvordan de skulle komme i gang med oppgaven. Dette er et eksempel fra elev nummer fire da eleven fikk se denne oppgaven:

> ***O:*** *Hva er dine første tanker om oppgaven?*
> ***E4:*** *At man må finne ut hva bokstavene, hva verdiene av bokstavene er. Og man må finne ut hva t er verdt fordi det er det samme som x.*
> ***O:*** *Hva sa du nå? Kan du si det samme på nytt?*
> ***E4:*** *At man må finne ut hva t er for det er det samme som x, tror jeg.*
> ***O:*** *Okei, hvordan vet du at t er det samme som x?*
> ***E4:*** *Fordi det står t er lik x. jeg vet ikke om det betyr det da.*

Dersom eleven mente at $t = x$, burde eleven kunne fortalt oss hva $t$ ville vært i dette tilfellet. Dette fordi det er oppgitt i oppgaven at $x$ står for temperaturen ved havoverflaten og den er oppgitt til å være 21 grader. Dette kan det tyde på at eleven ikke på dette tidspunktet hadde forstått all informasjonen som ble gitt i oppgaveteksten. Det kan videre indikere at eleven ikke bare har problemer med formelen, men også problemer med å strukturere informasjonen som blir gitt i oppgaven. Som eleven selv fortalte er eleven usikker på om formelen betyr $t = x$. Etter flere spørsmål fra oss, som vi mener hjalp eleven å se hele formen, kom det frem at eleven heller ikke forsto hva $y$ sto for i formelen. Denne eleven klarte ikke fortsette på oppgaven etter dette.

Her er et utdrag fra samtalen med elev nummer fem, mens eleven prøvde å løse oppgave 5:

> ***O****: Vet du hvor høyt over havet du skulle se på i denne oppgaven?*
> ***E5:*** *Oja, 2000..meter. Men blir det da 6,5 ganger 2000? Dersom den står sånn inntil hverandre eller blir det...*
> ***C:*** *Det må du nesten avgjøre*
> ***E5:*** *For jeg vet at dersom det står 6,5 hvis det står 6,5 y, dersom de står helt inntil hverandre så betyr det gange. Men jeg vet ikke om de mener at den skal stå helt inntil eller om det er et mellomrom eller hva det nå er...*

Eleven viste gjennom sin forklaring at eleven var usikker på utformingen av oppgaven og mente da at dette ville ha innvirkning på hvordan oppgaven skulle løses. Eleven viste tegn på usikkerhet knyttet til om variabelen $y$ skulle multipliseres med brøken 6,5/1000, eller om variabelen $y$ var uavhengig av det som sto i forkant. Vi tolker dette som at eleven hadde problemer med å tolke formelen og den informasjonen som var ment å gi.

Elev nummer to ga denne besvarelsen når vi stilte spørsmål hva som var vanskelig med oppgaven:

> ***O****: Hva er det som er vanskelig med den?*
> ***E2****: At jeg ikke er så veldig bra til å dra ut det som jeg skal finne*
> ***O****: Dra ut hva for noe?*
> ***E2****: Altså å dra ut de rette tallene*
> ***O****: Fra?*
> ***E2****: Fra teksten*
> ***O****: Kan jeg spørre deg om det er noen opplysninger her som, er det noe du får vite som du trenger?*
> ***E2****: Ja, jeg får vite at formelen som står der oppe er temperaturen på et sted, også står det y meter, over havet når temperaturen ved havflaten er x. Så det er jo nyttig å vite Også har jeg fått vite hvor høyt hav.., fjellet er og hvor mange grader det er med havet*

***O**: Er det noe du da mangler i oppgaven? Altså…*

***E2**: TALL!*

***O**: Du mangler tall!?*

***E2**: Hehe!*

Besvarelsen til elev nummer to viser her at eleven syntes det var vanskelig å finne den rette informasjonen som ble gitt i oppgaven. Informasjonen som ble gitt i teksten tilhørende formelen er altså vanskelig å sette i sammenheng med den gitte formelen.

Pedersens (2013) funn i TIMSS Advanced viser at norske elever gjør det svakere i oppgaver der uttrykket eller formelen er gitt, enn i oppgaver der elevene må finne all informasjon selv for deretter å lage et uttrykk. TIMSS Advanced avholdes på videregående, det kan dermed tenkes at de ulike funnene som gjøres her også er tilstede hos elever på ungdomstrinnet. Dette på bakgrunn av at forståelse eller mangler i denne tas med til senere skoleår (Booth m.fl., 2017). Elevens besvarelse forklarte hva variablene $x$ og $y$ sto for i dette eksemplet, ved at eleven leste oppgaveteksten. Men klarte ikke å koble dette til den konkrete temperaturen eller antall meter over havet som ble oppgitt i oppgaven.

Vi har valgt å ta med noen av sitatene fra denne oppgaven for å vise at elevene hadde ulike utfordringer knyttet til oppgaven. Under selve intervjuene var vår rolle å stille mange spørsmål til de ulike elevene, dette mener vi på den ene siden bidro til å hjelpe elevene med oppgaven. På den andre siden kan det være med på å svekke elevenes naturlige besvarelser. Ved at vi stilte veiledende spørsmål prøvde vi å få innblikk i de ulike stegene i deres kognitive prosesser. Dette gjorde at vi måtte stille konkrete spørsmål for å få innblikk i hvilke misoppfatninger elevene kunne inneha. Tre av elevene hadde liten nytte av at vi stilte spørsmål underveis. Disse klarte ikke å svare på våre spørsmål og ønsket dermed å gå videre uten å ha klart å løse denne oppgaven. To av elevene klarte derimot å løse denne oppgaven ved at vi stilte veiledende spørsmål. Spørsmålene vi stilte var etter vår mening veldig konkrete, som «hva står $x$ for?», «hva er $x$ oppgitt som i denne oppgaven?». Dette førte til at våre spørsmål ble som en stegvis løsning for elevene. Vi mener at det var våre spørsmål som hjalp disse to elevene til å løse oppgaven og at de ikke hadde klart dette uten vår hjelp.

### 5.2.5 Oppgave 10

Et av funnene som kom tydelig frem både i pilotintervjuet og i de fem ulike intervjuene, var det at de ulike elevene mente at $x$ måtte være lik 5. Fire av våre fem elever besvarte denne oppgaven med å vise til at $x = 5$, dette fordi de mente den var halvparten av bredden til rektangelet som var 10 cm. Det var ikke noe annet bevis eller argument for dette enn at «det ser ut som den er halvparten av bredden». Derfor tok disse elevene og regnet ut arealet med utgangspunkt i at arealet av det hvite kvadratet var 25 $cm^2$.

Ved at elevene svarte med et konkret tall kan det tyde på at elevene ikke vet hva et uttrykk er, noe som oppgaven spør om. Elev nummer tre var den eneste eleven som ikke regnet med at $x = 5$, denne eleven brukte i stedet en metode som Van de Walle kaller for «dekke over metoden» (Van de Walle, Bay-Williams, Lovin & Karp, 2013). Denne metoden benyttes for å se hvor mange ganger den hvite figuren går inn i hele figuren. Elev nummer tre prøvde altså en annen strategi enn de andre elevene, men kom ikke frem til en løsning. De andre elevene mente derimot at $x$ måtte være lik 5.

Ved blikk på figuren til oppgave 10, kan vi si oss enige i at «det ser ut som» at $x = 5$. Dette kan ha vært med på å manipulere elevene, og kan dermed ha påvirket deres løsningsstrategi. Vi mener altså at oppgavens utforming har innvirkning på hvordan elevene valgte å løse oppgaven. Når vi stilte elevene spørsmål om hvordan de ville ha regnet ut oppgaven dersom sidelengdene til det hvite kvadratet økte, var det to av elevene, nummer en og nummer fire, som ikke klarte å generalisere dette fordi de trodde at $x$ representerte arealet av det hvite kvadratet og ikke sidelengdene. De to andre elevene, nummer fem og nummer to, fortalte oss at arealet av den grå figuren måtte være 120 - $x$ ganger $x$. Den ene eleven forkortet dette til å være $2x$, noe som gjorde at uttrykket ble feil. Vi stilte flere oppfølgingsspørsmål for å hjelpe eleven med å se denne feilen, men denne eleven ser ut til å ha en misoppfatning om $x$ ganger $x$ er det samme som $2x$.

I denne oppgaven kom det også frem at de fleste elevene hadde forståelse for hva begrepet areal betydde, noe som er med å svekke vår antagelse fra oppgave 22A om at elevene ikke innehar en forståelse for begrepet areal.

For denne oppgaven ser det altså ut som at utformingen har noe å si på resultatet. Dersom den hvite figuren hadde hatt andre proporsjoner i forhold til den grå, kan resultatet av denne oppgaven ha vært annerledes. Hvis den hvite figuren hadde være tydelig større eller mindre enn halvparten av den grå sidelengden, kunne elevene ha arbeidet mer algebraisk med oppgaven enn den aritmetiske tilnærmingen som de viste ved at de bare antok at $x = 5$ cm.

### 5.2.6 Oppgave 7

Elev nummer to utrykte at eleven var kjent med lignende oppgaver fra tidligere. Denne eleven løste oppgaven korrekt. De fire andre elevene fortalte at de ikke hadde sett lignende oppgaver tidligere og at de dermed ikke visste hva en verditabell var. Vi tolker det dithen at elevene kan ha problemer med å skjønne at *x* kan ha ulike verdier. De ulike tankemønstrene som har vært gjentagende i de tidligere oppgavene, er at elevene har ønsket å ha en fast verdi for *x*. Dette ser ut til å skape problemer så snart de får oppgitt at *x* kan ha ulike verdier. I tidligere oppgaver har de ønsket å finne en verdi for *x* selv om oppgaven ikke har hatt dette som formål. I denne oppgaven får de derimot oppgitt verdier som de skal sette inn i en ferdig formel, men dette viste seg å være problematisk for samtlige, unntatt én elev.

Tilleggsoppgavene som ble laget i forbindelse med avdekking av misoppfatninger så ut til å gå greit hos de fleste elevene. Oppgavene var utformet på en slik måte at dersom misoppfatningene til elevene gikk under temaet grunnleggende aritmetikk, altså grunnleggende regneregler, ville disse blitt avdekket under løsningen av disse oppgavene. Elevenes besvarelser viser dermed noen problemer til den grunnleggende aritmetikken, blant annet i potensregning. Men de elevene som hadde problemer, klarte fortsatt å fremlegge et svar på de ulike oppgavene, selv om besvarelsene kanskje var feil. Når de da gikk tilbake til den opprinnelige oppgaven, er det av vår oppfatning at det er variabelleddet *x* som var problemet i oppgaven, og da at *x* kunne representere flere verdier. Dette kom blant annet frem hos elev nummer fire som mente at *x* enten skulle være -1, 1 eller 4, og at eleven derfor ikke kunne regne ut funksjonsuttrykket:

> ***E4:*** *Å starte på motsatt side, jeg vet ikke. Nei kanskje ikke… Men jeg syns det er vanskelig liksom når jeg ikke vet hva x er liksom. Når jeg bare vet at x kan være en av disse. For jeg synes det er vanskelig å regne når jeg ikke vet hva det er*
> ***C:*** *Så det du ønsker i denne oppgaven her, er at det står mer hvilken verdi x er?*
> ***E4:*** *Ja, og i mitt tilfelle så vet jeg ikke hvordan jeg regner ut hva det er heller*

Elev nummer fire prøvde derfor å generalisere mønsteret i de ulike *x*-verdiene som var oppgitt. Eleven fortalte oss at eleven mente at *x* verdiene økte med tre i tallmønsteret som var oppgitt. Dette er et eksempel på hva elevene oppfattet som utfordrende med oppgaven. Også elev nummer fem var usikker på hvordan *x* kunne ha flere verdier. I tillegg menete en av elevene at *x* i uttrykket $2x^2 - 3$ var multiplikasjonssymbolet. Elev nummer en regnet uttrykket uten å ta hensyn til *x*, altså $2^2 - 3$, og begrunnet dette med at eleven ikke visste hvordan *x* skulle anvendes:

> ***O****: Hvorfor tok du ikke med x?*
> ***E1****: Fordi jeg vet ikke hva jeg skal gjøre med den*

Som sitatet ovenfor viser valgte elev nummer en å fjerne variabelen *x* fra regnestykket. Dette fordi eleven ikke ante hva som skulle gjøres med denne. Dette er en direkte misoppfatning når det kommer til variabler (Booth m.fl., 2017).

### 5.2.7 Oppgave 18

I denne oppgaven var det tre elever, nummer en, fire og fem som ikke klarte å løse oppgaven. Det virket som at elevene ikke klarte å sammenfatte informasjonen som ble gitt i oppgaven. Elev nummer fire prøvde for eksempel å måle sidene for å se hvor lang *x* kunne være. Elev nummer fire klarte heller ikke å se at *x* måtte ha én verdi i denne oppgaven:

> *«Jeg kan jo lage meg et tall og si at det er x, men det blir jo ikke rett svar. Men jeg kan jo finne ut den oppgaven da, tror jeg. Eller, eller med min x, men det blir jo ikke det rette svaret hvis x er et veldig annerledes tall»*

I dette tilfellet kan ikke *x* variere, da *x* må ha en bestemt verdi. Dette så imidlertid ikke elev nummer fire og mente *x* kunne ha ulike verdier. Elev nummer en, fire og fem klarte ikke å gi et svar på deloppgave 18B, dette fordi de ikke klarte uttrykke ligningen i 18A, og dermed ikke visste hvor lang *x* var.

Elev nummer tre så tidlig at $x = 5$. Eleven forklarte oss hvorfor dette måtte være lengden til *x*, men klarte ikke å sette opp ligningen. Dette medførte at eleven hadde en verdi for *x* og dermed svarte korrekt på oppgave B, men ikke på oppgave A.

Elev nummer to løste oppgaven korrekt og fortalte oss hvorfor dette måtte være ligningen for å finne *x*. Dette gjorde også at elev nummer to svarte korrekt på deloppgave 18B. Forskjellen mellom elev nummer to og elev nummer tre var at elev nummer tre ikke klarte å sette opp ligningen i denne oppgaven. Eleven viste oss at $x = 5$, måtte være korrekt for at omkretsen til trekanten skulle bli 30 cm. Hvordan eleven kommer frem til at *x* er 5 er derimot usikkert. Eleven kunne for eksempel ha gjettet at $x = 5$, for deretter se at dette måtte være korrekt. Dersom dette er tilfellet trenger det ikke være knyttet opp mot algebraisk tenkning, men aritmetisk resonnering (L. Radford, 2010).

## 5.3 Sammendrag av sentrale funn

Analysen av datamaterialet viser at ulike misoppfatninger er gjengangere hos elevene. Vi skal nå gi et kort sammendrag av våre funn knyttet til dette. Nærmere diskusjon av funnene følger i kapittel 6.

Funn under kodekategorien misoppfatninger variabler er gjentakende hos alle elevene og i mange av de ulike oppgavene. Eksempler på slike er $2 + x = 2x$, eller at variabelen $x$ ikke kan inneha flere verdier.

Elevene ser også ut til å ha problemer med avkodning av oppgavene, noe vi mener kommer frem i blant annet oppgave 5. Det er forskjell på om elevene har problemer med å avkode formelen eller teksten, eventuelt problemer knyttet til begge.

Våre funn synes å indikere at elevene har utfordringer knyttet til generalisering. Det kan virker som om også begrepne knyttet til generalisering er utfordrende, siden elevene ønsket forklaring på begrepene *uttrykk* og *n*-te.

Funnene viser også tendenser til regnefeil hos elevene, med hensyn på aritmetiske regnefeil. Disse påvirker igjen hvordan algebradelen i oppgavene ble behandlet.

I tillegg til ulike misoppfatninger hos elevene, viser enkelte oppgavers utforming at utformingen har en påvirkning på hvordan elevene løser oppgavene.

# 6 Diskusjon

I dette kapittelet vil vi ta for oss ulike resultater og drøfte disse opp mot relevant teori.

### 6.1.1 Forståelse

I teorikapittelet ble det presentert ulike måter elevene kan forstå matematikk. Skemp (1976), Lithner (2008), Hiebert og Lefevre (1986) kommer med forskjellige beskrivelser av hvordan man kan forstå matematikk, ulik forståelse kan ha innvirkning på hvordan eleven velger å løse en oppgave eller et problem. I intervjuene våre merket vi oss at elevene hadde ulike måter å starte oppgaven på. Noen elever ble sittende lenge å tenke for seg selv, mens andre stilte oss spørsmål for å komme i gang. Vi merket også at elevene begynte å stille oss spørsmål dersom det var begreper som var uklare, som for eksempel *n*-te eller begrepet *uttrykk*. I tillegg virket det som elevene ønsket å knytte TIMSS-oppgavene til oppgaver de hadde erfart tidligere. Elevene kunne for eksempel fortelle oss at de ikke hadde sett lignende oppgaver tidligere, eller at de hadde jobbet med lignende oppgaver på skolen.

Elevene prøvde å knytte oppgavene til tidligere erfarte oppgaver. Det går også igjen at elevene fortalte at de ikke husket hvordan de skulle løse bestemte oppgaver, eller var usikre på om det var slik de skulle løse oppgaven. Hvordan elevene valgte å løse oppgaven mener vi er knyttet opp mot deres forståelse, derfor velger vi å komme med noen eksempler på elevenes resonnement og tanker rundt ulike oppgaver. Første eksempel er hentet fra en del av samtalen med elev nummer fem angående oppgave 19:

> ***E5****: Enten -4 ,eller så blir det 2*
> ***O****: Hva er det som gjør deg i tvil om det er -4 eller 2?*
> ***E5****: Fordi jeg ikke husker reglene på negative tall, hvordan man regner det. Vi har gått gjennom det, men jeg husker det ikke*

Her fortalte eleven oss at eleven var usikker på hva løsningen skulle være, siden eleven ikke husket regnereglene. Eleven fortalte også at det var vanskelig å regne med negative tall. Dette mener vi minner om Lithners imitative resonnering og Skemps instrumentelle forståelse. Eleven fortalte at eleven ikke husket reglene for negative tall. Det kom også frem at eleven har arbeidet med lignende oppgaver tidligere, men at eleven ikke husket hvordan dette skulle gjøres. Lithner (2008) og Skemps (1976) beskrivelse av henholdsvis imitativ resonnering og instrumentell forståelse er blant annet at eleven må huske ulike regler eller algoritmer. Dette kan også knyttes opp mot Hiebert og Lefevres (1986) prosedyremessig kunnskap der elevene behøver innlærte fremgangsmåter for å løse ulike oppgaver.

Slik vi ser det kan ikke eleven forklare hvorfor regnereglene med negative tall fungerer, men eleven brukte regler som var tidligere innlært for å løse oppgaven. Dersom eleven hadde hatt en kreativ, konseptuell eller relasjonell tilnærming til matematikken kunne eleven forklart hvorfor en metode førte til korrekt løsning. Eleven hadde dermed ikke vært usikker på om svaret var -4 eller 2. Vi hadde ingen tidsbegrensninger for hvor lenge elevene kunne sitte med oppgavene. Underveis i intervjuene gjorde vi oss vurderinger for hvor vi skulle stille spørsmål eller hvor vi foreslo å gå videre. På slutten av alle intervjuene stilte vi elevene spørsmålet om de ønsket å gå tilbake på noen oppgaver. Flere av elevene benyttet seg av denne muligheten.

Vi tar også med et eksempel på elev nummer tre som skulle løse oppgave 10:

> ***E3****: Om å skrive et uttrykk ved hjelp av x for å finne arealet av den gråfargede figuren. Men siden den ikke er med så blir det liksom ekstra vanskelig. Så tenker jeg at det er 8 cm bredt her nede og 12 cm her oppe*
> ***O****: Okey*
> ***C****: Hvordan ville du da prøvd å skrive arealet til den gråfargede figuren? Dersom du skulle skrevet det ned*
> ***E3****: …Jeg har ikke fått så mange former som denne.*
> ***O****: Enn hvis jeg hadde spurt deg om arealet av hele figuren?*
> ***E3****: Det er 120 cm*
> ***O****: Hvordan fant du det?*
> ***E3****: ...Jeg ganger 12 med 10*

Eleven hadde tidligere forklart oss hvordan man regnet arealet av et rektangel. Eleven fortalte også at oppgaven var problematisk siden eleven ikke skulle finne arealet av hele rektangelet. Også her mener vi elevens strategi kan knyttes til imitativt resonnement, instrumentell forståelse og prosedyremessig kunnskap. Dette fordi eleven kjente til formelen for å regne ut arealet av et rektangel, men klarte ikke dette når en del av rektangelet ikke skulle regnes med i arealet. Skemp (1976) kommer med eksempler på instrumentell forståelse der elevene må huske ulike formler for areal, til ulike figurer. Det virker som om eleven ønsket en bestemt algoritme eller fremgangsmåte for å regne ut arealet av denne figuren, noe som kan knyttes opp mot Lithners algoritmiske resonnering eller prosedyremessig kunnskap. Det bør nevnes at elevene kunne blitt usikre på hvordan dette skulle gjøres, siden det hvite kvadratets sider var oppgitt til å være *x*. Dette kan blant annet være fordi elevene har lært mange regler de bare må huske, og dermed kan det bli problematisk når eleven skal lære algebra på ungdomsskolen (Carraher & Schliemann, 2007). Det kommer også frem at eleven ikke har arbeidet med lignende oppgaver tidligere.

Dersom eleven hadde hatt en relasjonell eller konseptuell tilnærming til matematikken, hadde eleven kunne brukt sin forståelse til å forklare oss hvordan eleven kunne finne arealet av den gråfargede figuren. Og dermed anvendt matematikken fleksibelt for å komme med et uttrykk for arealet av figuren.

Elev nummer tre prøvde å se hvor mange ganger det hvite kvadratet kunne passe inn i hele figuren, men denne strategien ble ikke fullført av eleven. I følge Van de Walle (2013) kan elever på 4., og 5. trinn arbeide med areal ved å se hvor mange ganger en figur går inn i en annen. I dette eksemplet kan man da se hvor mange ganger det hvite kvadratet går inn i hele figuren. Denne strategien klarte ikke eleven å fullføre. Et av problemene kan være at eleven ikke forsto at sidelengdene i kvadratet var like lange. Dette fordi eleven prøvde med forskjellige verdier for *lengden* og *bredden* i kvadratet. Eleven kan dermed ha hatt misoppfatning av variabler, ved at *x* i oppgaven ikke hadde samme verdi (Booth m.fl., 2017). Eleven er ifølge Van de Walle m.fl (2013) på et lavt nivå i utviklingen av begrepet areal, når eleven prøver å regne ut arealet, da eleven benyttet en metode som vanligvis benyttes av elever på 4., og 5. trinn. På den andre siden kan det være at eleven opplevde oppgaven som komplisert og derfor prøvde å koble den til noe eleven hadde lært tidligere. Utfordringen er at denne strategien ikke vil føre frem til et uttrykk for den grå figuren, så eleven valgte en fremgangsmåte som ikke kunne anvendes på oppgave 10.

I vår analyse har vi kategorisert flere av strategiene som elevene benytter seg av som instrumentell tilnærming. Det kan virke som om dette går igjen hos alle våre elever. Dette fordi elevene ofte ønsket å benytte en algoritme eller en kjent fremgangsmåte for å løse oppgavene. Det at elevene behøvde en fast fremgangsmåte eller rutine kan også knyttes til prosedyremessig kunnskap, som har likhetstrekk med imitativ resonnering og instrumentell forståelse. Dersom vi stilte spørsmål om fremgangsmåten forklarte elevene ofte at det var slik de hadde lært å løse lignende oppgaver. Blant annet ser vi i oppgave 19 at elevene ønsket å sette dette opp som en ligning, og at de måtte løse ligningen for å finne *x*, for deretter å kunne regne ut $a + b$. Dersom vi måtte plassere elevene våre innenfor Skemps forståelse, mener vi at elevene har en instrumentell tilnærming til forståelse av algebra. Dette siden elevene ønsket å benytte tidligere erfarte algoritmer eller fremgangsmåter uten å forklare hvorfor dette ser ut til å fungere på oppgavene. Vi har for lite datamateriale til å kunne fastslå at elevene har en instrumentell forståelse i algebra, men mener samtidig at våre data indikerer at elevene kan inneha en instrumentell eller prosedyremessig forståelse av algebra. Dette mener vi også kan være grunnen til at elevene blir usikre på om de benytter riktig formel eller om de har husket formelen korrekt.

Det at elevene må huske regler og formler i matematikk, kan som tidligere nevnt gjøre det vanskeligere for dem når de skal lære seg algebra på ungdomsskolen (Carraher & Schliemann, 2007). Dette mener vi kan være en utfordring dersom elevene lærer instrumentelt eller prosedyremessig. En utfordring med dette er at elevene ikke vet hvorfor denne algoritmen eller fremgangsmåten fungerer på et bestemt område, som videre kan bidra til usikkerhet med å velge riktig algoritme. Dette hadde ikke vært nødvendig for elevene dersom de hadde hatt en relasjonell eller konseptuell forståelse av algebra, da elevene kunne benyttet matematikken fleksibelt og dermed ikke hatt behov for å gjengi memorerte algoritmer (Skemp, 1976). Vi kan ikke fastslå at elevene har en instrumentell forståelse, men slike utfordringer eleven kan møte i matematikken dersom våre indikasjoner stemmer.

### 6.1.2 Avkodingsproblemer

Avkodingsproblemer knyttes som Booth (2017) nevner opp mot elevers forståelse. Skemp (1976) antyder at det kan være tidkrevende å lære relasjonelt, men at dersom en oppnår en slik forståelse vil det ikke være behov for å huske tidligere erfarte algoritmer eller regneregler. Dermed kan det være enklere når elevene senere skal lære seg mer matematikk. Mangler i forståelsen hos elever kan dermed bidra til at elevene avkoder oppgavene ufullstendig eller feil. Vår kategorisering av elevenes avkodingsproblemer kan dermed knyttes direkte opp mot elevenes forståelse i emnet algebra. Elevene viser etter våre indikasjoner tegn til at de innehar en instrumentell eller prosedyremessig tilnærming til kunnskapsinnholdet i oppgavene. Hvordan en kan gå frem for å endre forståelsen til eleven, er det vanskelig å gi et fasitsvar på. Dette fordi elevenes forståelser er individuelle og unike.

Noen fellestrekk for å kunne arbeide mot en dypere forståelse og da med hensyn på et konseptuelt eller relasjonelt nivå, kan være ved å anvende dialog i større grad. Dette i tillegg til å gjøre vurderinger underveis i sitt eget arbeid, kan gjøre at elevene får en dypere forståelse for faget (Matematikksenteret, 2018). Dersom en slik forståelse oppnås hos elevene, vil de kunne avkode oppgavene korrekt i større grad enn det som er tilfellet i dette prosjektet.

Gjennom analysen av de ulike transkriberingene var funn i kodekategorien avkodingsproblemer gjentakende i de ulike oppgavene. Et eksempel på dette er deloppgave 22A. Som presentert i funn og resultatdelen i denne oppgaven, kapittel 5, ga alle elevene svar på sidelengdene i kvadratet og ikke arealet av kvadratet, med unntak av elev nummer en. Vår første tanke var da at elevene ikke var klare over hva et areal egentlig var, siden alle elevene ga svar på sidelengdene i kvadratet. En av grunnene til at vi gjorde denne antakelsen var fordi noen av elevene svarte at sidene var 10, da uten benevning. Når vi da stilte spørsmål om hva arealet var, svarte de at det var 10 $cm^2$. Dette skjedde imidlertid ikke på oppgave 10, som også spør etter arealet av figuren. Selv om ikke alle elevene klarte å løse oppgave 10, så kunne elevene fortelle oss hvordan de kunne regne ut arealet av figuren, dersom de hadde sidelengdene. Derfor måtte vi se nærmere på deloppgave 22A og den tilhørende transkriberingen. Dette for å se om det var andre faktorer som gjorde at elevene gav oss sidelengden av kvadratet i deloppgave 22A.

I deloppgave 22A blir det innledningsvis i oppgaven nevnt at Jon øker sidelengdene i kvadratet hver gang han lager en ny figur, og elevene får deretter se de tre første figurene i mønsteret. Dermed kan det virke som om elevene blir opphengt i at det er sidelengdene i kvadratet de skal finne. Alle elevene gjenkjenner mønsteret og fortalte oss at sidene i kvadratet økte med 2, (flere elever oppgir dette uten benevning), for hver ny figur Jon lager.

Siden elevene i vårt prosjekt ikke klarer å se hva oppgaven spør om, kan det tyde på at de ikke har avkodet oppgaven korrekt og dermed får de feil svar. Dette vil naturlig nok ha innvirkning på andelen korrekte svar hos norske elever i TIMSS. Det bør også nevnes at deloppgave 22A var den første oppgaven elevene måtte løse i intervjuet, noe som kan ha innvirkning. Forskernes tilstedeværelse i forskningsprosessen kan ha innvirkning på informantene (Postholm, 2010). Elevene kan ha vært stresset siden de ikke hadde kjennskap til oss fra tidligere. I tillegg kan elevene hatt liten erfaring med å gi muntlige forklaringer av hva de tenker. Denne usikkerheten kan dermed være med på å bidra til at elevene ikke løste deloppgaven korrekt.

Elevene fortalte oss hvor lang de ulike sidelengdene var, men benevningen uteble hos flere av dem. I tillegg svarte flere av elevene at sidelengden i kvadratet var 10 cm og at arealet av kvadratet var 10 $cm^2$. Dette kan tyde på at elevene som deltok har en instrumentell tilnærming til begrepet areal og benevningen $cm^2$, de kjenner altså til begrepet og den tilhørende formelen, men gjør seg ingen videre tanker om forholdet mellom sidelengdene og det totale arealet. Dette kan være fordi elevene endrer benevningen når de går fra sidelengden til arealet av kvadratet. Det kan også skyldes at elevene er utydelige i skillet mellom lengde og areal, og ikke nødvendigvis det at elevene ikke vet forskjellen på disse to benevningene. De var klar over hvordan de skulle regne ut arealet, men noen av svarene kan indikere at elevene ikke var sikre på hva svaret egentlig fortalte dem.

Avkodingen ser også ut til å være en utfordring for elevene i oppgave 10. Her kom det frem at de fleste elevene mente at verdien til $x$ måtte være 5, og begrunnet dette med at sidelengden til kvadratet var halvparten av bredden til rektangelet. Elevene benyttet dette som utgangspunkt når de skulle regne arealet av den gråfargede figuren. Vi har i ettertid målt den tilhørende figuren i TIMSS-oppgaven, og det viser seg at sidene i det hvite kvadratet er nøyaktig halvparten av sidelengden i hele figuren, som er oppgitt til å være 10 cm.

Dette kan støtte elevenes påstand om at sidelengden i det hvite kvadratet skal være 5 cm. Det at mange av våre elever dermed svarte at arealet av den grå figuren er 95 $cm^2$, kan da forklares ved at elevene antok at $x = 5$. Det at elevene da bestemte seg for å gi $x$ en bestemt verdi mener vi kan knyttes opp mot Lithners ulike typer resonnering (Lithner, 2008). Dersom elevene hadde hatt en kreativ resonnering, kunne elevene ha funnet en fremgangsmåte der de brukte den nøyaktige sidelengden i kvadratet ($x$) for å vise arealet av den grå figuren. I kreativ resonnering inngår analytisk og konseptuell tenkning. Analytisk tenkning kunne ha hjulpet elevene med å se at oppgaven ønsker et uttrykk. Dermed kunne elevene stilt seg selv spørsmålet om 95 $cm^2$ kunne være en løsning på oppgaven. Ved å sette $x = 5$ kunne elevene (med unntak av nummer tre) benytte en kjent fremgangsmåte og dermed ville en imitativ resonnering ha vært tilstrekkelig for å kunne gi et svar på oppgave 5. Siden elevene kjente lengdene til sidene, benyttet de seg av algoritmer for å regne ut det det eksakte arealet av figuren, og kom altså ikke med et uttrykk. Elevenes argument med at $x = 5$ fordi, «det ser slik ut», er problematisk å forankre matematisk. I oppgave 10 er hensikten å formulere et uttrykk, da med hensyn på $x$. Vi vil senere i drøftingen ta for oss begrepet uttrykk. Det bør nevnes at elev nummer tre, prøvde å se forholdet mellom det hvite kvadratet og hele figuren, og tok dermed ikke utgangspunkt i at sidelengdene i kvadratet var 5 cm. Denne eleven klarte ikke å komme videre med sitt resonnement og kom aldri med forslag på løsningen på oppgaven.

Som nevnt tidligere gjorde vi oss antagelser om at elevene hadde en manglende forståelse av areal, dette på bakgrunn av noen av svarene i deloppgave 22A. Dette ble imidlertid motbevist i oppgave 10, der samtlige av elevene forklarte oss hvordan de kunne regne arealet av hele figuren. Et av funnene vi har gjort oss i deloppgave 22A er at noen elever fortalte oss at sidelengden i kvadratet var 10, samtidig som arealet var 10. Det kan virke som elevene bare svarer i cm når de blir spurt om en lengde, og i $cm^2$ dersom de blir spurt om et areal, uten å egentlig tenke på hva benevningene forteller dem. I dette tilfellet mener vi det kan knyttes til imitativ resonnering (Lithner, 2008) grunnet mangel på analyse av løsningen og løsningsmetoden. Alle svaralternativene i deloppgave 22A har benevningen $cm^2$.

To av elevene benyttet muligheten til å se på oppgave 22 på nytt, etter å ha løst oppgave 10. Elevene ble da oppmerksomme på hva oppgaven ønsket svar på, og begge elevene svarte da korrekt på denne oppgaven. Det er viktig å poengtere at vi har for få informanter på dette emnet for å kunne fastslå noe på generelt grunnlag. Men utfra svarene på denne oppgaven kan det være noe som indikerer at elevene i denne oppgaven har en forståelse som kan minne om instrumentell, prosedyremessig eller imitativ, knyttet til benevningene som benyttes. Som vi også gjorde oppmerksom på i funnene, var deloppgave 22A den første oppgaven elevene måtte løse, som også kan påvirket resultatet på denne oppgaven.

I oppgave 10 mener vi det er problematisk at sidelengden av det hvite kvadratet er halvparten av bredden i rektangelet. Dette er med på å forvirre elevene siden dette tyder på at $x$ skal være 5. Vi mener oppgavens formål ikke hadde blitt endret dersom den grafiske utformingen hadde blitt endret, slik at sidelengdene i det hvite kvadratet ikke var nøyaktig halvparten av bredden til rektangelet.

Oppgave 5 er også en oppgave som har funn som er kategorisert under kodekategorien avkodingsproblemer. Dette fordi vi mener elevene har utfordringer knyttet til å se hvilken informasjon som er viktig for å kunne svare på denne oppgaven. I eksemplet som ble vist på denne oppgaven under kapittel 5.2.4, fortalte eleven at det kunne være utfordrende å hente ut den riktige informasjonen for å løse oppgaven. I funnene kom det også frem at flere elever hadde problemer med å knytte teksten til formelen, eller omvendt. På denne oppgaven virket det som om elevene ikke var helt sikre på hvordan de skulle begynne på oppgaven. Derfor begynte vi å stille elevene konkrete spørsmål til oppgaven. For eksempel «hva står *x* for i oppgaven?». Tre av elevene klarte ikke å svare på våre spørsmål og det virket som elevene ikke klarte å hente ut den relevante informasjonen i oppgaven og knytte dette til formelen. Noe også Pedersen (2013) mente var et funn hos norske elever i TIMSS Advanced. To av elevene klarte derimot å svare på spørsmålene vi stilte, og kom derfor frem til en løsning på oppgaven. Våre spørsmål kan ha ført til at vi hjalp disse to elevene å komme frem til en løsning. Dersom vi ikke hadde stilt spørsmål, tror vi ikke at de to elevene hadde kommet med en løsning på denne oppgaven. Dermed mener vi elevene ikke hadde klart denne oppgaven dersom de skulle løst oppgaven fra TIMSS uten vår hjelp. Den ene av disse elevene gjorde en regnefeil på slutten av oppgave 5, noe som gjorde at eleven fikk feil på oppgaven.

### 6.1.3 GTG-modellen

I deloppgave 22B skulle elevene generalisere arealet til den *n*-te figuren. I våre intervjuer er det bare en elev som kan fortelle hva begrepet *n*-te betyr. Denne eleven tror derimot at *n* skal stå for sidelengdene i kvadratet, noe som gjør at eleven ikke klarer å lage et korrekt uttrykk for arealet av den *n*-te figuren. Under algebraisk generalisering finner vi blant annet *faktabasert generalisering* og *kontekstbasert generalisering* (L. Radford, 2010). Disse to typene generalisering kan gjenkjennes ved at eleven for eksempel snakker om figuren når eleven egentlig skal snakke om figurnummeret. Denne elevens forklaring kan da altså minne om en slik tilnærming til generalisering da eleven nettopp prater om figuren og ikke figurnummeret. De andre elevene fortalte oss at de ikke visste hva *n*-te er for noe. Her er et utdrag fra elev nummer en:

> ***E1****: Okey. Jeg tror vi... Jeg tror det blir 2, eller nei jeg vet ikke… Ja..*
> ***O****: Ja, du kan skrive det du tror det blir. Men hvorfor tror du det blir 2?*
> ***E1****: Jeg vet ikke, jeg skjønner egentlig ikke oppgaven. Jeg vet ikke helt hva jeg skal gjøre.*
> ***O****: Hva synes du er vanskelig med oppgaven?*
> ***E1****: …Jeg synes det er vanskelig for jeg vet ikke hva «n*-te*» er.*

Dette er eksempel fra den ene eleven, men det var flere av elevene som ikke visste betydningen av uttrykket *n*-te. Elevene mente de ikke hadde sett dette begrepet før, noe som gjorde det vanskelig for dem å forstå oppgaven. Vi prøvde derfor å forklare elevene betydningen av begrepet. I ettertid ser vi at vår forklaring av *n*-te var noe uklar, noe som gjorde at elevene fortsatt ikke forsto betydningen av dette begrepet, og dermed ikke hva oppgaven ønsket at de skulle gjøre. Dersom dette hadde vært gjennomføringen av TIMSS hadde vi ikke hatt mulighet til å gi elevene noen ekstra forklaring, noe som ville ført til at elevene ikke hadde fått noen forklaring på betydningen av begrepet *n*-te.

Dersom vi ser på Kierans GTG-modell og forslaget for hvordan skolealgebraen kan deles inn, er det overaskende for oss at elevene ikke har sett denne skrivemåten for generalisering tidligere. Dette fordi generalisering er en av de tre delene i modellen. Samtidig styrker Lee (2001) dette funnet ved at det som dominerer undervisning og læreverk er generalisert tallære.

Radford (2001) mener at generaliserende aktiviteter skal skape språk som gjør at eleven kan beskrive eller uttrykke sammenhenger og situasjoner i matematikken. Dette er i tråd med det Kieran (2007) sier om at kjennskap til det algebraiske språket er en forutsetning for generaliserende aktiviteter. Vi kan ikke på bakgrunn av elevenes prestasjoner i de ulike intervjuene si noe om hvilke generaliserende aktiviteter som elevene har arbeidet med tidligere. Dette fordi våre eksempler i denne avhandlingen kun er en del av ulike generaliserende aktiviteter. Elevene kan tidligere ha arbeidet med slike aktiviteter, men kanskje ikke begrepet *n*-te. De kan også ha arbeidet med det tidligere, men ikke huske dette da intervjuene ble gjennomført.

Det er ikke nødvendigvis mønstergjenkjenning som er problemet med oppgaver knyttet til generalisering (Strømskag, 2017), men også oppgaveformuleringen og måten det undervises på kan skape utfordringer for eleven. Vi mener elevene har forstått mønsteret til figurene. Dette fordi elevene forklarte i samtalene med oss at sidelengdene i kvadratet økte med 2 cm. Dermed kan en utfordring være at oppgaven kommer med begreper som elevene ikke kjenner til. Dette er spesielt knyttet opp til begrepet *n*-te.

I oppgave 10 skulle elevene lage et uttrykk for arealet av figuren. Vi ser på dette som en generaliserende aktivitet, siden elevene skal lage et generelt uttrykk for figuren. Men oppgavens utforming påvirket resultatet da elevene tok utgangspunkt i at sidelengdene i kvadratet var 5 cm, og dermed endte de opp med at arealet av figuren var 95 $cm^2$.

Oppgaven ber elevene komme med et uttrykk, det er også opplyst at dette uttrykket skal lages ved hjelp av $x$, denne opplysningen står oppgitt i parentes. Siden elevene startet med å anta at $x = 5$, valgte vi å stille elevene oppfølgingsspørsmål i håp om at elevene skulle prøve å lage et uttrykk. Det som da kom frem var at elevene var usikre på hva et uttrykk egentlig var. Vi forsøkte å gi elevene en forklaring på dette. Det var da to elever, elev nummer to og nummer fem, som klarte å skrive et uttrykk til denne figuren. Elev nummer to gjorde feil i det eleven skulle forkorte uttrykket fra $120 – x * x$ og endte opp med $120 - 2x$. Elev nummer fem skrev uttrykket, $120 – x * x$. Eleven hadde tidligere svart 95 $cm^2$ på denne oppgaven, derfor stilte vi eleven spørsmål om et nytt svar ville avgis. Eleven argumenterte da for at det hadde ikke betydning hvilket av svarene som ble stående, siden $120 – x * x$ og 95 $cm^2$ var det samme. Dette bygger opp om at denne eleven mener at $x$ tilsvarer 5 cm, og dersom en regner ut uttrykket med denne verdien ville dette gitt svaret 95 $cm^2$. Oppgavens utforming kan dermed være en påvirkende faktor til at elevene løser oppgaven feil.

Når en skal arbeide med generaliserende aktiviteter trekkes ukjente, likhetstegnet og variabler frem som sentrale objekter (Kieran, 2007). I oppgave 10 virket det som at de fleste elevene ønsket å ha en verdi for $x$. Dette kan være grunnen til at de overser at sidene i kvadratet har lengden $x$. At eleven ønsker en verdi for $x$ kommer også frem i oppgave 19, der noen elever mener de skal regne ut verdien til $x$. Dette kan tyde på elevene har liten erfaring med å regne med variabler. Elevene kan kanskje forbinde algebra med ligninger, der de skal finne en verdi for $x$ ved å løse ligninger. Dette kan føre til at elevene ikke har erfaring med at et uttrykk også kan være et svar på en oppgave.

En vanlig misoppfatning knyttet til likhetstegnet er det at etter likhetstegnet forventer elever at det skal stå et konkret svar (Booth m.fl., 2017). Dette kan vi ikke si med sikkerhet er tilfellet hos våre elever, men det kan indikere hvorfor elevene regner ut $x$, og ikke lar uttrykket være svaret på oppgaven. Ved å jobbe med generaliserende aktiviteter kan dette bidra til at eleven får erfaring med å arbeide med variabler, samt at de kanskje kan få en bedre forståelse av hva et uttrykk er.

I Kierans GTG-modell inngår også transformerende aktiviteter. Disse aktivitetene kalles også regelbaserte aktiviteter. I transformerende aktiviteter er arbeidet med de algebraiske verktøyene viktige. Algebraiske verktøy kan for eksempel være arbeid med variabler, potenser, parenteser og arbeid med det matematiske språket.

Oppgave 19 mener vi kan sees på som en transformerende aktivitet da denne oppgaven utfordrer elevene på anvendelsen av ulike algebraiske verktøy, som for eksempel arbeid med variabler og regning med parenteser. I tillegg får vi et innblikk i elevenes arbeid med transformerende aktiviteter i blant annet oppgave 10, der to av elevene må forkorte uttrykket de har kommet frem til. I oppgave 19 kan det virke som om elevene har problemer når de skal arbeide med variabler. Elevene virker usikre på hvordan de skal løse denne oppgaven som inneholder både variabler og tall. De fleste elevene klarer å komme med forslag til løsninger på tilleggsoppgavene til oppgave 19, selv om det kan virke som om elevene er noe usikre på regnereglene. I tillegg kan det se ut som at noen misoppfatninger knyttet til variablene gjør arbeidet med transformerende oppgaver vanskeligere.

Også oppgave 5 har vi knyttet til transformerende aktiviteter. Elevene har utfordringer knyttet til avkodingsproblemer, noe som fører til at elevene ikke kommer seg til den transformerende aktiviteten i oppgaven.

Ulike transformerende oppgaver, krever ulik bruk av algebraiske verktøy (Kieran, 2007). Dermed kan ulike transformerende oppgaver føre til at elevene må ta i bruk ulike ferdigheter (Li m.fl., 2014). Det å arbeide med ulike aktiviteter i GTG-modellen kan forhåpentligvis bidra til at elevene blir tryggere i anvendelsen av de ulike algebraiske verktøyene. Våre funn kan tyde på at elevene har behov for å jobbe mer med aktivitetene i GTG-modellen, men vi må igjen påpeke at vi har for få informanter og for lite innsamlet data til at dette kan generaliseres. Kieran (2007) nevner at global/meta-nivå kan benyttes for å motivere elevene til å også jobbe med transformerende og generaliserende aktiviteter. Dermed kan arbeid med global/meta-nivå gi elevene mer erfaring med transformerende og generaliserende aktiviteter, og forhåpentligvis se sammenhenger i algebra.

### 6.1.4 Misoppfatninger

Indikasjoner på ulike misoppfatninger har kommet frem under gjennomføringen av de ulike intervjuene. I oppgave nummer 19 så vi fra kapittelet funn og resultater at deler av alle de fem elevenes besvarelse ble kategorisert under kodekategorien misoppfatning variabler. Ulike misoppfatninger her var for eksempel at $a + b = ab$, $1 + x = 1x$, eller at de ulike symbolene som var benyttet ble knyttet til alfabetet. Et annet funn innen denne kodekategorien er det at en elev mente at verdien for $x$ måtte finnes, før eleven kunne løse oppgaven. I oppgave nummer 10 så vi at variabelen $x$ i denne oppgaven representerer sidelengden i et kvadrat, men noen av våre elever valgte å benytte $x$ som et uttrykk for selve arealet. I tillegg kom det frem misoppfatning knyttet til multiplikasjon med variabler, eksempelvis at $x$ multiplisert med $x$ ble $2x$.

For oppgave 7 og den tilhørende verditabellen, viser våre funn at elever innehar misoppfatninger av variabler. Dette fordi elevene ikke forsto hvordan $x$ kunne ha ulike verdier. Noen av elevene utrykte at de ikke hadde sett en slik oppgave tidligere. En av elevene mente at det hadde vært enklere å løse oppgaven dersom verdien for $x$ hadde vært tilstede. Både for oppgave 7 og oppgave 19 var det laget tilleggsoppgaver som elevene løste. Dette ble gjort for å avdekke om det var grunnleggende regnefeil, eller om det var forståelse knyttet til de ulike variablene som førte til at elevene ikke fikk til å løse oppgavene. I oppgave nummer 7 endte det med at vi forklarte enkelte elever at de ulike verdiene som var oppgitt i tabellen, var verdier for variabelen $x$ i formelen. Dette trengte vi ikke gjøre med elev nummer to. Det bør nevnes at elev nummer to hadde jobbet med verditabeller i et fordypningsfag i matematikk, og denne eleven løste denne oppgaven korrekt, uten at vi behøvde å hjelpe eleven. Elev nummer tre mente at medianen eller gjennomsnittet måtte finnes for å finne den endelige verdien til *x*. Eleven forsto dermed ikke at *x* kunne ha ulike verdier i denne oppgaven.

I oppgave 18 kom det frem at noen elever mente at *x* ikke trengte å ha samme verdi i de ulike sidene på figuren. Altså at variabelen *x* kunne stå for ulike verdier i en og samme figur. I denne oppgaven er variabelen representert i alle de tre sidene i trekanten. En misoppfatning om at variabelen *x* kan ha forskjellige verdier på de ulike sidene vil dermed medføre til at en ikke klarer å løse oppgaven.

I tillegg til misoppfatninger knyttet mot variabler ble det også avdekket misoppfatninger knyttet til likhet, eksempelvis likhetstegnet. I oppgave 19 ser vi at de ulike leddene i oppgaven uttrykkes først som $a + b$, for deretter å definere *a* og *b* som to separate uttrykk, dette ser ikke ut til å forstås hos enkelte elever. I oppgave 5 kommer det også frem ulik forståelse for likhetstegnet, siden elev nummer fires besvarelse er at $t = x$. Dersom dette hadde vært tilfelle, ville oppgaven besvart seg selv ved at verdien for *x* står oppgitt i den tilhørende oppgaveteksten.

Misoppfatninger knyttet til regneregler og negative tall ble også avdekket under de ulike intervjuene. Elever som hadde problemer med regnereglene ble avdekket i oppgave 19. I denne oppgaven hadde vi laget tilleggsoppgaver for å avdekke om det var regnereglene eller de ulike variablene som var problemet hos elevene. Når elevene da viste mangler på begge disse områdene ble TIMSS-oppgaven umulig å løse. Oppgave 7 avdekket også misoppfatninger knyttet mot regneregler. Misoppfatninger som relaterer seg til forståelse av negative tall hadde vi funn på i enkelte tilfeller. Eksempel i oppgave 7 der elev nummer fem viser at eleven har problemer med dette. Elev nummer fem er veldig tydelig på at regning med negative tall er et problem. Det at eleven selv er klar over manglende forståelse knyttet til emnet, kan være positivt for elevens senere utviklingen i matematikk.

De ulike misoppfatningene som er avdekket under de ulike intervjuene er varierte og gjentakende i enkelte oppgaver. Misoppfatninger knyttet til variabler er den misoppfatningen som går mest igjen i de ulike funnene i dette studiet.

Instrumentell eller prosedyremessig forståelse hos de enkelte elevene kan gi overfladisk kunnskap til et emne. Som beskrevet i avsnittene over ligger det flere misoppfatninger til grunne hos de enkelte elevene. Det kan dermed tolkes slik at elevene innehar mangler i forståelsen, og at de har en instrumentell eller prosedyremessig tilnærming til emnet algebra. Med en relasjonell eller konseptuell forståelse er elevene rustet til å se sammenhenger og gjøre nye koblinger selvstendig. En slik forståelse vil kunne bidra til at elevene mest sannsynlig ikke innehar de ulike misoppfatningene som vi har avdekket gjennom dette studiet.

# 7 Avslutning

## 7.1 Oppsummering av sentrale funn

Problemstillingen for denne avhandlingen var som følger:

**Hvilke misoppfatninger har norske 9. trinns elever i emnet algebra som gjør at de skårer lavt på TIMSS 2015?**

Etter å ha analysert vårt datamateriale er det indikasjoner på at elevene vi intervjuet har ulike misoppfatninger knyttet til løsningen av algebraoppgavene fra TIMSS 2015. Til tross relativt få informanter, fem elever, viser våre funn at elevene har flere ulike *misoppfatninger* og utfordringer knyttet til å løse disse oppgavene. Vår undersøkelse indikerer at *avkodingsproblemer* knyttet til oppgaver og *misoppfatninger av variabler*, er de to utfordringene som er gjentakende hos våre elever.

Avkodingsproblemer er et av hovedfunnene i denne avhandlingen. Dette problemet går igjen i flere oppgaver hos ulike elever, og vi mener det er direkte knyttet til forståelse. Elever med en relasjonell/ konseptuell forståelse eller kreativ resonnering vil oftere kunne avkode oppgavene korrekt. Elevene som har deltatt i denne studien kan altså sies å ha en tilnærming til forståelse som kan minne om instrumentell, prosedyremessig eller imitativ resonnering. Vi kan ikke med sikkerhet fastslå at elevene innehar en ren instrumentell, prosedyremessig forståelse eller imitativ resonnering. Dette fordi vi ikke har nok innsamlet data på området. Basert på våre funn er det derimot klare indikasjoner på at våre elever innehar en slik forståelse.

Et annet hovedfunn er misoppfatninger knyttet opp mot variabler. Resultatene viser at det er mange ulike misoppfatninger av denne typen hos de få elevene som har deltatt. Dette mener vi styrker våre indikasjoner på at elevene har en instrumentelt preget forståelse. Dersom elevene hadde innehatt eksempelvis en konseptuell forståelse, skulle de hatt større muligheter til å se sammenhenger i matematikk. Et eksempel på dette er koblingen mellom algebra og aritmetikk, der et av våre funn var at $x$ multiplisert $x$ var $2x$. Dersom en konseptuell forståelse var tilstede ville elevene kunne argumentert med at $x$ multiplisert $x$ er $x^2$.

I tillegg kom det frem utfordringer knyttet til problemer med begrepsforståelse, problemer knyttet til oppgavens utforming, regnefeil hos elevene og utfordringer knyttet til at noen elever er avhengige av regler eller faste fremgangsmåter når de arbeider med matematikk. Problemer knyttet direkte opp mot oppgavens utforming er tatt med da resultatene viste at elevene ble usikre og at utformingen dermed påvirket elevenes kognitive strategier.

Både *misoppfatninger* og *avkodingsproblemer* er knyttet til elevenes ulike typer forståelse. Det at noen av våre elever ikke klarer å løse ulike oppgaver fordi de ikke har sett slike tidligere, er et tydelig funn på at forståelsen er instrumentell for slike oppgaver. Som nevnt viser våre funn en indikasjon på at elevene innehar en instrumentell eller prosedyremessig forståelse. Med en slik forståelse vil en ikke kunne se ulike sammenhenger i faget, fordi en hele tiden følger gitte prosedyrer eller oppskrifter som en har lært tidligere. Dette gjør det da vanskeligere når eleven møter en ny oppgave som krever endring i den eksisterende prosedyren for å få til en løsning.

Dersom elevene bare pugger formler eller gjentar det andre gjør, kan føre til at elevene ikke kan utnytte matematikken fleksibelt.

## 7.2 Begrensinger i studien. Veien videre.

Vårt arbeide med masteroppgaven er en liten studie av et stort problemområde. Den har derfor mange begrensninger.

For det første har vi kun benyttet oss av fem elever fra den samme skolen. Dette gjør at våre funn ikke kan generaliseres da utvalget er for lite. En annen begrensning for dette prosjektet er vår relasjon til de ulike elevene, dette fordi vi ikke hadde noen kjennskap til disse fra tidligere. Vi hadde i tillegg liten erfaring med semistrukturerte intervju, noe som kan ha påvirket resultatet.

Når det gjelder videre forskning er det mange muligheter. Dette prosjektet kan først og fremst oppskaleres til å gjelde flere elever på flere skoler, dette i ulike kommuner i ulike deler av landet. Et slikt prosjekt vil kreve langt mer tid og ressurser, men er absolutt mulig å gjennomføre. Prosjektet kan også videreføres slik at en utvikler diagnostiske oppgaver (Brekke m.fl., 2002) for å avdekke forskjeller i misoppfatningene hos elevene. For eksempel med at vår kategori misoppfatning av variabler kan deles opp i flere underkategorier, dersom en benytter diagnostiske oppgaver.

Et prosjekt som oppskaleres til langt flere elever og deler av landet kan i større grad generaliseres. Og kan dermed være med å påvirke for eksempel hvordan lærebøker introduserer algebra, slik Kongelf (2015) beskriver i sin studie.

En annen mulighet kan være å se på hvordan elever skårer, og videre på deres forståelse av algebra på nasjonale prøver/eksamen i 10. trinn. Et slikt prosjekt kan være spennende å gjennomføre da læreplanmålene forteller hva elevene skal kunne etter fullførte 10. trinn, mens TIMSS gjennomføres i 8. og 9. trinn.

Den nye lærerplanen skal inneholde kjerneelementer i alle fag (Utdanningsdirektoratet, 2017). Kjerneelementene defineres som det viktigste som skal læres i faget. Det vil si innholdet, hva elevene må lære for å beherske og mestre faget. Hensikten er derfor at kjerneelementene skal bidra til at elevene ser sammenhenger i matematikk, og ikke bare går i dybden av hvert emne i faget (Utdanningsdirektoratet, 2018).

Med innføringen av en ny læreplan kan vårt gjennomførte prosjekt utvikles til et langsiktig prosjekt som måler elevers utvikling i algebra, med fokus på hvordan eventuelle misoppfatninger utvikler seg over en tiårsperiode. Dette kan for eksempel være en indikator på om innføringen av kjerneelementene i læreplanen har endret elevenes forståelse i matematikkfaget.

# Referanseliste


Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag : resultater og analyser fra TIMSS 2015*. Oslo: Universitetsforl.

Bergsten, C., Häggström, J., Lindberg, L., Emanuelsson, G., Rosén, B. & Nationellt centrum för matematikutbildning. (1997). *Algebra för alla* (Nämnaren). Göteborg: Nämnaren NCM Institutionen för ämnesdidaktik.

Booth, J. L. & Davenport, J. L. (2013). The role of problem representation and feature knowledge in algebraic equation-solving. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 415-423. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.04.003

Booth, J. L., McGinn, K. M., Barbieri, C. & Young, L. K. (2017). Misconceptions and Learning Algebra. I S. Stewart (Red.), *And the Rest is Just Algebra* (s. 63-78). Cham: Springer International Publishing. Hentet fra https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_4

Brekke, G., Kvalitet i, m. & Læringssenteret. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Oslo: Læringssenteret.

Brinkmann, S., Tanggaard, L. & Hansen, W. (2012). *Kvalitative metoder : empiri og teoriutvikling* (Kvalitative metoder en grundbog). Oslo: Gyldendal akademisk.

Caelli, K., Ray, L. & Mill, J. (2003). 'Clear as Mud': Toward Greater Clarity in Generic Qualitative Research. *International Journal of Qualitative Methods*, *2*(2), 1-13. Hentet fra http://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/160940690300200201

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. I F. Lester (Red.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 669-705): Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag.

Creswell, J. W. (2014). *Research design : qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4th International student utg.). Los Angeles, California: SAGE.

Goldin, G. A. (1997). Chapter 4: Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 9*, 40-177. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/749946

Grønmo, L. S., Hole, A. & Onstad, T. (2016). *Ett skritt fram og ett tilbake : TIMSS Advanced 2015 : matematikk og fysikk i videregående skole*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram : norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* (s. 1-27). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

IEA. (2018). TIMSS & PIRLS. Hentet 12.2017 fra https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-database/

Kieran, C. (1990). Cognitive Processes Involved in Learning School Algebra. I J. Kilpatrick & P. Nesher (Red.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the*

*International Group for the Psychology of Mathematics Education* (ICMI Studies.s. 96-112). Cambridge: Cambridge University Press. Hentet fra https://www.cambridge.org/core/books/mathematics-and-cognition/cognitive-processes-involved-in-learning-school-algebra/8CFD6B736ECB725F1AFCCE06291EE118

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levers: Building meaning for symbols and their manipulation. I F. Lester (Red.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 707-762): Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kieran, C. (2013). *The False Dichotomy in Mathematics Education Between Conceptual Understanding and Procedural Skills: An Example from Algebra*.

Kongelf, T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. I *Nordic Studies in Mathematics, NOMAD* (Bd. 20 (3-4)). Gøteborg: Gøteborgs Universitet. Hentet fra http://ncm.gu.se/node/7991

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg., 2. oppl. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Lee, L. (2001). Early Algebra - but which algebra? I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Red.), *The future of teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference.* (Bd. 2, s. 392-399): University of Melbourne.

Li, H., Liao, X., Huang, T., Wang, Y., Han, Q. & Dong, T. (2014). Algebraic criteria for second-order global consensus in multi-agent networks with intrinsic nonlinear dynamics and directed topologies. *Information Sciences, 259*, 25-35. https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.09.039

Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage Publications, Inc.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276. Hentet fra https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Lyngsnes, K. M. & Rismark, M. (2007). *Didaktisk arbeid* (2. utg. utg.). Oslo: Gyldendal.

Malterud, K. (2003). *Kvalitative metoder i medisinsk forskning : en innføring* (2. utg. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Mason, J., Lie, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2011). *Å lære algebraisk tenkning*. Bergen: Caspar forlag.

Matematikksenteret. (2018). Diagnostisk undervising. Hentet 18/4 fra https://www.matematikksenteret.no/grunnskole/vurdering-og-kartlegging/fra-misoppfatning-til-mestring/diagnostisk-undervisning

Molina, M., Ambrose, R. & Castro Martínez, E. (2004). In the transition from arithmetic to algebra: misconceptions og the equal sign. Presented at the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, July 14-18, 2004.

Pedersen, I. F. (2013). Is TIMSS Advanced an appropriate instrument for evaluating mathematical performance at the advanced level of Norwegian upper secondary school? An analysis of curriculum documents and assessment items. *Acta Didactica Norge, 7*(1), (Art. 5, 24 sider).

Percy, W. H., Kostere, K., & Kostere, S. (2015). Generic Qualitative Research in Psychology. *The Qualitative Report, 20*(2), 76-85. Hentet fra http://nsuworks.nova.edu/tqr/vol20/iss2/7/

Petersen, I. J. (2015). *Hvordan kan elevers ferdigheter i algebra måles detaljert? En kvalitativ kartlegging av 215 elever på tiende trinns ferdigheter i algebra* (Masteravhandling). Hentet fra http://hdl.handle.net/10037/8120

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode : en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Postholm, M. B. & Moen, T. (2009). *Forsknings- og utviklingsarbeid i skolen : metodebok for lærere, studenter og forskere*. Oslo: Universitetsforlaget.

Radford, L. (2004). Syntax and meaning. I M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Red.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 1, s. 161-166). Bergen, Norway.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 4*(2), 37-62.

Radford, L. G. (2001). The historical origins of algebraic thinking. I *Perspectives on school algebra* (s. 13-36): Springer.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*(1), 20-26.

Strømskag, H. (2017). Et miljø for algebraisk generalisering og dets innvirkning på studenters matematiske aktivitet. I *Nordic Studies in Mathematics, NOMAD* (Bd. 22(2)). Gøteborg: Gøteborgs universitet.

Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse : en innføring i kvalitativ metode* (4. utg. utg.). Bergen: Fagbokforlag.

Utdanningsdirektoratet. (2017). Hva er kjerneelementer? Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/kjerneelementgruppene/

Utdanningsdirektoratet. (2018). #Udirbloggen. Hentet fra http://udirbloggen.no/author/kjerneelementgruppen-for-matematikk/

Van de Walle, J. A., Bay-Williams, J. M., Lovin, L. H. & Karp, K. S. (2013). *Teaching student-centered mathematics : developmentally appropriate instruction for grades 6-8* (2nd utg.): Pearson.

Walick, C. M. & Burns, M. K. (2017). A Proposed Algebra Assessment for Use in a Problem-Analysis Framework. *Assessment for Effective Intervention, 42*(3), 150-159. Hentet fra http://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/1534508417690000

Zernichow, A. G. & Nygaard, O. (2006). Den blokkerende misoppfatning. *Spesialpedagogikk. TEMA: Matematikkvansker/mestring, 4*, S. 34-38

# 8 Vedlegg

## Vedlegg 1: Godkjennelse IEA

IEA

Number IEA- 17-198 (to be filled by IEA)

**PERMISSION REQUEST FORM**

To be completed by anyone seeking permission to reuse, reproduce, or translate IEA material.

**1. Requested IEA material**

**Type of requested material (select all that apply):** [ ] Abstract [ ] Text excerpt [ ] Report
[ ] Full article [ ] Chapter [ ] Figure/table [ x ] restricted use items [ ] Study instruments
[ ] Other, please specify: __________

**Please indicate the source of the IEA material:**
Author/editor: __________
Title: TIMSS2015 8th grade math restricted items
ISBN: __________ Date of publication: __________
Description of requested IEA material (provide exact page numbers, chapter name/author, figure/table numbers, item numbers, and URL address): M042076, M042100, M042093, M062237, M062314, M062074, M052126, M042229A/B, M042080A/B, M052131, M052090, M052121A/B, M042109, M042074 A/B/C, M042049.

NOTE: Please attach text or graphics from the IEA material you would like to use or reproduce.

**2. How IEA material will be used**

**Information about your intended use (select all that apply):**
[ ] Non-commercial [ ] Commercial
[ x] Thesis [ ] Secondary analysis [ ] Publication [ ] Survey research
[ ] Other, please specify: __________

Please provide a brief description of your intended use: We will use some of the items in our master thesis. We will use the results from the Norwegian students and compare them to other contries. Our purpose are to map the cognitive strategies the students use to solve the items.

**Information about where the requested content will appear/where you will use the requested content:**

Author: Students of the university of Tromsø (UIT)
Title: Master Thesis
Language: Norwegian
Publisher or sponsor: UIT
Intended audience: UIT

International Association for the Evaluation of Educational Achievement
IEA Amsterdam | Keizersgracht 311, 1016 EE Amsterdam, The Netherlands | Tel. +31 (0)20 625 36 25 | Fax +31 (0)20 420 71 36 | secretariat@iea.nl | www.iea.nl | KvK 41158871

**Format of the work where the requested content will appear/where you will use the requested content (select all that apply):**

[ x ] Printed [ ] Electronic [ ] Other, please specify:____________________
Number of copies for distribution: ____ Retail price: _________ Date to be released: May 2018
Additional comments: ____________________

3. **Requestor information**

Name: Ola Eliassen& Cato Mathisen
Name of institution or organization: University of Tromsø (UiT)
Address:Alaskasvingen 5B
City and zip code:9013 TromsøCountry:Norway
Phone: ____________________ Email: ola_93@msn.com

Signature: Ola Eliassen Cato Mathisen Date of request:1/11-17

To submit your request, please sign and return this form to IEA by mail (Keizersgracht, 1016 EE Amsterdam, The Netherlands), email (secretariat@iea.nl), or fax (+31 204207136).

In signing, you agree that the permissioned material will be distributed only as part of or for use along with the original work, where the primary value does not lie with the permissioned material itself.

Please note that by signing this form you also state that you have filled out this form truthfully and to the best of your knowledge and that you have read and will comply with all conditions. Providing IEA with incorrect or incomplete information will not only invalidate permission if granted, but can also hold you liable for any damage arising from your failure to comply with these requirements. In case you have any hesitations and/or reservations regarding the information you have to fill out on this form, please contact IEA. Please allow 4-5 weeks for the processing of your permission request.

**When quoting and/or citing from one or more publications and/or restricted use items from TIMSS, PIRLS and IEA for the sake of educational or research purposes, please print an acknowledgment of the source, including the year and name of that publication and/or restricted use item. Please use the following acknowledgment as an example:**

**SOURCE: TIMSS 2007 Assessment. Copyright © 2009 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.**

**Please note that citing without naming the source can or will constitute plagiarism for which you can and will be held accountable.**

Number IEA- 17-198 (to be filled by IEA)

4. **Permission** [X] Granted [ ] Denied

**Terms of agreement:** Permission is granted for non-exclusive rights to reproduce the material requested above upon the terms and solely for the purpose indicated.

[X] Free [ ] Fee (payable to NL63ABNA0481961968)

Signature: _______________ Date: 27 November 2017

Name: Dirk Hastedt

Title: Executive Director

Disclaimer: Please note that the website and its contents, together with all online and/or printed publications and restricted use items ('works') by TIMSS, PIRLS and other IEA studies, were created with the utmost care. However, the correctness of the information cannot be guaranteed at all times and IEA cannot and will not be held responsible or liable for any damages that may arise from the use of these resources, nor will IEA be liable for the wrongful use and/or interpretation of its works.

**Please be advised that IEA cannot authorize the use of texts or items that include third-party copyrighted materials (e.g., reading passages in PIRLS, photographs, images). Users of any third-party copyrighted materials must first seek and be granted copyright permission from the owner of the content as indicated in the copyright citation line.**

Please note that permission is only granted for the particular case as described in this form. Any additional use of this or any other IEA materials requires further permission. IEA copyright must be explicitly acknowledged, and the need to obtain permission for any further use of the published text/material clearly stated in the requested use/display of this material.

IEA, its proprietary assessment instruments, and studies are all the result of the choices and combination of elements by which the creator has expressed its creativity in an original matter, further to which a result has been achieved which is an intellectual creation and therefore protected as a copyright protected work, as stipulated in article 10 of the Dutch Copyright Act ("DCA") and article 2(a) of Directive 2001/29/EC regarding the harmonization of certain aspects of copyright and related rights in the information society (the "EU Copyright Directive").[1] The copyrights in these works are owned by IEA. National versions of instruments are recognized as the joint venture and shared intellectual property of the IEA and the relevant participating institutions, and should be treated accordingly.

IEA has a strict Intellectual Property Policy in place regarding third-party use of its copyright protected instruments and studies. All publications and restricted use items by TIMSS, PIRLS and other IEA studies, as well as translations thereof, are for non-commercial, educational and research purposes only. Prior permission is required when using IEA data sources for assessments or learning materials. As stated, IEA reserves the right to refuse copy deemed inappropriate or not properly sourced. IEA Intellectual Property Policy is *inter alia* included on the IEA DPC website (http://rms.iea-dpc.org/) and on the TIMSS and PIRLS website (http://timss.bc.edu/index.html), in which it is clearly stated that all accessible instruments and/or data are IEA proprietary copyright protected. Said webpages also contain links to its permission form, which should be submitted with IEA prior to any use of its materials and/or instruments.

TIMSS, PIRLS, ICCS and ICILS are registered trademarks of IEA. Use of these trademarks without permission of IEA by others may constitute trademark infringement. Furthermore, the website and its contents, together with all online and/or printed publications and restricted use items by TIMSS, PIRLS and other IEA studies are and will remain copyright of IEA.

Exploitation, distribution, redistribution, reproduction and/or transmitting in any form or by any means, including electronic or mechanical methods such as photocopying, information storage and retrieval system of these publications, restricted use items, translations thereof and/or part thereof are prohibited unless written permission has been provided by IEA.

[1] Cf. ECJ 16 July 2009, Case C-5/08 (Infopaq I).

# Vedlegg 2: Godkjennelse NSD

Jan Roksvold

9006 TROMSØ

Vår dato: 21.11.2017 | Vår ref: 56874 / 3 / STM | Deres dato: | Deres ref:

## Forenklet vurdering fra NSD Personvernombudet for forskning

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 02.11.2017.
Meldingen gjelder prosjektet:

| | |
|---|---|
| *56874* | *Hvilke kognitive strategier bruker elever på ungdomsskolen når de løser oppgaver knyttet til algebra* |
| *Behandlingsansvarlig* | *UiT Norges arktiske universitet, ved institusjonens øverste leder* |
| *Daglig ansvarlig* | *Jan Roksvold* |
| *Student* | *Ola Eliassen* |

### Vurdering

Etter gjennomgang av opplysningene i meldeskjemaet med vedlegg, vurderer vi at prosjektet er omfattet av personopplysningsloven § 31. Personopplysningene som blir samlet inn er ikke sensitive, prosjektet er samtykkebasert og har lav personvernulempe. Prosjektet har derfor fått en forenklet vurdering. Du kan gå i gang med prosjektet. Du har selvstendig ansvar for å følge vilkårene under og sette deg inn i veiledningen i dette brevet.

### Vilkår for vår vurdering

Vår anbefaling forutsetter at du gjennomfører prosjektet i tråd med:

- opplysningene gitt i meldeskjemaet
- krav til informert samtykke
- at du ikke innhenter sensitive opplysninger
- veiledning i dette brevet
- UiT Norges arktiske universitet sine retningslinjer for datasikkerhet

### Veiledning

**Krav til informert samtykke**

Utvalget skal få skriftlig og/eller muntlig informasjon om prosjektet og samtykke til deltakelse.
Informasjon må minst omfatte:

- at UiT Norges arktiske universitet er behandlingsansvarlig institusjon for prosjektet
- daglig ansvarlig (eventuelt student og veileders) sine kontaktopplysninger

*Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.*

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS | Harald Hårfagres gate 29 | Tel: +47-55 58 21 17 | nsd@nsd.no | Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data | NO-5007 Bergen, NORWAY | Faks: +47-55 58 96 50 | www.nsd.no

- prosjektets formål og hva opplysningene skal brukes til
- hvilke opplysninger som skal innhentes og hvordan opplysningene innhentes
- når prosjektet skal avsluttes og når personopplysningene skal anonymiseres/slettes

På nettsidene våre finner du mer informasjon og en veiledende mal for informasjonsskriv.

**Forskningsetiske retningslinjer**
Sett deg inn i forskningsetiske retningslinjer.

**Meld fra hvis du gjør vesentlige endringer i prosjektet**
Dersom prosjektet endrer seg, kan det være nødvendig å sende inn endringsmelding. På våre nettsider finner du svar på hvilke endringer du må melde, samt endringsskjema.

**Opplysninger om prosjektet blir lagt ut på våre nettsider og i Meldingsarkivet**
Vi har lagt ut opplysninger om prosjektet på nettsidene våre. Alle våre institusjoner har også tilgang til egne prosjekter i Meldingsarkivet.

**Vi tar kontakt om status for behandling av personopplysninger ved prosjektslutt**
Ved prosjektslutt 15.05.2018 vil vi ta kontakt for å avklare status for behandlingen av personopplysninger.

## Gjelder dette ditt prosjekt?

**Dersom du skal bruke databehandler**
Dersom du skal bruke databehandler (ekstern transkriberingsassistent/spørreskjemaleverandør) må du inngå en databehandleravtale med vedkommende. For råd om hva databehandleravtalen bør inneholde, se Datatilsynets veileder.

**Hvis utvalget har taushetsplikt**
Vi minner om at noen grupper (f.eks. opplærings- og helsepersonell/forvaltningsansatte) har taushetsplikt. De kan derfor ikke gi deg identifiserende opplysninger om andre, med mindre de får samtykke fra den det gjelder.

**Dersom du forsker på egen arbeidsplass**
Vi minner om at når du forsker på egen arbeidsplass må du være bevisst din dobbeltrolle som både forsker og ansatt. Ved rekruttering er det spesielt viktig at forespørsel rettes på en slik måte at frivilligheten ved deltakelse ivaretas.

Se våre nettsider eller ta kontakt med oss dersom du har spørsmål. Vi ønsker lykke til med prosjektet!

Vennlig hilsen

Marianne Høgetveit Myhren

Siri Tenden Myklebust

Kontaktperson: Siri Tenden Myklebust tlf: 55 58 22 68 / Siri.Myklebust@nsd.no

# Vedlegg 3: Intervjuguide

Ulike tema som kan tas opp med elevene:

- Fritidsinteresser/idrett
- Skole
- Yndlingsfag på skolen og hvorfor
- Hva synes eleven om matematikkfaget?
- Hvordan synes eleven sin egen kunnskap i faget er?

**Informasjon**: Du skal nå få utdelt ulike oppgaver i emnet algebra. Oppgavene er hentet fra en internasjonal test, og de kan oppleves som vanskelige. Det er få norske elever som klarer å løse alle oppgavene korrekte. Vi er ikke ute etter om du får rett svar eller ikke, det vi ønsker er at du forklarer oss hva du tenker. Altså, når du nå skal løse oppgavene må du hele tiden forsøke å forklare hva du tenker, eventuelt hva som er vanskelig med oppgaven. Ingen tanker er dumme eller teite, prøv å si nøyaktig det du tenker til enhver tid.

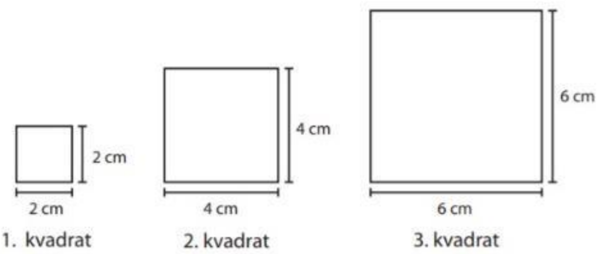
Vi vil stille oppfølgingsspørsmål underveis uavhengig om du gjør rett eller galt i forhold til oppgaven. Dette er for å få en forståelse av hva du tenker. Vi vil også påpeke underveis at du må fortelle oss hva du tenker.

Ønsker du å være med på dette prosjektet?

# Vedlegg 4: TIMSS-oppgaver

**22**

Jon lager et mønster av kvadrater.
Han øker sidelengden av kvadratet med like mye hver gang.
Her er de tre første kvadratene i mønsteret.




A. Hva blir arealet av det 5. kvadratet?

Ⓐ 100 $cm^2$

Ⓑ 64 $cm^2$

Ⓒ 25 $cm^2$

Ⓓ 10 $cm^2$

B. Hva blir arealet av det $n$-te kvadratet?

Svar: ______________

**19**

$a = 1 + x$ og $b = 1 - x$.

A. Hva er $a + b$?

Svar: ______________

B. Hva er $a - b$?

Svar: ______________

## Algebra

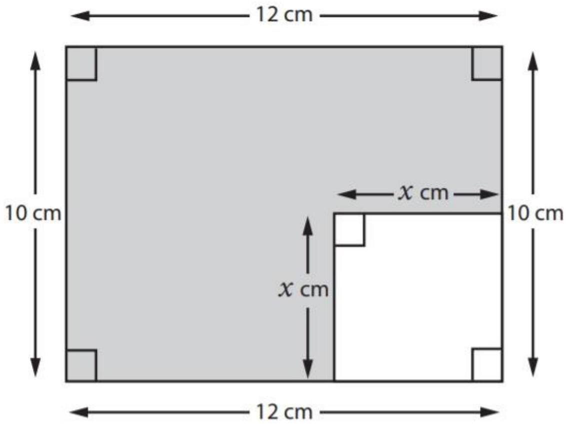
**5**

$$t = x - \frac{6{,}5}{1000}y$$

Formelen gir temperaturen $t$°C på et sted $y$ meter over havet når temperaturen ved havflaten er $x$°C. Hva er temperaturen på toppen av et 2000 m høyt fjell når temperaturen ved havflaten er 21°C?

Svar: ________________°C

**10**




Skriv et uttrykk (ved hjelp av $x$) for arealet av den **gråfargede** delen av figuren.

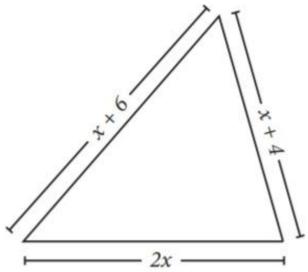
Svar: ________________ $cm^2$

**7**

Fullfør verditabellen for $y = 2x^2 - 3$.

| $x$ | $-2$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | | | |

**18**




Summen av sidene i denne trekanten er 30 cm.

A. Skriv en likning som gjør at du kan finne $x$.

Likning: ____________________________

B. Hvor lang er den LENGSTE siden i trekanten?

Svar: _______________ cm

## Vedlegg 5: Tilleggsoppgaver

Oppgave 19.1)

a = 1+1 og b = 1-1

Hva er a + b?

Svar:______________________

Hva er a – b?

Svar:______________________

Oppgave 19.2)

a = 1+2 og b = 1-2

Hva er a + b?

Svar:______________________

Hva er a – b?

Svar:______________________

Oppgave 5.1)

$$y = x - \frac{6,5}{1000}h$$

Formelen gir temperaturen y °C på et sted h meter over havet når temperaturen ved havflaten er x °C. Hva er temperaturen på toppen av et 2000 m høyt fjell når temperaturen ved havflaten er 21°C?

Svar:___________________________°C

Oppgave 7.1)

$$y = 2 * 1^2 - 3$$

Svar:___________________

Oppgave 7.2)

$$2 * (2^2) - 3 =$$

Svar:___________________