Institutt for lærerutdanning og pedagogikk - UIT

Matematiske forklaringstyper

Kjennetegn på matematiske forklaringstyper til 1. trinnselever med stort læringspotensial

—

Guro Mariann Moe

Masteroppgave i lærerutdanning 5.-10. trinn, mai 2019
LRU-3903 Matematikkdidaktikk

Sammendrag

Bakgrunnen for dette prosjektet er mine 11 år som lærer hvor jeg har opplevd vanskelighet med å identifisere elever med stort læringspotensial i matematikk. Mitt ønske er å kunne identifisere elever med stort læringspotensial så tidlig som mulig i skoleløpet for å tilrettelegge undervisning i henhold til deres behov og potensial. Problemstillingen i denne oppgaven er " *Hva kjennetegner de matematiske forklaringstypene til 1. trinnselever med stort læringspotensial i matematikk"*. Hensikten med prosjektet er å beskrive og kategorisere kjennetegn ved matematiske forklaringer gitt av 1. trinnselever med stort læringspotensial for å få en bedre forståelse av hva slags matematiske forklaringer disse elevene bruker og hvilke forskjeller og likheter det er mellom forklaringene.

Studien har en kvalitativ tilnærming hvor oppgavebasert intervju er brukt som metode. Med utgangspunkt i ti intervjuer, brukte jeg en rettet innholdsanalyse og forhåndsdefinerte koder basert på Levenson (2010) sine kategorier praktisk-baserte og matematikkbaserte forklaringer. Gjennom analysen har jeg utviklet to kategorier innenfor de praktisk-baserte forklaringene; (1) forklaringer som ikke inkluderer matematiske egenskaper og definisjoner og (2) matematiske forklaringer som inkluderer matematiske egenskaper og/eller definisjoner. Innenfor kategorien forklaringene som inkluderer matematiske egenskaper og/eller definisjoner har jeg videre utviklet tre underkategorier utfra hvorvidt språk eller hjelpemiddel er bærende element for meningsinnholdet i forklaringen. De tre kategoriene er (1) forklaringer der hjelpemiddel er bærende element, (2) forklaringer der språk og hjelpemiddel er bærende element og (3) forklaringer der språk er bærende element. Selv om denne undersøkelsen viste at elevene jeg intervjuet også ga matematikkbaserte forklaringer, viste ikke analysen like store nyanser i denne kategorien som i praktisk-baserte forklaringer og jeg har dermed ikke utviklet noen underkategorier i denne kategorien.

Kategoriene jeg har utviklet nyanserer og detaljerer Levenson (2010) sin todelte oppdeling av forklaringstyper ved å vise at de praktisk-baserte forklaringene kan inkludere og ikke inkludere matematiske egenskaper og definisjoner og at det i ulike grad er språk eller hjelpemiddel som er bærende element for det matematiske meningsinnholdet. Resultatene fra min undersøkelse viser at elevene med stort læringspotensial som deltok i min undersøkelse i stor grad tok i bruk matematiske egenskaper og definisjoner i sine forklaringer, men det var variasjon hvorvidt språk og/eller hjelpemiddel var bærende element i forklaringen.

Forord

En tre år lang videreutdanning er snart ved veis ende. Reisen har vært både slitsom og krevende med studier ved siden av full jobb og to små barn hjemme. Men det har også vært en enormt spennende og læringsrik periode som jeg ikke vil være foruten!

Jeg vil takke skoleledelsene som tillot meg å gjennomføre prosjekt på deres skoler og lærerne som hjalp meg å plukke ut elever.

Jeg vil gjerne rekke en stor takk min veileder Ove Gunnar Drageset for alle gode råd, grundige tilbakemeldinger og faglig støtte!

Jeg vil også takke familie og venner som har støttet meg og oppmuntret meg gjennom hele perioden. En spesiell takk til min mor som alltid har stilt opp, passet barn, hentet og levert når jeg har trengt tid til å jobbe med studiene. Og sist, men ikke minst, en stor takk til min gode, snille mann som har klart å holde ut og tatt ekstra tak gjennom alle perioder hvor jeg har hatt for mye å gjøre og som har støttet meg og heiet på meg gjennom hele perioden. Jeg hadde ikke klart dette uten deg!

Innholdsfortegnelse

1.0 Innledning

1.1 Bakgrunn for prosjektet

Jeg har jobbet som lærer i 11 år. Størstedelen av denne tiden har jeg hatt mitt virke i småskolen, hovedsakelig i 1. og 2. trinn. Jeg har alltid likt å undervise matematikk, og har vært så heldig å få undervise dette gjennom alle år som lærer. Jeg har alltid hatt fokus på og ønske om å tilpasse for alle elever, men det er ikke alltid like lett. Min erfaring er at krav og fokus "ovenfra" ofte handler om de elevene som ikke mestrer faget. Gjennom prøver og kartlegginger får lærere ofte beskjed om å finne ut hvilke elever som trenger ekstra hjelp og støtte i fagene, og det diskuteres mye rundt hva vi kan gjøre for å løfte de elevene som er på et lavt faglig nivå. Jeg opplever mer sjeldent at det diskuteres rundt de elevene som scorer høyt på prøver og kartlegginger, eller som viser stort potensial, verken om hva vi kan gjøre for å identifisere disse elevene eller hva vi kan gjøre for å gi dem mulighet til å utvikle seg i henhold til sitt potensiale.

Jeg synes det er veldig spennende å finne ut av hvordan elever resonnerer og forklarer i matematikkoppgaver da det kan gi meg informasjon jeg trenger for å veilede elevene videre slik at de skal utvikle sin matematiske kunnskap og forståelse. Jeg har ved flere anledninger gjennomført muntlig 1-til-1-kartlegging i matematikk på 1. trinnselever like etter at de har entret skoleverdenen. Jeg har gjennomført disse kartleggingene på samtlige elever på flere årskull, og det har gitt meg en unik mulighet til å se det store mangfoldet og variasjonen det er i elevenes matematikkunnskaper og forklaringer. Spesielt spennende er det når elever viser at de har større kunnskap og forståelse enn jevnaldrende. Jeg har flere ganger møtt elever som, sammenlignet med jevnaldrende, har en imponerende god tallforståelse og bruk av regnestrategier. Disse elevene kan forklare hvordan de har funnet fram til svar i en matematikkoppgave på måter som imponerer meg. De har ofte, iallfall alderen tatt i betraktning, et avansert resonnement, god forståelse for tall og relasjoner mellom aritmetiske operasjoner og kan bruke flere og til dels avanserte regnestrategier. Gjennom møte med flere elever i denne kategorien, har min nysgjerrighet vokst og mitt ønske om å identifisere og tilrettelegge for disse elevene har blitt større. I 2016 kom det en norsk offentlig utredning (NOU) av Jøsendal-utvalget som også tiltrakk seg min nysgjerrighet. Utredningen heter "Mer å hente – Bedre læring for elever med stort læringspotensial". Den viste at lærere trenger mer kunnskap om denne elevgruppen, om hvordan å identifisere disse elevene og hvordan å tilpasse undervisningen for dem, i tillegg til viktigheten av å identifisere disse elevene tidlig i skoleløpet.

Mye av elevenes matematiske kunnskap og forståelse kan man observere gjennom å lytte til elevens matematiske forklaringer. Å lytte til hvordan elever forklarer i matematikk kan gi lærere verdifull kunnskap om elevenes faglige nivå og kan dermed være med å bidra til bedre tilrettelegging for elevene. Esther Levenson (2010, 2013) og Levenson, Tirosh og Tsamir (2004, 2006, 2010) har gjennom flere prosjekter i Israel beskrevet matematiske forklaringer i grunnskolen. Denne teorien synes jeg er interessant og har fått meg til å se på elevers forklaringstyper på en ny måte. Jeg ønsker å finne ut av hvilke typer forklaringer norske 1. trinnselever med stort læringspotensial bruker. Jeg ønsker å ha fokus på de yngste elevene ettersom det er viktig å identifisere elever med stort læringspotensial tidlig i skoleløpet (NOU 2016:14). Forhåpentligvis kan dette være med på å gi kunnskap om identifisering av elever med stort læringspotensial og kanskje gi grunnlag til videre forskning om identifisering og tilrettelegging for disse elevene.

Jeg har søkt etter eksisterende forskning og teori rundt elever med stort læringspotensial og elevforklaringer i matematikk. Jøsendal-utvalget (NOU 2016:14), Idsøe (2014) og Skogen (2014) skriver alle om elever som har forutsetninger for et større faglig talent enn jevnaldrende, men ingen av dem går inn hvilke matematiske forklaringstyper disse elevene bruker. Både Kilpatrick (2001) og Niss (2002) definerer begge hva det vil si å inneha ferdighet og kompetanse i matematikk. De definerer ikke ulike elevtyper, eksempelvis elever med stort læringspotensial, men beskriver hva det betyr å ha matematisk kompetanse på generelt grunnlag og hvordan kompetanse kan vise seg og utvikle seg fra tidlig skolealder. Levenson (2010, 2013) og Levenson m.fl. (2004, 2006, 2010) har forsket på matematiske forklaringer som er typiske og passende i grunnskolen. I sin forskning viser de ikke til noen spesielle elevtyper, men ta for seg hele skoleklasser hvor man skal tro at mange elevtyper er representert. Jeg kan heller ikke finne at Levenson (2010) har forsket på de yngste elevene. Jeg finner ingen eksisterende forskning eller teori som omhandler elever med stort læringspotensial og deres matematiske forklaringer. Temaet jeg skal skrive om ser derfor ut til å ikke være dekket i forskningsfeltet og er derfor et spennende tema å forske på.

1.2 Formål og forskningsspørsmål

Gjennom mitt prosjekt ønsker jeg å sette fokus på 1. trinnselever med stort læringspotensial og undersøke om det finnes noen kjennetegn på disse elevenes matematiske forklaringer. Formålet med denne undersøkelsen er å beskrive og kategorisere kjennetegn ved matematiske forklaringer gitt av 1. trinnselever med stort læringspotensial. Jeg ønsker å gjøre dette for å få en bedre forståelse av hva slags forklaringer disse elevene bruker og hvilke forskjeller det finnes mellom forklaringene. I mitt ønske om å finne ut av hva som kjennetegner matematiske forklaringstyper gitt av 1. trinnselever med stort læringspotensial i matematikk har jeg valgt følgende forskningsspørsmål:

Hva kjennetegner de matematiske forklaringstypene til 1. trinnselever med stort læringspotensial i matematikk?

1.3 Oppgavens oppbygning

Oppgaven er inndelt slik at det i kapittel 2 kommer en presentasjon av det teoretiske grunnlaget for undersøkelsen. Her vil relevante begreper defineres, tidligere funn beskrives og det teoretiske rammeverket gjøres rede for. Deretter vil det i kapittel 3 komme en redegjørelse for de metodiske valgene som er tatt og beskrivelse av gjennomføring av datainnsamling og analyse. Her vil valgene av metode bli beskrevet og begrunnet. I kapittel 4 presenteres analysen av datamaterialet. Her vil beskrivelse og tolkning av dataene bli presentert. I kapittel 5 vil mine funn bli drøftet opp mot teori og problemstilling. Til sist vil det i kapittel 6 komme en oppsummering, konklusjon og avsluttende refleksjoner.

2.0 Teoretisk rammeverk

2.1 Elever med stort læringspotensial

I 2016 kom det en norsk offentlig utredning (NOU) som Jøsendal-utvalget hadde mandat til å lage. Utredningen heter "Mer å hente – Bedre læring for elever med stort læringspotensial". Bakgrunnen for utredningen var regjeringens ønske om en langsiktig og helhetlig satsing for elever som presterer på et høyt faglig nivå, elever med spesielle evner og talent og elever som har potensial til å nå et høyt faglig nivå. Utredningen viser at begrepsbruken rundt det som omfatter samme elevgruppe varierer. Begavelse, evner, talent og intelligens er begreper som i ulike variasjoner og kombinasjoner brukes for å beskrive samme elevgruppe. Jøsendal-utvalget har valgt å bruke begrepet "elever med stort læringspotensial". De mener alle elever har et læringspotensial, men noen lærer fortere og mer komplekst enn jevnaldrende og har dermed et stort læringspotensial. De definerer elever med stort læringspotensial som elever som har et stort potensial for læring på et eller flere faglige områder. Disse elevene er ikke nødvendigvis høytpresterende, men har et stort potensial til nå et høyt faglig nivå. De skiller mellom elever med stort læringspotensial og elever med ekstraordinært læringspotensial. Elever med ekstraordinært læringspotensial er elever med gode forutsetninger og spesielle evner og har ofte en IQ på 130 eller mer. De mener elever med stort læringspotensial utgjør 10-15% av elevpopulasjonen, mens elever med ekstraordinært læringspotensial utgjør mellom 2-5% av elevpopulasjonen. Begrepet elever med stort læringspotensial inkluderer både elever som presterer høyt, de som har potensiale til å gjøre det, de som har spesielle evner eller talent og elever med ekstraordinært læringspotensial (NOU 2016:14).

Idsøe (2014) bruker begrepet "elever med akademisk talent" og definerer dette som barn med sterke behov og potensial innenfor et eller flere akademiske fag og som kan transformere sitt potensial til talent dersom behovene blir identifisert og møtt. Ved at Idsøe (2014) definerer disse elevene som elever med potensial som kan utvikles til talent, kan man se en sammenheng med Jøsendal-utvalget (NOU 2016:14). Begge viser til at eleven ikke nødvendigvis har talent eller presterer på et høyt faglig nivå, men har potensial til å gjøre det. Idsøe (2014) tallfester ikke hvor stor andel denne gruppen elever utgjør av elevpopulasjonen, slik som Jøsendal-utvalget har gjort (NOU 2016:14).

Skogen og Idsøe (2016) bruker begrepet "evnerik" og definerer dette som barn med høyere kognitiv intelligens enn jevnaldrende, har en høy yteevne innenfor intellektuelle, kreative og/eller kunstneriske områder og som ofte gjør det spesielt bra innenfor bestemte fagområder.

De mener denne gruppen utgjør ca. 2-5% av populasjonen. Her kan man se at de har tallfestet andelen av denne gruppen likt som Jøsendal-utvalget (NOU 2016:14) har tallfestet andelen elever med eksepsjonelt stort læringspotensial. Skogen og Idsøe (2016) sier at disse elevene ofte gjør det bra, men påpeker ikke i sin definisjon at dette avhenger av at behov blir identifisert og møtt, noe Idsøe (2014) også påpeker ved at elevene kan transformere sitt potensial til talent dersom behovene blir identifisert og møtt.

Ifølge Jøsendal-utvalget (NOU 2016:14) er elever med stort læringspotensial en sammensatt gruppe elever med ulike personligheter og behov og er like forskjellige som andre elever. Allikevel kan det være flere kjennetegn på elever med stort læringspotensial. Disse elevene trives ofte i stimulerende og utfordrende læringsmiljø og de er ofte nysgjerrige. Mange har god hukommelse, lærer raskt og forstår begreper raskere enn jevnaldrende. Ofte har de en raskere språkutvikling og bruker et mer nyansert språk enn jevnaldrende. De elevene med ekstraordinært læringspotensial har de samme kjennetegnene, men er i tillegg ofte svært utholdende, har god konsentrasjon og er gode på problemløsning. De klarer i større grad å jobbe i den abstrakte verdenen og er ikke like avhengig av å starte med det kjente før det kan abstraheres sammenlignet med jevnaldrende.

Idsøe (2014) mener det kan være flere kjennetegn på elever med akademisk talent. Ofte er de nysgjerrige og stiller mange spørsmål. De er ofte kommet faglig forbi jevnaldrende og trenger kun få repetisjoner før de mestrer nye oppgaver. De klarer å tenke abstrakt, bearbeide informasjon og trekke slutninger på et høyere nivå enn jevnaldrende. Både Idsøe (2014) og Jøsendal-utvalget (NOU 2016:14) trekker fram hvordan disse elevene ofte er nysgjerrige. Jøsendal-utvalget (NOU 2016:14) beskriver at disse elevene lærer raskt og forstår begreper fortere, mens Idsøe (2014) beskriver at disse elevene trenger få repetisjoner før de mestrer nye oppgaver. Begge beskriver også hvordan disse elevene har kommet lengre i sin utvikling enn jevnaldrende. Idsøe (2014) nevner evnen til å tenke abstrakt noe Jøsendal-utvalget også nevner som kjennetegn for elever med eksepsjonelt stort læringspotensial (NOU 2016:14).

I følge Jøsendal-utvalget (NOU 2016:14) har ikke den norske skolen tilstrekkelig kunnskap om denne elevgruppen og opplæringen blir derfor ikke tilpasset godt nok. De mener grunnopplæringen ikke gir en undervisning som lar disse elevene utvikle seg i henhold til sitt potensial. Dette mener de kan få alvorlige konsekvenser og trekker fram både underprestasjon, skolefrafall, sosial stigmatisering, mobbing og feildiagnostisering. Ifølge

Skogen (2014) fører manglende tilpasset opplæring til at mange av disse elevene ikke utvikler seg slik at deres potensial utnyttes. Manglende tilpasset opplæring kan føre til at undervisningen kan oppleves som fryktelig kjedelig (Skogen 2014). Likt Jøsendal-utvalget (NOU 2016:14), mener også Skogen (2014) at konsekvensene av manglende tilpasset opplæring kan være underytelse og sosial stigmatisering. Videre nevner Skogen (2014) at konsekvensene også kan være dårlig motivasjon, lavt innlæringstempo, negativ oppfatning av skolen og følelsen av ikke å være akseptert.

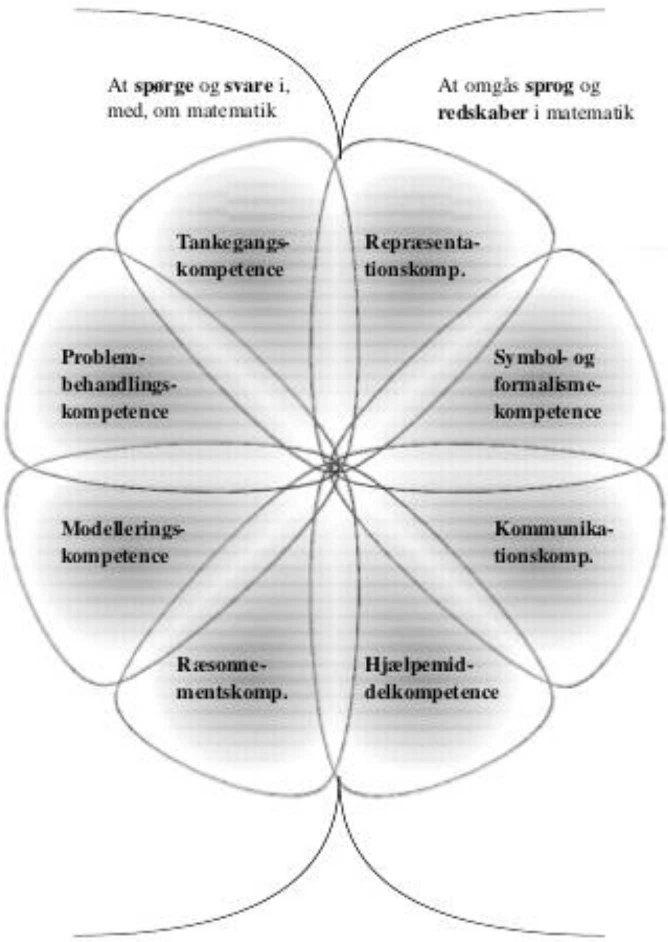
2.2 Matematisk kompetanse

Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) beskriver matematiske ferdigheter som fem tråder flettet sammen i hverandre; adaptiv resonering, strategisk anvendelse, konseptuell forståelse, produktiv disposisjon og prosedyreflyt.

Figur 2.1 The five strands of mathematical proficiency (Kilpatrick m.fl., 2001)

Adaptiv resonering handler om evnen til å tenke logisk om forholdet mellom matematiske begreper, situasjoner og konsepter. Et slikt resonnement handler om å reflektere og vurdere alternativer for å nå konklusjoner og inkluderer kunnskap om hvordan å begrunne og vurdere egne og andres konklusjoner. Det handler også om å vurdere hvorvidt en begrunnelse kan være et formelt eller uformelt bevis. Begrunnelse og bevis er et kjennetegn på formell matematikk, noe som ofte er forbeholdt eldre elever. Elever kan imidlertid begynne å lære og forklare sine matematiske ideer på et tidlig stadium i grunnskolen. Et matematisk resonnement kan strekke seg fra barns uformelle forklaringer og begrunnelser til matematikernes formelle bevis. De mener at små barn kan gjennomføre sofistikerte resonnement, så lenge de kan støtte seg på representasjoner. *Strategisk kompetanse* handler om evnen til å formulere, representere og løse matematiske problemer både symbolsk, verbalt og grafisk. Dette innebærer å kunne formulere et matematisk problem i møte med en situasjon og modellere denne. Det inkluderer også evnen til å lage en mental representasjon av problemet, kunne mestre ulike løsningsstrategier og kunne vurdere hvilken strategi som egner seg best til å løse det spesifikke problemet. *Konseptuell forståelse* handler om å ha en helhetlig og funksjonell forståelse av matematiske konsepter. Å ha konseptuell forståelse betyr å kjenne til mer enn isolerte fakta- og metodekunnskaper. Ferdigheten består av å ha forståelse for matematiske konsepter, begreper og operasjoner og i tillegg ha en forståelse for sammenhengen mellom disse. *Produktiv disposisjon* handler om holdninger til og engasjement for matematikk. Det inkluderer å se matematikk som noe nyttig, fornuftig og verdifull og å se seg selv som en som kan lære og utføre matematikk. For at en skal kunne utvikle seg i de andre trådene, må man tro at matematikk er fornuftig og at man ved egen innsats kan lære og forstå nye matematiske konsepter. *Prosedyreflyt* handler om kunnskap om prosedyrer og om når og hvordan man skal bruke dem. Det inkluderer evnen til å utføre prosedyrer fleksibelt, nøyaktig, effektivt og hensiktsmessig. Det handler om å kunne se likheter og forskjeller i regnemetoder- og strategier og å kunne bruke ulike strategier og metoder – både skriftlig, mentalt og med konkrete eller digitale hjelpemidler. Disse trådene er ikke uavhengige fra hverandre, men de representerer ulike aspekter av en kompleks helhet. Kilpatrick m.fl. (2001) poengterer at matematisk ferdighet ikke kan oppnås ved å fokusere enkeltvis på disse trådene, men det må fokuseres på alle trådene gjennom hele skoleløpet for at barn skal utvikle matematisk ferdighet.

Mens Kilpatrick m.fl. har delt matematiske ferdigheter i fem tråder, har Niss et al. (2002) definert matematisk kompetanse gjennom åtte ulike delkompetanser. De deler matematisk kompetanse i to hovedområder – å kunne spørre og svare i, med og om matematikk og å omgås språk og redskaper i matematikk. Hvert av hovedområdene er delt i fire ulike kompetanser og satt opp i følgende modell:



Figur 2.2 Visuell representasjon av de åtte matematiske kompetansene (Niss m.fl., 2002)

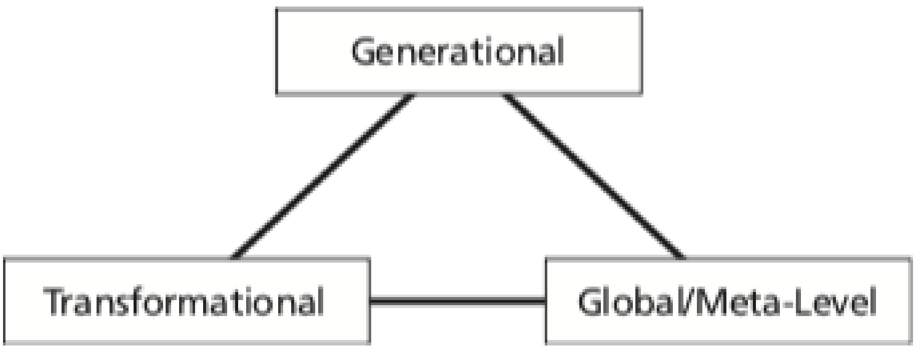
Niss m.fl. (2002) påpeker at alle de åtte kompetansene bidrar direkte eller indirekte til de to hovedområdene og må sees i sammenheng. Dette er likt med hvordan Kilpatrick m.fl. (2001) beskriver ferdighetstrådene som flettet i hverandre og må sees i sammenheng. *Tankegagnskompetanse* innebærer det å kunne karakterisere matematiske spørsmål og å kunne svare på disse. Videre omhandler tankegangskompetanse det å kjenne til begrepers begrensinger og rekkevidde og å kunne generalisere disse til å gjelde en større klasse objekter. Å kjenne begrepers begrensinger og rekkevidde og å kunne generalisere for å gjelde en større klasse objekter har likhetstrekk med hvordan Kilpatrick m.fl. (2001) beskriver at konseptuell forståelse handler om å ha en helhetlig og funksjonell forståelse av matematiske konsepter og å se sammenheng mellom begreper og objekter. Tankegangskompetansen tar derimot for seg det å kunne stille og svare på matematiske spørsmål, noe den konseptuelle forståelsen ikke diskuterer. *Problembehandlingskompetanse* handler om å kunne definere, formulere, avgrense og presisere forskjellige matematiske problemer og delvis omhandler denne kompetansen å kunne løse disse problemene og på ulike måter. Dette kan sees i sammenheng med Kilpatrick m.fl. (2001) sin beskrivelse av strategiske kompetanse ettersom de beskriver kompetansen som evnen til å formulere, representere og løse matematiske problemer. *Modelleringskompetansen* omhandler det å kunne bygge matematiske modeller til gitte situasjoner gjennom å strukturere, matematisere, behandle, validere, analysere og kommunisere. Denne kompetansen innebærer også å kunne analysere og bedømme holdbarhet til gitte matematiske modeller. Kilpatrick m.fl. (2001) nevner også å kunne modellere et problem i sin strategiske kompetanse. Niss m.fl. (2002) avser derimot mer plass for å definere modellering – både det å kunne bygge modeller og det å kunne bedømme og vurdere eksisterende modeller, noe Kilpatrick m.fl. (2001) ikke diskuterer. *Resonnementskompetansen* innebærer å kunne følge med og bedømme et matematisk resonnement og å kunne gjennomføre både formelle og uformelle resonnement. Det handler om å kunne bedømme holdbarheten til matematiske påstander og å kunne overbevise både seg selv og andre. Det inkluderer også å kunne forstå hva et matematisk bevis er og hvordan bevis skiller seg fra andre matematiske resonnementer. Niss m.fl. (2002) mener at et resonnement kan være både uformelle og formelle. De nevner også at resonnement på ikke trenger å føre til bevis og at yngre elever vil ofte ha et intuitivt, uformelt eller konkret resonnement. De beskriver denne kompetansen som den juridiske siden til problembehandlings- og modelleringskompetansen. Niss m.fl. (2002) nevner det å kunne følge med og bedømme et matematisk resonnement, noe Kilpatrick m.fl. (2001) også gjør i sin beskrivelse av adaptivt resonnement hvor det å begrunne og vurdere egne og andres konklusjoner er inkludert. Både resonnementskompetansen og adaptivt resonnement beskriver evnen til å kunne skille mellom et bevis og et annet matematisk resonnement eller begrunnelse, i tillegg til at begge nevner hvordan resonnement kan være forskjellig utfra barns alder. *Representasjonskompetansen* omhandler evnen til å forstå og bruke representasjoner av matematiske objekter både symbolsk, visuelt, muntlig og skriftlig. Det handler også om å forstå forbindelser mellom representasjonene, kunne velge hensiktsmessig mellom ulike representasjoner og kunne oversette mellom dem. Kilpatrick m.fl. (2001) har ikke en egen ferdighet som beskriver representasjonskompetanse slik Niss m.fl. (2002) har, men man kan se noen likheter innenfor to av Kilpatrick m.fl. sine ferdighetsområder. Strategisk kompetanse inkluderer evnen til å representere situasjoner matematisk (Kilpatrick m.fl. 2001), noe som kan sees i sammenheng med å forstå og bruke representasjoner av matematiske objekter (Nisse m.fl. 2002). I tillegg beskriver Kilpatrick m.fl. (2001) konseptuell forståelse som det å ha forståelse om forbindelse mellom konsepter, begreper og operasjoner. Dette kan sees i sammenheng med det å ha forståelse om forbindelse mellom representasjoner, som Niss m.fl. (2002) inkluderer i representasjonskompetansen. *Symbol- og formalismekompetanse* omhandler det å kunne avkode, oversette og bruke symbol- og formelspråk. Det handler om å kunne "spillereglene" for formelle matematiske systemer. Kilpatrick m.fl. (2001) beskriver prosedyreflyt som evnen til å utføre prosedyrer fleksibelt, nøyaktig, effektivt og hensiktsmessig. Dette kan sees i sammenheng med hvordan Niss m.fl. (2002) beskriver det å kunne avkode, oversette og bruke symbol- og formelspråk. *Kommunikasjonskompetanse* omhandler evnene til å uttrykke seg matematisk, både skriftlig, muntlig og visuelt. I tillegg omhandler det evnen til å sette seg inn i og tolke andres skriftlige, muntlige og visuelle utsagn. Kilpatrick m.fl. (2001) beskriver ikke en egen ferdighet som omhandler kommunikasjonskompetanse. Det kan diskuteres hvorvidt det å begrunne egne og andres konklusjoner (adaptivt resonnement) og det å kunne formulere, representere og løse matematiske problemer skriftlig, verbalt og grafisk (strategisk kompetanse) omhandler kommunikasjonskompetanse, men Kilpatrick m.fl. (2001) nevner ikke kommunikasjonskompetanse eksplisitt. *Hjelpemiddelkompetanse* omhandler det å ha kjennskap til og kunne bruke hjelpemidler på en hensiktsmessig måte. Det handler om å kunne vite om og forstå hjelpemidlenes muligheter og begrensinger i ulike situasjoner. Kilpatrick m.fl. (2001) beskriver ferdigheten prosedyreflyt blant annet som evnen til å bruke strategier og metoder med konkrete og digitale hjelpemidler. Dette kan sees i sammenheng med Niss m.fl. (2002) sin hjelpemiddelkompetanse. Men Niss m.fl. (2002) har avsatt mer plass for å beskrive hva det vil si å ha hjelpemiddelkompetanse enn det Kilpatrick m.fl. (2001) har gjort. Et område som Niss m.fl. (2002) derimot ikke nevner i sin kompetansemodell er holdninger og engasjement i og om matematikk, slik Kilpatrick m.fl. (2001) har definert disposisjon i sin ferdighetsmodell.

NCTM (2000) har definert ti standarder med hensikt å fokusere læreplanen mot de forventninger en har til elevene i skolen. Fem av disse er prosesstandarder som omhandler kompetanser som er nødvendig i matematikk. De fem resterende er innholdsstandarder som omhandler de ulike matematiske emnene som er viktige i grunnskolen. Uten at jeg går videre inn på disse standardene, viser dette at matematisk kompetanse går på tvers av matematiske emner. Hvert emne har sitt innhold som er unikt og elever må ha både emnespesifikk og fagspesifikk kompetanse for å ha en helhetlig kompetanse i faget. Man må derfor se ferdighetsmodellen til Kilpatrick m.fl. (2001) og kompetansemodellen til Niss m.fl. (2002) ikke bare som matematisk kompetanse, men også hvordan disse henger sammen med både den fagspesifikke og emnespesifikke kompetansen. Som nevnt tidligere har elever med stort læringspotensial et stort potensial for læring på et eller flere faglige områder og har kommet lengre i sin utvikling enn jevnaldrende (NOU 2016:14). Dersom en elev har et stort potensial i matematikk vil det innebære at eleven har en mulighet til å utvikle matematisk kompetanse raskere enn jevnaldrende, både innenfor de fagspesifikke og emnespesifikke områdene.

2.3 Tidlig algebra

Howe (2005) definerer algebra i to hovedområder. Det første hovedområdet er arbeid med variabler, spesielt aritmetikk med variabler. I tillegg havner arbeid med rasjonelle uttrykk i dette området. Dette innebærer blant annet å uttrykke konkrete situasjoner med likninger og å forenkle, løse og tolke manipulerte uttrykk og likninger. Det andre hovedområdet han definerer er den algebraiske strukturen innkapslet i aritmetikkens regler. Grunnlaget for algebraisk teknikk kan sees som de aritmetiske reglene satt sammen med prinsipper for å transformere likninger og at den algebraiske teknikk vil virke på de algebraiske uttrykkene nevnt i det første hovedområdet.

Kieran (1996) har utviklet en modell som deler algebraiske aktiviteter i skolen i tre kategorier; genererende, transformerende og global-/metanivå. Modellen har fått navn GTG-modellen.



Figur 2.3 GTG-modellen (Kieran, 1996)

I følge Kieran (1996) inkluderer *genererende aktiviteter* fortolkning av situasjoner gjennom likninger, uttrykk av generalitet av geometriske mønstre eller tallfølger og uttrykk av regler for tallegenskaper og -relasjoner. Den innebærer også arbeid med ukjente, variabler, likevekt og funksjoner. Dette kan sammenlignes med Howe (2005) sitt andre hovedområde i sin definisjon av algebra, ettersom han der beskriver hvordan algebraisk teknikk og aritmetiske regler settes sammen. Hos Kieran (1996) er dette uttrykt gjennom aktiviteter som fortolker situasjoner som innebærer arbeid med ukjente, variabler og likevekt. Kieran (1996) beskriver *transformerende aktiviteter* som de regnetekniske prosessene i algebra. Dette innebærer å løse likninger og ulikheter, forenkling av uttrykk, faktorisering og erstatte et uttrykk med et annet, erstatte numeriske verdier i uttrykk. I stor grad innebærer dette å endre den symbolske formen i et uttrykk eller en likning til et annet mens ekvivalensen opprettholdes. Dette er aktiviteter uten kontekst som skjer i den abstrakte matematiske verdenen. Dette kan sammenlignes med Howe (2005) sin definisjon av algebra i første hovedområde. Howe (2005) nevner det å forenkle, løse og tolke manipulerte uttrykk og likninger, mens Kieran (1996) nevner det å løse likninger og ulikheter og beskriver dette som arbeid med ekvivalens. En forskjell er at Kieran (1996) beskriver dette som abstrakt arbeid uten kontekst, mens Howe (2005) beskriver dette som å uttrykke konkrete situasjoner som uttrykkes abstrakt. Aktiviteter i *global-/metanivå* bruker algebra som et verktøy der det ikke nødvendigvis er eksklusivt for algebra. Dette omfatter arbeid med generaliserende mønster, leting etter relasjoner og strukturer, problemløsing, modellering, argumentasjon og bevisføring. Dette er aktiviteter som ikke trenger å bruke algebraisk notasjon, som for eksempel bokstavsymboler, men som kan utdypes for å inkludere algebraisk notasjon (Kieran 1996). Hun mener derfor det er ideelt som inngangsport til algebraisk tenkemåte i tidlig skoleforløp eller tidlig algebra. Hun påpeker også at disse aktivitetene kan betraktes som en forløper til de genererende og transformerende aktivitetene.

Kaput (2007) definerer algebra som tre tråder. Den første tråden omfatter generalisering av aritmetiske operasjoner. Her beskrives algebra som det å undersøke strukturer og systemer i beregninger og relasjoner. Dette inkluderer også arbeid med generalisering av bestemte tallegenskaper og -relasjoner. For eksempel gjennom å uttrykke regularitet på et 100-brett, eksempelvis arbeid med generalisering av og regularitet ved partall og oddetall. Aktiviteter kan betegnes algebraisk når man angir aritmetikkens regler eksplisitt og undersøker generalitetene - ikke når man kun bruker aritmetikkens regler for utregning. I både Howe (2005) og Kaput (2007) kan man se at algebra har en iboende aritmetisk karakter og at aritmetikk kan anses å ha en algebraisk karakter. I denne tråden kan man se noen sammenhenger med hvordan Kieran (1996) beskriver genererende aktiviteter. Både den første tråden og de genererende aktivitetene inkluderer både arbeid med generalitet og uttrykk av regler for tallegenskaper og -relasjoner. Denne tråden nevner ikke arbeid med ukjente, variabler, likevekt og funksjoner slik de genererende aktivitetene gjør. Den andre tråden til Kaput (2007) omfatter funksjoner, relasjoner og felles variasjon. Denne tråden innbefatter alt fra tidlig arbeid med mønsteraktiviteter, f. eks arbeid med figurtall og geometriske mønstre, til arbeid med regulariteter, sammenligning av uttrykk for et mønster og bestemmelse av funksjoners bestemte verdier. Denne tråden inkluderer også arbeid med tabeller og grafer. Denne tråden kan også sammenlignes med genererende aktiviteter. Både den andre tråden og genererende aktiviteter inkluderer arbeid med funksjoner. I tillegg nevner Kieran (1996) at i de genererende aktivitetene inngår arbeid med generalitet av geometriske mønstre og tallfølger. Kaput (2007) beskrive slike mønsteraktiviteter mer omgående ved at dette er aktiviteter som starter tidlig og utvikler seg til å bli arbeid med regulariteter og sammenligninger. Den tredje tråden til Kaput (2007) er modellering som algebraisk aktivitet. Dette innbefatter aritmetiske problemer som krever bruk av algebra for å kunne løses, ofte i form av en likning. Modellering inkluderer også det å generalisere og uttrykke mønstre og regulariteter i situasjoner. Denne tråden kan sees i sammenheng med Kieran (1996) sin beskrivelse av global/meta-nivå. Her nevner hun spesifikt modellering som aktivitet i algebra, likt det Kaput (2007) også gjør her. Kieran (1996) påpeker at aktiviteter på global/meta-nivå ikke trenger å bruke algebraisk notasjon. Kaput (2007) nevner at modellering ofte løses i form av en likning, men det er ikke nødvendig for at det skal være en algebraisk aktivitet.

Kaput (2007) beskriver hvordan algebra, som tidligere ble sett på som et kurs kun eliteelever ville kunne mestre, nå har fått et større fokus på hvordan det kan arbeides med allerede fra tidlig skolealder. Han mener de tre trådene i algebra skal strekke seg gjennom hele skoleløpet, der elevene gradvis kan utvikle seg og avansere sin algebraiske tenkemåte. Han mener også at algebra på dette nivået ikke nødvendigvis trenger å gi eksplisitte algebraiske generaliseringer og at uttrykk av algebraiske ideer og generaliseringer kan uttrykkes gjennom barnas naturlige språk. I likhet med Kaput (2007) påpeker også Carraher, Schliemann, Brizuela og Earnest (2006) at algebra ikke er forbeholdt kun eldre elever. De mener at generalisering av aritmetikk, aritmetiske operasjoner som funksjoner og algebraisk notasjon kan være tilgjengelig og overkommelig for yngre elever. Arbeid med algebra på et tidlig stadium i skoleløpet kalles tidlig algebra. Carraher, Schliemann og Schwartz (2007) diskuterer hvordan tidlig algebra kan kreve noe annerledes tilnærming enn tradisjonell algebra. For det første så trekker de fram at konvensjonell algebraisk notasjon ikke er den eneste måten å uttrykke algebraiske ideer og relasjoner. De mener små barn kan arbeide med å uttrykke algebraiske ideer og relasjoner gjennom barnas eget språk og representasjonssystem. Carraher m.fl. (2007) mener at gjennom tidlig algebra vil matematisk notasjon gradvis innføres og arbeid med algebra skjer tett knyttet til eksisterende emner i matematikk – størsteparten innenfor aritmetikk. Dette kan sees på som en tilnærming til Kieran (1996) sine genererende aktiviteter og Kaput (2007) sin første tråd, hvor begge inkluderer uttrykk av regler for tallegenskaper og

-relasjoner. Slik Carraher m.fl. (2007) beskriver at yngre elever uttrykke algebraiske ideer uten algebraisk notasjon, støttes også av Kaput (2007), som påpeker at uttrykk av algebraiske ideer og generaliseringer kan bli gitt ut fra barnas naturlige språk. For det andre mener Carraher m.fl. (2007) at arbeid i kontekst og med fysiske mengder er ønskelig i tidlig arbeid med algebra. De begrunner viktigheten med å la yngre elever møte algebra gjennom kontekstuelle problemer med at disse elevene ikke trekker konklusjoner gjennom logiske og syntaktiske regler. Yngre elever trekker konklusjoner gjennom intuisjon, tro og fakta. Med andre ord vil yngre elever sjeldent trekke konklusjoner gjennom abstrakte matematiske notasjoner, men gjennom konkrete problemer, fakta og kunnskap. Denne tilnærmingen kan sees i sammenheng med Kieran (1996) sin global/meta-nivå. Hun nevner ikke spesifikt at aktiviteter på dette nivået settes i kontekst, men hun avviser det heller ikke. Både mønster, relasjoner og strukturer, problemløsning, modellering, og argumentasjon, som Kieran (1996) lister opp, kan alle bli satt i kontekst og bli gitt fysiske mengder slik Carraher m.fl. (2007) mener er en tilnærming til algebra. Kaput (2007) sin tredje tråd inneholder modellering. Modellering handler om å ta i bruk matematikk for å beskrive virkeligheten. Dette kan også sees i sammenheng med Carraher m.fl. (2007) sin tilnærming gjennom kontekst og fysiske mengder. For det tredje mener Carraher m.fl. (2007) at funksjoner kan gi mulighet til å gi tidlige matematiske emner og aktiviteter en algebraisk karakter. De beskriver hvordan tidlig algebra kan arbeides med innenfor aritmetiske områder i matematikken og mener at alt arbeid med generaliserende aritmetikk også kan innbefatte arbeid med funksjoner, slik som arbeid med talloperasjoner, forhold og proporsjon, brøk og formler. Slik Carraher m.fl. (2007) beskriver at arbeid med funksjoner kan inngå i aritmetikk, kan sees i sammenheng med Kaput (2007) sin første tråd, som omfatter arbeid med aritmetikk, og hans andre tråd, som omfatter arbeid med funksjoner. Dette kan også sees som en tilnærming til Kieran (1996) sin genererende aktivitet, ettersom det også her er aktiviteter hvor arbeid med variabler og funksjoner er sentralt.

2.3.1 Algebraisk resonnement

Blanton og Kaput (2005) definerer algebraisk resonnement som en prosess hvor elevene generaliserer matematiske ideer, etablerer generaliseringene gjennom argumentasjon og uttrykker generaliseringene. Generaliseringens uttrykk vil avhenge av elevens alder og erfaring og kan uttrykkes i ord eller symboler og vil utvikles til å bli stadig mer formell etterhvert som elevens alder og erfaring utvikler seg. I mitt kapittel om matematisk kompetanse har jeg beskrevet hvordan både Niss m.fl. (2002) og Kilpatrick (2001) uttrykker at matematiske resonnement utvikler seg i henhold til elevens alder. Det kan sammenlignes med hvordan Blanton og Kaput (2005) beskriver at generaliseringens uttrykk avhenger av elevens alder, men de legger til at algebraisk resonnement inkluderer generalisering av matematiske ideer.

Carpenter og Levi (2000) mener det er to viktige elementer i algebraisk resonnering. Det ene er å gjøre generaliseringer og det andre er å bruke symboler for å representere ideer og å representere og løse problemer. De mener barn først løser problemer ved å bruke konkreter, for så å utvikle seg til å abstrahere strategiene til at de ikke trenger konkreter for å løse problemer. Beregningsmetodene barna bruker vil da være abstraksjoner av konkretene de opprinnelig brukte til å løse problemene. Dette henger sammen med Blanton og Kaput (2005) sin definisjon på algebraisk resonnement. Generalisering og bruk av symboler kommer fram hos begge, i tillegg til at begge diskuterer hvordan symbolbruk avanseres ved alder og erfaringsnivå.

Kaput (1999) har definert algebraisk resonnering som å uttrykke og formalisere generaliseringer gjennom aritmetikk, tallmønster, funksjonelle relasjoner, modellering og matematiske systemer abstrahert fra regning og relasjoner. Kaput (2007) mener det er to kjerneaspekter i algebraisk resonnering, som henger tett sammen med de tre trådene beskrevet i mitt kapittel om tidlig algebra. Det første kjerneaspektet (A) er generalisering og uttrykk av generaliseringer i stadig mer systematiske og konvensjonelle symbolsystemer. Dette aspektet inkluderer å kjenne til symboler, sammenhengen mellom dem og tillatte kombinasjoner av symboler. Det andre kjerneaspektet (B) er syntaktisk styrte handlinger med symboler innenfor organiserte symbolsystemer. Dette aspektet inkluderer regelbaserte handlinger på symboler. Kaput (2007) mener kjerneaspekt B utvikler seg etter kjerneaspekt (A) ettersom man må kjenne symbolenes egenskaper og relasjoner før man kan drive regelbaserte handlinger på symboler. Kjennskap til symbolene arbeides det med i kjerneaspekt A og vil derfor være naturlig som inngangsport for algebraisk resonnering. Dette kan sees i sammenheng med hvordan Blanton og Kaput (2005) omtaler hvordan generaliseringens uttrykk vil utvikle seg ut ifra alder og erfaring.

2.4 Matematiske forklaringer

Yackel (2001) mener en matematisk forklaring er noe som blir gitt av lærere eller elever for å tydeliggjøre aspekter av deres matematiske tenkning som de tror kanskje er lite synlig for andre. Yackel (2001) sin definisjon av matematisk forklaring blir utdypet av Levenson, Tirosh og Tsamir (2006) der de påpeker at ulike typer forklaringer gis og aksepteres i henhold til hvem som uttrykker forklaringen, hvem forklaringen er rettet til og i hvilke situasjoner og omstendigheter forklaringen er gitt.

Tsamir og Scheffer (2000) mener matematiske forklaringer kan være enten konkrete eller formelle forklaringer. De formelle forklaringene baserer seg utelukkende på matematiske definisjoner og teoremer. De konkrete forklaringene bruker virkelige sammenhenger, opplevelser og situasjoner for å gi mening til matematiske uttrykk. Raman (2002) mener matematiske forklaringer kan være formelle eller uformelle. Hun beskriver de formelle forklaringene som strenge argumenter som baserer seg på matematiske definisjoner. Hun legger også til at disse forklaringene ofte baserer seg på symbolsk representasjon. Her kan man se likhet med Tsamir og Scheffer (2000), som også mener formelle forklaringer baserer seg på matematiske definisjoner. Raman (2002) tar derimot med at disse forklaringene at disse forklaringene ofte baserer seg på symbols representasjon, noe Tsamir og Scheffer (2000) ikke nevner. Videre beskriver Raman (2002) de uformelle forklaringene som forklaringer basert på virkelige erfaringer og uformell kunnskap. Hun mener de uformelle forklaringene kan bestå av gjetninger, innskytelser, intuisjoner og uformelle argumenter. Dette kan sammenlignes med Tsamir og Scheffer (2000) sin definisjon av konkrete forklaringer, da disse også inkluderer forklaringer som baseres på virkelige situasjoner eller erfaringer.

Levenson (2010) diskuterer matematiske forklaringer og uttrykker et behov for å klassifisere matematiske forklaringer gitt av eller til grunnskoleelever. Regelbaserte forklaringer, som er formelle og strenge forklaringer er aktuelt på videregående- og universitetsnivå. I grunnskolen blir det også gitt og produsert matematiske forklaringer, selv om disse ikke nødvendigvis er strenge og regelbaserte. Hun mente det manglet termer som beskriver forklaringer som er basert på matematiske forestillinger uten å bære preg av strenghet eller formalitet. Dette støttes også av Kilpatrick (2001), som i sin beskrivelse av adaptivt resonnement (som beskrevet i mitt kapittel om matematisk kompetanse) mener at begrunnelse og bevis er et kjennetegn for formell matematikk, noe som ofte er forbeholdt eldre elever, men elever kan imidlertid begynne å lære å forklare sine matematiske ideer på et tidlig stadium i grunnskolen. Levenson (2010) deler matematiske forklaringer som er passende for grunnskolen opp i to kategorier; matematikkbaserte forklaringer og praktisk-baserte forklaringer.

De matematikkbaserte forklaringene er forklaringer som er basert på matematiske definisjoner eller tidligere lærte matematiske egenskaper. Disse forklaringene bruker ofte et matematisk resonnement. Forklaringer av denne typen utelukker all bruk av kontekst, konkreter og visuelle hjelpemidler og baserer seg utelukkende på matematiske egenskaper og definisjoner. Med andre ord er det snakk om abstrakte forklaringer uten virkelighetsnær kontekst. Disse forklaringene er ikke nødvendigvis strenge og formelle, men de baserer seg allikevel på matematiske definisjoner og egenskaper. Mens de formelle og reglebaserte forklaringene egner seg på videregående og universitet, mener Levenson (2010) at matematikkbaserte forklaringer egner i grunnskolen. Både Tsamir og Scheffe (2000) og Raman (2002) sine definisjoner på formelle forklaringer baserer seg utelukkende på matematiske definisjoner, noe Levenson (2010) også bruker i sin definisjon av matematikkbaserte forklaringer. Raman (2002) påpeker i tillegg at formelle forklaringer inkluderer strenge argumenter og baseres ofte på symbolsk representasjon. Levenson (2010) påpeker at matematikkbaserte forklaringer ikke behøver å være strenge og hun nevner ikke at disse forklaringene baserer seg på symbolsk representasjon. Med andre ord kan man se på en matematikkbasert forklaring som en litt mindre streng variant av en formell forklaring.

Praktisk-baserte forklaringer er alle forklaringer som ikke utelukkende baserer seg på matematiske definisjoner og/eller egenskaper. Det kan være forklaringer som er satt i virkelighetsnær kontekst eller forklaringer som bruker visuelle hjelpemidler eller konkreter som støtte for å gi mening til matematiske uttrykk. Levenson m.fl. (2010) påpeker ikke utelukker matematiske elementer i praktisk-baserte forklaringer, men at de ikke baserer seg helt og holdent på matematiske egenskaper og definisjoner slik som matematikkbaserte forklaringer gjør. Levenson m.fl. (2006) nevner at disse forklaringene også inkluderer uformelle forklaringer, uten at de går videre inn på hvordan de definerer uformelle forklaringer. Tsamir og Scheffer (2000) påpeker at konkrete forklaringer bruker virkelige situasjoner for å gi mening til matematiske uttrykk, noe Levenson (2010) også uttrykker ved å inkludere forklaringer satt i kontekst innunder praktisk-baserte forklaringer. Raman (2002) påpeker at uformelle forklaringer er basert på virkelige erfaringer og uformell kunnskap. Dette er likt definisjonen av praktisk-baserte forklaringer, som inkluderer bruk av virkelige sammenhenger for å gi mening til matematiske uttrykk og at de ikke utelukkende baserer seg på matematiske definisjoner og egenskaper. Men Levenson inkluderer også bruk av visuelle hjelpemidler og konkreter, noe Tsamir og Scheffer (2000) og Raman (2002) ikke uttrykker eksplisitt.

Levenson (2010) mener at de matematikkbaserte forklaringene og praktisk-baserte forklaringene ikke danner i dikotomi, men mer et kontinuum av forklaringer som elever utvikler gjennom årene. Levenson m.fl. (2006) beskriver hvordan de ønsker at matematikkbaserte forklaringer skal bli innført tidlig for å forberede elevene på den mer formelle matematikken de blir å møte på et senere stadium. Elever starter ofte med praktisk-baserte forklaringer som har støtte hverdagslige situasjoner og konkreter. Deretter utvikler det seg til å bli semi-strukturerte forklaringer med generaliserte, visuelle argumenter. Det fortsetter med matematikkbaserte forklaringer før det utvikler seg til å bli formelle forklaringer. Men elever trenger hjelp, støtte og veiledning for å utvikle sine forklaringer til å bli mer formelle. Både Carpenter og Levi (2000) og Kaput (1999) beskriver hvordan algebraisk resonnement avanseres ved alder og kunnskapsnivå. Et resonnement kan ligge inni hodet på eleven, men skal eleven uttrykke og begrunne sitt resonnement vil det komme ut som en forklaring. Man kan derfor knytte sammen hvordan algebraisk resonnementet utvikler seg med hvordan Levenson m.fl. (2006) beskriver hvordan forklaringer utvikler seg og derfor vil forklaringer kunne uttrykke nivået på elevens resonnement. Ettersom både Kilpatrick (2001) og Niss (2002) beskriver at resonnement henger sammen med alle andre deler av matematiske kompetanser og ferdigheter, vil også elevens matematiske evner kunne komme til uttrykk gjennom dens matematiske forklaringer. Dette vil kunne uttrykke seg gjennom elevens bruk av matematiske egenskaper og definisjoner, virkelighetsnære situasjoner, hjelpemidler eller uformell kunnskap i sine forklaringer.

3.0 Metode

3.1 Metode for datainnsamling

For å svare på mitt forskningsspørsmål, "*Hva kjennetegner de matematiske forklaringstypene til 1. trinnselever med stort læringspotensial i matematikk*", trenger jeg en forskningsmetode som kan gi meg mulighet til å samle inn et datamateriale som inneholder et mangfold av matematiske forklaringer gitt av 1. trinnselever med stort læringspotensial, slik at jeg kan finne ut av om det finnes noen kjennetegn på disse. Det går et hovedskille i valg av metode mellom kvantitativ og kvalitativ tilnærming. Ifølge Halvorsen (2008) er det største skillet mellom kvantitativ og kvalitativ tilnærming hvorvidt informasjonen man får kan uttrykkes i tall eller tekst. Dataene er kvantitative dersom de er målbare i form av tall eller mengder og presenteres gjerne gjennom opptelling/statistikk. Når det gjelder informasjonsmengden vil en kvantitativ tilnærming kunne gi få opplysninger om mange undersøkelsesenheter. Kleven (2007) påpeker at man i kvantitativ tilnærming forsøker å objektivere prosessen gjennom å holde en viss distanse mellom forsker og forsøkspersoner. Forskeren distanserer seg fra forsøkspersonene og er ikke selv deltakende i selve datainnsamlingen. Halvorsen (2008) mener at kvalitative data ofte er data som ikke er tallfestbare og kommer gjerne i form av tekst (skriftlig eller muntlig). En kvalitativ tilnærming vil kunne gi mye informasjon om få undersøkelsesenheter. Denne informasjonen er ofte preget av forståelse og interesse for det særegne til en liten gruppe undersøkelsesenhet. Kleven (2007) påpeker at forskeren har en mer subjektiv tilnærming og skaper nærhet til forsøkspersoner da forskeren selv deltar i datainnsamlingen. Cohen, Manion og Morrison (2018) sier at kvalitativ forskning kan gi en grundig og detaljert forståelse av handlinger, tale, atferd og ikke-observerbare fenomener. De mener også at formålet med kvalitativ forskning er å beskrive, forklare og rapportere. Halvorsen (2008) påpeker at verken kvalitativ eller kvantitativ metode er overlegen hverandre, men at ulike undersøkelsesformål vil være avgjørende for hvilken metode som egner seg best. Ettersom jeg skal undersøke om det finnes kjennetegn på matematiske forklaringstyper gitt av 1. trinnselever med stort læringspotensial, trenger jeg et datamateriale som inneholder et mangfold av matematiske forklaringer gitt av denne gruppen elever. Dette trenger jeg for å kunne beskrive og forklare likheter og ulikheter mellom forklaringstypene. Jeg må derfor ut i skolen og komme nærkontakt med elever med stort læringspotensial for at jeg skal få tilgang til de matematiske forklaringer disse elevene gir. Ettersom en kvalitativ metode kan gi mye informasjon om få undersøkelsesenheter og gir mulighet til nærkontakt med feltet, vil dette være en metode som egner seg godt til min undersøkelse. Gjennom å bruke en kvalitativ metode i mitt prosjekt vil jeg ha mulighet til å få tilgang til elevers matematiske forklaringer og jeg kan få mulighet til finne og beskrive likheter og ulikheter mellom forklaringstyper gitt av 1. trinnselever med stort læringspotensial.

For å best kunne svare på forskningsspørsmålet mitt, trenger jeg en innsamlingsmetode for å samle inn et datamateriale som inneholder et mangfold av matematiske forklaringer gitt av 1. trinnselever med stort læringspotensial. Jeg trenger derfor en setting som gir elever mulighet til å forklare seg aktivt i matematiske oppgaver. Observasjon er en ofte brukt metode i kvalitativ metode (Halvorsen (2016); Postholm (2005); Stake (2003)) og er en innsamlingsmetode jeg har vurdert for å svare på min problemstilling. Ifølge Halvorsen (2016) innebærer observasjon at man bruker sanser på en gjennomtenkt og disiplinert måte og gjør at man kan få informasjon om menneskers handlinger og tale og gir mulighet til å observere mennesker i sine naturlige omgivelser. Cohen m.fl. (2018) påpeker at via observasjon kan man systematisk få informasjon om mennesker, adferd og settinger. Metoden kan gi forskeren førstehåndsinformasjon om og i situasjonen. Ved å bruke observasjon i min undersøkelse, ville jeg fått tak i matematiske forklaringer gitt i sitt naturlige miljø. At elever kommer med matematiske forklaringer forekommer bl.a. når klassen har klasseromsdiskusjon. Ettersom jeg skal undersøke en spesiell elevtype som utgjør en relativt liten andel av elevpopulasjonen, vil mange av elevforklaringene som kommer i klasserommet ikke være aktuell for min undersøkelse. Det kan derfor bli veldig tidkrevende å få et tilstrekkelig stort datamateriale gjennom observasjon. Tidsrammen for min masteroppgave er begrenset. Jeg trenger derfor en metode som kan gi meg et større datamateriale enn det observasjon kan innenfor den tidsrammen jeg har.

Intervju er en mye brukt metode i kvalitativ forskning (Halvorsen (2016); Postholm (2005); Stake (2003)). Kvale og Brinkmann (2017) beskriver intervjuet utfra det engelske ordet "interview". Intervjuet er en interaksjon mellom mennesker. Kunnskapen blir konstruert mellom (*inter*) menneskene gjennom personenes synspunkter (*view*) (Kvale og Brinkmann 2017). Ifølge Cohen m.fl. (2018) er intervju et fleksibelt redskap som gjør det mulig å bruke flere sanser (verbalt, ikke-verbalt, syn, hørsel). Videre definerer Cohen m.fl. (2018) forskningsintervjuet som en samtale mellom mennesker som er designet for å skaffe seg forskningsdata gjennom verbal interaksjon. Intervjuer kan gjøre det mulig å gå i dybden og finne ut av hvordan personer oppfatter ideer og hvordan de skaper sammenheng mellom ideer. Han poengterer at intervju kan være en god metode når formålet er å samle inn data for å forstå eller vurdere en person sine tanker om gitte tema. Ifølge Bjørndal (2017) vil intervju kunne gi mulighet til å få øye på detaljer og mulighet til å kunne forstå den intervjuedes perspektiver. Intervju vil gi meg mulighet til å komme i interaksjon med elever med stort læringspotensial. Gjennom intervju vil jeg kunne stille elever direkte spørsmål og observere og lytte til elevene mens de arbeider med og forklarer matematiske oppgaver. Det vil kunne gi meg mulighet til å samle inn et mangfold av matematiske forklaringer på relativt kort tid og kan derfor bidra til å gi meg et tilstrekkelig stort datamateriale innenfor den tidsrammen jeg har. Intervju vil også gi meg muligheten til å stille samme spørsmål til flere elever, slik at de kan komme med matematiske forklaringer innenfor de samme matematiske oppgavene. Dette trenger jeg for å lettere kunne sammenligne dataene i etterkant. Intervju vil også gi meg mulighet til å stille spørsmål for å få oppklaring dersom det er noe som er uklart eller for å bekrefte at jeg har forstått forklaringene deres rett. Jeg har derfor valgt å bruke intervju som innsamlingsmetode for å svare på mitt forskningsspørsmål. Cohen m.fl. (2018) påpeker at intervjuer gjennomføres i konstruerte og ofte nøye planlagte settinger. Gjennom intervju vil jeg derfor ikke få tak i elevers forklaringer i deres naturlige setting, slik jeg kunne gjort gjennom observasjon, men gjennom en situasjon som er unaturlig for eleven. Dette er noe jeg må ta i betraktning ved valg av intervjustudie, og vil komme tilbake til dette i kapittel om validitet.

3.1.1 Oppgavebasert intervju

Et oppgavebasert intervju er i følge Goldin (1997) et intervju hvor man har et subjekt (den som skal løse oppgavene), en intervjuer og en eller flere oppgaver. Subjektets interaksjon er ikke bare med intervjueren, men også med oppgavene som blir gitt i intervjuet. I denne typen intervju er det er mulig å fokusere oppmerksomheten på prosessene elevene gjennomgår i matematiske oppgaver. Det kan bli brukt for å få tak i, trekke slutninger om og beskrive en elev sin problemløsning, kognitive prosesser og kunnskapsstrukturer. Et oppgavebasert intervju kan gi god innsikt i hvordan elevene resonnerer i oppgaver og hvordan de forklarer sin tankegang, ettersom elevene forklarer hva de gjør underveis i matematikkoppgavene. For at jeg skal kunne finne ut om det finnes noen kjennetegn på forklaringstyper til 1. trinnselever med stort læringspotensial, må jeg ha en intervjuform hvor elever får arbeide med matematiske oppgaver, der forklaringene elevene gir er i fokus. Ettersom fokuset i et oppgavebasert intervju også ligger på oppgavene som blir gitt i intervjuet, kan et slikt intervju gi meg mulighet til å ha fokus på de matematiske forklaringene elevene gir i intervjuet. Jeg har derfor valgt å bruke et oppgavebasert intervju.

Bjørndal (2017) påpeker at risikoen ved intervju er at den som intervjuer påvirker den som blir intervjuet. Grad av påvirkning kan minimeres ved å velge en strukturert intervjuform. Et strukturert intervju med åpne spørsmål og svar kan gjøre at intervjuerens påvirkning minimeres. Et slikt intervju vil også kunne gi mulighet til å sammenligne svar fra ulike personer. Et oppgavebasert intervju kan være strukturert med bruk av samme oppgaver og spørsmål i hvert intervju (Goldin 1997). Jeg har derfor valgt å bruke et strukturert oppgavebasert intervju med faste hovedspørsmål og ferdig oppsatte tilleggsspørsmål og hint. Dette gjør at oppgavene og spørsmålene i de ulike intervjuene blir så like som mulig, noe som vil lette sammenligning av elevforklaringer i etterkant.

Goldin (1997) har satt fem prinsipper for utforming av oppgavebaserte intervjuer; mottakelighet, verdifull representasjonsstruktur, fri problemløsing, tydelige kriterier og interaksjoner med læringsmiljøet. Å ha oppgaver som er mottakelige betyr at intervjuoppgavene bør inneholde matematiske oppgaver som passer med kunnskapen til den som blir intervjuet. Verdifull representasjonsstruktur innebærer at oppgavene burde være i en meningsfull struktur som kan representeres visuelt, imaginært, symbolsk og gi mulighet til å koble disse sammen. Fri problemløsing innebærer å la eleven arbeide og utforske med oppgaven på egenhånd, uten at den som intervjuer nevneverdig påvirker eleven sine svar. Å ha tydelige kriterier betyr at tema og spørsmål i intervjuene bør være så tydelig som mulig og strukturerte spørsmål er viktig for å øke repliserbarhet og generaliserbarhet i intervjuene. Interaksjon med læringsmiljøet innebærer den som løser oppgaver skal bli gitt flere representasjonsmuligheter som passer med læringsmiljøet og elevens indre representasjonssystem. Disse fem prinsippene jeg har lagt til grunn i utforming av intervjuguide, noe jeg vil komme tilbake til i kapittel om valg av oppgaver og utforming av intervjuguide.

3.1.2 Størrelse på utvalg

Jeg trenger et datamateriale som gir meg svar på om det finnes kjennetegn på forklaringstyper til 1. trinnselever med stort læringspotensial. En utfordring til å få tak i et tilstrekkelig datamateriale er tiden jeg har til rådighet. Det er begrensning på hvor mange intervjuer jeg kan gjennomføre innenfor den gitte tidsrammen. En annen utfordring er å få tak i elever som tilfaller den elevtypen jeg ønsker for min undersøkelse – elever på stort læringspotensial. En tredje utfordring, med de to utfordringene jeg allerede har nevnt tatt i betraktning, er å få nok datamateriale til at min undersøkelse kan bli ansett som gyldig utfra et forskningsperspektiv.

Baker og Edwards (2012) har fått flere erfarne forskere til å svare på hvor mange intervjuer som er tilstrekkelig i en kvalitativ undersøkelse. Flere av disse forskerne svarte at det ikke er mulig å gi et eksakt tall, men at det avhenger av flere faktorer. Les Back sier i at det ikke er et spørsmål om hvor mye data, men hvordan intervjudataen knytter seg til det analytiske rammeverket. Jennifer Mason sier at det er kvaliteten på dataene som er avgjørende for hvor mange intervjuer man trenger. Hun sier at i en kvalitativ studie er det ofte bedre å gjøre et mindre antall intervjuer for å kunne gå i dybden på hvert intervju. Patricia A. Adler og Peter Adler sier at et lite antall intervjuer kan være veldig verdifullt og anbefaler en plass mellom 6 og 12 intervjuer.

Guest, Bunce og Johnson (2006) gjennomførte en undersøkelse for å finne ut av hvor mange intervjuer man trenger for å oppnå teoretisk metning. De beskriver at teoretisk metning skjer når alle de viktigste variasjonene i fenomenet er identifisert og ny informasjon gir lite eller ingen endring i kodingen. I deres undersøkelse fant de ut at 73% av kodene var indentifisert etter de første 6 intervjuene og 97% av kodene var identifiserte etter 12 intervjuer.

Tatt i betraktning hva erfarne forskere anbefaler og studien om hvor mange intervjuer som trengs for å oppnå metning, vil 8-12 intervjuer kunne gi tilstrekkelig datamateriale for å svare på mitt forskningsspørsmål. Som nevnt tidligere er det gjort lite forskning innenfor området jeg undersøker. Da kan det også være på sin plass å undersøke et såpass lite antall for å få innsikt i tematikken jeg undersøker.

3.2 Gjennomføring av datainnsamling

3.2.1 Valg av skole og forskningsdeltakere

Jeg har gjennomført intervjuer på 3 ulike barneskoler. Jeg hadde ingen kriterier for hvilken type barneskole jeg ville ha utenom at de stiller seg positiv til at jeg gjennomfører datainnsamling. Utfra min problemstilling er det 1. trinnselever med stort læringspotensial jeg ønsker å undersøke, så fra hvilken type barneskole jeg henter forskningsdeltakere fra er ikke en viktig faktor. Ettersom andelen elever med stort læringspotensial er ca. 10-15% av elevpopulasjonen (NOU 2016:14), er det sannsynlig at det vil være elever i denne kategorien i stort sett alle klasser. Jeg har vært i kontakt med totalt 5 barneskoler, hvor 3 stilte seg positive til min undersøkelse.

Utvalg av elever var det i første omgang lærere som måtte gjøre. Jeg informerte lærerne om hvilken elevtype jeg ønsket og hva jeg la i begrepet "elever med stort læringspotensial". Lærerne måtte ut fra sin egen kunnskap, velge elever de mente har stort læringspotensial. Totalt ble 17 elever valgt ut av lærerne. At lærere skulle velge ut elever med holdepunkt i deres kunnskap om elevens faglige ståsted, ga meg en viss usikkerhet hvorvidt elevene som ble valgt ut var elever med stort læringspotensial. For å sikre dette, gjennomførte jeg en muntlig 1-til-1-kartlegging i forkant av intervjuene, slik at jeg kunne få bedre innsikt i elevenes tallkunnskap- og forståelse. Kartleggingen jeg brukte (se vedlegg 1) tar utgangspunkt i kartleggingen "Alle teller" nivå 1, som er en muntlig kartlegging som tester elevenes talloppfatning og tallforståelse. Jeg har flere ganger vært med på å kartlegge samtlige 1. trinnselever i flere årskull der jeg jobber. I dette kartleggingsarbeidet har jeg brukt "Alle teller". Gjennom tiden har jeg, i samarbeid med kollegaer, utviklet flere tilleggsspørsmål. Hensikten til tilleggsspørsmålene er å ikke bare finne ut av hvor begrensingene til elevene ligger, men også finne ut av hvor langt kunnskapen til eleven "strekker" seg. Gjennom å kartlegge elevene jeg skulle undersøke, fikk jeg mulighet til å få innsikt i elevenes talloppfatning og tallforståelse. Jeg brukte kunnskap som jeg har opparbeidet gjennom kartleggingsarbeid i egen jobb til å velge ut de elevene jeg mente hadde en større og mer kompleks kunnskap enn jevnaldrende. Kartleggingene som ble gjennomført vil ikke bli brukt som resultater i mitt prosjekt, men kun for å se om elevene som var valgt ut hadde en større faglig kunnskap enn normalt for alderen. Etter å ha gjennomført kartleggingene, sto jeg igjen med 13 elever som jeg mente havnet innenfor kategorien elever med stort læringspotensial. Dette var elever som kunne telle godt, både framover og bakover fra vilkårlig tall og kunne telle på enere, toere, femmere og tiere. De hadde alle mye automatisert kunnskap innenfor den lille addisjonstabellen og til dels i den lille subtraksjonstabellen. Der kunnskapen ikke var automatisert innenfor addisjon og subtraksjon, tok de i bruk varierte og gode regnestrategier– ofte fra automatisert kunnskap (f. eks. at de visste at 5+5 er 10, derfor må 5+4 bli 9 siden det er en mindre) eller kunnskap om addisjon og subtraksjon som motsatte regneoperasjoner (f. eks. 9-5 blir 4, fordi 4+5 blir 9).

3.2.2 Valg av oppgaver og utforming av intervjuguide

I og med at jeg har valgt å undersøke så unge elever, må det matematiske temaet være av den grad at elevene kan mestre det. Ideen bak oppgavene jeg har valgt ligger innunder tidlig algebra og oppgavene omhandler egenskaper, definisjoner og generalisering av partall og oddetall. Som nevnt i mitt kapittel om oppgavebasert intervju, er intervjuguiden bygd på Goldin (1997) sine fem prinsipper om utarbeidelse av intervjuguide til oppgavebasert intervju. Partall og oddetall er begreper som kommer tidlig i skoleløpet og mange barn kjenner til disse begrepene fra tidlig alder. Jeg visste at det var en mulighet for at noen av elevene jeg skulle intervjue ikke hadde kjennskap til eller husket begrepene partall og oddetall. Derfor la jeg til rette en mulighet til å skape forståelse av begrepene i begynnelsen av intervjuene. Dette utyper jeg mer når jeg beskriver oppgavene nedenfor. Jeg har tenkt gjennom hvorvidt oppgavene hadde en struktur tilpasset alderen til elevene og som ga elevene mulighet til å representere løsninger på sitt nivå. Jeg forsøkte å lage åpne spørsmål og oppgaver slik at elevene fikk løse oppgavene fritt. Jeg lagde en strukturert intervjuguide med faste hovedspørsmål. Deretter tenkte jeg gjennom hva mulige elevforklaringer kunne bli, hva som kunne være vanskelig for elevene å forklare og hva de eventuelt ville trenge hjelp med. Utfra disse refleksjonene lagde jeg oppfølgningspørsmål jeg kunne stille for å få eleven til å forklare bedre og førte opp hint jeg kunne gi for å hjelpe elevene. Jeg tenkte også gjennom hva som kunne være viktig å ha med på intervjuene, slik at elevene kunne bruke representasjoner som passet best for seg. I henhold til elevens unge alder, hadde jeg med konkreter de kunne bruke i sitt arbeid med oppgavene.

Intervjueguiden (se vedlegg 2) er delt i fire deler/spørsmålsområder: (1) Forståelse av begrepene partall og oddetall, (2) forklaring på hvorfor spesifikke tall er partall eller oddetall, (3) mønster og regler for partall og oddetall på 100-brettet og (4) undersøkelse på hvorfor summen av to oddetall blir til et partall. Den første delen i intervjuguiden omhandler forståelsen av begrepene partall og oddetall. Hensikten med denne delen var todelt. For det første ville jeg finne ut av om elevene visste hva partall og oddetall var og hva de eventuelt la i begrepene. For det andre ga det en mulighet til å la eleven skape en forståelse om partall og oddetall gjennom å snakke om begrepene. Den andre delen i intervjuguiden omhandler forklaring på hvorfor et tall er et partall eller oddetall. I denne delen fikk elevene gitte tall de skulle finne ut om og forklare hvorfor tallet var et partall eller oddetall. I tillegg fikk elevene komme med egne tall de mente var partall eller oddetall og forklare hvorfor de mente det. Den tredje delen i intervjuguiden omhandler generalisering av partall og oddetall på et 100-brett. Hensikten med denne delen var å gi eleven mulighet til å oppdage og forklare mønster på 100-brettet og lage generaliseringer om hvordan man kan definere et tall som partall eller oddetall ved å se sifferet på enerplassen. Den fjerde delen av intervjuguiden omhandler hvorfor summen av to oddetall blir til et partall. Hensikten med denne delen var å la eleven oppdage at oddetall + oddetall = partall, se om han/hun klarte forklare hvorfor det blir slik.

3.2.3 Gjennomføring av intervju

Cohen m.fl. (2018) påpeker at det kan være gunstig å gjennomføre gruppeintervju av barn for å skape en så naturlig og trygg setting som mulig. Jeg valgte, til tross for anbefaling, å gjennomføre individuelle intervju. Min vurdering var at gruppeintervju kunne skape situasjoner hvor noen elever tok stor plass, mens andre elever ikke ville ha kommet noe særlig til ordet. Gjennom å gjennomføre individuelle intervju fikk jeg mulighet til å få fram forklaringer hos den enkelte eleven, uten påvirkning fra medelev. Når man skal intervjue barn er det ifølge Cohen m.fl. (2018) viktig å gjøre barnet fortrolig med den som intervjuer og situasjonen rundt intervjuet. Det jeg gjorde for å gjøre elevene fortrolige med intervjusituasjonen var å arbeide for å raskt skape en god relasjon med eleven. Som nevnt gjennomførte jeg en kartlegging av alle elevene i forkant av intervjuet. Denne tiden brukte jeg også til å skape gode relasjoner gjennom blant annet å la elevene snakke om ting de interesserte seg for og tulle litt sammen med dem. Da jeg kom til skolen for å gjennomføre intervjuene, var elevene allerede kjent med hvem jeg var, noe som kan ha gjort at intervjusituasjonen tryggere for elevene. Intervjuene ble gjennomført i grupperom som eleven var kjent med, slik at rommet skulle føles trygt for eleven.

Kvale og Brinkmann (2017) nevner at man kan registrere intervjuer for dokumentasjon og analyse gjennom lydopptak, videoopptak, notatskriving eller bruk av hukommelsen. Jeg ønsket å kunne konsentrere meg om eleven og intervjuets gang og derfor ønsket jeg ikke å måtte fokusere på å notere gjennom hele intervjuet. Jeg ville derfor dokumentere intervjuene gjennom opptak. Cohen m.fl. (2018) påpeker barn gjerne kan bruke non-verbale svar så vel som verbale svar i en intervjusituasjon. Jeg vurderte det derfor som viktig å filme intervjuene for å sikre at jeg fikk samlet inn både verbale og non-verbale data. På den måten ble gestikuleringer, manipulasjon av konkreter, kroppsspråk og lignende registrert og kunne analyseres i etterkant.

Cohen m.fl. (2018) påpeker også at barn fortere blir distrahert og det er begrenset hvor lang tid et barn klarer å konsentrere seg. Derfor burde ikke intervjuene vare mer enn ca. 15 minutter. Intervjuene jeg gjennomførte varte i ca. 15-20 minutter. Lengden på intervjuene gjorde at elevene stort sett klarte å holde seg konsentrert om de matematiske oppgavene, men noen akseptable avsporinger ble det i enkelte intervju.

3.3 Metode for analyse av data

3.3.1 Kvalitativ innholdsanalyse

Postholm (2005) påpeker at analyse i kvalitative intervjuer starter allerede når første intervjuet er i gang. Underveis i intervjuene gjør forskeren seg refleksjoner som er verdt å skrive ned til bruk i analyse i etterkant av intervjuene. Hun beskriver datainnsamling og dataanalyse som dynamiske prosesser som skjer underveis gjennom hele intervjuperioden. Etter at datamaterialet har blitt samlet inn kommer datanalysen enda mer i fokus, hvor det innsamlede datamaterialet skal gjennomgås, behandles og analyseres.

Hsieh og Shannon (2005) definerer kvalitativ innholdsanalyse som en metode hvor det er en subjektiv tolkning av innhold i tekstdata. Denne tolkningen skjer gjennom en systematisk prosess hvor koder og kategorisering av tema og mønster blir analysert. Videre mener Hsieh og Shannon (2005) at den kvalitative innholdsanalysen brukes for å analysere tekstdata og fokuset ligger på språkets egenskaper som kommunikasjon, hvor det fokuseres på innholdet eller den kontekstuelle betydningen av teksten. Tekst kan være i verbal, skriftlig eller elektronisk form og kan ha kommet fra ulike kilder, for eksempel som transkripsjoner av intervjuer. Målet med innholdsanalyse er å gi kunnskap og forståelse av fenomenet som blir undersøkt.

En rettet innholdsanalyse er i følge Hsieh og Shannon (2005) en metode som legger eksisterende forskning eller teori til grunn i analysen, hvor målet er å validere eller utvide et teoretisk rammeverk eller teori. Å legge eksiterende forskning eller teori til grunn kan være med på å bidra til å bestemme den innledende kodingen og kan derfor kalles en deduktiv metode (Hsieh og Shannon, 2005). En forsker kan bruke disse kodene til å analysere sitt materiale, for deretter å identifisere og analysere koder i underkategorier av eksisterende kode. Nye identifiserte underkategorier kan bidra til å berike eller forlenge den eksisterende forskningen eller teorien.

3.3.2 Analysens gang

Som nevnt tidligere, filmet jeg intervjuene slike at jeg skulle kunne fokusere så mye som mulig på eleven og intervjuets gang. Likevel hadde jeg tilgjengelig penn og papir, sånn at jeg kunne skrive ned refleksjoner jeg fikk underveis i intervjuene. Disse notatene ble tatt med videre i analyseprosessen.

Jeg transkriberte intervjuene så tidlig som mulig etter gjennomført intervju, for å ha både intervjuet og refleksjoner jeg hadde gjort underveis friskt i minne mens jeg transkriberte. Jeg la videoer inn i og transkriberte i Nvivo. Fordelen med å bruke Nvivo var at jeg i etterkant lett kunne gå inn og se spesifikke elevforklaringer på nytt ved et par enkle tastetrykk. I transkriberingen skrev jeg ned alt som ble sagt. I tillegg skrev jeg hva elevene gjorde med eventuelle hjelpemidler, kroppsspråk (f. eks. risting eller nikking med hodet, peking, skuldertrekning, fingertelling) og pauser. Etter transkribering så jeg gjennom videoopptak og leste transkriberingen for å sikre at jeg hadde fått med alt. Jeg skrev også ned refleksjoner jeg fikk underveis i transkriberingen, da dette kunne komme til nytte senere i analyseprosessen. Etter endt transkribering skrev jeg ut transkripsjonene og begynte å markere elevforklaringer jeg fant. Totalt fant jeg 128 forklaringer. I analysen fant jeg ut at Levenson (2010, 2013) sin teori om matematikkbaserte og praktisk-baserte forklaringer var mulig å kjenne igjen. Jeg gikk derfor videre i analysen med denne teorien og brukte kategoriene hennes som forhåndsdefinerte kategorier i analysen. Jeg gikk gjennom og kategoriserte elevforklaringer i matematikkbaserte eller praktisk-baserte forklaringer. Etter første kategorisering endte jeg opp med 37 matematikkbaserte forklaringer og 91 praktisk-baserte forklaringer. Neste steget var å se nærmere på forklaringene som var kodet i de forhåndsdefinerte kategoriene. I de praktisk-baserte forklaringene så jeg mange nyanser, spesielt handlet det om hvorvidt forklaringen baserte seg på matematiske egenskaper og definisjoner og i hvilken grad språk eller hjelpemiddel ble brukt for å uttrykke den matematiske meningen i forklaringene. Jeg så det derfor som hensiktsmessig å sortere forklaringene først etter om de baserte seg på matematiske egenskaper og definisjoner og deretter hvorvidt det var språket, hjelpemiddel eller en kombinasjon av disse som var avgjørende for uttrykket av meningsinnholdet. Jeg valgte å kalle det som var avgjørende for meningsinnholdet for bærende element. Hvordan jeg har analysert elevforklaringene vil jeg utdype, beskrive og begrunne i kapittel 4, som følges opp med et drøfte-kapittel hvor jeg drøfter de ulike kategoriene jeg har identifisert.

3.4 Metodekritikk

Cohen m.fl. (2018) skriver at kvaliteten av forskningen kan vurderes gjennom validitet og reliabilitet. Det er mange trusler mot validiteten og reliabiliteten og truslene vil aldri kunne fjernes helt. For å dempe effekten av disse truslene, kan forskeren ha fokus på studiens validitet og reliabilitet gjennom hele prosessen.

3.4.1 Validitet

Cohen m.fl. (2018) definerer validitet som gyldigheten til en studie og resultater som presenteres, hvor blant annet troverdighet og gjennomsiktighet er viktige elementer. Videre skiller han mellom indre og ytre validitet. Indre validitet handler om hvorvidt resultatene man har fått henger sammen med datamaterialet, altså hvorvidt resultatene kan ansees som gyldige. I kvalitative intervjustudier er forskeren instrument i forskningen (Cohen m.fl., 2018) og jeg som intervjuer har med mine egne erfaringer og subjektive holdninger som har vært med å påvirke studien. Min subjektivitet har påvirket måten jeg har stilt spørsmål til elever og dermed også påvirket svarene elevene har gitt. Før jeg startet med intervjuene, gjennomførte jeg flere testintervju med mine elever, mine egne barn og mine barns venner, ne som bidro til justering av intervjuguide og at jeg gjorde meg refleksjoner om meg som intervjuer. Etter gjennomførelse av de tre første intervjuene oppdaget jeg at jeg ledet elevene mye under intervjuene. Jeg valgte derfor å ikke bruke disse tre intervjuene i min analyse, men brukte disse for å reflektere over hva jeg kunne gjøre for å forbedre meg selv som intervjuer. Ifølge Goldin (1997) vil gyldigheten svekkes dersom utformingen av oppgavebaserte intervjuer er tilfeldig - at variabler som kan kontrolleres gjenstår ukontrollert. Jeg har derfor prøvd å tenke gjennom ulike faktorer som kunne påvirke intervjuene, alt fra lokalisering av intervjuet, relasjoner med elevene, varighet på intervjuene og meg som intervjuer. Selv om jeg har prøvd å skape en så trygg situasjon som mulig for elevene, er intervjusituasjonen en unaturlig situasjon for elevene. Dette må jeg ta i betraktning at kan være faktor som har påvirket mitt datamateriale.

Ifølge Cohen m.fl. (21018) handler ytre validitet om hvorvidt resultatene kan generaliseres. Han presiserer at generaliserbarhet i kvalitativ metode er tolket som generaliserbarhet til identifiserte, spesifikke settinger og subjekter i motsetning til en universell generaliserbarhet som man kan oppnå i en kvantitativ undersøkelse. Thagaard (2018) mener validitet handler om å stille spørsmål om de tolkningene man har kommet fram til er gyldig i forhold til den virkeligheten som er studert. Ytre validitet i min undersøkelse handler om troverdighet knyttet til intervjuene og hvorvidt tolkningen av elevforklaringene er logiske. For å øke validiteten i denne, valgte jeg derfor å kode datamaterialet mitt to ganger for å se om kodingen jeg gjorde stemte overens med hverandre. I tillegg leste jeg gjennom det ferdigkodede materialet flere ganger. Funnene jeg har i min undersøkelse gjelder elevene jeg har intervjuet og kan derfor ikke generaliseres til å gjelde alle 1. trinnselever med stort læringspotensial. Men det er mulig at man vil kunne se like tendenser dersom man undersøker en annen gruppe 1. trinnselever med stort læringspotensial.

3.4.2 Reliabilitet

Goldin (1997) påpeker at reliabilitet inkluderer hvorvidt uavhengige observatører vil støtte de konklusjonene som er nådd. Cohen m.fl. (2018) skriver at reliabilitet omhandler studiens troverdighet og repliserbarhet. Han påpeker at i en kvalitativ undersøkelse vil data være sosialt situert, kontekstrelatert og kontekstavhengig. Ettersom dataene i en kvalitativ intervjustudie er sosialt situert, vil det kunne være vanskelige å etterprøve disse da man aldri vil kunne skape en helt lik situasjon/kontekst på nytt. Reliabiliteten til denne studien må derfor vurderes utfra det som er gjort. En metode for å styrke reliabiliteten til en studie er å gjøre forskningsprosessen transparent for leseren (Cohen m.fl. 2018). Jeg har forsøkt å styrke reliabiliteten i min studie ved å la leseren få innblikk i valgene som er tatt og det som er gjort.

I metodedelen har jeg diskutert hva som er gjort, hvorfor jeg har tatt de valgene jeg har tatt og hvilke konsekvenser det har fått for studiet. I analysekapitelet har jeg redegjort for mine funn og beskrevet hvordan datamaterialet har blitt analysert. Reliabilitet er en viktig del av forskningsarbeidet og jeg prøver å være så tydelig og ærlig som mulig om hvordan undersøkelsen er gjennomført og hvordan datamaterialet har blitt analysert. På bakgrunn av mine beskrivelser, vil det være opp til leseren å vurdere hvorvidt det som legges fram er pålitelig.

3.5 Etiske betraktninger

Å gjøre betraktninger av etiske problemstillinger er en del av hele forskningsprosessen. Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) gir generelle krav og nasjonale retningslinjer for forskningsetikk og forskere er forpliktet til å følge forskningsetiske normer. Forskeren skal gi tilstrekkelig informasjon til deltakere om formål med prosjektet, hvem som får tilgang til informasjonen, hva resultatene skal brukes til og hvilke konsekvenser det gir å delta i prosjektet. I tillegg må forskeren informere om og innhente fritt samtykke fra de som deltar i forskningen (NESH 2016). I følge Thagaard (2018) er det spesielt tre etiske hensyn som forskeren har ansvar for å opprettholde. Disse tre er informert og fritt samtykke, konfidensialitet og konsekvenser av å delta i forskningsprosjektet. I tillegg er det viktig at deltakerne blir anonymiserte. Forskningsdeltakerne og hvilke skoler disse kommer fra er anonymiserte i alt skriftlig materiale, slik at ingen informasjon kan lede tilbake til dem. I mitt prosjekt er det barn som er forskningsdeltakere. Derfor trengte jeg skriftlig samtykke fra foresatte for at barna kunne delta. De foresatte fikk samtykkeerklæring og informasjonsskriv (se vedlegg 3) med opplysninger om mitt prosjekt, hva det ville innebære for deres barn å delta, hvordan data av deres barn vil bli behandlet og sikring av anonymitet. De fikk også informasjon om at det er frivillig å delta og at det ikke vil være noen negative konsekvenser ved å ikke delta eller ønske å trekke seg. Denne informasjonen fikk også elevene muntlig fra meg, enn i et mer barnevennlig språk, da jeg møtte dem på skolen. Informasjonsbrev, samtykkeskjema og behandling av data er meldt inn og blitt godkjent av NSD sammen med søknad om å oppbevare og behandle personopplysninger (se vedlegg 4)

Det ble gitt skriftlig samtykke fra foresatte til samtlige av de 17 elevene som var valgt ut av lærerne. Selv om foreldrene hadde gitt samtykke, var det viktig at barna også fritt fikk bestemme om de ville delta i studien. En av elevene som var valgt ut ville ikke være med å snakke med meg da jeg var på skolen for å kartlegge elevene, og denne eleven sto selvsagt fritt til å bestemme dette selv.

Ettersom det er barn som er forskningsdeltakere, er det ifølge NESH (2016) flere etiske hensyn som er viktig å forholde seg til. Det må være en forutsetning at deltakelse gir ubetydelig risiko og belastning. Intervjuene ble gjennomført i skoletiden og elevene ble tatt ut fra undervisning. Intervjuenes lengde var tilpasset elevenes alder (ca. 15-20 minutter pr intervju). På grunn av intervjuets lengde og at de arbeidet med matematiske oppgaver under intervjuet, anser jeg konsekvensene for å bli tatt ut fra undervisning som minimale. Under intervjuene var jeg bevisst elevens lave alder og tillot både små avbrekk og avstikkere for at eleven ikke skulle føle intervjuet som en belastning. Jeg var også påpasselig med å ikke presse eleven og avsluttet oppgaver dersom eleven ikke fikk til.

4.0 Analyse

I dette kapitlet vil jeg vise hvordan jeg har gjennomført min analyse av de elevforklaringene jeg har samlet inn. Jeg har lagt Levenson (2020) sin definisjon av praktisk-baserte og matematikkbaserte forklaringer til grunn i min analyse. Kapitlet er delt opp i praktisk-baserte forklaringer som inkluderer matematiske egenskaper og/eller definisjoner, praktisk-baserte forklaringer som ikke inkluderer matematiske egenskaper og definisjoner og matematikkbaserte forklaringer.

4.1 Praktisk-baserte forklaringer som ikke inkluderer matematiske egenskaper og definisjoner

En elev skulle forklare hvorfor 68 er et partall og gjorde det på følgende måte:

> **L:** Enn hva med 68? Tror du det er et partall eller et oddetall?
> **Elev 3:** Partall
> **L:** Hvorfor er det et partall?
> **Elev 3:** Det er fordi jeg husker det. Jeg har god hukommelse.

I denne forklaringen begrunner eleven at 68 er et partall fordi han husker at det er det og følger opp med å forklare at han har god hukommelse. I denne muntlige forklaringen kommer det ikke fram noen matematiske egenskaper eller definisjoner. Man kan jo anta at eleven innehar denne kunnskapen ettersom han kan definere 68 som et partall. Men forklaringen gir ingen uttrykk, hverken gjennom språk eller hjelpemidler, som innehar matematiske egenskaper eller definisjoner. Raman (2002) påpeker at uformelle forklaringer kan bestå av gjetninger, innskytelser, intuisjoner og uformelle argumenter. Denne forklaringen består av et uformelt argument og kan derfor sies å være en uformell forklaring. Ettersom Levenson (2010) definerer uformelle forklaringer som praktisk-baserte forklaringer, vil denne forklaringen være praktisk-basert.

En elev skulle forklare hvorfor summen av to oddetall (3+5) blir til et partall og gjorde det på følgende måte:

> **L:** 3 og 5. Når vi plusser dem sammen, altså det er oddetall og det er oddetall...
> **Elev 8:** Det blir et partall.
> **L:** Det var nå rart at to oddetall blir et partall. Hvordan.. Hva som skjer for noe da?
> **Elev 8:** Jammen, hvorfor blir... Jeg vet hva som... Hvorfor blir dette i lag til et partall? Partall og partall blir partall. Men oddetall og oddetall blir partall.
> **L:** Ja, er ikke det litt rart? Hvorfor blir det sånn?
> **Elev 8:** Fordi det er sånn i regninga det er.

Her ser det ut til at eleven har oppdaget at summen av to partall blir partall og at summen av to oddetall også blir til partall. Eleven forklarer dette muntlig ved å si at sånn regninga er.

Forklaringen inneholder ingen matematiske egenskaper eller definisjoner. Den tar heller ikke i bruk noen hjelpemidler. Forklaringen referer kun til at regningen er sånn, uten noen videre begrunnelse hvor matematiske egenskaper eller definisjoner brukes og er derfor en forklaring som ikke inkluderer matematiske egenskaper eller definisjoner. Også denne eleven tar i bruk uformelt argument, noe Raman (2002) definerer som en uformell forklaring. Levenson (2010) kategoriserer alle uformelle forklaringer innunder praktisk-basert, dermed er denne forklaringen en praktisk-basert forklaring.

Etter å ha funnet ut summen av to oddetall (3+5) tilsammen ble et partall, skulle eleven forklare hvorfor det ble slik:

> **L:** Men hvorfor kan to oddetall tilsammen bli til et partall?
> **Elev 1:** Fordi at vi plusset det også blir det sånn.

Denne eleven forklarer at summen av to oddetall blir til et partall fordi man plusser det. Han kommer ikke med noen videre forklaring og bruker uttrykker ikke matematiske egenskaper eller definisjoner gjennom hverken språk eller hjelpemidler, derfor er dette en forklaring som ikke inkluderer matematiske egenskaper eller definisjoner. Denne forklaringen bruker også uformelt argument og kan defineres som en uformell forklaring i henhold til Raman (2002) sin definisjon. Derfor blir den også definert som en praktisk-basert forklaring, ettersom alle uformelle forklaringer er praktisk-baserte (Levenson, 2010)

4.2 Praktisk-baserte forklaringer som inkluderer matematiske egenskaper og/eller definisjoner

4.2.1 Forklaringer der hjelpemidler er bærende element

En elev ville forklare hvorfor 7 ikke er et partall og hva som må til for at det skulle ha vært et partall.

> **Elev 1:** *(Finner fram syv tellebrikker og deler i gruppe på 3 og 4)* Sånn! Hvis jeg bare gjør sånn her *(tar bort en brikke fra firermengden slik at det er tre brikker i hver mengde)*.
> **L:** Ja, hvis det hadde vært seks, så kunne den deles.
> **Elev 1:** Eller gjort sånn her *(legger tilbake den ene brikken og legger en til i treer-mengden så det er fire brikker i hver mengde)*

Her teller eleven opp syv tellebrikker og deler det i gruppe på tre og fire. Han gir ingen annen muntlig forklaring til at tallet er et oddetall enn "Sånn!". Eleven ser ut til å tenke i hele tall uten rest. Selv om det ikke er noen muntlig forklaring som støtter opp om det eleven gjør, klarer han å formidle en forklaring at tallet er et oddetall ettersom det er et tall som ikke kan deles likt i to like mengder. Videre viser eleven at det kunne ha blitt delt i likemengder dersom man fjernet en brikke i den største mengden slik at mengdene ble like store mens han forklarer at "Hvis jeg bare gjør sånn her" og fjerner en tellebrikke fra mengden. Deretter viste han at det også kunne bli to like store mengder dersom man hadde lagt til en brikke i den minste mengden, hvor den muntlige forklaringen var "Eller gjort sånn her". Den muntlige delen av denne forklaringen vil ikke gi mening med mindre man vet hva eleven gjør med tellebrikkene. Det er det han gjør med tellebrikkene uttrykker forklaringen, kun støttet opp med muntlig uttrykk som henviser til det han gjør med tellebikkene. Ettersom det er manipulasjon av konkreter som uttrykker meningsinnholdet forklaringen, er det hjelpemidler som er det bærende element i forklaringen. Her er konkreter benyttet i stor grad og i henhold til Levenson (2010) sin definisjon, hvor bruk av hjelpemidler i en forklaring er praktisk-basert, havner denne i denne kategorien.

En annen elev som skulle forklare hvorfor syv er et oddetall gjorde det på følgende måte:

> **L:** syv er det et partall eller et oddetall?
> **Elev 5:** Oddetall
> **L:** Hvorfor det?
> **Elev 5:** (*Tar syv tellebrikker*) Fordi, hvis man skal dele det så blir det litt sånn her for eksempel (*tar tre på ene siden og fire på andre*)

Her finner eleven fram syv tellebrikker og deler det opp i tre og fire. Han støtter det opp med en muntlig forklaring om at hvis man deler det så blir det slik. Denne eleven ser også ut til å tenke i hele tall uten rest og referer til en definisjon av oddetall som tall som ikke kan deles likt på to. Han bruker også egenskaper til tallet syv ved å vise til at tallet kan deles i mengde på fire og tre. Sammenlignet med forrige forklaring, tar denne forklaringen i bruk noe mer verbalt språk ved å si "om man deler det". Allikevel så skiller denne forklaringen seg fra forklaringer jeg har beskrevet som forklaringer hvor både språk og hjelpemidler er bærende element. Dette fordi den muntlige forklaringen ikke sier noe om at det ikke kan deles likt eller presisering av hvor store mengdene det blir når man forsøker å dele tallet opp i to. Den muntlige delen av forklaringen vil ikke gi noen mening dersom den står alene. Meningsinnholdet i forklaringen uttrykkes gjennom manipulasjon av tellebrikker og det er derfor hjelpemiddel som er bærende element i forklaringen. Også denne forklaringen havner i kategorien praktisk-basert forklaring ettersom Levenson (2010) definerer all bruk av hjelpemidler som praktisk-baserte forklaringer.

En elev skulle forklare hvorfor summen av to oddetall blir til et partall og gjorde det på følgende måte:

> **L:** Men hvorfor blir det partall? Det er jo et oddetall og det er et oddetall (*peker på hver mengde av brikker som eleven har funnet fram).* Hvorfor blir dem tilsammen et partall?
> **Elev 9:** (*Deler femmer-mengden i to par pluss en og syver-mengden i tre par pluss en. Deretter tar han den ene som er igjen i hver mengde og setter sammen*). Sånn

Her deler eleven oddetallene i par +1, noe som kan referere til at en definisjon av oddetall tall som deles i par +1. Deretter tar han den ene som er igjen i hver mengde og setter de sammen. Den muntlige delen av forklaringen hans består av kun ett ord: "Sånn". I følge Carraher m.fl. (2007) er arbeid innenfor tidlig algebra blant annet å uttrykke algebraiske ideer og relasjoner gjennom barnas eget språk og representasjonssystem. Denne eleven bruker tellebrikker til å uttrykke at summen av to oddetall blir til et partall gjennom å vise at den ene som er alene i hvert oddetall kan slå seg sammen og danne et par. Selv om det ikke laget en generell regel, er denne forklaringen et uttrykk for algebraisk relasjon og er derfor en tidlig algebraisk forklaring. I denne forklaringen gir ikke det verbale språket alene noen mening. Selv om den muntlige delen av forklaringen består av bare ett ord, klarer eleven å formidle at to oddetall blir et partall ettersom den ene som er igjen i hvert oddetall kan slå seg sammen og danne et par. Meningsinnholdet til forklaringen formidles gjennom manipulasjon av tellebrikker og det er derfor hjelpemidler som er det bærende element i denne forklaringen. Han bruker derfor matematiske definisjoner (oddetall er par +1) og egenskaper (+1 kan slå seg sammen og danne et par) i sin forklaring. Ettersom Levenson (2010) mener at bruk av hjelpemidler i en forklaring er praktisk-basert, vil denne forklaringen havne i denne kategorien.

4.2.2 Forklaringer der både språk og hjelpemiddel er bærende elementer

En elev skulle forklare om det alltid vil bli slik at summen av to oddetall blir til et partall:

> **L:** Tror du det alltid vil bli sånn, når vi plusser to oddetall, vil det alltid bli et partall?
> **Elev 6:** Jeg tror det
> **L:** Hvorfor det?
> **Elev 6:** Fordi vi hadde jo (*deler mengden i 5 og 7*)
> **L:** Men hvorfor blir to oddetall alltid et partall?
> **Elev 6:** Fordi se her (*deler 7 i par + 1*) og der (*deler 5 i par + 1*) Det skjer også når man får flere brikker. (*Tar flere brikker og deler i par*) De her to, også de her to, de her to... Også se her der er det jo også bare 1. Oddetall har alltid bare 1. Og da kan jo de her bare (*tar de to brikkene i hver mengde som er alene*) jey vi er venner, venner, venner

Her kan vi se at eleven finner fram to oddetall i tellebrikker og deler disse mengdene i par +1. Han referer eleven til sin kunnskap om at oddetall er satt sammen av par +1.Han forklarer dette ved å sette tellebrikkene i par +1 og bruker verbalspråket til å henvise til det han har gjort med tellebrikkene. Han forklarer at oddetall vil alltid være par +1 selv om de blir større. Han forklarer dette verbalt ved å si at det er to til og to til og gjennom bruk av tellebrikker ved at han legger til flere par. Deretter forklarer han at selv om hvor mange flere par man legger til, så vil det alltid være en brikke som er alene ved å uttrykke muntlig at oddetall vil alltid være bare 1. Til sist i sin forklaring viser han at oddetallenes +1 kan slå seg sammen ved å ta de to tellebrikkene som er alene og setter de sammen og uttrykke muntlig at de kan være venner. Carraher m.fl. (2007) beskriver hvordan yngre elever kan arbeide med å uttrykke generalitet og regler gjennom sitt eget språk og uten algebraisk notasjon. Ettersom eleven viser til at summen av to oddetall blir partall også gjelder flere oddetall enn de vi hadde jobbet med i denne oppgaven (5+7), viser at han forsøker å uttrykke generalitet slik Carraher m.fl. (2007) mener at yngre barn kan gjøre. I denne forklaringen kan man se at eleven bruker både verbalt språk og hjelpemidler aktivt i sin forklaring. Det verbale språket er ikke meningsbærende uten at man kjenner til manipulasjon av tellebrikkene. Manipulasjon av tellebrikkene kan ikke forstås uten å kjenne til de verbale utsagnene. Ettersom det muntlige uttrykket og konkretene sammen danner mening i forklaringen er både språk og hjelpemiddel bærende element i denne forklaringen. Ettersom Levenson (2010) presiserer at alle forklaringer som inkluderer bruk av hjelpemidler er definert som praktisk-basert, så vil denne forklaringen også havne i denne kategorien.

En annen elev skulle si et tall den tror er et oddetall og gjorde det på følgende måte:

> **L:** Kan du si meg et annet tall du tror er et oddetall?
> **Elev 5:** Mmmm. (Teller alle brikkene som er på bordet) 53
> **L:** Er det et oddetall? Eller et partall?
> **Elev 5:** Ehm, oddetall tror jeg.
> **L:** Hvorfor tror du det?
> **Elev 5:** (*Deler tellebrikkene i to og to*) To, to, to, to, to.... Skal dele dem opp i bare togrupper. Og kanskje det blir en igjen, så ser den. Det blir veldig masse å dele opp i to. (*Når han har delt alle tellebrikkene i par står det en tellebrikke igjen alene*) Så er det bare en igjen.
> **L:** Ja, og hva betyr det?
> **Elev 5:** At det er et oddetall.

Her tar eleven et stort tall og starter med å tippe på at det er et oddetall ved å si at han tror det er et oddetall. For å finne ut om han har rett, deler han brikkene inn i par. Han bruker trolig en referanse til definisjon av oddetall som tall med par + 1. Etter å ha delt brikkene i par, ligger det en brikke igjen alene. Han forklarer muntlig at det var bare en igjen og at tallet derfor er et oddetall. Carraher m.fl. (2007) mener små barn kan uttrykke generalitet og regler gjennom sitt eget språk og uten algebraisk notasjon. For å finne ut om tallet var et oddetall, delte han

tellebrikkene i par for å se om det ville bli én igjen. Selv om han ikke eksplisitt uttrykte en regel om at oddetall består av par +1, uttrykker han at han må sette sammen par for å se om det er en igjen. Han har derfor generalisert at oddetall er par +1 og er derfor en forklaring innenfor tidlig algebra i henhold til slik Carraher m.fl. (2007) beskriver tidlig algebra.
I denne forklaringen brukes det verbalt språk, men språket er ikke meningsbærende alene. Det eleven gjør med tellebrikkene står også sentralt i forklaringen og man må kjenne til manipulasjon av tellebrikkene for at forklaringen skal få mening. Den muntlige forklaringen og manipulasjonen med tellebrikkene støtter opp om hverandre for å gi forklaringen mening og både språket og hjelpemidler er derfor bærende elementer i forklaringen. Ettersom Levenson (2010) mener forklaringer med bruk av konkreter er praktisk-baserte forklaringer, havner også denne forklaringen i denne kategorien.

Etter å ha fargelagt alle partallene på et 100-brett, skulle en elev forklare hvorfor han hadde fargelagt slik han hadde gjort.

> **L:** Hvorfor fargela du de tallene?
> **Elev 3:** Jeg visste jo at det her var partall (*peker på et partall*) og da må det som er under her (*peker på tallet under*) også bli et par. Også er det odde (*peker på tallet 11*), fordi at 11 tellebrikker (*finner fram 11 tellebrikker*) Se her (*deler elleve i seks par pluss en*) Se da får jo ikke den et par.
> **L:** Nei, det gjør den jo ikke.
> **Elev 3:** Da må jo den som er under (*tallet 21 står under 11 i 100-brettet*)... Da må jo ikke de heller få noen par fordi den er ti mer.

Her forklarer eleven at tallet som står under 11 på 100-brettet også må være et oddetall gjennom å først forklare hvorfor 11 er et oddetall. Her tar han tellebrikker og deler i par, samtidig som han forklarer at det er et oddetall fordi det er en tellebrikke som ikke får noe par. Her bruker eleven trolig referanse til en definisjon av oddetall som tall som får en til overs når det deles i par. Den muntlige forklaringen i denne forklaringen vil gi endel mening uten å se hva eleven gjør med tellebrikkene, men det er ikke gitt at man forstår at eleven har delt mengden med tellebrikker i par. Tellebrikkene en sentral del av denne forklaringen og den muntlige forklaringen kan ikke forstås uten å kjenne til hva eleven gjør med tellebrikkene. Videre forklarer han at tallet under 11, altså 21, er ti mer og vil derfor den ene tellebrikken vil ikke danne noe par. Det ser ut til at han bruker egenskaper til tallet ti, der han tydeligvis vet at det er et partall og ikke vil kunne gjøre par av den ene brikken som står alene i tallet 11. I denne forklaringen viser eleven hvordan han bruker relasjon mellom tallene (at 21 er ti mer enn 11) og relasjon mellom partall og oddetall der summen av et oddetall og et partall blir et oddetall fordi det fortsatt er en som ikke får et par. Carraher m.fl. (2007) mener små barn kan arbeide med å uttrykke algebraiske ideer og relasjoner. Ettersom denne eleven forklarer relasjon mellom tallene og relasjon mellom oddetall og partall, kan dette sies å være en forklaring innenfor tidlig algebra i henhold til Carraher m.fl. (2007) sin beskrivelse. I denne forklaringen er 100-brettet et visuelt hjelpemiddel og 100-brettet brukes aktivt for å forklare, ved å peke og si "tallet under". Ettersom det muntlige uttrykket i denne forklaringen ikke kan forstås uten å kjenne til elevens bruk av konkreter eller peking på 100-brettet, er både språk og hjelpemiddel bærende elementer i denne delen av forklaringen også. Selv om eleven bruker matematisk kunnskap og tallenes egenskaper i sin forklaring, vil denne forklaringen havne innunder praktisk-basert forklaring ettersom Levenson (2010) definerer all bruk av konkreter og visuelle hjelpemidler som praktisk-basert forklaring.

4.2.3 Forklaringer der språk er bærende element

En elev kom med følgende forklaring på hvorfor 7 er et oddetall:

> **L:** 7. Er det et oddetall eller et partall?
> **Elev 2:** *(Tar 7 tellebrikker og deler i to mengder – 3 og 4)* Det er et oddetall. Fordi at det er tre og her er det fire. Da blir det ikke likt.

Her tar eleven syv tellebrikker og deler det i tre og fire. Så forklarer han at det er et oddetall fordi det ikke blir like store mengder. Det ser ut til at han tenker i hele tall og uten rest og bruker referanse til sin definisjon av oddetall – at oddetall får to ulike mengder når man forsøker å dele det på to. Han henviser til det han gjør med tellebrikkene ved å si at "Her er det fire". Tellebrikker er med for å støtte opp under hans forklaring og han referer til det som han har gjort med tellebrikkene. Denne elevforklaringen kan forstås og gi mening uten at man ser eller vet hva eleven gjør med tellebrikkene. Språket som er det bærende element i denne forklaringen ettersom at den muntlige delen av forklaringen ikke utelater ord selv om han bruker tellebrikker. Dersom man hadde sett bort fra elevens bruk av tellebrikker, ville denne forklaringen kun vært basert på matematiske egenskaper (syv deles i tre og fire) og definisjoner (oddetall kan ikke deles likt på to når man deler i hele tall). I følge Levenson (2010) er en forklaring praktisk-basert når den tar i bruk konkreter som støtte, slik som denne forklaringen gjør. Hun påpeker også at praktisk-baserte forklaringer kan ha matematiske elementer, slik som denne forklaringen bruker egenskaper til tallet syv og definisjon av et oddetall. Derfor er denne forklaringen en praktisk-basert forklaring.

En annen elev kom med følgende forklaring på hvorfor 12 er et partall:

> **L:** Kan du si meg et tall du tror er partall?
> **Elev 1:** 12, 12 ,12, 12

> **L:** Hvorfor er det et partall?
> **Elev 1:** *(Finner fram 12 tellebrikker)* Fordi, sånn, se! Her har jeg liksom seks *(tar seks tellebrikker vekk fra mengden).* Også har jeg seks her *(Peker på den andre mengden).* 3 og 3 der og 1, 2, 3, 4, 5, 6 der.

Her teller eleven opp tolv tellebrikker og deler det i to like store mengder. Denne eleven ser også ut til å tenke i hele tall og at han bruker referanse til definisjon av partall som tall som kan deles likt i to mengder. Denne eleven bruker tellebrikken noe mer aktivt enn den forrige elevforklaringen. Han forsøker å få intervjuer til å se på hva han gjøre med tellebrikkene og henviser til tellebrikkene gjennom muntlig tale ved å si "her har jeg seks" og "der har jeg seks". Ettersom spørsmålet var "Hvorfor er det et partall?", vil den muntlige forklaringen kunne forstås uten at man ser hva eleven gjør med tellebrikkene. Ettersom den muntlige forklaringen kan forstås uten tellebrikkene er det språket som er det bærende element i forklaringen ettersom det muntlige uttrykket kan forståes i sin helet og tellebrikkene brukes kun som støtte. Ettersom Levenson (2010) definerer bruk av konkreter i en forklaring som praktisk-basert, vil denne havne elevforklaringen defineres som praktisk-basert.

Elev 6, som jeg har beskrevet hvordan brukte språk og hjelpemiddel som bærende element i en forklaring, forklare tidligere i intervjuet hvorfor summen av to oddetall (3+5) blir til et partall:

> **L:** Men er ikke det litt rart at to oddetall blir til et partall?
> **Elev 6:** Ja, det er litt rart.
> **L:** Ja, det er litt rart, for det er jo et oddetall og der er et oddetall (*peker på tellebrikker som er delt i mengder på tre og fem).* Hvorfor tror du at to oddetall kan bli til et partall?
> **Elev 6:** Fordi at oddetallene de mangler jo en å være venn med. Og da er det to oddetall, da har jo de en som ikke har venn. Så da kan jo de to (*tar en tellebrikke fra hver mengde*), hvis de blir passet sammen, da får jo de en ny venn som ikke var i familien.

Her kan man se at eleven forklarer at oddetall mangler en å være venn med. Videre forklarer han at summen av to oddetall blir et partall, for den ene i hvert oddetall kan slå seg sammen og bli venner selv om de ikke er fra samme familie. Det ser ut til at eleven refererer til definisjonen av oddetall som par + 1. Eleven har satt forklaringen i en kontekst for å gi forståelse til det matematiske uttrykket. Han har lagd en kontekst hvor egenskapene til tallene har blitt "menneskeliggjort" ved at oddetallene har en som mangler en venn. Han bruker denne konteksten videre når han forklarer at oddetallene sin +1 kan danne et par og derfor blir tallet et partall ved å forklare at de kan bli venner selv om de ikke er i familie og viser dette ved å ta en tellebrikke fra hver mengde og setter dem sammen. I følge Carraher m.fl. (2007)

er arbeid innenfor tidlig algebra blant annet å uttrykke algebraiske ideer og relasjoner gjennom barnas eget språk og representasjonssystem. Denne eleven uttrykker at summen av to oddetall blir til et partall gjennom å vise at den ene som er alene i hvert oddetall kan slå seg sammen og danne et par. Selv om det ikke laget en generell regel, er denne forklaringen et uttrykk for algebraisk relasjon og er derfor en tidlig algebraisk forklaring. Selv om eleven tar i bruk tellebrikker i sin forklaring, er den muntlige forklaringen meningsfull og kan forstås alene. Ettersom det muntlige uttrykket kan forstås i sin helhet uten å kjenne til hva eleven gjør med tellebrikkene, så er språket det bærende element i forklaringen. I følge Levenson (2010) er forklaringer som baserer seg på virkelige sammenhenger, eller satt i kontekst, definert som praktisk-baserte. Ettersom eleven har lagd en kontekst rundt sin forklaring er dette en praktisk-basert forklaring. I tillegg bruker eleven tellebrikker som støtte til sin forklaring, noe Levenson (2010) også påpeker at faller innunder praktisk-baserte forklaringer.

4.3 Matematikkbaserte forklaringer

En elev forklarte hvorfor to er et partall og tre ikke er det:

> **L:** Men hvorfor er to et partall?
> **Elev 4:** På grunn av at det er sånn at det blir... Det er jo to og da kan det deles på to. 3 er ikke et partall på grunn av at det kan bli delt på tre. Det kan ikke deles på to.

Her ser vi at eleven forklarer at to er et partall fordi det kan deles på to. Videre forklarer han at tre ikke er et partall fordi det ikke kan deles på to. Eleven ser ut til å tenke i hele tall uten rest og referer trolig til definisjon av partall som tall som kan deles likt på to. Han tar ikke i bruk hjelpemidler i sin forklaring og uttrykker sin forklaring muntlig uten kontekst. I følge Levenson (2010) er en matematikkbasert forklaring en forklaring som baserer seg helt og holdent på matematiske definisjoner og/eller egenskaper. Denne forklaringen baserer seg på matematisk definisjon av partall som tall som kan deles i to og er derfor en matematikkbasert forklaring.

Videre i intervjuet skal eleven forklare hvorfor 8 er et partall.

> **L:** Nei. Du sa til meg i stad så sa du et partall, du sa åtte.
> **Elev 4:** Ja, det er et partall.
> **L:** Hvorfor det er et partall?
> **Elev 4:** På grunn at det kan deles på to. Fire og fire
> **L:** Hva som skjer når man deler det på to?
> **Elev 4:** Da må det jo være like mange på hver side hvis det er et partall.

Her forklarer eleven at åtte er et partall fordi det kan deles likt i to mengder på fire. Han følger også opp med å si at det må være like mange på hver side hvis det er et partall. Han bruker ingen visuelle hjelpemidler når han forklarer. Her ser det også ut til at eleven tenker i hele tall og bruker trolig referanse til definisjonen av partall som tall som kan deles i to. I tillegg har han med utfyllende informasjon til definisjonen – at tallet skal kunne deles i to like store mengder. Ettersom en matematikkbasert forklaring baserer seg på matematisk definisjon og/eller egenskaper (Levenson 2010), kan denne forklaringen plasseres innunder matematikkbaserte forklaringer.

En elev skulle forklare hva som skjer når man plusser sammen to oddetall.

> **L:** Mmm. Hvis man plusser de her to tallene sammen, 3+5. Et oddetall pluss et oddetall. Tror du da det blir et partall eller et oddetall?
> **Elev 7:** Partall
> **L:** Det var rart. Hvorfor tror du det?
> **Elev 7:** Fordi det blir 8.. Og da tar man to også tar man to på nytt og to på nytt og to på nytt. Åtte har fire par.

Denne eleven forklarer at 3+5 tilsammen blir et partall fordi det blir 8. Han forklarer at det må være et partall fordi den består av flere toere og at åtte har fire par. Her ser det ut til at han bruker referanse til definisjon av partall som er tall bestående av flere par. I ulikhet med noen andre forklaringer jeg har beskrevet, hvor elever skal forklare hvorfor summen av to oddetall blir et partall, har ikke denne eleven forsøkt seg på å lage en mer generell regel på dette. Eleven forklarer kun i det ene tilfellet. Carraher m.fl. (2007) mener små barn kan uttrykke generalitet og regler gjennom sitt eget språk og uten algebraisk notasjon. Denne eleven definerer på sin måte at partall er tall bestående av par. Dette er derfor også en forklaring med algebraiske trekk. Denne eleven tar ikke i bruk noen hjelpemidler i sin forklaring. Han bruker definisjon av partall (tall bestående av flere tall) og egenskaper til tallet 8 (kan deles i fire par). Ettersom Levenson (2010) definerer forklaringer som kun tar i bruk matematiske egenskaper og definisjoner som matematikkbaserte forklaringer, kan bli definert som en matematikkbasert forklaring.

5.0 Drøfting

I dette kapitlet vil jeg først presentere kjennetegn for de ulike kategoriene jeg har funnet i relasjon til Levenson (2010) sin teori. Deretter vil jeg vise hva som kjennetegner forklaringstypene til de 1. trinnselever jeg har intervjuet og drøfte hva mine funn kan vise.

5.1 Forklaringskategorier

Levenson (2010) definerer praktisk-baserte forklaringer som forklaringer som ikke utelukkende baserer seg på matematiske definisjoner og/eller egenskaper. Disse forklaringene kan basere seg på virkelige sammenhenger eller bruke visuelle hjelpemidler eller konkreter som støtte for å gi mening til matematiske uttrykk. Levenson (2010) påpeker at disse forklaringene ikke utelukker matematiske elementer, men matematiske egenskaper og definisjoner behøver ikke å være inkludert. Levenson (2006) har ikke gitt noen eksplisitt forklaring på hva en uformell forklaring er. Raman (2002) definerer uformelle forklaringer som forklaringer basert på virkelige erfaringer og uformell kunnskap og som kan bestå av gjetninger, innskytelser, intuisjoner og uformelle argumenter. Ettersom praktisk-baserte forklaringer kan basere seg på virkelige erfaringer og uformell kunnskap (Levenson 2010), ville de fleste praktisk-baserte forklaringene vært uformelle i henhold til Raman (2002) sin definisjon, ikke bare de som ikke inkluderer matematiske egenskaper og definisjoner. I hvor stor grad en forklaring er uformell kan diskuteres. Utfra min analyse vokste seg fram et stort hovedskille i de praktisk-baserte forklaringene; forklaringer som inkluderte matematiske egenskaper og/eller definisjoner og forklaringer som ikke inkluderte matematiske egenskaper og definisjoner. Jeg har valgt å gjøre et hovedskille mellom disse forklaringene ettersom det er en stor forskjell på en matematisk forklaring sin gyldighet etter hvorvidt den baserer seg på matematiske egenskaper og/eller definisjoner kontra når den ikke gjør det. En matematisk forklaring som ikke baserer seg på matematiske egenskaper og definisjoner kan bli definert som mer uformell enn en forklaring som inkluderer matematiske egenskaper og/eller definisjoner.

Kjennetegn på praktisk-baserte forklaringene som ikke inkluderer matematiske egenskaper og definisjoner er at disse forklaringene ikke baserer seg på matematiske egenskaper eller definisjoner. Disse forklaringene besto av gjetninger, innskytelser og uformelle argumenter. Noen refererte til "høyere makter" ved å forklare at "Det er sånn tallene er lagd" eller "Det er sånn regninga er". Flere av forklaringene i denne kategorien henviste også til hukommelsen ved forklare hvorfor med "fordi jeg husker at det er sånn". Forklaringene kunne også referere til det eleven hadde gjort, f. eks. ved å forklare at to oddetall blir til et partall fordi de plusset det sammen. Ved at disse forklaringene ikke baserer seg på matematiske egenskaper eller definisjoner, kan disse forklaringene bli ansett som ikke-gyldige matematiske forklaringer og er i stor grad uformelle forklaringer.

Kjennetegn på praktisk-baserte forklaringene som inkluderte matematiske egenskaper og/eller definisjoner er at forklaringene inkluderer matematiske egenskaper og/eller definisjoner, f. eks. definisjon av oddetall som får en til overs dersom man tenker i hele tall og deler på to eller at partall består av par mens oddetall besår av par +1 eller at et partall kan deles i do like mengder. Men forklaringene i denne kategorien baserer seg ikke utelukkende på matematiske egenskaper og/eller definisjoner. De har i tillegg basert seg, dog i ulik grad, på virkelige sammenhenger eller hjelpemidler som tellebrikker eller 100-brett. Dette er i tråd med hvordan Levenson (2010) definerer praktisk-baserte forklaringer, hvor forklaringene kan basere seg, men ikke utelukkende, på matematiske egenskaper og/eller definisjoner og hvor det ofte blir tatt i bruk hjelpemidler eller konkreter. Utfra min analyse vokste det seg fram tre ulike underkategorier i praktisk-baserte forklaringer som inkluderte matematiske egenskaper og/eller definisjoner. Disse underkategoriene er forklaringer med (1) hjelpemiddel som bærende element, (2) forklaringer med språk og hjelpemiddel som bærende element og (3) forklaringer med språk som bærende element.

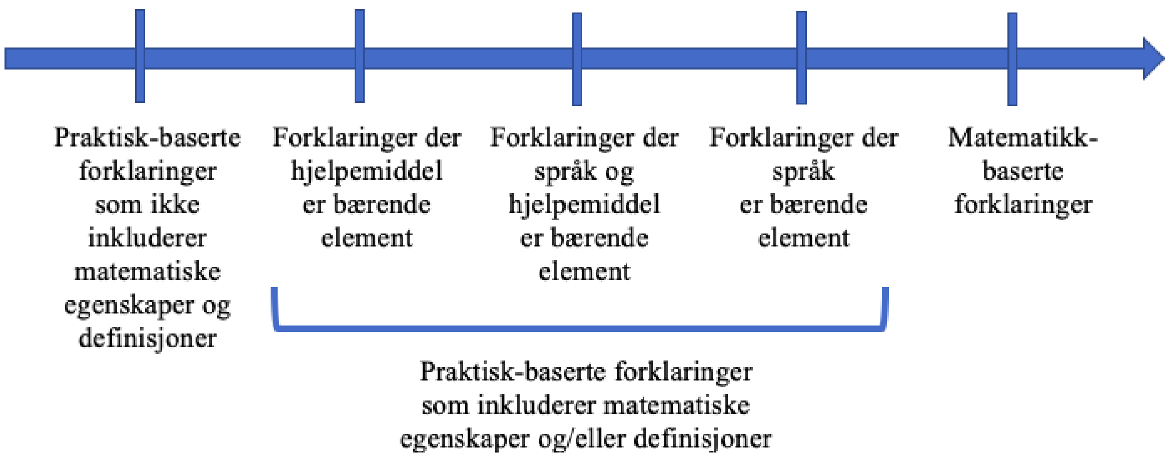
Kjennetegn for forklaringene hvor hjelpemiddel var bærende element var at disse forklaringene baserte seg nesten ene og alene på manipulasjon av konkreter. Språket kunne støtte opp med å gi noen henvisninger som "Fordi se her" eller "Det er sånn her og sånn der", men utover dette hvilte meningsinnholdet i forklaringene på manipulasjon av hjelpemidler. En matematisk forklaring i denne kategorien kunne for eksempel bestå av å dele tellebrikker i to like store mengder for å forklare hvorfor et tall er et partall. Denne typen forklaringer inneholder flere matematiske egenskaper og definisjoner enn i kategorien forklaringer som ikke inkluderer matematiske egenskaper og definisjoner, dog dette ble ikke uttrykt muntlig. Denne forklaringstypen er derfor noe mindre uformell enn forklaringer som ikke inkluderer matematiske egenskaper og definisjoner.

I forklaringene hvor språk og hjelpemiddel var bærende element ble språket mer fremtredende enn i forklaringene hvor hjelpemiddel var bærende element. Kjennetegn på disse forklaringene var at språket ikke kunne forstås alene uten å vite hva elevene gjorde med hjelpemidlene, ettersom elevene utelot ord eller henviste til det de gjorde med hjelpemidlene. På den andre siden var manipulasjonene av hjelpemidlene vanskelig å forstå uten at man knyttet det sammen med de muntlige forklaringene. På denne måten var både språk og hjelpemiddel bærende element i disse forklaringene. Dette kunne være forklaringer som for eksempel forklarte at et tall var et partall ved å si at det kan deles for så å vise med tellebrikker at det kan deles i to like store mengder. I disse forklaringene ble matematiske egenskaper og definisjoner uttrykt muntlig i større grad enn i de forklaringene hvor hjelpemidler var bærende element. Denne forklaringstypen er derfor mindre uformell enn de to foregående forklaringstypene.

I forklaringer hvor språket er bærende element ble språket enda mer fremtredende i forklaringen. Kjennetegn for disse forklaringene var at de kunne forstås ene og alene gjennom det verbale språket og de muntlige forklaringene baserte seg stort seg på matematiske egenskaper og/eller definisjoner. Felles for forklaringene var at kontekst eller hjelpemidler ble brukt for å støtte opp om eller poengtere forklaringene, men i en mer nedtonet grad enn forklaringene hvor språk og hjelpemiddel var bærende element. Noen av forklaringene tok i bruk virkelighetsnære situasjoner ved å sette forklaringene i kontekst, for eksempel ved å si at summen av to oddetall blir til et partall fordi oddetall har en som ikke har en venn. De fleste forklaringene i denne kategorien var forklaringer som brukte konkreter for å gi litt ekstra støtte til den muntlige forklaringen. Det kunne være forklaringer hvor eleven forklarte muntlig at et tall er et oddetall fordi det kan deles opp i flere par med en til overs, samtidig som de viser dette med tellebrikker. I disse forklaringene kunne det både bli og ikke bli henvist til det som var gjort med tellebrikkene. Selv om noen av forklaringene henviste til det som var gjort med tellebrikkene, var den muntlige forklaringen meningsbærende i seg selv og språket var derfor det bærende element. I disse forklaringene ble hjelpemidler kun brukt for å støtte opp under den muntlige forklaringen og den muntlige forklaringen kunne stått alene uten å vite hva elevene gjorde med hjelpemidlene. I disse forklaringene ble matematiske egenskaper og definisjoner uttrykt muntlig i større grad enn i de forklaringene hvor språk og hjelpemidler var bærende element. Denne forklaringstypen er derfor enda mindre uformell enn de tre foregående forklaringstypene.

Levenson (2010) definerer matematikkbaserte forklaringer som forklaringer som er basert på matematiske definisjoner eller tidligere lærte matematiske egenskaper, uten at de trenger å bære preg av strenghet eller formalitet. Disse forklaringene utelukker alle bruk av visuelle hjelpemidler, konkreter eller bruk av kontekst. Kjennetegn for de matematikkbaserte forklaringene jeg fant i min analyse var at disse ene og alene baserte seg på matematiske definisjoner og egenskaper uten hjelp av verken hjelpemidler eller kontekst. Dette er i tråd med slik Levenson (2010) definerer matematikkbaserte forklaringer. I disse forklaringene brukte elevene kun muntlig språk og brukte ingen konkreter eller hjelpemidler som støtte i sin forklaring. De brukte matematiske definisjoner, for eksempel at partall kan deles likt på to eller at partall består av par. De brukte også matematiske egenskaper ved å for eksempel forklare hvordan tall kan deles opp i like mengder for å forklare at tallet er et partall. Ettersom denne typen forklaringer baserer seg ene og alene på matematiske egenskaper og definisjoner er denne forklaringstypen enda mindre uformell enn de foregående forklaringstypene, uten at de nødvendigvis er strenge, formelle forklaringer.

Levenson (2010) har påpekt at matematikkbaserte forklaringene og praktisk-baserte forklaringene ikke danner en dikotomi, men et kontinuum av forklaringer som elever utvikler gjennom årene. Hun mener elever ofte starter med praktisk-baserte forklaringer som har støtte hverdagslige situasjoner og konkreter. Deretter utvikler det seg til å bli semi-strukturerte forklaringer med generaliserte, visuelle argumenter. Det fortsetter med matematikkbaserte forklaringer før det utvikler seg til å bli formelle forklaringer. Sett i sammenheng med Levenson (2010) sin definisjon av matematikkbaserte og praktisk-baserte forklaringer og hvordan disse danner et kontinuum, kan kategoriene jeg har funnet og definert i min analyse fordele seg på følgende måte:



Fra denne modellen kan man se at de praktisk-baserte forklaringene som ikke inkluderer matematiske egenskaper eller definisjoner er de som er lengst unna matematikkbaserte forklaringer. Dernest følger forklaringer der hjelpemiddel er bærende element og forklaringer hvor språk og hjelpemiddel er bærende element. Ved siden av matematikkbaserte forklaringer står forklaringer hvor språk er bærende element. De fleste av disse forklaringene kunne ha blitt definert som matematikkbaserte, hadde det ikke vært for at eleven brukte hjelpemiddel for å støtte opp under den muntlige forklaringen.

Funnene i min analyse viser at det er behov for mer detaljerte kategorier av matematiske elevforklaringer enn Levenson (2010) sine to kategorier – matematikkbaserte forklaringer og praktisk-baserte forklaringer. I min analyse kan man se at de praktisk-baserte forklaringene bruker hjelpemidler eller språk i ulik grad for å uttrykke meningen i sin forklaring. Noen forklaringer kommer nesten helt og holdent gjennom manipulasjon av hjelpemidler, men det er allikevel tydelig hva eleven prøver å forklare og mulig å tenke seg til hva slags matematiske egenskaper eller definisjoner eleven tar i bruk. I disse forklaringene er hjelpemiddel det bærende element. Noen forklaringer kommer til uttrykk gjennom både språk og hjelpemidler, hvor man ikke kan ta bort noen av delene for at forklaringen skal få en helhetlig betydning. I disse forklaringene er språk og hjelpemiddel bærende elementer. Andre forklaringer kommer til uttrykk nesten alene gjennom språket, men hjelpemidler blir brukt for å poengtere eller støtte opp om forklaringen. Disse forklaringene har språk som bærende element. Utfra min analyse klarte jeg ikke å se noen store skiller eller underkategorier de matematikkbaserte forklaringene. En av grunnene til dette kan være elevenes lave alder. De har nylig entret skoleverdenen og har fått begrenset med øving i hvordan de kan gi matematikkbaserte forklaringer. Det er mulig at også denne kategorien kunne ha blitt mer detaljert dersom man hadde studert eldre elever.

5.2 Elevenes forklaringstyper

Tabellen nedenfor viser hvordan elevenes ulike matematiske forklaringer fordelte seg i de ulike forklaringstypene:

	Praktisk-baserte forklaringer som ikke inkluderer matematiske egenskaper og definisjoner	Praktisk-baserte forklaringer som inkluderer matematiske egenskaper og/eller definisjoner			Matematikkbaserte forklaringer	
		Hjelpemiddel som bærende element	Språk og hjelpemiddel som bærende element	Språk som bærende element		
Elev 1	I	II	𝍸	II	IIII	14
Elev 2		I	IIII	III	I	9
Elev 3	II	II	II	I	II	9
Elev 4	𝍸 I	I	III	IIII	𝍸 II	21
Elev 5		II	II	III	II	9
Elev 6	II	II	𝍸 I	I	I	12
Elev 7			III	III	IIII	10
Elev 8	IIII	II	III	𝍸	𝍸 II	21
Elev 9	I	I	I	III	𝍸 I	12
Elev10	II		𝍸 I		III	11
Totalt	18	13	35	25	37	128

Totalt var det 128 elevforklaringer, hvor 37 forklaringer havnet innunder matematikkbaserte forklaringer og 91 forklaringer havnet innunder praktisk-baserte forklaringer. Innunder de praktisk-baserte forklaringene var det henholdsvis 18 forklaringer som ikke inkluderte matematiske egenskaper og definisjoner og 75 forklaringer som inkluderte matematiske egenskaper og/eller definisjoner. Av de praktisk-baserte forklaringene som inkluderte matematiske egenskaper og definisjoner var det henholdsvis 13 hvor hjelpemiddel var bærende element, 35 hvor språk og hjelpemiddel var bærende element og 25 hvor språk var bærende element. Som man kan se i tabellen er det to elever, elev 4 og elev 8, som utpeker seg i antall forklaringer. De kom ofte med forklaringer som ikke inkluderte matematiske egenskaper og definisjoner av typen "det er sånn fordi jeg husker at det er sånn" og jeg jobbet derfor å "grave dypere" for å se om de kunne gi forklaring som inkluderte matematiske egenskaper og definisjoner, noe som ga utslag i at de produserte flere forklaringer. Utfra tabellen kan man også se at disse to elevene kunne gi forklaringer som inkluderte matematiske egenskaper og definisjoner ettersom det er de to elevene som har flest matematikkbaserte forklaringer.

Utfra tabellen kan man se at 37 forklaringer var matematikkbaserte, noe som utgjør 29% av forklaringene i denne undersøkelsen. Man kan også se at samtlige elever ga en matematikkbasert forklaring minst én gang i løpet av intervjuet og halvparten av elevene ga fire eller flere matematikkbaserte forklaringer. Som nevnt tidligere i min drøfting, har jeg bare en kategori innenfor matematikkbaserte forklaringer. Dette kan komme av elevenes unge alder og det kan hende man kunne ha identifisert flere underkategorier innenfor matematikkbaserte forklaringer dersom man hadde studert eldre elever. Videre viser tabellen at det var 25 forklaringer hvor språk var bærende element. Dette er forklaringstypen som ligger nærmest matematikkbaserte forklaringer og som i stor grad bruker matematiske egenskaper og/eller definisjoner uttrykt i muntlig tale, men som også støtter seg noe til hjelpemidler. Dersom man ser på denne forklaringstypen sammen med matematikkbaserte forklaringer, utgjør disse to gruppene 48,5% av alle forklaringene i min undersøkelse. Med andre ord er nesten halvparten av forklaringene som er gitt forklaringer som helt eller i stor grad baserer seg på matematiske egenskaper og/eller definisjoner. Som beskrevet i teorikapittel klarer elever med stort læringspotensial i større grad å tenke abstrakt enn jevnaldrende (NOU 2016:14). De matematikkbaserte forklaringene kan sies å være abstrakte forklaringer ettersom de baserer seg helt og holdent på matematiske egenskaper og definisjoner uten virkelighetsnær kontekst. Forklaringer med språk som bærende element er noe mindre abstrakte enn de matematikkbaserte forklaringene, ettersom de også bruker noe støtte i hjelpemidler. Men disse forklaringene er heller ikke helt bundet til virkelighetsnær kontekst. De praktisk-baserte forklaringene som inkluderer matematiske egenskaper og/eller definisjoner inkluderte dette i ulik grad og på ulike måter, både gjennom hjelpemidler og språk. Dersom vi ser på hele denne gruppen sammen med matematikkbaserte forklaringer, utgjør dette totalt 86% av elevforklaringene. Når man leser tabellen og mine tolkninger av den, må man også huske å ta i betraktning elevenes unge alder. Elevene jeg har intervjuet var 6 eller nylig fylt 7 år og de hadde gått på skole i bare 5 måneder da intervjuene fant sted. Funnene i min undersøkelse viser at nesten halvparten av forklaringene gitt av 1. trinnselever med stort læringspotensial var matematikkbaserte eller nært opp mot matematikkbaserte og 86% av forklaringene baserte seg på matematiske egenskaper og definisjoner, dog i ulik grad og ulik grad av språk eller hjelpemidler som bærende element. Dette kan tyde på at disse elevene klarer å tenke abstrakt og dette uttrykkes gjennom de matematiske forklaringstypene elevene gir ved at disse forklaringene ofte baserer seg på matematiske egenskaper og/eller definisjoner.

Disse funnene gjelder for gruppen elever jeg har undersøkt og kan ikke generaliseres til andre elevgrupper. Som nevnt i metodekapittel, har Guest m.fl. (2006) beskrevet at 73% av kodene var indentifisert etter de første 6 intervjuene og 97% av kodene var identifiserte etter 12 intervjuer. I min undersøkelse har jeg intervjuet 10 elever, så i henhold til Guest m.fl. (2006) kan min undersøkelse være nær teoretisk metning. Det er derfor trolig at man kan se samme noen av de samme tendensen i en annen gruppe 1. trinnselever med stort læringspotensial.

6.0 Avslutning

Innledningsvis stilte jeg spørsmålet: *Hva kjennetegner de matematiske forklaringstypene til 1.trinnselever med stort læringspotensial i matematikk?*

6.1 Hva har jeg funnet ut?

Gjennom analyseprosessen kategoriserte jeg 1. trinnselever med stort læringspotensial sine forklaringer utfra Levenson (2010) sin oppdeling og definisjon av i praktisk-baserte og matematikkbaserte forklaringer. Gjennom denne analyseprosessen har jeg, innenfor Levenson (2010) sin teori, funnet flere nyanserte kategorier som kjennetegner 1. trinnselever med stort læringspotensial sine matematiske forklaringstyper. Innenfor de praktisk-baserte forklaringene definerte jeg to hovedkategorier; forklaringer som ikke inkluderte matematiske egenskaper og definisjoner og forklaringer som inkluderte matematiske egenskaper og/eller definisjoner. Kjennetegn for praktisk-baserte forklaringer som ikke inkluderer matematiske egenskaper eller definisjoner er at disse forklaringene ikke baserer seg på matematiske egenskaper eller definisjoner i noen grad. Forklaringene baserer seg gjerne på at "det er bare sånn det er" eller "det er sånn tallene er lagd". Kjennetegn for praktisk-baserte forklaringer som inkluderer matematiske egenskaper og/eller definisjoner er at de inkluderer matematiske egenskaper og/eller definisjoner, men ikke utelukkende. I ulik grad var hjelpemiddel og språk det bærende element for å uttrykke meningsinnholdet i forklaringene. Jeg utviklet derfor tre underkategorier innenfor denne kategorien; (1) forklaringer med hjelpemiddel som bærende element, (2) forklaringer med språk og hjelpemiddel som bærende element og (3) forklaringer med språk som bærende element. Kjennetegn for forklaringer hvor hjelpemiddel var bærende element var at meningsinnholdet og de matematiske egenskapene og/eller definisjoner uttrykt nesten ene og alene gjennom manipulasjon av konkreter. Det verbale språket ble lite tatt i bruk, kun som henvisning til manipulasjon av konkretene. Ettersom det var hjelpemidler som uttrykte meningsinnholdet i forklaringene, var hjelpemidler det bærende element. Kjennetegn for forklaringer hvor språk og hjelpemiddel var bærende element var at verken språk eller manipulasjon av hjelpemidler kunne forstås uten å se det i sammenheng med den andre. Sammen dannet språk og hjelpemiddel meningsinnholdet i forklaringene og derfor var både språk og hjelpemiddel bærende element. Kjennetegn for forklaringer hvor språket var bærende element var at språket var meningsbærende alene, selv om elevene også brukte hjelpemidler for å støtte opp under sin forklaring. I disse forklaringene kunne hjelpemidlene ha blitt tatt vekk og språket alene uttrykte meningsinnholdet i forklaringen og det var derfor språket som var bærende element. Kjennetegn for matematikkbaserte forklaringer var at disse helt og holdent baserte seg på matematiske egenskaper og/eller definisjoner og tok ikke i bruk hjelpemidler for å uttrykke meningsinnholdet forklaringen. Innenfor de matematikkbaserte forklaringene klarte jeg ikke å finne noen store nyanser og jeg har derfor ikke utviklet noen underkategorier innenfor disse forklaringstypene. Grunnen til dette kan være at elevene som ble intervjuet hadde svært lav alder. Det er godt mulig at man ville klart å finne og definere flere nyanser innenfor de matematikkbaserte forklaringene dersom man hadde studert eldre elever.

Kategoriene jeg har utviklet kan man sette i forhold til hverandre etter hvor stor grad matematiske egenskaper og/eller definisjoner blir brukt og i hvor stor grad språk eller hjelpemidler blir brukt for å danne mening i forklaringene. De fordeler seg fra praktisk-baserte forklaringer som ikke inkluderer matematiske egenskaper og definisjoner til praktisk-baserte forklaringer som inkluderer matematiske egenskaper og/eller definisjoner til matematikkbaserte forklaringer. Innad i kategorien praktisk-baserte forklaringer som inkluderer matematiske egenskaper og/eller definisjoner fordeler forklaringene seg fra forklaringer der hjelpemiddel er bærende element til forklaringer der språk og hjelpemiddel er bærende element til forklaringer hvor språk er bærende element. Sistnevnte kan sees som sterkt opp mot matematikkbaserte forklaringer, ettersom de muntlige forklaringene som regel var basert på matematiske egenskaper og definisjoner, men bruk av hjelpemidler eller kontekst gjorde at de allikevel ikke er helt matematikkbaserte.

Kjennetegn for gruppen 1. trinnselever med stort læringspotensial jeg intervjuet var at de aller fleste forklaringene baserte seg på matematiske egenskaper og/eller definisjoner, dog i ulik grad og i ulik grad av hvorvidt språk eller hjelpemiddel var bærende element. Et annet viktig moment var at nær halvparten av forklaringene tilfalt kategorien forklaringer hvor språk er bærende element og matematikkbaserte forklaringer. Forklaringer som har språk som bærende element er forklaringstypen som ligger nærmest matematikkbaserte forklaringer og som i stor grad bruker matematiske egenskaper og/eller definisjoner uttrykt i muntlig tale, men som også støtter seg noe til hjelpemidler. Både forklaringer som er matematikkbaserte og forklaringer som har språk som bærende element er forklaringer som i helt eller i stor grad er abstrahert fra virkelighetsnær situasjon. Man kan derfor si at forklaringstypene til disse 1. trinnselevene med stort læringspotensial ofte kjennetegnes med at de er abstraherte forklaringer.

Kategoriene jeg har utviklet er med på å detaljere og nyansere Levenson (2010) sin teori og hennes todelte oppdeling av forklaringstyper, henholdsvis praktisk-baserte og matematikkbaserte forklaringer. Det viser at det er behov for en mer nyansert og detaljert definisjon på ulike elevforklaringer for å kunne identifisere 1. trinnselever met stort læringspotensial utfra hva som kjennetegner deres forklaringstyper. Kategoriene jeg har utviklet og hvordan elevforklaringene fordelte seg på disse kategoriene viser hva som kjennetegner de matematiske forklaringstypene til de 1. trinnselever med stort læringspotensial jeg har undersøkt.

6.2 Veien videre

I denne studien har jeg synliggjort at det finnes mange nyanser i forklaringstypene gitt av 1. trinnselever med stort læringspotensial. Med utgangspunkt i et lite utvalg har jeg utviklet flere kategorier som nyanser innenfor Levenson (2010) sin beskrivelse av praktisk-baserte forklaringer. Funnene jeg har gjort kan være nyttig i arbeid videre for å kunne identifisere elever med stort læringspotensial i matematikk tidlig i skoleløpet. Det er veldig viktig å identifisere disse elevene tidlig, slik at man kan gi dem den tilretteleggingen og tilpassede opplæringen de trenger og ikke å identifisere og tilrettelegge for denne elevgruppen kan gi alvorlige konsekvenser som underprestasjon, skolefrafall, sosial stigmatisering, mobbing og feildiagnostisering (NOU 2016:14, Skogen 2014). At lærere vet hva som kjennetegner de matematiske forklaringstyper gitt av 1. trinnselever med stort læringspotensial, kan være med å bidra til at lærerne kan identifisere disse elevene gjennom å lytte til de matematiske forklaringene elevene kommer med. Å kjenne til de ulike forklaringstypene og også hvordan de forholder seg til hverandre kan også være nyttig for lærere å hjelpe og veilede alle elever til å stadig ta i bruk mer matematikkbaserte forklaringer.

Gjennom denne undersøkelsen har jeg selv fått utvidet min kunnskap om matematiske forklaringer. Dette er en kunnskap jeg vil kunne ta i bruk i klasserommet, både for å kunne identifisere elever med stort læringspotensial, men også for å veilede alle elevene mine til å stadig ta i bruk mer avanserte matematiske forklaringer og klare å basere sine forklaringer på matematiske egenskaper og definisjoner. Kunnskapen jeg har fått om forklaringstyper og kategoriene av forklaringstyper jeg har identifisert kan jeg også kommunisere til mine kollegaer slik at de kan bruke dette til identifisering av elever med stort læringspotensial og veilede elever til å ta matematikkbaserte forklaringer i bruk i større grad.

Funnene jeg har gjort gjelder for mine data og et neste steg kan være å undersøke om disse kategoriene av forklaringstyper også vil gjelde andre elever med stort læringspotensial. Et annet steg kan være å se om kategorier av forklaringstyper vil gjelde dersom man arbeider med andre typer oppgaver enn de oppgavene elevene jeg har intervjuet arbeidet med. Jeg gjennomførte intervju med elevene i denne undersøkelsen og elevene ble tatt ut av sitt naturlige miljø. Det vil derfor kunne være interessant for videre forskning å se på forklaringstyper elever med stort læringspotensial gir i sin ordinære matematikkundervisning, når de er i sitt naturlige miljø.

Som jeg har nevnt i min drøfting, fant jeg lite nyanser innenfor de matematikkbaserte forklaringene. Derfor ville det vært spennende å undersøke eldre elever for å se om det finnes nyanser innenfor de matematikkbaserte forklaringene for å kunne detaljere og nyansere Levenson (2010) sin teori ytterligere.

Kilder

Baker, Sarah Elsie & Edwards, Rosalind (2012): How many qualitative interviews is enough. Discussion Paper. NCRM. http://eprints.ncrm.ac.uk/2273/

Baxter, Pamela & Jack, Susan (2008): Qualitative Case Study Methodology: Study Design and Implementation for Novice Researchers . The Qualitative Report, 13(4), 544-559. Hentet fra: http://nsuworks.nova.edu/tqr/vol13/iss4/2

Bjørndal, C. (2017): Det vurderende øyet. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Blanton, M., & Kaput, J. (2000): Generalizing and progressively formalizing in a third grade mathematics classroom: Conversations about even and odd numbers. In M. Fernández (Ed.), *Proceedings of the 20th Annual Meeting of the for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*. Columbus, OH, ERIC Clearinghouse (ED446945). s. 115-122

Blanton, M., & Kaput, J. (2005): Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446. Hentet fra: http://www.jstor.org/stable/30034944

Carpenter, T. P. , & Levi, L. (2000): Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades (Research Report). Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Hentet fra: http://www.wcer.wisc.edu/ncislapublications/index.html

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006): Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115. Hentet fra: http://www.jstor.org/stable/30034843

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2007): Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cobb, P. (2007): Putting philosophy to work. Coping with Multiple Theoretical Perspectives I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NC: Information Age. s. 3-38

Cohen, L., Manion, M., Morrison, K. (2018): Research methods in education. London og New York: Routledge.

Fernald, L. D. (2008): *Psychology: six perspectives*. Los Angeles: Sage.

Goldin, Gerald A. (1997): Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. I: *Journal for Research Methods in Mathematics Education, side 40-62.* National Council of Teachers of Mathematics.

Guest, G., Bunce, A., & Johnson, L. (2006): How Many Interviews Are Enough?: An Experiment with Data Saturation and Variability. *Field Methods*, *18*(1), 59–82. Hentet fra: https://doi.org/10.1177/1525822X05279903

Halvorsen, Knut (2016): *Å forske på samfunnet – En innføring i samfunnsvitenskapelig metode.* Oslo. Cappelen Akademiske forlag

Howe, R. (2005): Comments on NAEP algebra problems [Electronic version]. *Algebraic Reasoning: Developmental, Cognitive, and Disciplinary Foundations for Instruction*. Hentet fra: http://www.brookings.edu/gs/brown/algebraicreasoning.htm

Hsieh, H.-F., & Shannon, S. E. (2005): Three Approaches to Qualitative Content Analysis. *Qualitative Health Research*, *15*(9), 1277–1288. https://doi.org/10.1177/1049732305276687

Idsøe, Ella. M.C. (2014): Elever med akademisk talent i skolen. Oslo: Cappelen Damm AS.

Kaput, J. (1999): Teaching and learning a new algebra. *Mathematics classrooms that promote understanding.* Mahwah, NJ. s. 133-155

Kaput, J. (2007): What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (1996): The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Eds.), *Eighth International Congress on Mathematical Education: Selected lectures*. Seville, Spain: S.A.E.M. Thales. s. 271-290

Kieran, C. (2004): Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*,8 (1), s. 139–151.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001): Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics. National Academies Press.

Kleven, T.A., Hjardemaal, F. og Tveit, K. (2016): *Innføring i pedagogisk forskningsmetode: en hjelp til kritisk tolking og vurdering* (2. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Kvale, S, Brinkmann, S. (2017): *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag

Levenson, E. (2010): Fifth-grade students' use and preferences for mathematically and practically based explanations. Educational Studies in Mathematics, 73(2), s. 121-142.

Levenson, E. (2013): Exploring one student's explanations at different ages: the case of Sharon. Educational Studies in Mathematics, 83, s. 181-203.

Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2004): Elementary school students' use of mathematically-based and practically-based explanations: The case of multiplication. I M. Hoines & A. Fuglestad (red.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education). Bergen, Norge. s. 241-248

Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2006): Mathematically and practically-based explanations: Individual preferences and sociomathematical norms. International journal of science and mathematics education, 4(2), s. 319-344.

Levenson, E., Tsamir, P., & Tirosh, D: (2010). Mathematically based and practically based explanations in the elementary school: teachers' preferences. Journal of Mathematics Teacher Education, 13(4), 345-369.

NESH. (2016): Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. Hentet fra https://www.etikkom.no/forskningsetiske-retningslinjer/Samfunnsvitenskap-jus-og-humaniora/

Niss, M., Jensen, T., Andersen, T., Andersen, R., Christoffersen, T., Damgaard, S., Nissen, K. (2002): Kompetencer og matematiklæring - Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. Undervisningsministeriet.

NoU 2016:14 (2016): "Mer å hente – Beder læring for elever med stort læringspotensial". Hentet fra: https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2016-14/id2511246/

Postholm, May Britt. (2005): *Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2 utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Raman, M. (2002): Coordinating informal and formal aspects of mathematics: Student behavior and textbook messages. Journal of Mathematical Behavior, 21, 135-150.

Schifter, D. (2009): Representation-based proof in the elementary grades In Despina A. Stylianou, Maria L. Blanton & Eric J. Knuth (eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective*. Routledge. s. 87—101

Skogen, K (2014): Evnerike barn og prestasjoner. *Våre evnerike barn – En utfordring for skolen*. Oslo: Cappelen Damm. s. 37-92

Skogen, K, Idsøe, E.C. (2016): Våre evnerike barn – En utfordring for skolen. Oslo: Cappelen Damm.

Stake, Robert E. (2003). Case studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Strategies of qualitative inquiry* (2nd ed.). London: SAGE.

Sternberg, R.J. (2004): Introduction to definitions and conceptions of giftedness. In RJ Sternberg (ed.), Essential readings in gifted education, vol. 1: Definitions and conceptions of giftedness . London, Sage, pp. xxiii–xxvi.

Thagaard, Tove (2018). *Systematikk og innlevelse* (5. utg. utg.). Bergen: Fagbokforlalget.

Tsamir, P. & Sheffer, R. (2000): Concrete and formal arguments: The case of division by zero. Mathematics Education Research Journal, 12(2), 92Y106.

Yackel, E. (2001): Explanation, Justification and Argumentation in Mathematics Classrooms. Paper presented at the Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands.

Vedlegg 1: Kartlegging i grunnleggende talloppfatning og tallforståelse

	Spørsmål	Observasjon	Notater
1	Kan du telle for meg? Enten så lang du klarer, eller til jeg sier stopp. *Dersom eleven klarer å telle til 40, kan du stoppe eleven. Spør hvor langt eleven tror han kan telle* *Dersom eleven kan telle til over 40, kan eleven prøve å telle fra gitt tall:* Kan du telle videre fra 6? Kan du telle bakover fra 8? Kan du telle på toere? Kan du telle på femmere? Kan du telle på tiere?	Må eleven stoppe opp for å tenke? Kommer eleven ut av tellinga, og i så fall må eleven starte på nytt, eller fortsette fra det siste tallet? Hvordan telles tall over 10? Som en regler, eller "sitter" det? Tjue ni, tjueti…? Kan eleven tierovergangene? Kan eleven telle på ulike måter?	
2	Hva trenger vi tall til?	Svarer "Å telle" eller "Å finne hvor mange" Svarer med ulike eksempler, f. eks i butikken, klokka, lage mat.	
3	Kan du skrive noen tall for meg her? Klarer du å skrive tallet 12? Enn 23? Enn 48? *Ikke gå videre med nytt tall med mindre eleven klarte det forrige.*	Skriver elevene tall i rekkefølge? Skriver eleven "tulletall?" Blander eleven på tier- og enerplassen? Kan eleven skrive tall med flere siffer?	
4	*Vis etter tur kort med tallene 3, 6 og 10. Dersom eleven ikke kan lese noen tall, les det for dem og noter)* Hvilket tall er dette? Kan du tegne like mange streker som tallet du leste? *Dersom eleven klarte alle tre, kan du vise han/hun*	Klarer eleven å lese tallene? Kan eleven si hva slags tall det er med en gang, eller må han/hun tenke etter? Klarer eleven å tegne riktig mengde til tallsymbolet?	

	tallkort med tallene 13, 26 og 37 Hvilket tall er dette?		
5	*Vis etter tur 2, 4, 7 og 12 tellebrikker.* Kan du si meg hvor mange tellebrikker jeg legger på bordet?	Har eleven automatisert noen mengder? Teller eleven høyt eller inne seg? Må eleven bruke fingeren når han/hun teller? Telles brikkene 1 og 1, eller flere om gangen (tallvenner, 2 og 2 eller lignende)	
6	*Legg 20 tellebrikker utover på bordet.* Kan du legge til sides 3 tellebrikker? Kan du legge til sides 8 tellebrikker? Kan du legge til sides 15 tellebrikker?	Er noen mengder automatisert? Teller eleven høyt eller inne seg? Kommer eleven ut av telling? Må eleven starte forfra når han/hun kommer ut av telling? Må eleven bruke fingeren når han/hun teller? Telles brikkene 1 og 1, eller flere om gangen (tallvenner, 2 og 2 eller lignende)	
7	*Legg fram 2 og 3 tellebrikker (gjerne på hver sin side av en blyant).* På hvilken side er det flest tellebrikker? *Legg fram 7 og 8 tellebrikker. Legg de 8 tett sammen og de 7 litt spredt fra hverandre.* På hvilken side er det flest nå?	Klarer eleven å se hvor det er flest, eller må han/hun telle? Sier eleven at det er flest der det er 7, pga det er spredt utover et større område? Hvordan teller eleven? Sammenligner, lager par, teller 1 og 1…	
8	*Forklar ordet **omtrent**. Vis etter tur tegninger med 4, 8 og 18 epler i 2-3 sekunder, altså at elevene ikke skal få nok tid til å telle dem.*	Klarer elevene å si noenlunde hvor mange epler det var på bildet? Vil ikke eleven svare, fordi han/hun ikke klarte å telle?	

	Kan du se omtrent hvor mange epler det var på bildet?	Kommer elevene med altfor store/små overslag?	
9	*Legg fram 5 tellebrikker. Ikke vis de to du "legger" til.* Her er 5 tellebrikker. Tenk deg at jeg la 2 tellebrikker til der. Hvor mange blir det da? *Dersom eleven klarer å svare umiddelbart hvor mange det er, uten å telle, kan du gå videre. Her skal du ikke legge fram tellebrikker.* Dersom jeg har 6 tellebrikker og legger 2 til – hvor mange er det da til sammen? Dersom jeg har 4 tellebrikker og legger 5 til – hvor mange er det da til sammen?	Må eleven telle? Regner eleven i hodet, eller teller høyt? Kommer svaret umiddelbart, eller må eleven tenke gjennom svaret? Har eleven automatisert regnestykkene, eller må han/hun telle i hodet, bruke konkreter eller lignende?	
10	*Legg fram 6 tellebrikker.* Her er det 6 tellebrikker. Tenk deg at jeg tar bort 2. Hvor mange er det da igjen? *Dersom eleven klarer å svare umiddelbart hvor mange det er, uten å telle, kan du gå videre. Her skal du ikke legge fram tellebrikker.* Dersom jeg har 5 tellebrikker og tar bort 3– hvor mange er det da igjen? Dersom jeg har 9 tellebrikker og tar bort 4 – hvor mange er det da igjen?	Må eleven telle? Regner eleven i hodet, eller teller høyt? Kommer svaret umiddelbart, eller må eleven tenke gjennom svaret? Har eleven automatisert regnestykkene, eller må han/hun telle i hodet, bruke konkreter eller lignende?	

Vedlegg 2: Intervjuguide

	Hovedspørsmål	Oppfølgnings-spørsmål	Hjelp dersom eleven sitter fast
Del 1 Få tak i elevens forståelse av partall/oddetall eller å skape en forståelse av partall/oddetall	Vet du hva et partall er?	Hvorfor det?	Dersom eleven ikke vet hva P/O er: Prøve å finne egenskaper til partall/oddetall ved å se på tallene 1- 4. Snakke om å dele tallet på to og å i par. Prøve å få eleven til å definere egenskapene og sammen putte på begrepene partall og oddetall.
	Vet du hva et oddetall er?	Hvorfor det?	
Del 2 Få tak i elevens forklaring på hvorfor et spesifikt tall er partall eller oddetall.	Her har jeg 4 tellebrikker. Er 4 et partall eller oddetall?	Kan du forklare? Hvorfor er det et partall? Kan du vise meg?	
	Kan du si meg et annet partall?	Kan du forklare? Hvorfor er det et partall? Kan du vise meg?	
	Her har jeg 7 tellebrikker. Er 7 et partall eller oddetall?	Kan du forklare? Hvorfor er det et oddetall? Kan du vise meg?	
	Kan du si meg et annet oddetall?	Kan du forklare? Hvorfor er det et oddetall? Kan du vise meg?	
Del 3 Bruke interaktivt 100-brett for å finne mønster og regler for partall/oddetall.	Presentere interaktivt 100-brett på iPad. Kan du fargelegge partallene? Hvordan ser det ut når du har fargelagt partallene?	Ser du noen mønster?	Starthjelp – Kan du starte med 1. Er det et partall/oddetall? Hva med 2? Hva med 3?
	På disse radene er det jo partall. Er det noe som er likt med partallene?	Hvorfor? Hva mener du nå? Hva tenkte du nå? Kan du forklare det?	Er det noe likt i denne rekka? Enn i denne rekka?

	Hva med oddetallene? Er det noe som er likt med dem?	Hvorfor? Hva mener du nå? Hva tenkte du nå? Kan du forklare det?	Er det noe likt i denne rekka? Enn i denne rekka?
	Uten å se på brettet: Er 14 et partall eller oddetall? Er 25 et partall eller oddetall? Er 68 et partall eller oddetall?	Hvorfor det? Hvordan fant du ut det?	
Del 4 Finne ut hva som skjer om man plusser sammen to oddetall. Se om eleven forstår hvorfor to oddetall blir til et partall. Se om eleven klarer å generalisere og hvordan eleven gjør dette.	Nå skal vi prøve å plusse noen oddetall. (Legge fram 3 og 5 tellebrikker) 3 og 5 er to oddetall. Dersom du plusser 3 og 5, blir det et partall eller oddetall?	Hvorfor tror du at det blir slik? Hva mener du nå? Hva tenkte du nå? Kan du forklare det?	
	(Legge fram 5 og 7 tellebrikker) 5 og 7 er to oddetall. Dersom du plusser 5 og 7, blir det et partall eller oddetall?	Hvorfor tror du at det blir slik? Hva mener du nå? Hva tenkte du nå? Kan du forklare det?	
	Dersom eleven mestrer det foregående: Hvorfor blir to oddetall tilsammen et partall?	Hva mener du nå? Hva tenkte du nå? Kan du forklare det?	
	Vil det alltid være sånn at to oddetall tilsammen blir et partall?	Hvorfor?	

Vedlegg 3: Samtykkeskjema

<u>Til foreldre/foresatte for elever på 1. trinn ved xxx skole</u>

Dette er et spørsmål til om du vil la ditt barn delta i en undersøkelse hvor formålet er å få tak i 1. trinnselever med stort læringspotensial sine matematiske resonnementer. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for undersøkelsen og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

<u>Formål</u>
Jeg er masterstudent ved UiT Norges arktiske universitet, institutt for lærerutdanning og pedagogikk og holder på med en fagdidaktisk master i matematikkdidaktikk. Våren 2019 skal jeg gjennomføre en undersøkelse som skal ende opp i en masteroppgave.

Jeg er interessert i å se nærmere på de matematiske resonnementene til 1. trinnselever med stort læringspotensial. En elev med stort læringspotensial i matematikk er en elev som lærer raskere og tilegner seg mer kompleks kunnskap enn jevnaldrende. Grunnen til at jeg vil gjøre denne undersøkelsen er for å sette mer søkelys på elever med stort læringspotensial og deres behov til å få tilpasset sin undervisning.

Jeg har fått godkjenning av ledelsen på xxx skole til å gjennomføre min undersøkelse. Det er kontaktlærer som velger ut elever som han/hun har et stort læringspotensial i matematikk.

<u>Hva innebærer det for deg å delta?</u>
Jeg ønsker å få tak i ditt barn sine matematiske resonnementer gjennom et oppgavebasert intervju. Tema for oppgavene vil være partall og oddetall. Intervjuet vil ta ca 15-20 minutter og vil skje i undervisningstiden. Jeg ønsker å filme intervjuene, da dette vil lette mitt arbeid i etterkant.

Videoopptaket vil i hovedsak fokusere på elevenes tale, men også peking og gestikulering som en del av deres måte å kommunisere på i intervjuet.

Dere kan på forhånd se min intervjuguide ved å ta kontakt med meg.

I forkant av intervjuene vil jeg gjennomføre en muntlig kartlegging med eleven. Dette vil jeg gjøre for at jeg skal få kunnskap om elevens tallforståelse. Resultatene på denne testen vil ikke bli brukt i selve masteroppgaven.

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å la ditt barn delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om ditt barn vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser dersom du ikke vil la ditt barn delta eller senere velger å trekke samtykket.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Jeg vil bare bruke skriftlige besvarelser og film om ditt barn til formålene jeg har fortalt om i dette skrivet. Jeg vil behandle opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Film vil kun bli sett av meg, min veileder (Ove Drageset, ove.gunnar.drageset@uit.no) og eventuelt andre masterstudenter i matematikkdidaktikk. I

materialet som skrives eller på en eller annen måte presenteres for andre vil involverte personer bli anonymisert.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Masteroppgaven skal etter planen avsluttes 15. mai 2019. Etter at masteroppgaven er levert, vil all innsamlet data bli slettet.

Dine rettigheter
Så lenge ditt barn kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om ditt barn,
- å få rettet personopplysninger om ditt barn,
- få slettet personopplysninger om ditt barn,
- få utlevert en kopi av personopplysninger om ditt barn (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av ditt barn sine personopplysninger.

Hva gir meg rett til å behandle personopplysninger om deg?
Jeg behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra UiT Norges arktiske universitet, institutt for lærerutdanning og pedagogikk har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Guro Moe
  E-post: guro.mariann.moe@tromso.kommune.no
  Telefon: 91831680
- Min veileder: Ove Drageset
  E-post: ove.gunnar.drageset@uit.no
- Personvernombud UIT: Joakim Bakkevold (personvernombud@uit.no)
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Guro Moe
Masterstudent

Vedlegg 4: NSD sin vurdering

Prosjekttittel
1. trinnselever med stort læringspotensial i matematikk sine matematiske resonnementer

Referansenummer
560152

Registrert
10.11.2018 av Guro Mariann Moe - gfo002@post.uit.no

Behandlingsansvarlig institusjon
UiT Norges arktiske universitet / Fakultet for humaniora, samfunnsvitenskap og lærerutdanning / Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)
Ove Drageset, ove.gunnar.drageset@uit.no, tlf: 77660274

Type prosjekt
Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student
Guro Moe, guromoe@yahoo.com, tlf: 91831680

Prosjektperiode
01.01.2019 - 15.05.2019

Status
24.01.2019 - Vurdert

Vurdering (1)

24.01.2019 - Vurdert
Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 24.1.2019 samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte. MELD ENDRINGER Dersom behandlingen av personopplysninger endrer seg, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. På våre nettsider informerer vi om hvilke endringer som må meldes. Vent på svar før endringer gjennomføres. TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 15.5.2019. LOVLIG GRUNNLAG Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av

personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a. PERSONVERNPRINSIPPER NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om: - lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen - formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål - dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet - lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet