UiT Norges arktiske universitet

Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Resonnering i undersøkende geometriundervisning

En kvalitativ casestudie av elevers resonnementer i undersøkende matematikkundervisning i emnet geometri

Aleksander P. Fallsen og Mathias V. Fjørtoft

Masteroppgave i matematikkdidaktikk LRU-3903. Mai 2020

Forord

Denne mastergradsavhandlingen markerer slutten på vår femårige lærerutdanning for 5. - 10.trinn ved Universitetet i Tromsø - Norges arktiske universitet. I arbeidet med masteroppgaven har vi tilegnet oss kunnskaper om undersøkende matematikkundervisning og hvordan det kan legge til rette for resonnement hos elever. Dette er kunnskap vi kan dra stor nytte av i vår fremtidige yrkesutøvelse. Det er med stor glede vi kan si oss ferdig utdannet og ser fram til å begynne som lærere i skolen.

Vi vil med dette takke en rekke personer. Til å begynne med må vi rose og takke hverandre for den iherdige innsatsen og det gode samarbeidet i arbeidet med masterprosjektet som startet allerede våren 2019. Vi er svært stolte over arbeidet vi har lagt ned i prosjektet. Videre må vi takke våre veiledere, Hilja Lisa Huru og Per Øystein Haavold. Deres støtte, tilbakemeldinger og faglige innspill, i tillegg til å la oss være selvstendige, har vært til stor hjelp gjennom hele prosessen. For at prosjektet i det hele tatt skulle være mulig å gjennomføre, var vi avhengige av informanter, og vi må rette en stor takk til dem. Til våre medstudenter, takk for gode diskusjoner og kaffepauser på masterkontoret helt fram til pandemien jaget oss hjem. Til slutt, må vi også takke våre kjære samboere for støtte og forståelse for at vi til tider har tilbrakt mer tid med hverandre enn med dem.

Tromsø, mai 2020

Aleksander Pedersen Fallsen & Mathias Vatnehol Fjørtoft

Sammendrag

I dette masterprosjektet har vi undersøkt hvordan et utvalg elever på mellomtrinnet resonnerer i et undersøkende undervisningsopplegg i geometri. Vår hensikt har vært å analysere elevenes tilnærming til oppgaven de møtte og identifisere geometriske tenkevaner i elevenes resonnementer. Bakgrunnen for studien er resultatene fra TIMSS som viser at norske elever presterer dårligere enn elever fra andre land i temaet geometri. Videre er det en økende interesse for undersøkende matematikkundervisning, både på forskningsfeltet og på skolepolitisk nivå med den nye læreplanen, samt at undersøkende matematikkundervisning skal legge til rette for resonnering. Dermed virker det interessant å undersøke *hvordan elever på mellomtrinnet resonnerer i et undersøkende undervisningsopplegg i temaet geometri*.

For å undersøke dette har vi gjennomført en kvalitativ casestudie hvor vi har observert og filmet én undervisningsøkt i 7.klasse ved en skole i Tromsø kommune. Undervisningsopplegget hadde en tydelig trefasestruktur, først med en iscenesettelsesfase, deretter en fase med elevenes selvstendige arbeid og undersøkelse, og til slutt en oppsummeringsfase for refleksjon og faglig læring. På bakgrunn av denne tydelige trefasestrukturen, og ulik grad av abstraksjonsnivå i fasene, var elevenes resonnement forskjellig underveis i undervisningsopplegget. Den kvalitative, tematiske analysen av datamaterialet førte til fire kategorier for elevenes tilnærming i møte med oppgaven: (1) Prøve og feile, (2) Systematisk tilnærming, (3) Eksempel som utgangspunkt og (4) Visuell forklaring. Videre analyserte vi resonnementene for å identifisere geometriske tenkevaner definert av Driscoll et.al. (2007). De geometriske tenkevanene er: *balancing exploration and reflection, reasoning with relationships, generalizing geometric ideas* og *investigating invariants.* Alle fire tenkevanene Driscoll et al. beskriver ble identifisert gjennom undervisningsopplegget, men i ulik grad og på forskjellige måter, og svarer på hva som kjennetegner resonnementene. Funnene vi har kommet fram til er gjeldende for vårt utvalg og prosjekt. Et naturlig steg videre vil likevel være å undersøke om dette er gjeldene for et større utvalg. Videre om det fremkommer flere strategier og andre trender med tanke på geometriske tenkevaner, og i andre undersøkende undervisningsopplegg i geometri.

Innholdsfortegnelse

Tabelliste

Figurliste

1 Introduksjon

Denne masteroppgaven er basert på en kvalitativ casestudie, hvor vi har undersøkt hvordan elever på mellomtrinnet resonnerer i undersøkende matematikkundervisning i temaet geometri. Vi har i samarbeid med en lærer gjennomført én undervisningsøkt, observert og filmet, og deretter analysert hva som skjedde i undervisningsøkten.

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Resultater fra TIMSS viser at norske elever presterte betydelig dårligere enn elever fra andre deltakerland på områdene algebra og geometri, og at trenden er negativ fra 2011 til 2015 (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016). Sammenlignet med andre nordiske land, England og USA er trenden negativ fra mellomtrinnet til ungdomstrinnet i temaet geometri. Duval (1998, s. 46) poengterer at det er et gap mellom elevenes evne til å reflektere over egenskapene til en geometrisk figur, til å bruke deduksjon og presise matematiske forklaringer, og presiserer at det er en stor utfordring for lærere å arbeide med. Dette er noe som, med tanke på van Hieles nivåer for geometrisk tenkning, skal utvikles på ungdomstrinnet og ut over i videregående skole. På bakgrunn av dette er det viktig å legge et godt grunnlag for læring i geometri på mellomtrinnet.

Berthelot og Salin (1998, s. 76) problematiserer at læring i geometri og rom i grunnskolen baserer seg på at elevene arbeider med geometri i planet, altså både 2D og 3D figurer presenteres på papir eller på en dataskjerm. Ved at elevene arbeider på denne måten og ikke gjør erfaringer i den fysiske verden oppstår utfordringer til forståelse av geometri og hvordan orientere i den virkelige verden. Gulaker (2014, s. 110) trekker fram at elever sjelden får møte praktiske oppgaver og problemer, da læring av formelt symbolspråk og manipulasjon av uttrykk har blitt dyrket som kjernen i faget. De trekker videre fram at det er en krevende prosess å skape forståelse, men at variasjon kan gjøre det enklere for elevene. Utøve, anvende og ta stilling til matematikk i et mangfold av sammenhenger blir presentert av Niss og Jensen (2002) som viktig for å utvikle matematisk kompetanse.

Driscoll, DiMatteo, Nikula og Egan (2007, s. 100) sin oppfatning er at problembasert undervisning i geometri inviterer til varierte muligheter for å uttrykke forståelse. Videre har de med inspirasjon fra Cuoco, Goldenberg og Mark (1996) sine ideer om *Habits of Mind*, kommet fram til et rammeverk for geometriske tenkevaner som kan tenkes å være produktive for geometrisk problemløsning.

Høsten 2020 trer den nye læreplanen i kraft. I den nye læreplanens fagrelevans i matematikk legger Utdanningsdirektoratet (2019b) stor vekt på at elevene, gjennom utforskning og problemløsning, skal utvikle evner til å resonnere og kommunisere gjennom generalisering og abstraksjon. Videre skal faget bidra til at elevene lærer å arbeide selvstendig og samarbeide gjennom utforskning og problemløsning, noe som kan bidra til at elevene blir bevisst på egen læring.

Utforskning og problemløsning trekkes fram som ett av kjerneelementene i faget. Dette viser tydelig at undersøkende matematikkundervisning er sentralt i forskning og på det skolepolitiske nivået. Primas-prosjektet er et omfattende prosjekt på tvers av flere europeiske land som har satt søkelys på å fremme undersøkende undervisning i både matematikk og vitenskapsfag (Abril et al. 2013). I tillegg har Universitetet i Tromsø det pågående prosjektet, Sammenheng gjennom Undersøkende Matematikkundervisning (Haavold & Blomhøj, Feb 2019). Ifølge Dewey (1859-1952) er undersøkelse selve basisen for både oppdagelse og læring. Kunnskap utvikles gjennom undersøkelse og erfaringer, og ved å ta del i egne læringsprosesser (Arigue & Blomhøj 2013, s. 798; Alrø & Skovsmose, 2002, s.52). Boaler (2019, s. 26) argumenterer for at problemløsning er selve kjernen i arbeid med matematikk, hvordan matematikere jobber og hvordan de finner gleden av å prøve og feile.

Matematisk resonnering er et viktig kunnskapsområde i matematikk, og trekkes også fram som et kjerneelement i faget (Utdanningsforbundet, 2019b). Resonneringskompetanse beskrives av både Niss og Jensen (2002) og Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) som viktige for matematisk forståelse, læring og som tankeprosesser. En av de viktigste egenskapene å lære i matematikkfaget er logisk resonnering (Ross, 1998, s. 253). Dette er en fundamental egenskap, og ikke bare en matematisk egenskap. Videre peker Ross på resonneringskompetanse som sentralt og dersom kompetansen ikke utvikles hos elevene, blir matematikkfaget preget av å utelukkende følge prosedyrer, uten å vite hvorfor det gir riktig svar. Ved at elevene lærer å resonnere, vurdere og avgjøre om de har riktig svar, får de en oppfatning av at matematikk gir mening, og ikke bare memorerte prosedyrer (Boaler, 2019, s. 141).

Ifølge Blomhøj (2020, s. 3) legger undersøkende matematikkundervisning blant annet til rette for at elevene skal resonnere og bevise, argumentere, eksperimentere og prøve seg fram med ulike løsningsmetoder. Videre legges det vekt på at elevene skal selv oppdage, vurdere og argumentere for løsningsforslagene de kommer med, noe som kan komme til syne gjennom elevenes resonnementer. Dette kan støttes av Gold (2017) som diskuterer forskjellen på skolematematikk og «ekte» matematikk. Hun poengterer at matematikk med fokus på manipulasjon av symboler og uttrykk, ikke gir et fullstendig bilde av hva matematikk er. Hun mener det gir lite fokus på forståelse og relasjoner mellom matematiske konsepter. Ifølge Gold (2017, s. 135) ansees det som viktig å få elever til å tenke mer over meningen med matematikken de utøver, få elever til å utforske, finne ulike løsninger og gjøre oppgaver med blant annet flere mulige representasjoner.

Med tanke på resultater fra TIMSS og hvordan geometriundervisning tidligere har vært praktisert, endringene i læreplanen, samt det Blomhøj (2020) mener undersøkende matematikkundervisning legger til rette for, ser vi det som interessant å utvikle mer kunnskap om resonnering i undersøkende undervisning i temaet geometri. For vår egen del er det som har motivert oss mest til å gjennomføre dette prosjektet, et ønske om selv å kunne drive variert matematikkundervisning som legger til rette for at elevene får undersøke og løse problemer, både i og utenfor klasserommet, at elevene får oppleve praktiske oppgaver og ser meningen med å lære matematikk på skolen.

1.2 Problemstilling og forskningsspørsmål

Med bakgrunn i det vi har gjort rede for i det foregående, fant vi det interessant å videre studere hvordan elever resonnerer i en undersøkende undervisning i temaet geometri. Det har resultert i følgende problemstilling og forskningsspørsmål:

Hvordan resonnerer elever på mellomtrinnet i et undersøkende undervisningsopplegg i temaet geometri?

1) *Hvilken tilnærming bruker elevene når de resonnerer i den undersøkende undervisningen?*
2) *Hva kjennetegner resonnementene i den undersøkende undervisningen?*

Problemstillingen har som hensikt å belyse hvordan elevene resonnerer når de arbeider med en undersøkende geometrioppgave. Det første forskningsspørsmålet sier noe om tilnærmingen elevene hadde til oppgaven de arbeidet med, og hvilke strategivalg de gjorde. Det andre forskningsspørsmålet sier noe om hvilke geometriske tenkevaner vi gjenkjente i resonnementene, altså hva som kjennetegner resonnementene. For å undersøke dette har vi gjennomført én undervisningsøkt i en 7. klasse, observert og filmet med bruk av stasjonærkamera og GoPro-kamera. Deretter har vi analysert elevenes resonnementer gjennom hele undervisningsforløpet.

1.3 Strukturering av oppgaven

I det påfølgende kapittelet (kap.2) vil vi redegjøre for det teoretiske rammeverket for studiens analyse. Deretter, i kapittel 3, presenterer vi undervisningsopplegget som ble brukt i forbindelse med studiens datainnsamling og gjør rede for metodiske valg. Dette har videre ført til en presentasjon av analysens funn og resultater i kapittel 4. I kapittel 5 drøfter vi funnene fra forrige kapittel i lys av det teoretiske rammeverket. Til slutt, i kapittel 6 oppsummerer vi funnene og svarer på problemstillingen og forskningsspørsmålene, samt kommer vi med forslag til videre forskning innenfor temaene våre.

2 Teori

I teoridelen vil vi gå gjennom relevant teori som et rammeverk for prosjektet og for analysen vi vil gjøre i kapittel 4. Rammeverket i studien blir først en redegjørelse for undervisningsformen som brukes i undervisningsopplegget. Deretter gjør vi rede for begrepet *resonnement*, og dernest læring i geometri og geometrisk tenkning. Sist i teorikapittelet vil vi kort oppsummere teorien og klargjøre de viktigste poengene som er sentrale for de neste kapitlene i avhandlingen.

2.1 Undersøkelsesbasert matematikkundervisning

I matematikkdidaktikken står IBME for *inquiry-based mathematics education* og direkte oversatt betyr det «undersøkelsesbasert matematikkundervisning». Som vi har redegjort for i problemstillingen, er tema for masteroppgaven undersøkende matematikkundervisning. Utdanningsdirektoratet (2019b) bruker begrepet *utforskende*, mens mye av forskningslitteraturen bruker *undersøkende* eller *undersøkelsesbasert undervisning*. Begrepene blir brukt om det samme, men i denne studien benyttes undersøkelsesbasert - og undersøkende undervisning.

Begrepet undersøkelsesbasert undervisning har kommet inn i utdanningssystemet de seneste tiår og inngår som en trend. Opprinnelsen for undersøking knyttet til læring går helt tilbake til Deweys pedagogiske læringsteori, *learning by doing* (Artigue & Blomhøj, 2013, s. 798). Undersøkelser var ifølge han basisen for både oppdagelse og læring, og reflekterende undersøkelser var et begrep han utviklet. Dewey ser på læring som en adaptiv prosess hvor erfaring er grunnlaget for utviklingen av generelle tenkevaner gjennom reflekterende undersøkelser. Koblet opp mot skolen foreslo Dewey å organisere aktiviteter i skolen rundt ekte livssituasjoner og gjennom disse skape en kobling mellom skoleaktiviteter og aktiviteter som skjer utenfor skolen (Dewey 1938, referert i Artigue & Blomhøj, 2013, s. 799).

Ifølge Skånstrøm og Blomhøj (2016, s. 89) handler undersøkende matematikkundervisning om at elevene avgrenser og formulerer problemer, leter etter informasjon, stiller spørsmål, danner hypoteser, lager modeller, diskuterer med medelever og læreren, og utvikler og formidler sammenhengende faglige argumenter. Lærerens rolle i denne typen undervisning vil være å sette scenen for undervisning, skape rom for dialogisk samspill i klassen, stille åpne og nysgjerrige spørsmål, inspirere og støtte, bruke elevenes erfaringer godt og holde fast på deres systematiske undersøkelse (Skånstrøm & Blomhøj, 2016).

Dorier og Maass (2014, s. 300) definerer undersøkende matematikkundervisning som en tilnærming til undervisning i matematikk og vitenskapsfag, der elevene blir invitert til å jobbe på samme måte som matematikere og forskere gjør. Det innebærer at de må observere fenomen, stille spørsmål, lete etter matematiske og vitenskapelige måter å besvare spørsmålene, gjennomføre løsningsstrategier og vurdere løsningene, samt kommunisere disse ut effektivt. Lærerens rolle er å bruke elevenes allerede tilegnede kunnskap konstruktivt, utfordre elevene gjennom effektive, sonderende spørsmål, lede små gruppediskusjoner eller diskusjoner i hele klassen, oppmuntre til diskusjoner av alternative løsninger, og hjelpe elevene med å knytte sammen ideene deres (Dorier, 2014, s. 300). *Inquiry learning* beskrives av Hmelo-Silver, Duncan og Chinn (2007, s. 100) som en undervisningsmetode hvor elevene lærer faglig kompetanse på lik linje med spesifikk resonneringskompetanse ved å samarbeide engasjerende i undersøkelse. Definisjonen er ikke spesifikk for faget matematikk.

De overnevnte definisjonene får fram hva undersøkende matematikkundervisning innebærer på en god måte ved at Skånstrøm og Blomhøj trekker fram kjennetegn på slik type undervisning. Videre presiserer Dorier at elevene blir invitert til å arbeide på samme måte som matematikere og forskere, slik det opprinnelig stammer fra Deweys ideer om læring. Til slutt, setter Hmelo-Silver et.al faglig kompetanse og fagspesifikk resonneringskompetanse i sammenheng ved at elevene får samarbeide engasjerende i undersøkende undervisning. Vi ser store likheter mellom teoretikernes definisjoner og Utdanningsdirektoratets (2019b) forklaring av kjerneelementet *utforskning og problemløsning.* Utforskning handler om å lete etter mønster, finne sammenhenger og diskutere seg fram til en felles forståelse. Elevene skal legge større vekt på strategier og fremgangsmåter enn på løsninger. Problemløsning handler om at elevene utvikler metoder for å løse ukjente problemer. Det innebærer å analysere og omforme kjente og ukjente problemer, løse dem og vurdere om der er gyldige (Utdanningsdirektoratet, 2019b).

For å konkretisere undersøkende matematikkundervisning, sammenligner vi det med tradisjonell matematikkundervisning. Alrø og Skovsmose (2002, s. 45) forklarer at tradisjonell matematikkundervisning baserer seg på at læreren presenterer matematiske ideer som er nært knyttet til slik det er presentert i læreboka. Deretter arbeider elevene med utvalgte øvelser og oppgaver. Disse oppgavene kan løses ved bruk av teknikker læreren har presentert og blir senere kontrollert av læreren. Tradisjonell undervisning kan skje på ulike måter, men et eksempel er innlæring av multiplikasjon hvor læreren først presenterer multiplikasjonsalgoritmen, for deretter å gi elevene oppgaver de kan løse med den samme metoden som ble presentert (Alrø & Skovsmose, 2002). Undersøkende undervisning skiller seg fra dette ved at elevene skal arbeide selvstendig og i samarbeid med andre. De skal arbeide med problemer, gjennomføre undersøkelser, lete etter informasjon, kommunisere med hverandre og med læreren, og de skal utvikle sammenhengende faglige argumenter (Skånstrøm og Blomhøj, 2016). En undersøkende tilnærming til innlæring av multiplikasjon vil være å la elevene arbeide med konkreter og ulike representasjonsformer før de lærer algoritmen for multiplikasjon.

Artigue og Blomhøj (2013) tar utgangspunkt i Deweys forståelse av undersøkelse for å konseptualisere begrepet IBME. De analyserer konseptet og hvordan det passer inn med allerede veletablerte teoretiske rammeverk innenfor matematikkundervisning. Forfatterne bruker undervisningsopplegget, The rope triangle, for å illustrere hvordan undersøkelsesbasert matematikk kan organiseres og rettes mot et spesifikt mål for læring innenfor rammeverket *Theory of didactical situations* (TDS) (Artigue & Blomhøj, 2013, s. 804). Vi har benyttet oss av det samme undervisningsopplegget og redegjør for innholdet i metodekapittelet.

I TDS står a-didaktiske situasjoner, et passende miljø elevenes interaksjon skjer i, og fundamentale situasjoner sterkt. Den a-didaktiske situasjonen legges til rette for å skape gode vilkår for at elevene skal lære i interaksjon med miljøet (Artigue, Haspekian & Corblin-Lenfant, 2014, s. 51). Hensikten er å gi åpne problemer med mulighet for ulike løsningsstrategier hvor elevene får erfaringer som kan bidra til motivasjon og matematisk læring. Miljøet skal være et virkemiddel for at elevene skal kunne møte situasjonen og handle på en måte som bidrar til læring. Fundamentale situasjoner er beskrevet som at det legges vekt på elevens erfaringer i læringsprosessen kombinert med at situasjonen gjør det klart og tydelig hva og hvorfor man lærer det (Artique & Blomhøj, 2013, s. 803). Artigue og Blomhøj (2013) belyser hvordan undersøkelsesbasert undervisning kan finne sted i TDS og i andre matematikkdidaktiske rammeverk, slik kan man si at undersøkelsesbasert undervisning er et overordnet teoretisk rammeverk.

2.1.1 Kjennetegn ved og organisering av undersøkende matematikkundervisning

Primasprosjektet var et internasjonalt prosjekt som ble gjennomført i tidsrommet fra 2010 – 2013 (Abril et al., 2013, s. 1) 14 universitet fra 12 forskjellige land deltok. Prosjektet skulle støtte opp om implementeringen og bruken av undersøkelsesbasert læring i matematikk og vitenskapsfag (IBE). Her brukes IBE som en samlebetegnelse for både matematikk (IBME) og vitenskapsfag (IBSE).

Gjennom prosjektet har de identifisert kjennetegn på IBE. Tema i kjennetegnene er klasseromskulturen, lærerrolle, elevaktiviteter, spørsmålstyper og resultater av slik undervisning (Abril et al., 2013, s. 8). *Klasseromskulturen* blir beskrevet som at undervisningen er et delt eierskap mellom elevene og lærer. Det skal være en åpen dialog og elevene skal dele begrunnelser samtidig som læreren skal verdsette feil og bidragene som måtte komme fra elevene. *Læreren* skal bruke elevenes resonnering ved å verdsette og bygge på dette slik at elevenes stilas bygges videre. Å koble sammen elevenes erfaringer vil også være viktig. *Elevene* skal stille spørsmål og undersøke. Abril et al. (2013) definerer det å undersøke med fem e-ord; engage; explore; explain; extend; evaluate. Det vil si at elevene skal engasjere seg, være utforskende, forklare, utdype og evaluere. *Spørsmålstyper* som stilles i IBE er åpne spørsmål som gjerne har flere mulige løsningsstrategier og som erfares som reell og/eller vitenskapelig relevant. *Resultatene* av slik undervisning vil være at elevene får undersøkende tenkevaner, blir forberedt på uforutsigbar framtid og livslang læring, samt at elevene får en forståelse av vitenskapens- og matematikkens natur (Abril et al., 2013, s. 8).

Videre presenterer Blomhøj (2020, s. 12) en mer utfyllende karakteristikk av essensielle elev- og læreraktiviteter. Det presiseres at de samme aktivitetene forekommer i annen undervisning, men at de er markant til stede i undersøkende matematikkundervisning. De essensielle aktivitetene Blomhøj presenter er å:

Tabell 2.1: Essensielle elev- og læreraktiviteter

Essensielle elevaktiviteter	Essensielle læreraktiviteter
Stille spørsmål	Iscenesette undersøkende aktiviteter
Avgrense og strukturere	Inspirerer til undersøkende holdning og tilgang til matematikk
Observere systematisk	Formidle og allmengjøre læringsmål
Måle og kvantifisere	Bygge på og utbygge elevenes erfaringer
Klassifisere	Støtte elevenes eierskap til problemer og prosjekter
Utvikle definisjoner	Skape rom for dialogisk samspill i klassen
Beregne og lage overslag	Oppmuntre til spørsmål og refleksjon
Innføre og anvende symboler	Stille åpne og nysgjerrige spørsmål
Anvende algebra	Bemerke og anerkjenne elevenes faglige ideer og resonnementer
Resonnere og bevise	Verdsette elevenes forsøk og feil som grunnlag for læring
Representere og visualisere	Fremme samarbeid
Danne og teste hypoteser	Påpeke og allmenngjøre sentrale begreper og metoder
Eksperimentere	Evaluere elevenes faglige læring
Kontrollere variable	Evaluere forløp og utvikle praksis
Fortolke og vurdere resultater	
Kommunisere	

(Blomhøj, 2020, s. 12)

Skånstrøm og Blomhøj (2016, s. 92) anbefaler en tredeling i undervisningen for å hjelpe lærere å implementere undersøkende matematikk i undervisningen. Denne tredelingen er *iscenesettelse*, *elevenes undersøkende arbeid,* og *refleksjon og faglig læring*. Det er ikke meningen at dette har en fast rekkefølge, men det er mulig å gjenta de ulike fasene flere ganger i løpet av et undervisningsopplegg for eksempel ved at læreren gir elevene en ny utfordring underveis eller en ny oppgave. Hovedprinsippene i tredelingen av undervisning er:

(1) Iscenesettelse av undervisningsforløpet:

- Forklaring av oppgaven/problemet til elevene
- Etablering av et felles språk om utfordringen
- Etablering av det didaktiske miljøet for arbeidet
- Formidling av tidsmessige og praktiske rammer

- Klargjøring av produktkrav, vurderingsformer og kriterier.

(2) Elevenes selvstendige undersøkende arbeid krever:

- Tilstrekkelig tid, frihet og støtte til at de kan arbeide selvstendig med problemet
- Støtte til å etablere et samarbeid mellom elevene
- Støtte og utfordring gjennom dialog
- Forberedelse gjennom konstruksjon av eksemplariske dialoger

(3) Felles refleksjon og faglig læring innebærer:

- At erfaringer og resultater fra forløpet systematiseres og gjøres felles
- Trekke fram faglige poenger i elevenes arbeid
- Bygge en felles faglig kunnskap med et felles fagspråk
- Etablering av forbindelser til tidligere erfaringer og etablert viten
- Åpning for nye mulige spørsmål og undersøkelser

(Skånstrøm & Blomhøj, 2016, s. 92-93)

Hensikten med tredelingen er at de har ulike didaktiske fokus og didaktiske utfordringer i fasene. Lærerens rolle går fra å være en instruktør og formidler av kunnskap, til en som tilrettelegger for at elevene skal utvikle kunnskap. Utfordringer er ifølge Skånstrøm og Blomhøj (2016, s. 93) at det kan være krevende å gi støtte og hjelpe uten å tømme situasjonen for læring, og være i stand til å anvende og evaluere elevens læringsutbytte.

2.1.2 Læringsutbytte av undersøkende undervisning

Mange lærere er ifølge Bruder og Prescott (2013, s. 819) motvillig til å gå fra en lærerstyrt til elevsentrert undervisningsform da læreren har mindre kontroll over hva som skjer i klasserommet. Undersøkende matematikkundervisning stiller krav til lærerens kunnskap da læreren må være i stand til å håndtere uforutsette situasjoner fortløpende i undervisningen for å opprettholde flyt og læring. Læreren skal fremme elevenes matematiske tenkning gjennom spørsmål og undersøkelse av deres forståelse. I tillegg trekke fram nyttige matematiske konsepter og strukturer slik at elevene får en dypere forståelse og evne til å resonnere og koble matematiske konsepter sammen (Bruder & Prescott, 2013, s. 819).

Bruder og Prescott (2013, s. 812) har analysert studier for læringsutbyttet av undersøkende undervisning, og tatt utgangspunkt i tre strukturer for undervisningen utviklet av Kremer og Schlüter: *strukturert undersøkelse, guidet undersøkelse* og *åpen undersøkelse*. Strukturert undersøkelse innebærer at læreren gir elevene problemer eller oppgaver i tillegg til hensiktsmessig metode og materiell for å løse det. I guidet undersøkelse gir læreren elevene et problem eller en oppgave. I tillegg får de nyttig materiell for å løse oppgaven og eleven må selv finne løsningsmetoder. I åpen undersøkelse må elevene selv finne problemer og oppgaver de vil løse, samt løsningsmetode og hensiktsmessig materiell (Bruder & Prescott, 2013).

Oppsummert viser studiene generelt at elevene får et positivt utbytte av undersøkende undervisning. Det betyr at elevene får nytte i form av motivasjon, bedre matematisk forståelse, utvikling av holdninger til matematikk og ser nytten av matematikk til dagliglivet og samfunnet (Bruder & Prescott, 2013, s. 819). Av de tre formene for undersøkende undervisning viser det seg at elevene får størst utbytte av guidet undersøkelse både når det kommer til innhold og prosess. Samtidig er det også en økende mengde studier som viser at elever lærer mer av sterkt guidet læring fremfor undersøkelse. Flere studier viser blant annet at elever med lite forkunnskaper har lite utbytte av undersøkende undervisning, og at undersøkelser hvor elevene ikke får tilstrekkelig med tilbakemeldinger i arbeidet er lite effektivt (Bruder & Prescott, 2013, s. 818).

2.1.3 Problemløsning

Problemløsningstradisjonen har sitt utspring fra Pólyas (1887-1985) beskrivelse av problemløsning og problemløsningsstrategier. Han presenterte en liste av mentale operasjoner for å løse problemer: (1) forstå problemet, (2) lage en plan, (3) utføre plan (vurdere hvert steg) og (4) se tilbake. I tillegg til de fire punktene presiseres det at en rekke mentale operasjoner som å resonnere, vurdere, undersøke og stille metakognitive spørsmål, er med på å løse problemet (Schoenfeld, 1992). Lesh og Zawojewski (2007) foreslår en definisjon for problemløsning på grunnlag av at problemløsning inneholder utvikling av nyttige måter å tenke matematisk om egenskaper, relasjoner og mønster i matematikk:

> A task, or a goal-directed activity, becomes a problem (or problematic) when the «problem solver» (wich may be a collaborating group of specialists) needs to develop a more productive way of thinking about the given situation (Lesh & Zawojewski, 2007, s. 782).

Å lære elevene problemløsning på bakgrunn av Pólyas ideer, innebærer først og fremst å løse ukjente problemer hvor løsningsmetoden ikke er kjent for elevene (Schoenfeld, 1992, s. 56). Van de Walle (2013, s. 26) foreslår en tredelingsstruktur i undervisningen for problembasert matematikkundervisning. Strukturen innebærer en *førfase, underveisfase* og *etterfase*. Førfasen skal forberede elevene på å arbeide med et problem. Det vil være nyttig å forsikre seg om elevenes forståelse av problemet, aktivere tidligere kunnskap og etablere klare forventinger. I underveisfasen trekker Van de Walle fram at elevene må få mulighet til å arbeide selvstendig. Lærerens rolle vil være å observere, legge merke til elevenes matematiske tenkning, gi elevene passende støtte og utfordringer. I etterfasen er målet å legge til rette for gode diskusjoner, trekke fram matematisk tenkning og gjøre det synlig for flere elever. Til slutt er det viktig å oppsummere matematiske ideer fra timen, hjelpe elevene å trekke sammenhenger mellom strategier og matematiske ideer, samt danne en felles matematisk forståelse og språk (Van de Walle, 2013, s. 27).

Slik kan vi se at det er store likheter mellom problemløsning og undersøkelsesbasert matematikkundervisning. Elevene skal møte ukjente problem hvor de må utvikle egne strategier og teknikker for å komme til en løsning. De skal utforske, eksperimentere, og evaluere, i tillegg oppfordres elevene til å generere spørsmål og forestille seg generaliseringer av resultatene de får. Disse problemløsningskompetansene og metakognitive ferdighetene kan sammenlignes med begrepet undersøkende tenkevaner og relateres til de fem e’ene beskrevet i Primas-prosjektets kjennetegn på IBE (Abril et al., 2013). Videre er det stor likhet mellom tredelingsstrukturen Van de Walle beskriver i problemløsning og den Skånstrøm og Blomhøj presenterer i undersøkelsesbasert matematikkundervisning.

Som tidligere nevnt kan vi se på IBME som en overordnet matematikkdidaktisk teori. Det er mulig å gjennomføre problemsløsningsoppgaver uten at det er et undersøkende undervisningsopplegg, men også ha problemløsningsoppgaver som er undersøkende. Hmelo-Silver, Duncan og Chinn (2007, s. 100) sier at det er lite som skiller problemløsningstradisjonen og undersøkende matematikkundervisning, men at læreren spiller en stor rolle for å legge til rette og støtte elevenes læring. Videre skiller Hmelo-Silver et.al tradisjonene ut fra deres opprinnelse. Problemløsning stammer fra medisinsk utdanning hvor det legges stor vekt på hypotetisk-deduktive resonneringsprosesser, mens undersøkende undervisning har sin bakgrunn i vitenskapelig undersøkelser. Problembasert læring baserer seg ofte på tekstbaserte oppgaver hvor informasjon er gitt og tekstbaserte svar, mens undersøkelsesbasert læring baserer seg på at elevene må stille spørsmål, samle og forstå data og bygge konklusjoner ut fra dataene de har funnet (Hmelo-Silver et.al, 2007).

Savery (2006, s. 16) skiller undersøkelsesbasert læring og problembasert læring ved at lærerens rolle er ulik. I undersøkelsesbasert læring er læreren en tilrettelegger som oppfordrer til og forventer tenkning av høyere orden i tillegg til å kunne gi elevene informasjon som trengs for å løse oppgaven. I problembasert læring støtter læreren elevenes prosess og forventer at det skal komme tydelig fram hvordan de tenker, men gir ikke elevene informasjon relatert til problemet, elevene får større ansvar for å finne det selv (Savery, 2006).

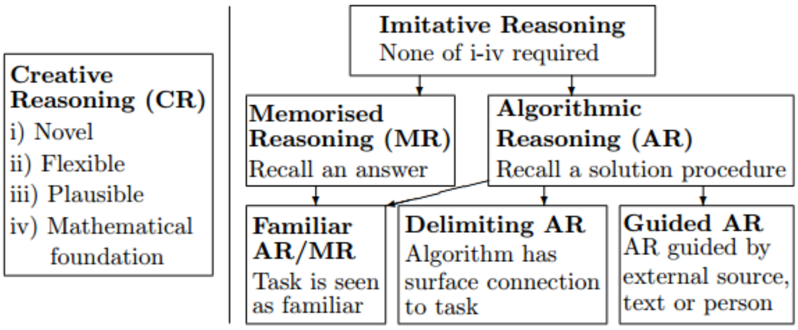
2.2 Resonnering

Resonnering som en del av matematisk kompetanse kommer godt fram både i rapporten fra KOM-prosjektet hos Niss og Jensen (2002) og hos Kilpatrick et al. (2001). Niss og Jensen (2002, s. 45) beskriver åtte matematiske kompetanser. Det er *tankegangskompetanse*, *problembehandlingskompetanse*, *modelleringskompetanse*, *resonneringskompetanse*, *hjelpemiddelkompetanse*, *kommunikasjonskompetanse*, *symbol- og formalismekompetanse* og *kommunikasjonskompetanse*. Resonneringskompetanse består blant annet av å kunne følge og forholde seg til en rekke argumenter som framstilles skriftlig eller muntlig for å støtte en påstand, men resonneringskompetanse innebærer også å kunne tenke seg og utføre egne resonnementer (Niss & Jensen, 2002, s. 54).

Kilpatrick et al. (2001, s. 116) beskriver begrepet, *mathematical proficiency*, som direkte oversatt betyr matematisk kyndighet. De har valgt å benytte begrepet for å omfavne komponenter de mener er viktig for å kunne lære matematikk. Komponentene som trekkes fram er *conceptual understanding*, *procedural fluency*, *strategic competence*, *adaptiv reasoning*, *productive disposition*. Conceptual understanding innebærer å ha forståelse for matematiske begreper, operasjoner og relasjoner. Procedural fluency vil være å ha ferdigheter for å utføre prosedyrer fleksibelt. Strategic competence innebærer evner til å formulere, representere og løse matematiske problemer. Videre innebærer adaptiv reasoning å ha kapasitet til logisk tenkning, refleksjon, forklaring og justering, og produktive disposition betyr å være tilbøyelig for å se på matematikk som nyttig (Kilpatrick et al., 2001, s. 116).

Resonnering og argumentasjon blir beskrevet i fagfornyelsens kjerneelement som å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Dette innebærer å forstå at matematiske regler og resultat ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Argumentasjon handler om at elever begrunner fremgangsmåter, resonnement og beviser at de er gyldig (Utdanningsdirektoratet, 2019b).

Både Utdanningsdirektoratet, Niss og Jensen, og Kilpatrick et al. trekker fram resonnering som en viktig kompetanse i matematikk og i læring av matematikk. De snakker om resonnering som tankeprosesser. For å forstå begrepet resonnering bruker vi Lithner (2006; 2008) som utgangspunkt, da han ser på resonnement i matematikk som alle typer resonneringsprosesser i arbeid med matematikk.



Figur 2.1: Oversikt over typer resonnering (Lithner, 2006, s. 5)

I figuren ser vi hvordan Lithner (2006) deler opp i kreativ resonnering og imitativ resonnering. Innenfor imitativ resonnering er det delt inn i undergruppene memorised reasoning (MR) og algorithmic reasoning (AR), og deretter i underkategorier. Imitativ resonnering baserer seg på at man tar utgangspunkt i løsninger og strategier man kjenner igjen fra tidligere oppgaver man har jobbet med. Kreativ resonnering beskrives av Lithner (2006, s. 10) som noe nytt for den som resonnerer, det finnes rom for ulike resonnementer, den som resonnerer begrunner strategivalget og er forankret i matematiske egenskaper og konsepter. Noe som støtter Lithners klassifisering av resonnement er Baroody (2003) og Kilpatrick et al. (2001) sin beskrivelse av rutinekunnskap og adaptiv kunnskap. Rutinekunnskap kan sees i likhet med Lithners imitative resonnering, som memorering av prosedyrer. Adaptiv kunnskap er fokus på forståelse og tenkning. Dette kan vi sammenligne med Lithners kreative resonnering og viser en bredde i hans forståelse av resonnering.

Forholdet mellom oppgavetyper og den matematiske resonneringen elever bruker kommer godt fram i en analyse av hvordan elever løser oppgaver i nasjonale prøver (Boesen, Lithner & Palm, 2010). Resultatene fra analysen viste at når elevene fikk oppgaver på de nasjonale prøvene som var høyt relaterbar til oppgavene de tidligere hadde møtt i tekstbøkene, brukte omtrent 90% av elevene imitativ resonnering. I oppgaver med lav relaterbarhet mellom tekstbok og nasjonale prøver resonnerte de fleste elevene kreativt (Boesen et al., 2010, s. 100). Star og Seifert (2006, s. 281) beskriver at utførelse av memorerte regler og prosedyrer ikke utvikler matematisk forståelse. Utførelse av memorerte regler og prosedyrer kan vi tolke som rutiner en bruker for å resonnere. Vårt prosjekt som omhandler undersøkende matematikkundervisning, vil man kunne si hjelper på elevenes kreative tenkning da det legger opp til undersøkelse og oppgaveløsning som har lite relaterbarhet til lærebokoppgavene de tidligere har møtt.

Vi kommer ikke til å gå nærmere inn på typer resonnement og identifisere kreativitet i elevenes oppgaveløsning da vi i større grad ønsker å fokusere på elevenes resonneringsprosess. Generelt kan resonnering sees på som tankeprosesser eller som et produkt av disse prosessene, men kan også sees på som en kombinasjon. Lithner (2008) beskriver fire steg i en resonneringsstruktur.

1. Eleven møter en oppgave, som er betegnet som en problemsituasjon hvor løsningsstrategien ikke åpenbart framkommer i oppgaven.
2. Eleven tar et strategivalg og velger en strategi for å løse oppgaven. Valg av strategi kan variere fra lokale prosedyrer til generelle tilnærminger og valget kan være ganske vidt. Eleven må velge, tenke tilbake, konstruere, oppdage, gjette osv. Strategivalget kan støttes av prediktiv argumentasjon ved å spørre seg selv; Hvorfor vil strategien løse oppgaven?
3. Strategien er valgt og gjennomført. Dette kan støttes av verifiserende argumentasjon ved å spørre seg selv; Hvorfor løste strategien oppgaven?
4. Oppnåelse av en konklusjon.
   (Lithner, 2008, s. 257)

Et eksempel på en slik resonneringsprosess vil være hvis elevene får oppgaven «Big foot». Oppgaven innebærer at de skal finne ut omtrent hvor høy en kjempe må være for at en sko med lengden 5,29 meter og bredde 2,37 meter kan passe. Det første steget er at elevene møter oppgaven og tolker problemet uten at en åpenbar løsningsstrategi fremkommer av oppgaven. Deretter tar elevene et strategivalg for å løse oppgaven, og kan spørre seg hvorfor strategien vil løse den. Et strategivalg vil kunne være at en elev finner forholdet mellom sin egen skostørrelse og sin egen høyde. For å gjøre en mer presis antakelse kan elevene finne gjennomsnittet av det samme forholdet ved å bruke flere elever som utgangspunkt. Deretter bruker de forholdstallet til å beregne omtrent hvor høy kjempen må være for at skoen skal passe. Da har elevene valgt strategi og gjennomført strategivalget. Elevene kan verifisere svaret ved å spørre hvorfor denne strategien løste oppgaven. Etter gjennomføringen av strategivalget oppnår elevene en konklusjon. Generelt kan man si at resonneringsprosessen er fra elevene møter en oppgave til de har oppnådd en konklusjon.

2.2.1 Bevis og argumentasjon

Argumentasjon går igjen i Lithners (2008) beskrivelse av resonnering. Underveis i resonneringen argumenterer man for at strategien man har brukt vil bidra til å komme fram til en løsning, og hvorfor den løste oppgaven. Som nevnt tidligere inneholder steg 2 og steg 3 i Lithners resonneringsstruktur argumentasjon, da man kan gjøre henholdsvis prediktive argument og verifiserende argument. Som tidligere nevnt definerer Utdanningsdirektoratet (2019b) argumentasjon i matematikk som at elevene begrunner fremgangsmåter, resonnement og løsninger og beviser at de er gyldige. Vi ser altså på argument som delsteg i resonnement.

Harel og Sowder (2007, s. 808) definerer bevis som mentale handlinger hvor man fjerner tvil om sannheten til en påstand. Videre har de kommet fram til en taksonomi for bevisskjema (bevisstrategi) som er *ekstern overbevisning, empirisk overbevisning* og *deduktiv overbevisning*. Ekstern overbevisning vil si at det er en autoritær kilde for overbevisningen. Det kan være en lærer eller en lærebok, strukturert framstilling av argumentet eller manipulering av symboler. Empirisk overbevisning baserer seg på eksempler hvor det er gjort konkrete målinger eller utregninger, eller visuelle forklaringer. Deduktiv overbevisning karakteriseres ved større grad av generalisering, med et ønske om å begrunne for alle tilfeller. Videre se for seg delsteg og forsøke å forutse utfallet gjennom bevisprosessen og til slutt se behovet for at bevis skal være logiske slutninger (Harel & Sowder, 2007, s. 809).

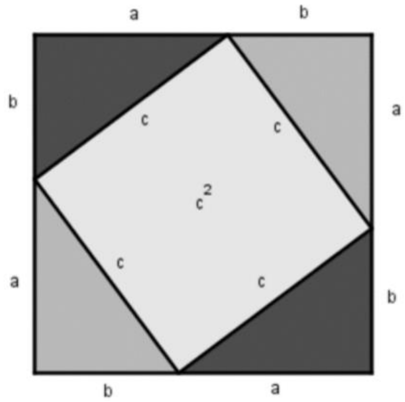
Balacheff (1988, s. 217) deler bevis inn i *pragmatiske* og *konseptuelle bevis.* Pragmatiske bevis baserer seg på handlinger og eksempler, mens konseptuelle bevis løsriver seg fra konkrete tilfeller og baserer seg på presise formuleringer av de aktuelle egenskapene det spørres om, og relasjonene mellom dem. Videre kategoriseres pragmatiske bevis som *naiv empirisme, det avgjørende eksperiment, generisk eksempel*, og konseptuelle bevis som *tankeeksperiment* og *beregning av påstand*. Et generisk eksempel er et eksempel som representerer en hel klasse av tilfeller. Eksemplet uttrykkes gjennom operasjoner og manipulasjoner av et konkret eksempel, men argumentasjonen er generell og gjelder alle tilfellene av klassen (Balacheff, 1988, s. 219). Dette kan sammenlignes med Harel og Sowders (2007) beskrivelse av bevis som empirisk overbevisning hvor resultatene baserer seg på enkelte eksempler eller visuelle oppfatninger eller forklaringer. De resterende kategoriene for bevis har vi valgt å ikke si mer om, da de ikke er relevant for vår studie.

Grabiner (2012, s. 148) skiller mellom visuelle og logiske bevis. Visuelle bevis ble brukt tidlig i flere kulturer for å vise at det de forklarte var riktig, men for noen var ikke det tilfredsstillende nok. Logiske bevis utleder at noe er en logisk konsekvens av noe som allerede anses å være sant. Bruk av bevis har to hensikter. På den ene siden brukes det for å forklare noe, mens på den andre siden brukes det til å verifisere noe (Hanna, 2018). Det kan sies å være vanskelig for elever i grunnskolen å verifisere bevis, da dette er kompliserte matematiske tankerekker. Den fagdidaktiske hensikten med et bevis i grunnskolen vil da være å forklare. Visuelle bevis vil i denne sammenhengen kunne være svært nyttig. Grabiner (2012, s. 153) sier at visuelle bevis er overbevisende psykologiske og et virkemiddel for utforskning og oppdagelse. Videre har bevis en viktig funksjon i flere aspekter ved matematikkundervisningen som; begrunnelser og beskrivelser, verifisering, utforskning, systematisering og som en intellektuell utfordring (Grabiner, 2012, s. 164).

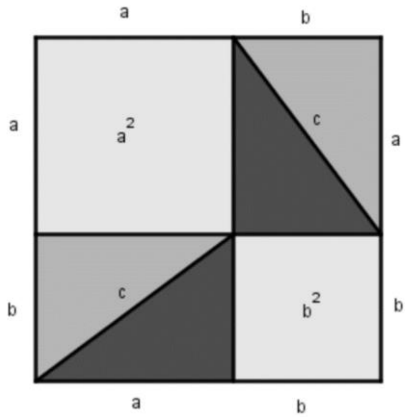
2.2.2 Resonnering i geometri

Duval (1998, s. 38) diskuterer den kognitive kompleksiteten med geometriske aktiviteter. Han presenterer tre kognitive prosesser i arbeid med geometri og presiserer at disse kan utføres separat, men er nært tilknyttet. De tre kognitive prosessene er *visualisering, konstruksjon* og *resonnering*. De kognitive prosessene kan vi også se på som tenkevaner. Visualiseringen er prosesser for å illustrere noe i romrepresentasjon, konstruksjon er prosesser med verktøy og resonnering er prosesser for utvidelse av kunnskap, bevis og forklaring (Duval, 1998).

For å konkretisere dette kan vi se på et geometrisk bevis for *Pytagoras' læresetning*. Et kvadrat har sidelengdene a og b og deles av fire kongruente trekanter abc, slik at kvadratets sidelengder blir $a + b$ som vist i figur 2.2. De fire kongruente trekantene har hypotenus c som danner det store kvadratet, c^2, i figuren.



Figur 2.3: Geometrisk bevis for Pytagoras læresetning (Kristensen & Aanensen, 2018)



Figur 2.2: Geometrisk bevis for Pytagoras læresetning (Kristensen & Aanensen, 2018)

Ved å omrokere på trekantene som vist i figur 2.3 får vi to kvadrater, a^2 og b^2, og to rektangler med sidelengder a og b. Begge kvadratene, figur 2.2 og figur 2.3, har samme areal da sidelengdene er $a + b$, og det samlede arealet i trekantene er likt. Siden arealet av trekantene er likt i begge figurene må arealet av kvadratet c^2 og kvadratene a^2 og b^2 være like stort. Dermed kan man si at $a^2 + b^2 = c^2$.

Som beskrevet tidligere forstår Lithner (2008) resonneringsprosesser som alle resonnement i møte med matematiske problemer og en prosess fra man møter en oppgave til man når en konklusjon. På denne måten kan visualisering og konstruksjon, som Duval (1998) forklarer, være delsteg i resonneringsprosessen. I eksemplet over blir den visuelle forklaringen brukt for å overbevise om at utsagnet stemmer. En slik visualisering vil ikke være avhengig av konstruksjon da man kan ha tilgang til figurer uten å måtte konstruere, men man får et klart bilde av hva som forklares, og gjennom transformasjon av figurene blir det tydelig hvorfor $a^2 + b^2 = c^2$ stemmer.

Ifølge Duval (1998, s. 45) kan enhver prosess som gjør oss kapable til å utvikle ny informasjon fra gitt informasjon sees på som resonnering. I geometri er den tilgjengelige informasjonen gitt i en visuel nD/2D-oppfatning. Derfor må informasjonen prosesseres til et representativt- og symbolsk nivå, selv om noen modeller fysisk kan konstrueres. Duval skiller videre mellom tre kognitive prosesser i problemløsning og bevisføring i geometri: *Operative apprehension* (strukturelle prosesser) som innebærer modifisering eller endringer av figurer for å løse problemer, og gir visuell styrke i problemløsning. *Natural discursive process* kommer til syne gjennom muntlige eller skriftlige beskrivelser, forklaringer og argumentasjon. *Theoretical discursive proscess* utføres gjennom deduksjon. Behovet for logiske forklaringer, resonnement og bevis oppstår og kommer til syne gjennom symbolbruk og som en del av det matematiske språket. Ifølge Duval (1998, s. 46) er det et vesentlig gap mellom den naturlige diskursive og teoretisk diskursive prosessen, og påpeker at det er en stor utfordring i geometriundervisningen å overgå dette gapet. Slik vi tolker det vil det si å være i stand til å se nytten og kunne gjennomføre logisk deduktive resonnement og bevis. Det strebes etter å utvikle læringsmiljø hvor man kan skape læringssituasjoner hvor elevene føler et indre behov for å forklare, og se nytten i deduktive begrunnelser som et verktøy. Noe av det viktigste med læringsmiljøene er at elevene samarbeider i undersøkelse etter geometriske fakta og relasjoner (Hershkowitz, 1998, s. 31).

2.3 Geometri

I dette delkapittelet vil vi ta for oss geometriske tenkevaner, van Hieles nivåer for geometrisk tenkning og abstraksjon i geometri. Dette vil være rammeverk for analysen og drøftingen.

2.3.1 Geometriske tenkevaner

Gjennom prosjektet Fostering Geometric Thinking forsøker Driscoll et al. (2007) å identifisere tenkevaner som kan gi suksessfull geometrisk problemløsning. Med inspirasjon fra Couoco et al. (1996) med *Habits of Mind*, har de kommet fram til et rammeverk for produktive geometriske tenkevaner, altså fire *Geometric Habits of Mind* (GHOM). De fire tenkevanene er *balancing exploration and reflection*, *reasoning with relationships*, *generalizing geometric ideas* og *investigating invariants* (Driscoll et al., 2007, s. 10).

Balancing exploration and reflection innebærer å prøve ulike innfallsvinkler og gå tilbake for vurdere (Driscoll et al., 2007, s. 14). Det som karakteriserer flinke problemløsere er metakognitive evner, å vurdere sin egen arbeidsprosess og hva de skal utforske videre. Utvikling av slike evner kjennetegnes ved at man tegner, leker, og utforsker flere muligheter i et problem. Videre vil de kunne se for seg løsninger, resonnere baklengs eller gjette og gjøre antakelser med ulike strategier. Driscoll et al. (2007, s. 22) deler tenkevanen inn i to deler, «exploration in foreground» og «end goals in foreground».

Exploration in foreground (Utforske fra start):

- Tegner, leker, og/eller utforsker gjennom intuisjon eller gjetning
- Tegner, leker, og/eller utforsker med å se tilbake

- Prøver strategier de er kjent med
- Endrer eller vurderer å endre på noe i situasjonen, betingelsene, eller ved den geometriske figuren

End goals in foreground (Tenker på sluttproduktet i startfasen):

- Ser regelmessig tilbake på det store bildet for å kunne se om det fungerer og for progresjon i arbeidet
- Identifiserer delsteg som kan hjelpe med å komme til en løsning
- Beskriver hvordan løsningen vil se ut
- Gjør antakelser om løsninger, utvikler måter å teste antakelsene

I deres undersøkelser av tenkevaner fikk en gruppe matematikklærere utfordringen «... kan dere lage en firkant som har to rette vinkler, men ingen par av parallelle linjer?» (Driscoll et al., 2007, s. 7). Én person startet med å tegne i sin undersøkelse, og oppdaget raskt at to rette vinkler ikke kunne være ved siden av hverandre, da ville man få parallelle linjer. På denne måten kommer det til syne at denne personen benytter seg av den første indikatoren for tenkevanen *balancing exploration and reflection* og delen av tenkevanen exploration in foreground, ved å tegne og utforske fra start.

Reasoning with relationships innebærer å aktivt se etter relasjoner i og mellom geometriske figurer basert på egenskaper (Driscoll et al., 2007, s. 12). Uten å benytte seg av sammenhengen og relasjoner mellom egenskaper i figurer vil man ikke oppnå mer enn omtrentlige svar. På et lavt nivå vil kjennetegn på dette være at elever identifisere geometriske figurer ved hjelp av egenskaper, og på et høyere nivå vise at de relaterer flere figurer til et problem gjennom geometriske resonnement. Videre har Driscoll et al. (2007, s. 19) i sin analyse bemerket seg flere indikatorer på tenkevanen som de deler inn i tre kategorier:

Fokus på flere figurer:

- Sammenligner to geometriske figurer med å spesifisere noen egenskaper de har felles (kan være relevant eller irrelevant for å løse problemet)
- Sammenligner to geometriske figurer med å spesifisere alle egenskapene de har felles og hvorfor (relevant til problemet)

- Setter to geometriske figurer opp mot hverandre med å bemerke egenskaper de ikke har felles
- Sammenligner figurer med tanke på deres egenskaper i dimensjoner (1D, 2D og 3D)

Fokus på deler i en enkelt figur:

- Bemerker og setter strukturer innen en geometrisk figur i sammenheng.
- Konstruerer strukturer innen en geometrisk figur
- Relaterer to geometriske figurer med å bemerke at de kan sees som deler av én figur.

Bruk av spesielle resonneringsferdigheter:

- Resonnerer forholdsmessig om to eller flere geometriske figurer
- Bruker symmetri til å sette geometriske figurer i sammenheng

Generalizing geometric ideas innebærer å ha et ønske om å forstå og forklare på et generelt nivå, slik at man snakker om alle tilfellene av et geometrisk fenomen (Driscoll et al., 2007, s. 12). Det er viktig for elever å lære at det ofte ikke er nok å finne én løsning, eller et begrenset antall løsninger til et problem. Generelt vil kjennetegn på generalisering kunne være at å bruke løsningen på ett problem for å løse nye, eller om en elev innser å ikke ha funnet alle løsningene. På et høyere nivå vil det være å finne alle mulige løsninger og argumentere for hvorfor. Videre vil det også være å undre seg over hva som vil skje om konteksten endrer seg (Driscoll et al., 2007). Driscoll et al. (2007, s. 16) har satt sammen en liste som beskriver utvikling i evner for å generalisere:

Tabell 2.2: Indikatorer på utvikling av tenkevanen generalizing geometric ideas

Lite utviklet	**Overgang**	**Mer utviklet**
- Tenker på relevante spesielle tilfeller (f.eks. rettvinkla trekant, likesida trekant)	- Er klar over at betingelsene gjelder for uendelig mange løsninger, betrakter bare et tilfelle	- Ser et helt sett av løsninger og kan forklare hvorfor det ikke er flere
- Ser utover de spesielle tilfellene til andre eksempler som passer	- Ser et uendelig, sammenhengende varierende sett av tilfeller som fungerer, men begrenser mengden	- Bemerker en regel som er universell for en klasse av geometriske figurer
- Prøver å lage nye tilfeller ved å endre egenskaper i allerede identifiserte tilfeller		- Setter problemer eller regler i en større kontekst
- Oppfatter at det er andre løsninger, men vet ikke hvordan å komme fram til dem		

(Driscoll et al., 2007, s. 16)

Driscoll et al. (2007, s.15) ser tenkevanene i sammenheng og forklarer det med at man i en problemløsningsprosess kan dra nytte av flere av tenkevanene. Et eksempel på dette vil være at en elev undersøker og oppdager *pi (π)* ved å gjøre målinger av flere sirkler, og ser på sammenhengen mellom omkrets og diameter. Da gjør elevene som Driscoll et al. beskriver som reasoning with relationship. Eleven har funnet et konstant forhold mellom omkrets og diameter i sirklene og kan gå så langt som å generalisere forholdet til å gjelde alle sirkler. Da har eleven gjort det som omtales som generalizing geometric ideas (Driscoll et al., 2007).

Den fjerde tenkevanen *investigating invariants* innebærer å analysere hvilke egenskaper som er de samme og hvilke som endrer seg om situasjonen endres (rotasjon, speiling etc.). Kunnskap om geometriske egenskaper gjennom transformasjon er ifølge Driscoll et al. (2007, s. 13) viktig for å skille ulike typer geometri og de presiserer at slik kunnskap er nødvendig i ulike yrkesgrupper hvor matematikk er viktig. Indikasjoner på slike undersøkelser vil kunne være når noen forsøker å transformere figurer uten å bli bedt om det, og betrakter hva som har endret seg og ikke. På et høyere nivå vil det være å undersøke ekstremtilfeller i et problem. De skiller mellom dynamisk tenkning og verifisering av effekt (Driscoll et al., 2007, s. 20).

Dynamisk tenkning:

- Tenker dynamisk om et statisk tilfelle
- Undrer seg om hva som endres og hva som holder seg likt når det blir gjort en transformasjon
- Utfører flere transformasjoner og ser etter likheter
- Tenker på hva som skjer hvis man flytter et punkt eller en figur sammenhengende og forutser hva som vil skje.
- Tenker på enkelttilfeller og ekstremtilfeller under transformasjon

Verifisering av effekt:

- Oppfatter at ikke alt endrer seg når man gjør en transformasjon
- Legger merke til at den samme virkningen skjer hver gang en type transformasjon blir gjort, og bemerker det
- Legger merke til hva som er konstant når man gjør en transformasjon og forklarer hvorfor.

I den samme oppgaven som ble presentert under tenkevanen balancing exploration and reflection var det en annen person som startet med å tegne en rettvinkla trekant og speilet den over hypotenusen. Siden utgangspunktet ikke er en likebeint trekant, vil løsningen passe beskrivelsen i oppgaven. I denne forklaringen tenker personen dynamisk og utfører transformasjoner (speiling) med figuren. Videre betrakter personen hva som endrer seg og ikke ved utførelse av transformasjonen, og verifiserer om det vil passe beskrivelsen i oppgaven.

Videre foreslår Driscoll et al. (2007, s. 95) noen prinsipper for undervisning som kan bidra til å fostre geometrisk tenkning. Geometrisk tenkning utvikles gjennom regelmessig problembasert undervisning. Geometri på mellomtrinnet krever spesiell oppmerksomhet rundt lærer-elev kommunikasjon og arbeid med geometri på barneskolen er viktig grunnarbeid for læring av geometri på ungdomstrinnet. De legger stor vekt på at elevene skal løse varierte oppgaver med ulike vinklinger, utvikle læringsmiljø som inneholder bruk av muntlig og skriftlig språk, og et bredt utvalg av representasjonsformer. Slike læringsmiljø omtaler de som *multimodal mathematical communication* (Driscoll et al. 2007, s. 100). Kommunikasjon mellom lærer og elev er viktig faktor for at elevene skal få den støtten de trenger for å forstå matematiske konsepter og de presiserer lærerens evne til å stille spørsmål som et viktig verktøy. De skiller mellom orienterende spørsmål hvor læreren retter elevenes fokus mot problemet de skal løse og ulike måter å løse det på, vurderende spørsmål for å få tak i elevenes forståelse og argumentasjon når de arbeider med et problem, og spørsmål som fremmer utvikling mot en dypere forståelse. På ungdomstrinnet og i videregående utdanning vil det være større fokus på formelle bevis og derfor mener Driscoll et al. at det er viktig å fokusere på kognitive utfordringer i oppgaver og utvikling av metakognitive ferdigheter, samt overbevisende forklaringer i geometriundervisningen på mellomtrinnet (Driscoll et al., 2007).

2.3.2 Van Hieles nivåer for geometrisk tenkning

Pierre van Hiele arbeidet med å forstå barns forståelse av geometri og undersøkte hvordan de lærer geometri. Et grunnleggende prinsipp i hans teori er at læring av strukturer er langt mer viktig enn å lære fakta (Van Hiele, 1986, s. viii). Han mente at det var en mismatch mellom det elevene skulle lære og elevenes nivå for matematisk tenkning (Van Hiele, 1999, s. 310). Læring i geometri på ungdomsskolen baserte seg på Euclids formelle aksiomatiske geometri, med fokus på aksiomer, definisjoner, teoremer og bevis. Ifølge van Hiele har ikke elevene forutsetninger til å forstå dette, og dermed oppstår det et gap mellom elevenes nivå for matematisk tenkning og det elevene lærer. Van Hiele mente derimot at læring av geometri starter med lekbaserte aktiviteter som «mønsterblokker» og «tangram» (Van Hiele, 1999). Ifølge han er det flere nivåer som er nødvendig for å forstå geometrisk tenkning, og utviklingen skjer gjennom læring og utvikling av matematisk språk og strukturer. For å oppnå det høyeste nivået må læring og undersøkelse av de lavere nivåene skje og videre utvikles til nye strukturer (Hiele, 1986, s. 6).

Det laveste nivået for geometrisk tenkning, nivå 0 i van Hieles modell, er det visuelle nivået (Van Hiele, 1999, s. 311). På dette nivået er elevene i stand til å kjenne igjen geometriske figurer som at «dette er en firkant, fordi det ser ut som en boks». De kjenner igjen figurene uten å kunne beskrive dem matematisk. Det neste nivået er det deskriptive nivået (1). En elev gjenkjenner den geometriske figuren fordi den har visse egenskaper, som for eksempel at kvadratet har fire like sider, fire like vinkler og symmetri. Det matematiske språket blir viktig for å kunne beskrive geometriske figurer. En utfordring for mange elever er å identifisere figurer som er orientert på en «uvanlig måte» (Battista, 2007, s. 846). Flere forskere utpeker lærebøker som en kilde til denne utfordringen, da mange bruker de samme eksemplene med en horisontal orientering (Driscoll et al. 2007, s. 33). Eksempelvis en rettvinkla trekant med den rette vinkelen nede til venstre i grunnlinja.

Nivå 2 er uformell deduksjon som innebærer at egenskapene i større grad er logisk ordnet. Elevene er i større grad i stand til å se sammenhenger mellom egenskapene til en figur som for eksempel «Hvis alle fire vinklene er rette, må det være et rektangel. Hvis det er et kvadrat, er alle vinklene rette. Hvis det er et kvadrat, må det være et rektangel» (Van de Walle, 2013, s. 264). Elevene lærer i større grad å utføre logiske resonnement, men er likevel ikke kommet så langt at de kan forstå meningen med deduksjon og den Euclidske geometrien, altså aksimoer, definisjoner og bevisenes rolle i geometri (Van Hiele, 1999, s. 311).

På nivå 3 (deduksjon) er elevene i stand til å analysere argumenter, hvor et system av aksiomer, definisjoner, teoremer og postulater utvikles, og relasjoner mellom disse (Van de Walle, 2013, s. 265). Etter hvert vil elevene i større grad også se nytten av å etablere geometrisk sannhet. Elever på slutten av ungdomstrinnet og oppover er vanligvis på dette nivået. På det siste nivået (4), av geometrisk tenkning i van Hieles modell, er eleven i stand til å etablere teoremer i ulike systemer av postulater og kan sammenligne dem (Van de Walle, 2013).

2.3.3 Abstraksjon

I kjerneelementet abstraksjon og generalisering definerer utdanningsdirektoratet abstraksjon som en utvikling som går fra konkrete beskrivelser til formelt symbolspråk (Utdanningsdirektoratet, 2019b). Abstraksjon trekkes fram som viktig for geometrisk læring og for å forstå geometrisk resonnering. Refleksjon og abstraksjon gjør oss i stand til å utvikle mer krevende mentale modeller (Battista, 2007, s. 859). Battista presenterer ulike nivåer av abstraksjon som viser prosessene av å abstrahere matematiske objekter, som fører til god resonnering. *Perceptual abstraction* er det første nivået. Det innebærer at man blir bevisst på, og tar inn i arbeidsminnet, det man kan se fysisk, men er ikke i stand til å visualisere, reflektere over, og bruke objektet uten at det er fysisk representert (Battista, 2007).

Det neste nivået av abstraksjon er *internalization*. Når noe har blitt fullstendig abstrahert slik at det kan bli reprodusert selv om man ikke har perseptuell påvirkning, er det blitt internalisert. Likevel er man ikke i stand til å reflektere over eller analysere figurens struktur (Battista, 2007). Det siste nivået av abstraksjon er *interiorization.* Interiorization er den mest generelle formen av abstraksjon (Steffe & Cobb, 1988, s. 337). Det leder til en forståelse av struktur, mønster, og handlinger fra egne erfaringer. Det innebærer å kunne ta konseptet bort fra den erfarte konteksten og reflektere over det. Likevel er den erfarte konteksten viktig i nye og ukjente situasjoner. På det andre nivået av *interiorized abstraction* er man i stand til å operere med det abstraherte uten at det er representert og i tillegg er i stand til å representere det ved bruk av symboler (Battista, 2007).

Gapet mellom den naturlige diskursive og teoretisk diskursive prosessen Duval (1998) presenterer kan relateres til nivådelingen for abstraksjon og van Hieles nivåer for geometrisk tenkning. For å nå de øverste nivåene i van Hieles modell må man være i stand til å analysere deduktivt, med et nettverk av definisjoner, aksiomer, teoremer og postulater, og logisk resonnere og gjøre antakelser med bruk av symbolspråk på det andre nivået av interiorized abstraction. Duval (1998) nivådeler ikke de kognitive prosessene, men diskuterer at det er prosesser involvert i geometrisk problemløsning.

2.4 Oppsummering av teori

Vi har løftet fram flere teoretikere som diskuterer begrepet undersøkende matematikkundervisning. Begrepets opphav kommer fra Deweys tanker om oppdagelse og læring. Vi har trukket fram Skånstrøm og Blomhøj (2016), Dorier (2014) og Hmelo-Silver et al. (2007) sine definisjoner for undersøkende matematikkundervisning. Med dette som utgangspunkt forstår vi denne formen for undervisning som en overdragelse fra lærerstyrt til elevsentrert undervisning, hvor elevene i stor grad undersøker, eksperimenterer, resonnerer og kommer med løsningsforslag, selvstendig og i samarbeid med andre. Lærerens rolle blir å fungere som en viktig støttespiller både til elevenes faglige antakelser, argumenter og resonnement, men også til flyt i arbeidet og samarbeid. For å planlegge, gjennomføre og vurdere denne formen for undervisning foreslår Skånstrøm og Blomhøj en tredelingsstruktur i undervisningen. Ifølge Abril et al. (2013) er et ønskelig resultat av undersøkende matematikkundervisning at elevene utvikler undersøkende tenkevaner.

Vi har tatt utgangspunkt i Lithner (2008) i vår forståelse av resonnering samtidig som vi ser at flere forskere diskuterer resonnering som viktige tankeprosesser. Som beskrevet i kapittelet om resonnering har vi valgt å undersøke elevenes resonneringsprosesser, fremfor å identifisere imitative og kreative resonnement. Lithner foreslår fire steg i en resonneringsprosess. Vi ser likheter mellom dette og slik Pólya beskriver fire steg i en problemløsningsprosess. Videre ser vi gjennom teorien at det er store likheter mellom undersøkende undervisning og problemløsning. Problemløsningsprosessen innebærer ifølge Pólya å forstå problemet, lage en plan, utføre planen og se tilbake og vurdere, sammen med flere mentale operasjoner (Schoenfeld, 1992). Lithner (2008) beskriver resonneringsprosessen som en prosess hvor elevene møter et problem, gjør et strategivalg (argumenterer for strategivalget), gjennomfører strategien og til slutt kommer med en konklusjon. Underveis hos både Pólya og Lithner legger de vekt på å vurdere kritisk hvordan og hvorfor man vil komme fram til en eventuell løsning, som er viktige metakognitive strategier. Stegene og innholdet vi ser i problemløsningsprosessen og resonneringsprosessen er alle essensielle elevaktiviteter og kjennetegn på undersøkende matematikkundervisning. I det ligger det at aktivitetene er markant til stede i undervisningen (Blomhøj, 2020).

Driscoll et al. (2007) har identifisert tenkevaner de anser gir suksessfull geometrisk problemløsning. De fire tenkevanene er *balancing exploration and reflection*, *reasoning with relationship*, *generalizing geometric ideas*, *investigating invariants*. De sees ikke på som adskilte tenkevaner, men man kan bruke flere for å komme fram til en løsning på et problem. Disse tenkevanene kan sees på som kjennetegn på resonnementene elevene gjør underveis i undervisningen. Van Hieles nivåer er velkjent teori sammenlignet med tenkevanene til Driscoll. Derfor prøver vi å trekke koblinger mellom elevenes tenkevaner, abstraksjonsnivå og nivå av geometrisk tenking hos Van Hiele.

I fagfornyelsen er kjerneelementene trukket fram som det viktigste faglige innholdet i undervisningen. Læreplan legger stor vekt på at elevene skal utforske og bli gode problemløsere. Kjerneelementene består av sentrale begreper, metoder, tenkemåter og kunnskapsområder (Utdanningsdirektoratet, 2019a). Utforskning og problemløsning, resonnering og argumentasjon, og abstraksjon og generalisering er kjerneelementer som er relevante for vår studie.

3 Metode

Ifølge (Postholm, 2010, s. 37) er det stor sammenheng mellom det teoretiske utgangspunktet og problemstillingen i forskningen, som videre legger føringer for valg av metode og analyse, og hvordan resultatene blir presentert. I dette kapittelet ønsker vi å presentere vårt vitenskapelige ståsted gjennom forskningsstrategi og problemstillingen vi har tatt utgangspunkt i, deretter hvilket forskningsdesign vi har valgt, utvalget i studien, undervisningsopplegget vi har brukt i studien, hvordan vi har gjennomført datainnsamlingen, etiske betraktninger, kvalitet i studien, og til slutt analyseprosessen.

3.1 Forskningsstrategi

Kvalitative forskere samler inn data i den settingen deltakerne opplever det som undersøkes. Informasjonen forskeren samler inn, ved å snakke direkte med mennesker og se hvordan de opplever og deltar i konteksten, er en viktig karakteristikk av kvalitative studier (Creswell, 2014, s. 185). Ifølge Postholm, Jacobsen og Søbstad (2018, s. 51) har alle konstruktivistiske epistemologier som utgangspunkt at verden ikke er objektiv, men konstruert mer eller mindre av mennesker. Når virkeligheten konstrueres sammen med andre plasserer forskningen seg innenfor sosialkonstruktivismen (Postholm et al., 2018, s. 50). Vår problemstilling er: *Hvordan resonnerer elever på mellomtrinnet i et undersøkende undervisningsopplegg i temaet geometri?* Dermed plasserer vårt forskningsprosjekt seg innenfor den sosialkonstruktivistiske forskningstradisjonen, da vi undersøker prosesser i sin naturlige kontekst, og virkeligheten konstrueres i en samhandling mellom oss som forskere, læreren som deltar og eleven som deltar i undervisningen.

3.2 Forskningsdesign

Casestudier er et utbredt forskningsdesign innen samfunnsvitenskapelig forskning og åpner for å fokusere i dybden på en spesifikk case med mulighet for å beholde et virkelighetsnært perspektiv (Yin, 2018, s. 5). Ifølge Merriam (2009, s. 40) er en casestudie en grundig beskrivelse og analyse av et bundet system. For at en studie skal kunne klassifiseres som en casestudie må enheten som analyseres være en spesifikk gruppe mennesker, gruppe elever, eller et spesifikt program eller aktivitet. Postholm et al. (2018, s. 63) presiserer at et bundet system også avgrenses av tid og sted, og at konteksten spiller en helt sentral rolle. Vår studie baserer seg på at et utvalg elever på mellomtrinnet gjennomfører et undersøkende undervisningsopplegg i geometri med en klar tredelt struktur. Dette blir da casen som undersøkes hvor det videre analysearbeidet består av å identifisere elevenes resonnement i det spesifikke undersøkende undervisningsopplegget. Slik Merriam (2009, s. 43) beskriver ulike typer casestudier vil vår studie være en deskriptiv casestudie, da produktet vil bestå av *tykke beskrivelser*. Tykke beskrivelser innebærer ifølge Merriam komplette skriftlige beskrivelser av det som studeres. Det blir et tankeredskap som følge av at leseren får mulighet til å overføre og tilpasse funn til egne situasjoner. Slike beskrivelser består av både beskrivelser av hva som faktisk skjer og konteksten det skjer i (Postholm et al., 2018, s. 239). Med bakgrunn i det overnevnte blir tykke beskrivelser et viktig verktøy for å gjøre denne studien overførbar til lignende situasjoner, altså bidra til en generalisering av funnene som er gjort.

3.3 Utvalg

Utvalget i studien baserer seg på at vi ønsker å undersøke hvordan elever arbeider utforskende og hvordan de resonnerer i et praktisk arbeid med geometriske figurer i matematikk. Studiens undervisningsopplegg er beregnet på mellomtrinnet slik det er designet i vårt prosjekt. Videre har vi ikke fokus rettet mot sterke eller svake elever, men helheten i en skoleklasse. Dermed ble hovedkriteriet at vi ønsket en skoleklasse på mellomtrinnet med en lærer som underviser i matematikk med utdanningen som kreves. Vi ønsket en lærer med undervisningskompetanse i matematikk da dette kan styrke påliteligheten og troverdigheten i vårt prosjekt. Alternativt kunne vi som forskere gjennomført undervisningsopplegget i samme klasse, men for at situasjonen skulle bli så lik deres normale undervisning som mulig, gjennomførte læreren undervisningen.

Vi fikk tak i informanter ved å oppsøke rektor på skolen. Rektoren satte oss i kontakt med aktuelle informanter i henhold til våre kriterier, og som var interessert i å delta i vårt prosjekt. Videre ble informantene orientert om prosjektet og fikk fritt velge om de ville delta i prosjektet gjennom informasjonsskriv vi hadde laget på forhånd (vedlegg 5 og 6). Utvalget fyller kriteriene til det Postholm (2010, s. 39) omtaler som *hensiktsmessige utvalg*, og er et generelt utvalgskriterium som danner grunnlag for valg av setting og personer. Utvalget bestod av en 7.klasse i Tromsøområdet. I studiens undervisningsøkt arbeidet elevene i grupper. 16 elever fra klassen ønsket å delta i prosjektet, dermed fikk vi fire grupper med fire elever på hver gruppe som var grunnlag for datamaterialet. På tre av gruppene var det to gutter og to jenter, mens på den siste gruppa var det tre gutter og ei jente. Læreren hadde ansvar for å lage så homogene grupper som mulig med tanke på kompetansenivå. I studien har vi ikke valgt å undersøke deltakelse innad i gruppene, men gruppene og klassen som en helhet. De elevene som ikke ønsket å delta i prosjektet var på egne grupper og fikk dermed mulighet til å delta i undervisningen. De hadde ikke kamera på seg, og er dermed ikke en del av datamaterialet.

3.4 Undervisningsopplegget

I forberedelsene til undervisningen hadde vi flere møter med læreren for å sette hen inn i studiens formål og metode. I den forbindelse fikk læreren et dokument med beskrivelse av undervisningsopplegget, hvordan det skulle gjennomføres og om det teoretiske utgangspunktet for undervisningsopplegget (vedlegg 1). I samtalene med læreren i forkant av gjennomføringen kom det fram at elevene skulle lære om geometriske figurer før undervisningsopplegget i vårt prosjekt skulle gjennomføres. Dermed hadde elevene en del forkunnskaper de kunne bruke for å løse oppgaven. Undervisningsopplegget, The rope triangle, er hentet fra artikkelen *Conceptualizing inquiry-based education in mathematics* (Artigue og Blomhøj, 2013).

Hensikten med undervisningen er at elevene skal komme fram til den generelle betingelsen for alle trekanter, trekantulikheten. Den defineres som at summen av to sider må være større eller lik den tredje siden, for å kunne lage en trekant, $a + b \geq c$. I denne fremstillingen av trekantulikheten må man betrakte ekstremtilfeller hvor sidelengdene $a + b$ er tilnærmet lik eller lik c. I slike tilfeller vil også trekantens areal være tilnærmet lik eller lik null. Dette for å omfatte alle tilfeller av trekanter. I undervisningsopplegget The rope triangle skal elevene lage trekanter som er visuelt forklarende for trekanters egenskaper og ikke ekstremtilfeller hvor det vil i stor grad se ut som en rett linje. Dermed vil det være hensiktsmessig å forholde seg til tilfeller hvor, to av sidelengdene er større enn den tredje, $a + b > c$.

For å komme fram til trekantulikheten legger undervisningsopplegget opp til at elevene skal undersøke hvor mange trekanter de klarer å lage med et tau. Begrensningene til oppgaven er at tauet har 13 knuter som danner 12 «enheter» som vil være sidelengdene i trekantene. For å lage en trekant må de ha én knute i hvert hjørne og sidelengdene kan utelukkende bestå av hele enheter. Med en omkrets på 12 enheter vil det da kun være mulig å lage tre forskjellige trekanter. En rettvinkla trekant med sidelengdene 3-4-5, en likesida trekant med sidelengdene 4-4-4 og en likebeint trekant med sidelengdene 5-5-2. Det vil likevel være interessant om elevene undersøker og prøver å lage trekanter med andre sidelengder. Gjennom en felles diskusjon om trekantene de har laget og hvilke som ikke er mulig å lage skal man kunne komme fram til en konklusjon om trekantulikheten. Et annet aspekt ved undervisningsopplegget er at det kan fokuseres på å diskutere trekantenes egenskaper. Da åpnes muligheten for å undersøke figurenes egenskaper representert på ulike måter.

Undervisningsopplegget er forklart av Artigue og Blomhøj (2013) med tredelingsstrukturen beskrevet av Skånstrøm og Blomhøj (2016, s. 92) som er presentert i kapittel 2.1.1. Vi har videreført og forholdt oss til samme struktur i gjennomføringen av vår studie. Første del av undervisningen fant sted i klasserommet hvor læreren iscenesatte undervisningsforløpet. Dette innebar at læreren hadde en gjennomgang av undervisningsopplegget for å gi elevene utfordringen, etablere en felles forståelse for oppdraget, etablere det didaktiske miljøet for arbeidet, og rammer og krav til arbeidet. Iscenesettelsesfasen varte i ti minutter. Oppgaven ble presentert for elevene slik:

> *Dere skal arbeide i grupper på fire hvor hver gruppe får utdelt et tau med 13 knuter som danner en rekke med 12 enheter. Dere skal gå ut i skolegården og lage så mange trekanter som mulig hvor kravet er at hvert hjørne i trekanten må ha en knute. Tre personer på gruppen må holde i tauet for å kunne lage trekanter. Når dere har laget en trekant skal den fjerde på gruppa skrive ned sidelengdene til trekanten og dere skal diskutere figurens egenskaper, og skrive de på siden av figuren.*
> (Utdrag fra transkripsjon)

Elevene fikk utdelt et arbeidsark (vedlegg 2) for å tegne trekantene og skrive figurens egenskaper. I den andre fasen av undervisningsopplegget skal elevene ut i skolegården for å lage trekanter med tauet. Elevene skal arbeide fritt med tauet og læreren fungerer som en støtte til elevenes arbeid med å stille oppfølgende spørsmål og bidra til elevenes samarbeid. Denne fasen varte i rundt 20 minutter. I den tredje fasen, refleksjon og faglig læring, inne i klasserommet, skal det gjøres en gjennomgang av trekantene elevene har kommet fram til. Da får de mulighet til å presentere funnene sine og kontrollere svarene. Videre skal elevene få utfordringer knyttet til andre mulige trekanter og hvilke som ikke er mulig. Undersøkelsene fra fase 2 og gjennomgangen i fase 3 skal legge grunnlag for at elevene når fram til en konklusjon om trekantulikheten. Den tredje fasen varte nærmere 50 minutter.

3.4.1 Begrunnelse for valg av undervisningsopplegg

Kriteriet for valg av undervisningsopplegg til denne studien er at det må være undersøkende innenfor temaet geometri, noe som vil styrke studiens pålitelighet og reliabilitet. Dette blir for øvrig redegjort for i kapittel 3.7. Typisk for undersøkende matematikkundervisning ifølge Dorier (2014, s. 300) er at elevene må observere et fenomen, stille spørsmål, gjennomføre løsningsstrategier, og vurdere løsningene. Lærerens rolle er å utfordre elevene, lede diskusjoner i klassen, oppmuntre til diskusjoner av alternative løsninger, og hjelpe elvene med å knytte sammen deres matematiske ideer. Den første likheten vi ser mellom undervisningsopplegget og undersøkende undervisning er den klare tredelingsstrukturen Skånstrøm og Blomhøj (2016) presenterer for å hjelpe læreren til å drive undersøkende undervisning.

I undervisningens fase 1 forklarer læreren undervisningsopplegget, elevene får tilstrekkelig materiell for å løse oppgaven, men ikke informasjon som sier noe om hvor mange trekanter de kan lage, eller spesifikke løsningsstrategier. Dette medfører at det er en åpen oppgave med mulighet for å observere fenomenet, utføre ulike løsningsstrategier innenfor oppgavens rammer, og inspirerer til undersøkende holdning hos elevene, som Blomhøj (2020) trekker fram i essensielle læreraktiviteter i undersøkende matematikkundervisning. Ved at det skjer en overdragelse av oppgaven fra læreren til elevene må elevene selv avgrense og strukturere arbeidet, oppsøke informasjon, stille spørsmål, diskutere med hverandre og utvikle faglige argumenter. Dette sammenfaller med definisjonen av undersøkende matematikkundervisning av både Dorier (2014), og Skånstrøm og Blomhøj (2016). Undervisningsopplegget har også vært brukt i Primas-prosjektet for å se hvordan man kan legge til rette for undersøkende matematikkundervisning og hva som kjennetegner den (Blomhøj, 2020). Dermed har andre forskere brukt det samme undervisningsopplegget for å studere undersøkende matematikkundervisning.

Ved at elevene får begrenset mengde informasjon om antall trekanter de kan lage og mulige løsningsstrategier, samt tilstrekkelig materiell for å løse oppgaven, er det en guidet undersøkelse slik Bruder og Prescott (2013) definerer det. Deres analyser viser at denne typen undervisning har en positiv effekt på elevers læring, både med tanke på innhold og prosess. Elever får et positivt utbytte for motivasjon, matematisk forståelse, de utvikler gode holdninger og ser relevansen av matematikk i større grad (Bruder & Prescott, 2013, s. 819).

3.5 Datainnsamling

For å studere hvordan elever resonnerer i et undersøkende undervisningsopplegg ser vi på observasjon som mest hensiktsmessig. En av grunnene til at observasjon er en viktig metode for datainnsamling i kvalitative studier er fordi deltakere ofte kan si at de gjør noe, men i realiteten gjør de noe annet. Observasjon setter forskeren i direkte kontakt med det som skjer og gir mening til aktiviteten basert på det som observeres (Corbin & Strauss, 2008, s. 29-30).

For at elevene skal ha en mest mulig naturlig undervisningstime, vil det være hensiktsmessig at læreren gjennomfører undervisningsøkten, og at vi inntar en observasjonsrolle av første orden slik Bjørndal (2011, s. 32) beskriver det, altså hvor man har observasjon som primæroppgave. For å fremme matematiske resonnementer og argumentasjon vil læreren ha en nøkkelrolle i å støtte elevene om de skulle stå fast, eller løfte det matematiske språket i samtalen. Siden målet med studien er å undersøke matematiske resonnement, vil det kunne være hensiktsmessig at vi også trer inn som deltakende observatører. Det gir oss mulighet til å observere samtidig som at vi kan hjelpe til med å stille elever oppfølgende spørsmål i de matematiske prosessene. Med en slik rolle inntar man en observasjon av andre orden slik Bjørndal beskriver det. Han presiserer at i mange situasjoner vil arbeidet med observasjon havne i en mellomposisjon mellom observasjon av første og andre orden. Slik vi deltar i undervisningen har vi ikke undervisning som primærrolle. Dermed havner vi i en mellomposisjon, hvor det er høy grad av åpenhet og middels grad av deltakelse i undervisningen slik Bjørndal (2011, s. 47) beskriver i figur 2.8 *Ulike former for observasjon.*

En kritikk av deltakende observasjon som innsamlingsmetode er at forskerens tolkninger av det som skjer er subjektiv, dermed lite pålitelig (Merriam, 2009, s. 118). Tjora (2010, s. 73) trekker fram at det er en etablert oppfatning om at observasjon som metode bidrar til en *forskningseffekt.* Dette innebærer at de som observeres handler annerledes i situasjonen, noe som kan forsterkes ved bruk av video. En fordel med video er å kunne se i ettertid hvordan deltakernes oppmerksomhet er rettet mot kameraet. Det vil være viktig å være bevisst på denne effekten da det vil kunne påvirke studiens pålitelighet (Tjora, 2010, s. 75).

3.5.1 Video som innsamlingsverktøy

Undervisningsøkten som ble gjennomført i studien foregikk både i og utenfor klasserommet, hvor elevene arbeidet i grupper. Vi benyttet oss av video for å ha mulighet til å oppdage detaljer og mulighet til å se situasjoner flere ganger. Risikoen for å gå glipp av sentrale pedagogiske øyeblikk er stor dersom man ikke benytter seg av video og lyd (Bjørndal, 2011, s.75). Ved bruk av videoobservasjon vil det være lettere å samarbeide om analysen av datamaterialet, fordi man ved vanlige observasjoner er avhengige av gode beskrivelser og hvordan det er blitt tolket av forskeren (Tjora, 2010, s. 67). Med video som utgangspunkt får vi begge direkte tilgang til det samme datamaterialet, og sammenlignet med ren observasjon og feltnotater, får vi ifølge Tjora (2010) mulighet til en mer mangfoldig, detaljert, fullstendig og presis tolkning.

Seidel og Janík (2009, s. 7) presiserer at komplekse fenomener og situasjoner som fanges på video kan åpne for analyse av ulike aspekter i undersøkelsen. Videre presenterer de fordeler som at det gir mulighet for studie av komplekse prosesser, styrking av reliabiliteten og analyse fra ulike perspektiver. Dette åpner for å kunne gå tilbake og revurdere, se på korte sekvenser og analysere i detalj. Ifølge Seidel og Janik baserer forskning innenfor samfunnsvitenskap seg på å redusere kompleksiteten. Ved å benytte seg av video kan denne kompleksiteten reduseres i to steg. Det første steget innebærer innsamling av data og steg to er analysen av det innsamlede datamaterialet. Fordelen med video er at man har mulighet til å gjennomføre «steg to» flere ganger ved å gå tilbake til det originale opptaket (Seidel & Janík, 2009, s. 13).

Ved bruk av et håndholdt kamera fikk vi et oversiktlig opptak av hele situasjonen med god lyd, og mulighet til å følge lærerens deltakelse i undervisningen. Vi ønsket å observere elevene i en praktisk aktivitet, derfor var det hensiktsmessig at vi også benyttet oss av GoPro-kamera som en elev på hver gruppe i undervisningen hadde på kroppen. Dette for å i større grad kunne fange opp god lyd og bilder av hva de gjorde på de enkelte gruppene. Totalt hadde vi ett stasjonærkamera og fire GoPro kamera. Kamera i undervisningen kan påvirke deltakerne i studien. For å minimere distraksjon med tanke på organisering og rigging av kamera forberedte vi oss godt i forkant av undervisningsøkten. Undervisningen besto av tre faser, dermed måtte vi ha en god plan på hvordan gjennomføringen skulle foregå, overganger i undervisningen og organisering av kamera. Vi laget derfor en «kjøreplan» (vedlegg 3) for læreren. Dermed var hen godt forberedt på hvilke deler av undervisningen som ble filmet og når hen skulle ha lydopptaker på seg.

Actionkamera som GoPro, eller *headcam* slik Frøyland, Remmen, Mork, Ødegaard og Christiansen (2015) omtaler det, er et verktøy for datainnsamling som etter hvert har blitt mer brukt i undersøkelser av undervisning og læring. Ifølge Frøyland et al. (2015, s. 263) kan slike kamera bidra til observasjoner som ikke blir synlig med et stasjonert kamera som filmer hele klassen i aksjon, og gi forskeren mulighet til å se nærmere på elevenes læringsprosess. Kameraene kan bidra til å se hva elevene selv arbeider med og hvordan de håndterer materialet, samtidig som at det fanger opp kommunikasjon med medelever og læreren i det praktiske arbeidet. I forberedelsene til prosjektet satte vi oss godt inn i hvordan kameraene fungerte med tanke på lyd og bilde ved å gjennomføre prøveopptak. På den måten fant vi ut hvordan vinklingen på kameraene skulle være for å fange både personer og arbeidet med tauet, i tillegg til hvordan vi kunne få best mulig lyd. Dette ga oss mulighet til å verifisere at elevene hadde laget den trekanten de argumenterte for at de hadde laget.

3.6 Etiske betraktninger

For å kunne gjennomføre studien måtte vi forholde oss til forskningsetiske krav og retningslinjer. Vi har forholdt oss til retningslinjer fra Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) hvor vi ønsker å trekke fram seksjon B som går på hensyn til personer (punkt 5-18). Videre vil vi trekke fram noen av punktene som har vært vesentlig i vårt arbeid.

Som følge av at vi ønsket å benytte oss av videoobservasjoner som innsamlingsmetode, ville det medføre sensitive personopplysninger i datamaterialet. Dermed måtte vi sende søknad til Norsk Senter for Datainnsamling (NSD) for å få godkjenning til gjennomføring av studien. Godkjenningen ligger som vedlegg (4). Å sende inn en slik søknad medfører en prosess hvor man må reflektere over forskningsprosessen og retningslinjene fra NESH. Vi kunne ikke sette i gang med studien før søknaden var godkjent, og datainnsamling kunne heller ikke gjennomføres før elevene med foreldre eller foresatte, og læreren hadde gitt samtykke til å delta i prosjektet. Elevene fikk ett informasjonsskriv (vedlegg 5), og læreren fikk ett informasjonsskriv (vedlegg 6). På denne måten ivaretar vi punkt 7 og 8, ansvar for å informere, samt samtykke og informasjonsplikt. Dette innebærer at deltakelse skjer på deres frie vilje og de har fått tilstrekkelig informasjon om hva som skulle undersøkes, hvilke roller vi skulle ha, hvem som ville ha tilgang til datamaterialet, deltakernes mulighet til å få innsyn og mulighet til å trekke seg fra studien (NESH, 2016). Personvern (punkt 6) innebærer forskerens behandling av personopplysninger, mens konfidensialitet (punkt 9) innebærer at opplysninger om deltakerne avidentifiseres og de skal ikke være gjenkjennbar i den endelige rapporten, altså anonymisert. Dette er spesielt viktig siden det er barn vi forsker på. Vi har derfor gitt elevene koder i transkripsjonene, men deretter også pseudonymer når de presenteres kapittel 4, analyse og funn. Transkripsjonene er også gjort om fra dialekt til bokmål. Dette gjør vi for å styrke anonymiseringen og er i tråd med det Tjora (2010, s. 127) anbefaler. Hvordan vi har behandlet datamaterialet og sørget for sikker lagring kommer fram i den godkjente søknaden til NSD og i informasjonsskrivene vi delte ut.

Ved å benytte actionkamera kan muligheten øke for uforutsette situasjoner i forskningsarbeidet. Elevene har kameraet på kroppen, og ifølge Frøyland et al. (2015, s. 265) glemmer elevene at de filmes. Dette kan komme av at kameraene er så små, virke mindre skremmende, og elevene er godt vant med elektronikk i sine omgivelser. Det negative ved dette er at elevene kan oppgi sensitiv informasjon, snakke om personlige utfordringer som i utgangspunktet ikke er interessant for forskningsarbeidet og det kan oppstå situasjoner som kan være krenkende (Frøyland et al. 2015).

I 2019 kom NESH (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2019) med en uttalelse i forbindelse med et forskningsprosjekt som benyttet GoPro-kamera på 6 år gamle elever hvor de sier at de i utgangspunktet ikke ser problemer ved bruk av stasjonerte videokamera, men at GoPro-kamera gir mulighet for uoversiktlige situasjoner. Dette kan være særlig med tanke på at det utfordrer frivillig deltakelse og elever i klassen som ikke ønsker å delta i forskningsprosjektet. Frøyland et al. (2015, s. 265) foreslår noen tiltak for å forebygge mot at sensitiv informasjon deles og uønskede situasjoner skal oppstå. Man kan informere elevene om hvordan de kan skru av kameraene, og informere om at de bør unngå å dele privat og sensitiv informasjon som ikke vil deles med andre. Å fange opp elevenes private samtaler er ikke unikt for actionkamera, men ved å gi elevene mulighet til skru av kameraet om nødvendig, styrker det elevenes selvbestemmelsesrett (Frøyland et al., 2015). En utfordring med å gi elevene mulighet til å styre kameraene er at verdifull data kan gå tapt. Vi ga elevene denne muligheten. Vi valgte å møte elevene noen dager før gjennomføringen for å gi denne informasjonen i tillegg til at de kunne bli kjent med oss og hva vi skulle gjøre. På gjennomføringsdagen minnet vi også elevene på dette. Til tross for dette var det ingen tilfeller der elevene valgte å skru av kameraene underveis i datainnsamlingen.

3.7 Kvalitet i studien

Bryman og Bell (2015, s. 399) nevner viktigheten av reliabilitet og validitet i kvantitativ forskning, men stiller spørsmål om relevansen av reliabilitet og validitet i kvalitativ forskning. Troverdigheten i kvantitativ forskning avhenger av instrumentet som er laget for å måle troverdigheten, mens i kvalitativ forskning er det forskeren selv som er instrumentet for å vurdere troverdigheten og avhenger av forskerens dyktighet og innsats (Golafshani, 2003, s. 600). I kvantitativ forskning kan en måle reliabilitet og validitet, mens i kvalitativ forskning må det vurderes. I kvalitative studier har man et synspunkt som ikke baserer seg på resultater, instrumenter, eller forskningsdesign, men heller baserer seg på meninger skapt av de som utfører, deltar i, eller leser og betrakter en studie (Creswell & Miller, 2000, s. 125). Derfor ønsker vi å bruke andre begreper for kvalitet i vår studie. Johannessen, Christoffersen og Tufte (2010, s. 229) tar i bruk begrepene *pålitelighet*, *troverdighet*, *overførbarhet* og *bekreftbarhet*.

Pålitelighet relateres til reliabilitet og i forskning handler det om selve forskningsprosessen, hva som er samlet inn, hva som brukes og hvordan det brukes (Johannessen et al., 2010, s. 229). Gjennom metodekapittelet har vi presentert forskningsdesign, undervisningsopplegget og konteksten, utvalget det forskes på, metode for innsamling av data og hvordan vi har analysert datamaterialet. Ved å bruke tykke beskrivelser gir vi leseren tilgang til forsknings- og analyseprosessen, og gir studien et «audit trail» som innebærer en loggføring og detaljert beskrivelse av hele studien (Creswell & Miller, 2000, s. 128). Dermed kan vi si at vi gir leseren tilgang på våre arbeidsmetoder i prosjektet og åpner for at andre kan gjennomføre og etterprøve samme studie og oppnå lignende resultater. Ved å benytte video som innsamlingsmetode styrkes studiens pålitelighet (Seidel & Janík, 2009). Tjora (2010, s. 67) sier også at bruk av video vil kunne styrke det teoretiske og analytiske grunnlaget for tolkning av datamaterialet.

Troverdighet relateres til begrepsvaliditet og dreier seg om i hvilken grad funnene reflekterer formålet som er utgangspunktet for forskningen, og at det representerer virkeligheten (Johannessen et al., 2010, s. 230). For å kunne studere hvordan elever arbeider utforskende er vi avhengig av at elevene gjennomfører et undervisningsopplegg som faktisk er utforskende. Dette henger sammen med at vi måler det vi ønsker å måle. I delkapittel 3.4 har vi redegjort for og begrunnet valg av undervisningsopplegg. På en annen side kan vi si at en svakhet med studien er at læreren som deltok ikke var særlig vant med å undervise på denne måten. Videre kan metodetriangulering benyttes for å styrke troverdigheten, noe som innebærer å ta i bruk ulike metoder i feltarbeidet (Johannessen et al., 2010, s. 230). I vårt tilfelle har vi ikke tatt i bruk ulike metoder, men vi har planlagt situasjonen nøye, vært til stede under hele gjennomføringen for å observere, i tillegg til å benytte oss av video for innsamling av data. Ved å ta i bruk GoPro-kamera for hver gruppe, får vi et nærmere innblikk i hva elevene sier og gjør og med det styrker vi troverdigheten til datamaterialet.

Overførbarhet relateres til ekstern validitet. I kvalitative undersøkelser snakker vi ikke om generalisering, men om overføring av kunnskap. Det dreier seg om hvorvidt man lykkes å etablere beskrivelser, begreper, fortolkninger og forklaringer som er nyttig på andre områder (Johannessen et al., 2010, s. 230). Gjennom tykke beskrivelser ønsker vi å invitere leseren inn i forskningsprosessen, dette kan ifølge Postholm et al. (2018, s. 239) bidra til å styrke overførbarheten til studien. En kritikk vi kan rette til vår studie er at vi har brukt et lite utvalg, og dermed er det ikke representativt for en stor populasjon slik Postholm et al. (2018, s. 240) trekker fram statistisk generalisering. Vi har valgt en skoleklasse uten å legge til grunn spesielle kriterier for utvalget, for at det skal kunne gjenspeile en «normal» klasse og dermed være overførbart til andre.

Bekreftbarheten relateres til objektivitet i studien. Bekreftbarhet skal sikre at funnene er et resultat av forskningen, og ikke forskerens subjektive holdning (Johannessen et al., 2010, s. 232). I vår studie har vi tatt utgangspunkt i et lignende prosjekt som har vært gjennomført tidligere, og har på den måten fått bekreftelse på lignende situasjoner fra vår studie og samtidig sett en del ulike hendelser. Ved bruk av observasjon og feltnotater vil datanalysen i stor grad preges av forskerens subjektive tolkninger gjort i feltet (Tjora, 2010). Vi har vært to som har sett på datamaterialet, med like resultater, noe som styrker bekreftbarheten. Som tidligere nevnt får vi begge tilgang til det samme datamaterialet ved bruk av video, og mulighet til mangfoldige, detaljerte og presise tolkninger.

3.8 Analyseprosessen

Tematisk analyse er en teoretisk fleksibel tilnærming til analyse i kvalitativ forskning (Braun & Clarke, 2006, s. 77). Ifølge Postholm et al. (2018, s. 102) vil en fullstendig induktiv eller deduktiv tilnærming ikke være mulig. De mener det vil være ytterpunkter på en skala og kaller forskningsprosessen som en kontinuerlig problemløsende prosess som gjør det til en kombinasjon av induksjon og deduksjon. En slik kombinasjon hvor det oppstår en pendel mellom teori, forskerens perspektiver, innsamlet data og deltakernes perspektiver omtales som en pragmatisk eller abduktiv tilnærming. Abduksjon sees på som en prosess hvor funn i empirien leder til undersøkelser og spørsmål, med andre ord en vekselvirkning mellom teori og empiri (Postholm et al. 2018, s. 103). For å svare på hvordan elever resonnerer i et undersøkende undervisningsopplegg i temaet geometri har vi valgt å gjøre en tematisk analyse, med en abduktiv tilnærming, for å kunne ha en pendel mellom teori og empiri. Den tematiske analysen består av seks faser. Noen av fasene kan være lik som faser i andre kvalitative analyser, dermed er ikke stegene unike for tematisk analyse. Analyseprosessen er heller ikke strømlinjeformet. Braun og Clarke (2006, s. 86) beskriver det som en prosess hvor man konstant går fram og tilbake mellom datamaterialet og det som analyseres.

Analysearbeidet i studien startet i det vi gikk inn i forskningsfeltet for å samle inn data. Underveis i undervisningen gjorde vi oss tanker om hva som skjedde, og bemerket oss interessante hendelser. Ifølge Merriam (2009, s. 171) er analyse i en kvalitativ studie en dynamisk prosess som starter samtidig med datainnsamlingen i studien. Vi så det som hensiktsmessig å samle inn data fra én undervisningsøkt på grunnlag av flere ting. Ved bruk av fire GoPro kamera og ett videokamera fikk vi god innsikt og nærhet til hva elevene sa og gjorde, og dermed nok grunnlag til å vurdere elevenes resonnement. Et større datamateriale, sammenlignet med tid og innsats vi kunne legge ned i å analysere det nøye, ville ikke gitt oss bedre informasjon. Dette er ett av kriteriene Lincoln og Guba (1985, s. 350 referert i Merriam 2009) presenterer for å avgjøre om man har samlet inn nok datamateriale. Et annet kriterium de presenterer er om det å gjennomføre en ny datainnsamling vil gi ny og nyttig informasjon, eller om det heller vil trekke oppmerksomheten bort fra kjernen av det man ønsker å undersøke (Lincoln & Guba, 1985 referert i Merriam 2009). I vårt tilfelle ville det kunneført til en endring i fokus om vi gjennomførte en ny undervisningsøkt, og da ville muligens analyseobjektet blitt hvilke endringer som ble gjort mellom de to øktene eller forskjellene på disse øktene.

Etter datainnsamlingen så vi gjennom hele videomaterialet (omtrent 4,5 timer) hver for oss, dette for å få et helhetsinntrykk av datamaterialet. I denne fasen gjorde vi ikke annet enn å se video og notere oss tidspunkt i videoen hvor vi så noe interessant. Dette anbefaler Corbin og Strauss (2008, s.163) for å kunne sette seg dypt inn i hvordan deltakerne opplever undervisningen og lytte til hva de sier. Videre i analyseprosessen transkriberte vi hele videomaterialet. Dette er den første fasen av tematisk analyse og man får en dyp innsikt i datamaterialet (Braun & Clarke, 2006, s. 16). Vi transkriberte hele videomaterialet for å ikke gå glipp av noe informasjon som kunne være av interesse, men også for å gjøre datamaterialet håndterbart med tanke på analysen slik Kvale og Brinkmann (2015, s. 206) poengterer. For å effektivisere prosessen transkriberte vi videomateriale fra hvert vårt kamera, og for at våre transkripsjoner skulle være like, laget vi en transkripsjonsprosedyre. Det vil være viktig for å kunne gjøre sammenligninger av datamaterialet (Kvale og Brinkmann, 2015, s. 207). Ifølge Tjora (2010, s. 126) bør man være observant på dialektord som kan ha en séregen betydning, i tillegg kan uttrykksmåte og setningsoppbygging være med på å gi mening til utsagnene. Derfor transkriberte vi på dialekt, men eksemplene vi presenterer er omskrevet til bokmål i den endelige rapporten for å styrke anonymiseringen.

Fase to i den tematiske analysen gjorde vi i to deler. Denne fasen innebærer å finne koder og særegne trekk i datamaterialet (Braun & Clarke, 2006, s. 18). I utgangspunktet hadde vi et ønske om å analysere hvordan elever arbeider og resonnerer i det undersøkende undervisningsopplegget. Dermed startet vi med en teoretisk tematisk analyse av transkripsjonene hvor vi kodet datamaterialet med utgangspunkt i Blomhøjs (2020) essensielle elevaktiviteter som kategorier. Dette for å se på hvordan elever arbeider i det undersøkende undervisningsopplegget. Kodingen gjorde vi i NVIVO for å effektivisere og gjøre datamaterialet oversiktlig. Den første kodingsprosessen ga oss god innsikt i og forståelse av datamaterialet, og analysen av essensielle elevaktiviteter genererte 24 tilfeller av resonnement. For å ivareta matematikken i oppgaven og med tanke på tid og omfang i studien så vi det som hensiktsmessig å kun fokusere på elevenes resonnementer fremfor både resonnement og hvordan de arbeidet undersøkende. Vi vurderte det slik at vi hadde tilstrekkelig datamateriale for å analysere hvordan elevene resonnerte i det undersøkende undervisningsopplegget. Selv om fokuset endret seg i denne fasen, gjorde det oss godt kjent med datamaterialet, noe som var til god hjelp i neste steg av prosessen.

Med bakgrunn i det overnevnte vurderte vi hele datamaterialet på nytt der vi utelukkende fokuserte på å se etter resonnement. Dette ble da den andre gjennomføringen av fase to i analyseprosessen. Denne fasen hadde en induktiv tilnærming, som innebærer at kodene dannes i møte med datamaterialet (Braun & Clarke, 2006, s.12). Dette gjorde vi for å sikre at vi hadde fått med alle resonnementene i datamaterialet. Utdrag fra transkripsjonene som ble kodet som resonnement er identifisert på bakgrunn av det Lithner (2008) begrunner som fire steg i et resonnement: elevene møter en oppgave, deretter gjør de et strategivalg (oppdage og gjette), videre utfører de strategien og til slutt kommer til en konklusjon. Vi fikk koder som beskrev hva elevene gjorde i resonnementene og eksempler på disse er: *«elevene foreslår en trekant før de lager den», «elevene tar tak i tilfeldige knuter og spør seg hva de har laget», «elevene argumenterer for hvilken trekant de skal lage, før de lager den», «viser med armene for å forklare», «setter inn tall for a,b og c», «stiller spørsmål ved hvilken trekant de skal lage».*

I den tredje fasen som innebærer å lete etter kategorier (Braun & Clarke, 2006, s.19), så vi enkelte mønster som gikk igjen i hele datamaterialet. Fasen innebærer å sortere kodene i potensielle tema eller kategorier. En slik samling av koder til kategorier blir omtalt som aksial koding i *Grounded Theory* (Corbin & Strauss, 2008, s.198). I analysen ble det tydelig at elevene hadde ulik tilnærming til oppgaven og kategoriene vi har kommet fram til baserer seg på strategivalgene elevene gjorde for å komme fram til en løsning. De fire kategoriene er *prøve og feile* (1), *systematisk tilnærming* (2), *eksempel som utgangspunkt* (3) *og visuell forklaring* (4). Disse fire kategoriene blir brukt for å besvare forskningsspørsmålet: *Hvilken tilnærming bruker elevene når de resonnerer i den undersøkende undervisningen?*

Et fellestrekk for resonnementene i kategori 1 er at elevene hadde som strategi at de utforsket og prøvde seg fram med tauet, uten å ha et bestemt mål, for deretter å konkludere med hvilken figur de hadde laget. Derfor har vi valgt å kalle kategori 1 for prøve og feile. At elevene prøver og feiler innebærer ikke at de i flere tilfeller fikk feil svar, men at de ikke vegrer seg for å prøve seg fram med mulighet for å feile. I resonnementene fra kategori 2 er et fellestrekk at strategivalget elevene bruker var å utforske systematisk. De tok utgangspunkt i at de skulle lage en spesifikk trekant før de startet å lage figuren. Derfor har vi valgt å kalle kategori 2 for systematisk tilnærming. I undervisningens fase 3 skulle elevene komme fram til en forklaring på trekantulikheten. Eksempel som utgangspunkt er kategori 3, fordi strategivalget elevene benyttet var å bruke et konkret eksempel for å forklare trekantulikheten. Kategori 4 er visuell forklaring. I denne kategorien bruker elevene tegninger og gjør visualiseringer med armene for å skape et bilde og gi en forklaring på trekantulikheten.

Den videre analyseprosessen innebar å teoretisere kategoriene vi hadde kommet fram til for å besvare hva som kjennetegner elevenes resonnement i den undersøkende undervisningen. Prosessen innehar en progresjon fra å beskrive kategorier i datamaterialet til å tolke disse mønstrene, gjerne i lys av tidligere litteratur for å finne en bredere mening (Braun & Clarke, 2006, s. 20). Fasen besto av de tre siste fasene Braun og Clarke (2006, s. 20-23) beskriver: *Reviewing themes, defining and naming themes* og *producing the report*. Her skal man se over kategoriene, definere og navnsette kategoriene og til slutt skrive rapporten.

Som redegjort for i teorikapittel 2.3.1 presenterer Dricoll et al. (2007) geometriske tenkevaner de anser som gir suksessfull problemløsning i geometri. Gjennom det elevene sier og gjør, samt elevenes resonnement, får vi tilgang til hvordan de tenker. Dermed så vi det interessant å ta utgangspunkt i Driscolls teoretiske rammeverk, for å analysere og identifisere indikasjoner på bruk av geometriske tenkevaner. Eksemplene som er presentert og analysert i det følgende kapittelet er et utvalg av alle resonnementene som kom fram. Etter vi hadde kodet og kategorisert resonnementene så vi at det var store likheter. På bakgrunn av likhetene i resonnementene har vi valgt å ikke presentere alle, da vi mener eksemplene som er trukket fram representerer hele datamaterialet.

4 Analyse og funn

I dette kapittelet vil vi presentere studiens funn og resultater ved å redegjøre for de ulike resonnementene som kom fram i analysen av datamaterialet vårt for å kunne svare på problemstillingen og forskningsspørsmålene:

Hvordan resonnerer elever på mellomtrinnet i et undersøkende undervisningsopplegg i temaet geometri?

1) *Hvilken tilnærming bruker elevene når de resonnerer i den undersøkende undervisningen?*
2) *Hva kjennetegner resonnementene i den undersøkende undervisningen?*

På bakgrunn av undervisningens trefasestruktur og hensikten i fase 2 og 3 ble kategoriene ulike. Kategori 1 og 2 er mer generelle kategorier for undersøkende matematikkundervisning. Fase 2 innebærer som nevnt i kapittel 2.1 elevenes selvstendige undersøkelser. På den måten vil strategivalgene si noe om hvordan de undersøker, og det vil ikke være unaturlig at disse kan gå igjen i andre undervisningsopplegg som har en slik struktur. I fase 3 er hensikten å komme fram til en generell regel, og kategoriene vil være mer gjeldende for dette spesifikke undervisningsopplegget. Slik abstraksjon blir beskrevet i kapittel 2.3.3 kan vi si at det er ulikt abstraksjonsnivå i de ulike fasene av undervisningsopplegget. Elevene arbeider med konkrete eksempler og beskrivelser i fase 2 og reflekterer over mer abstrakte begreper i fase 3. Denne forskjellen i abstraksjonsnivå vil vi drøfte nærmere i kapittel 5.

Funnene blir presentert etter kategoriene vi utviklet i analyseprosessen. Først presenterer vi syv eksempler på resonnement fra undervisningens fase 2, i arbeid med hver av trekantene, under kategoriene *prøve og feile* (1) og *systematisk tilnærming* (2). Videre presenteres arbeid fra fase 3. Der presenteres en ny iscenesettelsesfase som la grunnlaget for arbeidet med trekantulikheten. Eksemplene på resonnement om trekantulikheten fra undervisningens fase 3, representerer kategoriene *eksempel som utgangspunkt* (3) og *visuell forklaring* (4).

4.1 Undervisningens fase 2

4.1.1 Kategori 1 – Prøve og feile

I denne kategorien vil vi presentere tre eksempler vi har kategorisert som prøve og feile, ett eksempel fra hver av trekantene elevene kom fram til. Vi har valgt å kategorisere disse resonnementet i denne kategorien særlig med tanke på det som skjer i starten hvor elevene bytter knuter og blir enige om hvor de skal holde, uten at de har bestemt hvilken figur de ønsker å lage.

4.1.1.1 Likesida trekant

To av fire grupper brukte denne fremgangsmåten når de skulle finne den likesida trekanten.

> Eksempel 1:
>
> *(Gunnar, Martin og Hilde prøver å bytte knuter).*
> *Gunnar: Hva er det her?*
> *Martin: Vent nå, vent nå, vent nå. (Elev går til en annen knute).*
> *Lærer: Prøv ulike lengder.*
> *(Hilde Peker til Gunnar at han skal holde knutene, og peker Martin mot en annen knute)*
> *(Hilde teller knutene på trekanten)*
>
> *Videoen viser tydelig at elevene nå har laget en likesida trekant med sidelengdene 4-4-4*
>
> *Gunnar: Vi har en likebeint trekant, bare skriv likebeint trekant!*
> *Hilde: Nei, det her er en likesida.*
> *Gunnar: Nei, se her. (Prøver å peke med hånden). Her e tuppen.*
> *Martin: (Teller lengden på en av sidene i trekanten).*
> *Hilde: Den er likesida. (Teller tydelig sidene, «1-2-3-4, 1-2-3-4 og 1-2-3-4»).*
> *Gunnar: Er jeg spissen, eller er du spissen, eller er du spissen? (Peker på de andre).*
> *Hilde: Det er det samme.*
> *Gunnar: Ok, jeg er spissen.*
> *Martin: Men det er likevel 1-2-3-4.*
> *Gunnar: Tegn en likesida!*
> *Hilde: Det her er en likesida trekant, det vil si at alle sidene er like lange.*
> *Stig: Men hvor mange lengder har den?*
> *Martin: Fire på alle.*

Gunnar og Hilde ser at de har laget en trekant, men er uenige om hvilken trekant det er. Hilde argumenterer etter hvert for hvorfor trekanten er likesida ved hjelp av egenskapene.

I resonnementet ser vi at elevene ikke har en plan for hva de skal lage, men prøver seg fram med tauet. Vi ser øverst at Gunnar, Martin og Hilde forsøker å bytte knuter. Gunnar sier «hva er det her?», Martin svarer med «Vent nå, vent nå, vent nå! [Han går til en annen knute]». Hilde tar deretter styringen og peker Gunnar og Martin mot hver sin knute, og teller deretter enhetene på sidene til trekanten. Videoen viser tydelig at elevene har laget en likesida trekant med sidelengdene 4-4-4. Etter dette bryter Gunnar ut «vi har en likebeint trekant, bare skriv likebeint trekant». Hilde bryter inn og sier «nei, det er en likesida» og begrunner det senere i resonnementet at den har sidelengdene 4-4-4. Dette viser at de prøver seg fram gjennom intuisjon og gjetning ved å lage en tilfeldig figur og identifiserer den gjennom egenskapene. Elevene bruker dermed tenkevanen *Balancing exploration and reflection*, men under den delen av tenkevanen Driscoll et al. (2007) forklarer som *exploration in foreground*.

Tenkevanen *reasoning with relationship* kommer til syne, men på et lavt nivå slik Dricoll et al. (2007) beskriver det. I dette tilfellet forklarer de hvorfor det er en likesida trekant med at alle sidene er like lange. En annen indikasjon på at det skjer på et lavt nivå er at de ikke er i stand til å relatere vinklene i figuren som en egenskap. I forklaringen til Hilde om hvorfor det er en likesida trekant, helt til slutt i resonnementet, ser vi en endring i språket fra å snakke om at den er likesida fordi den er fire enheter på hver side, til at «... likesida trekant, det vil si at alle sidene er like lang». Vi tolker det dit hen at Hilde har en generalisert tanke om at alle sider i likesida trekanter er like lange, noe som går under tenkevanen Driscoll et al. (2007) kaller *generalizing geometric ideas.*

4.1.1.2 Likebeint trekant

Det var to grupper som benyttet seg av å prøve og feile når de skulle finne den likebeinte figuren.

> Eksempel 2:
>
> *Videoen viser at elevene nå prøver andre lengder mellom hjørnene.*
>
> *Martin: (Dirigerer de andre på gruppa, til andre knuter. Viser tydelig at han vil prøve en trekant med 2 enheter/meter på den ene av sidene).*
> *Gunnar: (Begeistring – lyd).*
> *Martin: (Teller tydelig sidene, 1-2-3-4-5, 1-2-3-4-5). Det her er en likesida. Ehm, likebeint.*
> *Stig: Vi har jo hatt en likebeint.*
> *Hilde: Nei, vi har hatt en rettvinkla og en likesida.*

Hilde: Nå har vi en likebeint. Den har to lange sider, og en kort.
Martin: (Teller tydelig lengdene på hver av sidene)

Denne gruppen gjør et forsøk på å lage en trekant med en kort side og to lange sider, og gjennom deres begeistring kan vi se at de gjør en oppdagelse av å ha laget en ny trekant. Elevene teller deretter opp enhetene på hver sidelengde og konkluderer med at de har funnet en likebeint trekant med sidelengder 2-5-5.

Som i eksempel 1 prøver denne gruppen seg fram gjennom intuisjon og gjetning ved at de gjør et forsøk med å lage en figur med en kort side. Martin dirigerer først de andre på gruppa til andre knuter og viser tydelig at han vil forsøke å lage en trekant med to enheter på en av sidene fordi de tidligere bare har hatt sider med lengde 3, 4 og 5. Deretter hører vi i videoen at Gunnar blir begeistret over trekanten de har laget. Mest sannsynlig en begeistring over at han skjønner at dette er en trekant de ikke har laget tidligere. Martin teller så tydelig sidene og sier det er en likebeint trekant. Dette indikerer tenkevanen *Balancing exploration and reflection*, og den delen av tenkevanen som defineres som *exploration in foreground*. Videre identifiserer de figuren ut fra egenskapene, men med et mindre presist språk. Hilde sier «Nå har vi en likebeint. Den har to lange og en kort». Det vil ikke være korrekt å argumentere på denne måten, men hun tar utgangspunkt i trekanten de har laget som har sidelengdene 5-5-2 når hun sier at den har to lange sider og en kort. Derfor kan vi trekke fram tenkevanen *reasoning with relationship*, men på et enda lavere nivå enn i eksempel 1.

4.1.1.3 Rettvinkla trekant

For å finne den rettvinkla trekanten var det to av fire grupper som brukte strategien prøve og feile.

Eksempel 3:

Videoen viser at elevene ikke har noen spesifikk trekant de prøver å lage. De tar tak i tilfeldige knuter, slik at det blir en trekant

Pål: slik, det her vet jeg ikke hva er (..) det er en rettvinkla! (peker på den rette vinkelen)
Kristin: [det er en rettvinkla trekant]
Håkon: nei
Pål: jo, det er rettvinkla
Lærer: nå må dere telle sidene
Pål: 1,2,3 sider
Håkon: nei jeg vet ikke, ikke 3 sider

Kristin: 3,4,5
Lærer: ja, så må dere skrive det, og se om det er noen egenskaper ved den trekanten
Pål: den er rettvinkla, fordi den har to spisse vinkl og en rett vinkel

Elevene på denne gruppen tar tak i noen tilfeldige knuter slik at det blir en trekant og oppdager at de har funnet en rettvinkla trekant. Håkon er noe usikker, men får til slutt forklart av Pål hvorfor det er en rettvinkla trekant.

En utfordring for mange elever er å møte figurer, spesielt rettvinkla trekant, som presenteres ulikt fra det de vanligvis møter. I dette tilfellet vil det være at de ikke ser figurene som en tegning eller illustrasjon (Battista, 2007, s. 846). Derfor kan vi se at elevene sliter med å identifisere den rettvinkla trekanten som presenteres ved hjelp av tauet. Koblet opp mot tenkevanene så vil dette falle inn under *reasoning with relationship*, da elevene prøver å identifisere den rettvinkla trekanten ved bruk av egenskapene. Sist i resonnementet ser vi at Pål begrunner at det er en rettvinkla trekant fordi den har en rett vinkel, men det blir en antakelse fra hans side da de ikke har noe verktøy for å fastslå at vinkelen er 90 grader.

4.1.2 Kategori 2 – Systematisk tilnærming

Måten elevene tilnærmer seg oppgaven i denne kategorien skiller seg fra den forrige da de tar utgangspunkt i en spesifikk figur de ønsker å lage. I eksempel 4 starter Marit med å si «… vi tar en likesida.» På den måten har de en mer systematisk tilnærming til oppgaven. I tillegg har vi trukket fram eksempel 5 som har en større grad av prediktiv argumentasjon enn i eksempel 4.

4.1.2.1 Likesida trekant

To av gruppene brukte en systematisk fremgangsmåte for å komme fram til den likesida trekanten.

Eksempel 4:

Marit: Vi lager en likebeint, likesida, vi tar en likesida.
*Lars**:** Nei, det der er ikke en likesida.*
*Mads**:** Men vi må telle hvor mange sånne her d e i hver ((peker på en enhet på ene siden, og teller knutene)), 1,2,3, 1,2,3, 1,2,3,4.*
*Iris**:** Du må holde i knuten Marit.*
*Marit**:** Det går ikke an å få det riktig.*
*Lars**:** Jo*
*Mads**:** Jo*
*Lars**:** Hold der (peker på en knute), du må holde i knuten der, slik.*

Iris: 1,2,3,4, 1,2,3,4, 1,2,3,4, ja det er riktig (teller enhetene og ikke knutene).
Lars: Var det vanskelig?
Mads: 123456….12 (teller alle enhetene)
Lars: Det er greit, det er en likesida, bare ta..
Iris: Jo, men det går bra nå når…
Lærer: Hva er det her?
Lars & Iris: !Det er en likesida.
Lærer: En likesida ok, hvorfor er det en likesida?
Lars & Marit: Fordi alle sidene er like lange.
Marit: De har 4 meter på hver.
Lærer: Her er det 4 på hver, ok. Nå må dere se, er det noen egenskaper ved denne her figuren som dere kan si?
Lars: Alle sidene er like lange.
Lærer: Det kan være en egenskap ja, er det flere ting?
Iris: Ehhm..
Lærer: Nå må dere se på den, er det noe spesielt med denne trekanten her?
Marit: Alle vinklene er like store.

(Lærer viser bekreftende med kroppsspråk)

Lars: Alle vinklene er spisse vinkler, og like spisse…

Her tar elevene utgangspunkt i å lage en likesida trekant. Etter å ha talt opp enhetene på hver sidelengde, konkluderer de med at det er en likesida trekant. Læreren kommer bort til gruppa og stiller oppfølgende spørsmål, hvor hen ønsker å få en forklaring for hvorfor det er en likesida trekant. Dermed får de forklart egenskapene til figuren i tillegg til at det kommer fram at Marit vet at alle vinklene er like store.

I starten av resonnementet ønsker de å lage en likesida trekant som Marit uttrykker ved å si «vi lager en likebeint, likesida, vi tar en likesida!», slik ser de for seg hvordan trekanten skal være før de har laget den. På denne måten henger det sammen med tenkevanen *balancing exploration and reflection* under delen *end goals in foreground's* tredje punkt (Driscoll et al. 2007). Videre stiller læreren oppfølgende spørsmål for å få en forklaring, og elevene begrunner løsningen med at alle sidene er like lange og alle vinklene er like stor. Elevene bemerker seg og setter strukturer i en geometrisk figur i sammenheng ved å forklare at både sidene og vinklene er like store, som viser en forståelse for likesida trekanter. Dette viser at elevene bruker tenkevanen *reasoning with relationship.*

Eksempel 5 er også et resonnement elevene gjorde når skulle lage en likesida trekant. Vi har valgt å ta med dette da gruppen gjorde en tydeligere prediktiv argumentasjon i starten av resonnementet.

Eksempel 5:

John: Hvilken type skal vi lage?
Line: Vi starter med en likesida… Ok, det er tolv sider. Så det blir 12 delt på tre.
Hans: Den ene må holde i begge endene hele tiden, så blir det lettere for oss.
Line: Ok, her, gi meg.

Videoen viser tydelig at alle tre elevene er med, og de lurer på hvordan de skal lage en likesida trekant

Line: Ta å lag en trekant med fire på hver side.

Videoen viser tydelig at elevene har laget en likesida trekant med sidelengdene 4-4-4

Line: Egenskapene er at det er en likesida trekant.
Hans: En likesida, ok, men hvor lang er sidene?
Line: Fire enheter
Hans: Ok, og egenskaper var? Det var likesida
Marte: Den er like lang på alle sidene… men hvis alle er fire, da vil det jo ikke gå
Line: Jo, fire ganger tre er 12.
Marte: Ja, men var det ikke 13 knuter?
Line: Jo, 13 knuter, men 12 enheter
Hans: Hvilke flere egenskaper skal jeg skrive?
John: Alle vinklene er 60 grader

Vi kan se at dette resonnementet er veldig likt eksempel 4. Forskjellen vi ønsker å trekke fram er at Line sier helt i starten «Ok, det er tolv sider. Så det blir 12 delt på tre». Line gjør det Lithner (2008) beskriver som en prediktiv argumentasjon og identifiserer delsteg som kan bidra til å finne en løsning. Hun vet at omkretsen til trekanten skal være 12 enheter, med tre sider i trekanten, må svaret være at hver side i den likesida trekanten skal være fire enheter lang. Å identifisere delsteg er et av punktene under delen *end goals in foreground* i tenkevanen *balancing exploration and reflection*.

4.1.2.2 Likebeint trekant

Når elevene skulle lage en likebeint trekant var det to grupper som brukte en systematisk tilnærming.

Eksempel 6:

Line: Vi kan lage en likebeint.. Hvis vi tar to på 5 så blir det 10. Hvis dere tar to, hold der ja. Så du må ta den og du må ta den. (Peker til sine medelever at de må flytte seg til en annen knute).
Line: Nå har vi en likebeint.
John: Den har to 90 graders..
Line: Nei dem er ikke 90grader.

Line: Likebeint betyr at de lengste sidene er like lang.
Hans: Ok, kor lang er den her?
Line: Den er 5-5-2.
Hans: Ok, er det noen flere egenskaper jeg skal skrive?
Line: Bare spisse vinkler.
John: Også er de 60grader.
Line: Ehh, nei..
John: En trekant blir 180grader.
Line: Ja, men de er ikke like store. De der er litt større enn den. (Peker på de to største vinklene og til slutt på den miste vinkelen).

Line tar igjen bruk omkretsen til figuren for å gjøre en antakelse på hvor lange sider de skal ha, og dermed har de et prediktivt argument og identifiserer delsteg for å nå fram til svaret. I tillegg til dette beskriver de hvilken figur de skal ende opp med til slutt. Dette viser tenkevanen *balancing exploration and reflection* og delen *end goals in foreground*. Line tar styring på gruppa og ber medelevene sine holde i spesifikke knuter. Det oppstår en usikkerhet knyttet til vinklene i den likebeinte trekanten hvor John sier at vinklene er 90 grader. Dette er ikke Line enig i. Deretter påstår John at alle vinklene er 60 grader, men det er Line heller ikke enig i. Hun sier at to av vinklene er litt større enn den tredje. På denne måten skaper elevene en felles forståelse, bemerker struktur og mønster, og setter det i en sammenheng. Dette kjennetegner tenkevanen *reasoning with relationship*. Tenkevanen *generalizing geometric ideas* kommer fram når Line midt i resonnementet sier «Likebeint betyr at de lengste sidene er like lange». Generaliseringen Line gjør er ikke matematisk korrekt, da man kan lage en likebeint trekant som for eksempel har sidelengdene 5-5-6. Likevel kan vi si at Line generaliserer på nivået hun er.

4.1.2.3 Rettvinkla trekant

To av gruppene hadde en systematisk tilnærming når de skulle lage den rettvinkla trekanten:

Eksempel 7:

Hans: Ok, da kan vi prøve å lage en ny.
Line: Rettvinkla!
John: (Bytter den knuten han holder)
Line: Ta en til.. 'slik. Ja også må du holde i en av knutene. Nei vent, det blir feil., vi må..
Hans: Vi kan bare holde i en knute om gangen.
John: Slik.. (bytter knute slik at det blir noe han tenker er en rettvinkla trekant)

Videoen viser tydelig at de har laget en rettvinkla trekant, med sidelengdene 3-4-5

Line: Nå har vi en rettvinkla...
Hans: Ok, da skriver jeg rettvinkla. Hvor lang er den siden her?
John: Fem!
Line: Også er det 4 her, og 3 der..
Hans: Ok, hvilke egenskaper skal jeg skrive?
Line: 90 grader der.. det er to sider som er like lange.
Hans: To sider like lange?
Line: Ja, der og der. (Peker tydelig på de korteste sidene)… Nei, vent. De er ikke det.
John: Også er det to spisse vinkler.
Hans: Ok. Er det noen flere egenskaper?

Elevene tenker noen sekunder, men kommer ikke på flere egenskaper.

I dette eksemplet bestemmer elevene seg for å lage en rettvinkla trekant. De prøver seg fram med å bytte knuter, og videre konkluderer med at de har riktig når de oppdager den rette vinkelen i figuren. Deretter tar de et sidespor hvor de er usikre på om den også har to like sider, men oppdager fort at dette ikke stemmer. De kommer fram til at egenskapene til trekanten er at den har en rett vinkel, to spisse vinkler og sidelengder på 3-4-5.

At elevene identifiserer figuren ut fra egenskaper indikerer bruk av tenkevanen *reasoning with relationship*. Elevene sier at trekanten har en rett vinkel. Igjen blir dette bare en antakelse da de ikke har forutsetninger for å begrunne sin påstand, noe man kan gjøre ved hjelp av Pytagoras' læresetning. Med tanke på tenkevanen *balancing exploration and reflection* ser vi innslag av begge delene, *exploration in foreground* og *end goals in foreground*, ved at elevene beskriver hvilken figur de skal ende opp med, men rett etterpå utforsker med å gjøre vurderinger underveis for å lage den rettvinkla trekanten. Man kan derfor si at elevene tar utgangspunkt i en systematisk tilnærming, men underveis i resonnementet prøver de seg fram. Dermed er ikke eksempelet ulikt tilsvarende eksempel i kategori 1 (prøve og feile).

4.2 Undervisningens fase 3

Som beskrevet i undervisningsopplegget (Kap. 3.4) ble elevene utfordret til å finne ut om det var mulig å lage en trekant med sidelengdene 3-3-6. Elevene slet med å komme med en løsning på egenhånd. Derfor brukte læreren tauet sammen med en elev, i en felles gjennomgang, for å forklare hvorfor det ikke er mulig ifølge trekantulikheten ($a + b > c$) og hvorfor de likevel klarte å lage figuren med tauet. Denne fasen av undervisningen fungerte som døråpner og ny iscenesettelse for at elevene skulle komme fram til trekantulikheten. Læreren forklarte det slik:

Lærer: Knut, hold her .... Vi har altså 12 enheter (læreren holder opp et tau med hjelp fra en elev). Knut hold i midten, slik at det blir en strek. Ser dere at det ikke er helt rett, men hvis de hadde vært 6 begge to, kan jeg da begynne å bøye den her midterste opp. Kan dere da lage en trekant som er like lang å begynne å bøye?
Ivar: nei.
Lærer: Har dere sett de bruene som er i USA? Som skal bøye seg opp? (han viser med hendene hvordan de bøyes opp, og ikke er i kontakt lengre). Når de begynner å bøye seg, er de fortsatt i kontakt med hverandre her oppe?
Ivar: Nei.
Lærer: ikke sant. Derfor kan vi ikke si at det er mulig å lage en trekant med sidelengdene 3-3-6.

I utdraget over får læreren hjelp av Knut til å holde tauet slik at han kan vise og forklare til elevene hvorfor det ikke skal være mulig å lage en trekant med sidelengdene 3-3-6. Deretter bruker læreren en analogi om bruer i USA for å forklare at avstanden mellom sidelengdene blir lengre og at de ikke berører hverandre når brua åpner seg. Etter dette fikk elevene utfordringen om trekantulikheten. Han tegnet en trekant med sidelengdene a-b-c og ba elevene diskutere hvor lang sidelengdene a og b må være i forhold til c for at det skal kunne bli en trekant.

4.2.1 Kategori 3 - Eksempel som utgangspunkt

For å komme fram til en forklaring på trekantulikheten måtte tre av gruppene ta utgangspunkt i et eksempel. Dermed havnet eksempel 8 under denne kategorien og illustrerer hvordan de tre gruppene kom fram til en forklaring.

Eksempel 8:

Lærer: Hvis c er 10 cm. Hvor lang må a og b være for å kunne lage en trekant?
Lars: Er a og b sammen? 10 hver?
Lærer: 10 hver? Må det være 10 hver, må det være 20 til sammen?
Marit: Dem må være mer enn fem hver
Lærer: Mer enn fem hver, må begge to være mer enn fem hver?
Lars: Nei…
Lærer: Diskuter i gruppa
Lars: Nei, for hvis det er i midten så når ikke fem cm.. jo det gjør den! Ja! Mer enn fem. Vi har funnet det!

Lars: Vi har funnet det, hvis c er 10 cm, så må a og b være fem.
Marit: Mer enn fem.
Lars: Ja, ja. Mer.. og 10 tilsammen
Marit: Lars, Åhh ja, jeg vet, jeg vet. Vi kan si at c må være.. over en halv hver Lars
Lars: Ja, ja!

Marit: Lars, a og b må være over en halv hver
Lars: Ja

Lærer: Fant dere ut av det eller?
Marit: Ja jeg har svaret. Mer enn en halv hver.
Lærer: Hæ?
Marit: Det må være mer enn den halve sida hver
Lærer: ja, de må være mer enn halve c hver.
Lars: Eller.. Hvis c er 10 cm, så kan b være fem...
Marit: Nei, den kan ikke være 5, den må være 6
Iris: Den må være mer enn 5
Lars: Jo 5!
Lærer: Må begge være mer enn fem eller?
Lars og Iris: Ja
Lars: Bittelitt mer enn 5
Lærer: Ja, og hva blir regelen?
Lars: At.. a og b må være over c

I dette eksempelet får elevene støtte fra læreren hvor de får mulighet til å tenke på et bestemt tilfelle. Videre kommer Marit med et utsagn hvor hun har skjønt at de to sidelengdene a og b må være lengre enn 5 cm hver fordi den lengste siden, c, er 10 cm. Deretter diskuterte elevene for å komme fram til en mer presis forklaring. Gruppa blir deretter enig om at a og b må være over halve lengden til c hver. Til slutt kommer læreren bort for å høre om de kom fram til svaret og elevene konkluderer med: *«... a og b må være over c»* hvor Lars mener at a og b må være lengre enn c.

De bruker et konkret eksempel der de sier at a og b må være lengre enn 5 cm, og gjør på bakgrunn av dette en generell argumentasjon om at a og b må være lengre enn c. Gruppa begrunner svaret med å ta utgangspunkt i et eksempel for å representere helheten av tilfeller, dette tilsvarer bevisføring av generisk eksempel, som ifølge Balacheff (1988) et pragmatisk bevis. I tenkevanen *balancing exploration and reflection* er det å stoppe opp, vurdere og se tilbake et sentralt poeng. Dette gjør Marit ved å bruke de tidligere erfaringene fra diskusjonen om trekant med sidelengdene 3-3-6, når hun i starten sier at a og b må være lengre enn 5 cm hver. Ved at gruppen reflekterer og diskuterer, og kommer fram til trekantulikheten, bemerker de og relaterer struktur i den geometriske figuren. Slik ser vi at elevene bruker tenkevanen Driscoll et al. (2007) beskriver som *reasoning with relationship.*

En indikasjon på at de fleste elevene i klassen er på et tidlig stadium i å generalisere geometriske ideer, er at de hadde utfordringer med å komme fram til en generell regel som vil gjelde for alle trekanter og de måtte benytte seg av et eksempel som utgangspunkt for å komme fram til trekantulikheten. Det vil si at de er på et tidlig stadium av tenkevanen *generalizing geometric ideas*. Elevene kommer ikke fram til en presis matematisk forklaring, da de sier at a og b må være over halvparten av c. En fellesnevner for resonnementene i denne kategorien er at de brukte lignende eksempler og benyttet seg kun av et resultat som gir likebeinte trekanter. Derfor er de ikke helt i mål med forklaringen, som ville vært å si at a og b til sammen må være lengere enn c. Man kan for eksempel lage en trekant som har sidelengdene 3-8-10.

I resonnementet tar elevene utgangspunkt i at den lengste sidelengden er 10 cm. Når de undersøker hvor lang de to andre sidelengdene må være endres sidelengden a og b, mens c forblir det samme. Da tenker elevene dynamisk om et statisk tilfelle og på den måten gjør de det Driscoll et al. (2007) omtaler som *investigating invariants.*

4.2.2 Kategori 4 - Visuell forklaring

Det var én gruppe som brukte en visuell forklaring når de skulle komme fram til trekantulikheten. Den visuelle forklaringen ble først gjort i gruppa, deretter for hele klassen slik:

> Eksempel 9:
>
> *Videoen viser at Stig og Hilde tenker hardt på oppgaven.*
>
> *Stig: Hvis man tar de her, og bøye dem ut sånn. Så vil de her to være lengere enn den. (Peker på arket på de to korteste sidene) Æ trur det må være litt mere enn halvparten.*
> *Hilde: 5 og 3,5 og 3,5.*
> *Lærer: Ok, Hilde sier 5 og 3,5. Hvor lang er c?*
> *Stig: Hvis du har grunnlinja her, og to sider som bøyes ut slik. Så er jo de her lengere enn den. (Tegner og peker på at a-b er lengere enn c).*
> *Lærer: Så a og b sammen, er lengere enn c?*
> *Stig: Ja*
>
> Felles gjennomgang med klassen:
>
> *Stig: (Lager en trekant med hendene og bretter på en måte ut armene). Hvis man bretter dem ut så dem går likt med linja c, blir dem lengere.*
> *Lærer: Så hvis man lager en linje med a og b og en linje med c, og man legger dem ved siden av hverandre, så vil a og b være lengere enn c?*

Stig starter med å lage en tegning og forklarer at hvis man bøyer to av sidene ned og lager en rett linje, sammen med den tredje sidelengden, vil de til sammen være lengre, og sier at a og b må være litt mer enn halvparten av c. Hilde forsøker å forstå det med å støtte seg til et eksempel, mens Stig fortsetter uten å ta utgangspunkt i et eksempel. Senere i den felles gjennomgangen med klassen viser Stig sin begrunnelse med å bruke armene for å gi en visuell forklaring som vist i figur 4.1.

Figur 4.1: En elev viser sin visuelle forklaring på trekantulikheten

I resonnementet kommer det fram at Stig bruker de erfaringene de gjorde i gjennomgangen av figuren med sidelengdene 3-3-6 for å forklare at dersom man har to sidelengder og trekker de ned mot c, den lengste sidelengden, vil de to andre til sammen bli lengre enn c. Dette forklarer han først med å tegne og vise på arket til gruppa. Dermed kan vi tydelig se at Stig gjør flere ting som kjennetegner tenkevanen *balancing exploration and reflection*. Han tegner og «leker» med problemet i tillegg til at han ser tilbake og bruker de erfaringene de allerede har gjort.

Slik Stig ordlegger seg kommer det fram at han ikke benytter seg av konkrete eksempler for å forklare og forstå konseptet. På den måten kan vi si at han er på vei til å utvikle en evne til å generalisere ut fra Driscoll et al. (2007) sin forklaring om utviklingen av tenkevanen *generalizing geometric ideas.* Ved at Stig forandrer på figuren og undersøker hva som skjer når sidelengdene a og b legges ned mot sidelengden c får vi en indikasjon på at han gjør det Driscoll et al. (2007) beskriver som *investigating invariants.*

I den felles gjennomgangen gir Stig en visuell forklaring med armene for å forklare trekantulikheten til resten av klassen. Han lager en trekant med armene, for deretter å forklare at ved å trekke de to sidelengdene ned mot den andre, vil de til sammen bli lengre enn den tredje siden, som vist i figur 4.1. Grabiner (2012, s. 153) sier at visuelle bevis er overbevisende psykologiske og et virkemiddel for videre utforskning og oppdagelse. Gjennom Stigs forklaring bemerker han strukturer for trekanter i sammenheng. Dette er en indikator på tenkevanen *reasoning with relationship* (Driscoll et al., 2007).

5 Drøfting

I dette kapittelet vil vi drøfte studiens funn fra analysen av datamaterialet. Først vil vi drøfte elevenes resonnering og strategivalg i lys av kategoriene vi har presentert fra undervisningens fase 2 og fase 3. Under fase 2 vil vi ta for oss de enkelte figurene og elevenes arbeid med disse. Videre drøftes trender i datamaterialet med tanke på geometriske tenkevaner presentert av Driscoll et al. (2007).

Etter den første analyseprosessen av transkripsjonene viste kodingen at undervisningsopplegget genererte 24 tilfeller av resonnement. Dette gir en indikasjon på at det undersøkende undervisningsopplegget legger til rette for elevers resonnement, og gjennom diskusjon med hverandre kommer elevenes tanker til syne. I Skånstrøm og Blomhøjs (2016) definisjon av undersøkende matematikkundervisning kommer det fram at elevene blant annet avgrenser problemet, gjennomfører empiriske undersøkelser, diskuterer med hverandre og læreren, samt utvikler faglige argumenter. Noe av det viktigste med å utvikle læringssituasjoner i geometri, er at elevene samarbeider i undersøkelse etter geometriske fakta og relasjoner, og opplever det som nødvendig å forklare og utvikle kunnskap (Hershkowitz, 1998). Gjennom elevenes resonnementer får vi tilgang til hvordan de forklarer, argumenterer, stiller spørsmål, diskuterer med hverandre og konkluderer. På den måten kan vi si noe om deres resonnement i undersøkende arbeid, og i tillegg identifisere tenkevaner i resonnementene.

5.1 Strategivalg i resonnementene

I analysen av datamaterialet fra undervisningens fase 2 kom vi fram til at elevene møtte utfordringen med to ulike tilnærminger; prøve og feile og systematisk tilnærming. I fase 3 kom elevene fram til en løsning ved bruk av eksempel som utgangspunkt og visuell forklaring. Kategoriene baserer seg dermed på elevenes strategivalg i resonneringsprosessen. Som beskrevet i kapittel 2.2 presenterer Lithner (2008) fire steg i matematiske resonneringsprosesser. Steg 2 i resonneringsprosessen innebærer at elevene gjør et strategivalg som skal bidra til å komme fram til en løsning. Elevene må ta et valg, konstruere, oppdage og gjette. Videre innebærer steg 3 og 4 å argumentere for hvorfor de kan ha en løsning og oppnår en konklusjon. I arbeidet med hver figur gikk elevene gjennom en slik prosess.

Tabell 5.1: Oversikt over tilnærming, sammenlignet med hvilken figur de lagde, fase 2

Fase 2	Likesida trekant	Likebeint trekant	Rettvinkla trekant
Prøve og feile	2	2	2
Systematisk tilnærming	2	2	2

I tabell 5.1 ser vi at gruppene hadde to ulike tilnærminger til oppgaven. Slik undervisningsopplegget var lagt opp, der fase 2 besto av at elevene skulle arbeide selvstendig med å finne så mange trekanter som mulig ved hjelp av tauet, ser vi det som naturlig at elevene brukte disse tilnærmingene. Prøve og feile og en systematisk tilnærming kan sees i likhet med det Blomhøj (2020) trekker fram som essensielle elevaktiviteter i undersøkende arbeid i matematikk. Å prøve og feile vil være en del av det å eksperimentere, stille spørsmål og fortolke og vurdere resultater. Systematisk observasjon er også en essensiell elevaktivitet hos Blomhøj. Systematisk og strukturert observasjon er en mye brukt term i litteratur om observasjon som metode. Det innebærer at man har et spesifikt mål for øyet når man observerer et fenomen. Blomhøj presiserer videre at de essensielle elevaktivitetene kan fremkomme i annen type undervisning, men at de i stor grad er fremtredende i undersøkende matematikkundervisning. Derfor ser vi det som naturlig at tilnærmingene elevene benyttet seg av kom til syne i undervisningens fase 2, og sammenfaller godt med elevaktivitetene Blomhøj (2020) trekker fram.

Tabell 5.2: Oversikt over tilnærming for å forklare trekantulikheten, fase 3.

Fase 3	Trekantulikheten
Eksempel som utgangspunkt	3
Visuell forklaring	1

I tabell 5.2 kommer det fram at elevene løste oppgaven på to ulike måter i fase 3 av undervisningen. Det var tre grupper som kom fram til trekantulikheten ved å bruke eksempel som utgangspunkt, og kun én gruppe som brukte en visuell forklaring. Siden målet for denne fasen av undervisningsopplegget var å forstå og argumentere for trekantulikheten, blir kategoriene «farget» av det fasen handler om. Kategori 3, *eksempel som utgangspunkt,* er nært knyttet til det Balacheff (1988) sier om pragmatiske bevis. Det baserer seg på handlinger og eksempler. Å bevise ved bruk at et enkelttilfelle for å generalisere og representere helheten av en klasse, klassifiseres som generisk eksempel. Generisk eksempel sees på som et lavt nivå av bevisføring (Balacheff, 1988).

Kategori 4, *visuell forklaring,* var det kun én gruppe som benyttet seg av. Den ene eleven tegnet først, for deretter å gi en visuell forklaring med armene til hele klassen. Grabiner (2012, s. 153) sier at visuelle bevis er psykologisk overbevisende og et virkemiddel for videre utforskning og oppdagelse. I Harel og Sowders (2007) taksonomi vil både kategori 3 og 4 havne under empirisk overbevisning hvor svarene baserer seg på eksempler eller visuelle forklaringer. Bevis som forklaringer er ifølge Hanna (2018) hensiktsmessig i det pedagogiske arbeidet og visuelle representasjoner vil for mange være nyttig.

Som i fase 2, ser vi en sammenheng mellom kategoriene i fase 3 og Blomhøjs essensielle elevaktiviteter. Elevene i kategori 3 og 4 forsøker å forklare og bevise trekantulikheten. Elevene utvikler definisjoner, innfører og anvender symboler, representerer, visualiserer, resonnerer og beviser. Med dette kan vi også begrunne undervisningsopplegget som undersøkende matematikkundervisning. I tillegg kan vi se et ulikt abstraksjonsnivå fra fase 2 til fase 3. Dette drøfter vi nærmere i delkapittel 5.3 Abstraksjonsnivå.

5.2 Tenkevaner representert i fase 2

Tabell 5.3 viser en oversikt over tenkevaner vi identifiserte i elevenes resonnement. Når vi oppsummerer funnene fra analysen av fase 2 inn i en slik tabell får vi god oversikt over resultatene. Her kan vi se både likheter og forskjeller, og i lys av dette reiser det seg noen tanker og spørsmål vi ønsker å drøfte i det følgende.

Tabell 5.3: Tenkevaner identifisert i elevenes resonnement, fase 2.

	Likesida trekant	**Likebeint trekant**	**Rettvinkla trekant**
Kategori 1 - Prøve og feile	Balancing exploration and reflection (Exploration in foreground) Reasoning with relationship Generalizing geometric ideas	Balancing exploration and reflection (Exploration in foreground) Reasoning with relationship	Reasoning with relationship
	Likesida trekant	**Likebeint trekant**	**Rettvinkla trekant**
Kategori 2 - systematisk tilnærming	Balancing exploration and reflection (End goals in foreground) Reasoning with relationship	Balancing exploration and reflection (End goals in foreground) Reasoning with relationship Generalizing geometric ideas	Balancing exploration and reflection (End goals in foreground) + (Exploration in foreground) Reasoning with relationship

(1) Hvorfor finner vi tenkevanen *reasoning with relationship* igjen i alle resonnementene i fase 2? Elevene hadde i forkant av undervisningen arbeidet med geometriske figurer, og dermed hadde de en del forkunnskaper. I iscenesettelsesfasen ble det også presisert at elevene skulle skrive ned egenskapene på figurene de kom fram til. Ifølge Driscoll et al. (2007) innebærer tenkevanen *reasoning with relationship* å identifisere figurer basert på

egenskapene. Derfor ser vi det som naturlig at denne tenkevanen var så fremtredende i resonnementene. I kategori 1 kommer tenkevanen til syne på et lavere nivå da de er i stand til å identifisere og se sammenheng mellom færre egenskaper enn i eksemplene fra kategori 2. Som redegjort for i kapittel 4, analyse og funn, er det flere indikatorer på denne tenkevanen under kategori 2, systematisk tilnærming, enn i kategori 1. I eksempel 4 og 6 bemerkes struktur og mønster ved å se sammenheng mellom sidelengdene og vinklene i trekanten. Elevene har utviklet et matematisk språk da de er i stand til å bruke begreper om geometriske figurer og kan kjenne igjen figurene basert på egenskaper. Det er tydelig at elevene er på nivå 1 slik van Hiele (1999) beskriver nivå for geometrisk tenkning, men viser også tegn på en overgang til nivå 2, da de ikke har store utfordringer med orientering av figurene, og med å gjenkjenne de. Elevene er frigjort fra vante rammer og den «vanlige» orienteringen av figurer i 2D-format som følge av at undervisningen er tatt ut fra klasserommet.

(2) Hvorfor framtrer tenkevanen *balancing exploration and reflection* ulikt i kategori 1 og kategori 2? Driscoll et al. (2007) deler tenkevanen inn i to deler, exploration in foreground og end goals in foreground. Et skille i bruk av tenkevanen *balancing exploration and reflection* ligger i strategivalget til elevene og henger dermed sammen med kategoriene i undervisningens fase 2. Elevene som bruker en tilnærming der de prøver og feiler, gjør det Driscoll et al. definerer som exploration in foreground ved at de utforsker fra start gjennom gjetning og intuisjon. Elevene med en systematisk tilnærming tar utgangspunkt i end goals in foreground. De ser for seg det endelige målet og identifiserer delsteg som kan bidra til å nå fram til en løsning, før de undersøker med tauet for å finne en løsning. Karakteristisk for flinke problemløsere er metakognitiv evne til å balansere utforskningen med å stoppe opp, se tilbake og vurdere arbeidsprosessen (Driscoll et al., 2007 s. 14). Dermed kan dette indikere at elever som bruker systematisk tilnærming har kommet noe lengre i utviklingen av denne tenkevanen i tillegg til at det styrker vår kategorisering av resonnementene.

Det viste seg at tenkevanen *balancing exploration and reflection* ikke kom til syne i resonnementene fra den rettvinkla trekanten i kategori 1. I arbeidet med denne figuren tok elevene tak i noen tilfeldige knuter og oppdaget plutselig at de hadde en trekant. Deretter identifiserte de figuren. Elevene brukte ikke tid på å undersøke eller gjette. Derfor kunne vi ikke identifisere tenkevanen i resonnementene. I kategori 2, i arbeidet med den rettvinkla trekanten, kom det fram at elevene først hadde en systematisk tilnærming med å identifisere det endelige målet og delsteg som kunne hjelpe til å nå fram til en løsning (end goals in foreground), men måtte likevel prøve og feile (exploration in foreground) for å komme fram til løsningen. Dette kan komme av at elevene ikke har tilstrekkelig med kunnskaper om rettvinkla trekanter, og baserer svaret på en antakelse om at de har funnet en rett vinkel. Elevene har ikke verktøy for å måle dette, uten måleinstrument må man kjenne til sammenhengene i Pytagoras læresetning for å kunne fastslå dette med sikkerhet. Dette møter ikke elevene før de begynner på ungdomsskolen (Utdanningsdirektoratet, 2013). Det er dermed ikke sagt at det ikke er gode erfaringer elevene tar med seg. En kjent utfordring for elever er å identifisere figurer som er orientert på en uvanlig måte (Battista 2007, s. 846). Ifølge Driscoll et al. (2007) blir lærebøker ofte sett på som kilden til denne utfordringen, da de favoriserer enkelte eksempler, med horisontal orientering. Dermed kan den rettvinkla trekanten ha vært utfordrende da de ikke kan klassifisere den ut fra å telle sidelengdene til figuren.

Læring i geometri og rom i grunnskolen har i for stor grad basert seg, ifølge Berthelot og Salin (1998), på at elevene arbeider med geometri i planet, altså både 2D og 3D figurer tegnes på papir eller på en dataskjerm. Ved at elevene arbeider slik og ikke gjør erfaringer i den fysiske verden, oppstår utfordringer med forståelse om vinkler, andre egenskaper, og figurer i ulike dimensjoner. Slik kan vi argumentere for å la elevene gjøre erfaringer på en annen arena, som ved å ta matematikken ut av klasserommet. Ved å la elevene jobbe med geometri og representasjoner i ulike settinger, selv om de ikke kommer fram til helt nøyaktige svar i alle tilfellene, kan de få nyttige erfaringer for deres læring.

(3) Hvorfor finner vi lite av tenkevanen *generalizing geometric ideas* i resonnementene fra både kategori 1 og 2? Denne tenkevanen kommer kun fram i to eksempel, først under resonnementet om likesida trekant i kategori 1 og sist i resonnementet om likebeint trekant i kategori 2. I det første eksempelet viser en av elevene at hun har en generalisert tanke om at alle sider i en likesida trekanter er like lange. I det andre eksempelet har Line som tidligere nevnt en generalisert tanke om likebeinte trekanter. Det er vanskelig å si noe om nivået elevene generaliserer på, da vi ser lite av denne tenkevanen. Noen av årsakene til dette kan være at oppgaven ikke legger til rette for generalisering i denne fasen, elevenes nivå for generalisering ikke er tilstrekkelig utviklet eller at de ikke ser et behov for å generalisere. På et høyere nivå vil det genereres svar med alle mulige løsninger eller overbevisende

argumenter om hvorfor det ikke er flere (Driscoll et al. 2007, s. 13). Det viste seg at elevenes søk etter trekanter stoppet etter å ha funnet de tre ulike trekantene og figuren med sidelengdene 3-3-6, men ingen begrunnet hvorfor det kun var tre mulige figurer å lage.

(4) I fase 2 finner vi ingen tilfeller av tenkevanen *investigating invariants*. Et kjennetegn på tenkevanen i denne fasen kunne vært å beholde en sidelengde konstant, og ut fra det sjekket hvilke trekanter som oppsto med å prøve seg fram med de to andre sidelengdene. Dette ville vært å gjøre transformasjoner og betrakte hvilke egenskaper som endrer seg og hvilke som forblir de samme, slik Driscoll et al. (2007) beskriver tenkevanen *investigating invariants*. Med tilnærmingen prøve og feile (kategori 1) kan det tenkes at dette er en naturlig fremgangsmåte for å finne så mange trekanter som mulig, men det kom ikke til syne i elevenes arbeid. En årsak til dette kan være, som beskrevet i avsnittet over, at elevenes søk etter trekanter stoppet opp, og kunne vært mer naturlig i et søk etter alle mulige trekanter.

5.3 Tenkevaner representert i fase 3

Det viste seg at alle gruppene kom fram til en trekant med sidelengdene 3-3-6. Dette åpnet for spørsmål og refleksjon i den tredje fasen av arbeidet. Etter diskusjon i gruppene hadde de en felles refleksjon hvor læreren brukte et av tauene for å illustrere hvorfor det ikke skulle være mulig ifølge trekantulikheten. I tillegg brukte læreren en bru-analogi for å illustrere prinsippet. Læreren verdsetter på denne måten elevenes feile svar, og siden alle elevene hadde den samme erfaringen med å komme fram til figuren, ble det en interessant diskusjon. Essensielt for lærerrollen i undersøkende undervisning er det å verdsette elevenes feile svar og bygge på deres erfaringer (Blomhøj, 2020). Årsakene til at elevene kom fram til at det var mulig, var unøyaktighet med tauene, samt at vi observerte at elevene ikke holdt tauene stramt nok. Denne seansen viste seg å gi elevene nyttige erfaringer til å komme fram til en riktig konklusjon for trekantulikheten til slutt. Dermed fungerte det som en døråpner til det videre arbeidet. Tabell 5.4 viser hvilke tenkevaner vi identifiserte i elevenes resonnement fra fase 3. Ved å oppsummere funnene fra analysen av fase 3 i en slik tabell får vi god oversikt over resultatene.

Tabell 5.4: Tenkevaner identifisert i elevenes resonnement, fase 3.

	Kategori 3 - Eksempel som utgangspunkt	**Kategori 4 - Visuell forklaring**
Tenkevaner	Balancing exploration and reflection Reasoning with relationship Generalizing geometric ideas Investigating invariants	Balancing exploration and reflection Reasoning with relationship Generalizing geometric ideas Investigating invariants

Ulikt fra fase 2 var det ikke mange forskjeller i hvilke tenkevaner som kom fram i de ulike kategoriene. Vi ønsker derfor i det følgende å drøfte hvordan de kom til syne.

Tenkevanen *balancing exploration and reflection* kommer til syne i begge kategoriene ved at elevene tegner, leker og utforsker problemet med å se tilbake og vurdere. Det karakteristiske med elevenes bruk av denne tenkevanen i fase 3 sammenlignet med fase 2 er at elevene ser tilbake på tidligere erfaringer de har gjort i undervisningsforløpet. I den felles diskusjonen om det var mulig å lage en trekant med sidelengder 3-3-6 kom det fram to sentrale poeng elevene benyttet seg av i arbeid med trekantulikheten. Det ene var at de sammen ble enig om at to av sidelengdene ikke kunne være halvparten av den tredje. Det kommer til syne med at Marit sier «De må være mer enn fem hver», da sidelengden c, er 10 cm. Det andre poenget er når læreren bruker en bru-analogi for å forklare at avstanden mellom sidelengdene blir lengre og at de ikke berører hverandre når brua åpner seg. Dette kommer tydelig fram ved at Stig har en visuell forklaring som er mye inspirert av lærerens måte å forklare ved bruk av bru-analogien.

Dette sammenfaller med kjennetegnene på trefasestrukturen i undersøkende matematikkundervisning Skånstrøm og Blomhøj (2016) presenterer, der fase 2 skal legge til rette for at elevene får utforske og skape felles erfaringer de tar med seg videre til fase 3. I fase 3 skal læreren bruke elevenes felles erfaringer og systematisere dette. Dette blir tydelig ved at elevene bruker de samme erfaringene, men representerer dem på en ulik måte. Vi ser i resonnementene at de bruker erfaringer de tilegnet seg i fase 2, med å se tilbake og bruke dette i fase 3. *Balancing exploration and reflection* går igjen i alle resonnementene til elevene, men som vist over på ulike måter. Abril et al. (2013) sier at et resultat av IBME er at elevene får undersøkende tenkevaner. Balancing exploration and reflection kan man si er en undersøkende tenkevane da det innebærer å tegne, leke, undersøke gjennom intuisjon og gjetning, se tilbake og vurdere, beskrive og gjøre antakelser. Dette er kjennetegn som går igjen både i definisjoner og som essensielle elevaktiviteter i undersøkende matematikkundervisning.

Tenkevanen *reasoning with relationship* kommer til syne når elevene bemerker strukturer og setter det i sammenheng som en generell betingelse for trekanter, at to sidelengder til sammen må være lengre enn den tredje. Generalisering er ifølge Driscoll et al. (2007) å forstå og forklare på et generelt nivå om alle tilfeller av et geometrisk fenomen. På denne måten kan man se en sammenheng mellom tenkevanene *reasoning with relationship og generalizing geometric ideas.* Dette viser at tenkevanene ikke er uavhengig av hverandre, noe som også støttes av Driscoll et al. (2007, s.15). *Generalizing geometric ideas* er lite fremtredende i fase 2, mens i fase 3 arbeider elevene på et høyere nivå av abstraksjon. Elevene kommer fram til den generelle regelen gjennom empirisk overbevisende bevis, og er klar over at betingelsene vil være gjeldende for hele gruppen av geometriske figurer. Gjennom elevenes empirisk overbevisende bevis viser de tegn på uformell deduksjon, nivå 2 i van Hieles modell, hvor egenskaper er mer logisk ordnet og man ser større sammenheng mellom egenskapene. Ifølge Harel og Sowder (2007) er deduktive bevis mer utdypende og overbevisende av det faktum at det bevises som sant gjennom tilfeldige utvalgte tall.

Investigating invariants innebærer å analysere hvilke egenskaper som endrer seg og ikke om situasjonen endrer seg (Driscoll et al. 2007). En indikasjon på dette vil være at noen transformerer en figur uten å bli bedt om det. I fase 2 ser vi ingen tegn til at elevene bevisst utfører handlinger hvor de betrakter hva som endrer seg og ikke, med å for eksempel holde i en side og endre de to andre sidelengdene. I fase 3 kan vi se at elevene holder fast ved en sidelengde og betrakter hva som skal til for at det blir en trekant. De undersøker hva som endrer seg og hva som forblir det samme i en transformasjon av figuren, og er på den måten i stand til å tenke dynamisk om et statisk tilfelle (Driscoll et al. 2007). Dette kommer fram i kategori 3 ved at elevene prøver å komme fram til en løsning på trekantulikheten ved å sette inn tall for a, b og c. De starter med å si at den lengste siden, c, skal være 10cm, og deretter undersøker med andre lengder for de to korteste sidene. I kategori 4 kommer tenkevanen fram ved at Stig beveger på armene for å justere og vise at sidelengdene a og b endrer seg, mens c er lik. Når man resonnerer i geometri, går man ifølge Duval (1998) gjennom kognitive prosesser for å bearbeide og formidle informasjon som er gitt. Gjennom elevenes bruk av tenkevanen investigating invariants kommer det fram at elevene har vært gjennom den kognitive prosessen operative apprehension, som innebærer endringer og modifisering av figurer for å løse problemer. Dette kan bidra til å gi visuell styrke i problemløsingsprosessen (Duval 1998).

I kategori 3 og 4 kommer alle tenkevanene til syne selv om elevene har en ulik tilnærming i forklaringene. Gjennom bevis og generalisering kommer elevene fram til en forklaring på trekantulikheten. På denne måten kommer indikasjoner på at tenkevanene er på et noe høyere abstrakt nivå også til syne. Vi stiller oss spørsmål til hvorvidt tenkevanene generalizing geometric ideas og investigating invariants er tenkevaner som kommer til syne på et høyere abstraksjonsnivå enn det som skjer i undervisningens fase 2. Oppgaven krever mer av elevenes refleksjoner da de ikke opererer rundt konkrete og fysiske objekter som i fase 2, samt at de ikke skal beskrive egenskaper, men mer generelle betingelser for trekanter. Når elever kan se at en samling av figurer har karakteristiske egenskaper og betingelser, mener Battista (2007) at elevene innehar et abstraksjonsnivå som er interiorized. Da er elevene i stand til å gjøre beskrivende analyser og resonnering som tilsvarer van Hieles nivå 1. Samtidig viser de tegn til uformell deduksjon som nevnt over, og på den måten kommer det fram at enkelte er kommet noe lengre i utviklingen til nivå 2 for geometrisk tenkning i van Hieles modell.

5.4 Abstraksjonsnivå i undervisningens fase 2 og 3

Oppbygningen og organiseringen av undervisningsopplegget vi har gjennomført har en lik struktur som utviklingen av abstraksjon er beskrevet av Utdanningsdirektoratet (2019b), hvor elevene i fase 2 arbeider med konkrete eksempler og beskrivelser av trekanter. I fase 3 blir elevene utfordret til å reflektere over en mer abstrakt utfordring og bruke symboler og formelle forklaringer. På denne måten kan man se at det er ulikt nivå av abstraksjon i de ulike fasene og kategoriene vi har kommet fram til.

Interiorization er den mest generelle formen for abstraksjon (Steffe & Cobb, 1988, s. 337). Det leder til en forståelse av struktur, mønster, og handlinger basert på egne erfaringer fra aktiviteter, og innebærer å kunne ta konseptet bort fra den erfarte konteksten og reflektere over det. Likevel er den erfarte konteksten viktig i nye og ukjente situasjoner. I fase 2 krever det ikke mer av elevene enn at de må være i stand til å ha det første nivået av interiorized abstraction slik Battista (2007) beskriver det. Når objekter har blitt abstrahert tilstrekkelig, kan man representere objektene uten perseptuell påvirkning. Dette kan vi kjenne igjen hos elevene da de er i stand til å reflektere over og analysere trekantens struktur ved beskrivelser av egenskaper. Videre kan det være vanskelig å si med sikkerhet hvilket nivå av abstraksjon elevene har, da det kan ha stor sammenheng med tidligere erfart kontekst (Hoyles & Healy 1997, referert i Battista 2007).

I fase 3 blir elevene utfordret til å reflektere over noe mer abstrakt og det krever mer av elevenes nivå for abstraksjon. De blir utfordret til å diskutere generelle betingelser for alle trekanter og læreren presenterer en figur med sidelengdene a, b og c. Dermed kan det ha vært en større utfordring for flere av elevene. Vi observerte at elevene hadde utfordringer med å se bort fra den konkrete trekanten som ble tegnet på tavla, ved at noen elever gjorde målinger av vinklene og sidelengdene til figuren. Ved at elevene er avhengig av å bruke konkrete eksempler og visuelle forklaringer kan man si at de ikke er på det andre nivået av interiorization slik Battista (2007) beskriver. På dette nivået kan man handle uten representasjon og symboler kan fungere som pekepinner. Likevel kan det bidra i en prosess til å løfte elevene opp på dette nivået. Duval (1998) presiserer at det er et gap mellom naturlig diskursiv- og teoretisk diskursiv prosess som innebærer å se nytten av deduktive forklaringer og videre at lærere må være bevisst på arbeide mellom disse prosessene.

5.5 Kjerneelementene i fagfornyelsen

Kjerneelementene i fagfornyelsen er en konkretisering av sentrale begreper, metoder, tenkemåter og kunnskapsområder, og det viktigste elevene skal arbeide med i de enkelte fagene (Utdanningsdirektoratet, 2019a). Undervisningsopplegget The rope triangle skal legge til rette for undersøkelse og problemløsning ved at elevene får begrenset informasjon og må gjennom samarbeid komme fram til løsningene. Utforskning og problemløsning er det første kjerneelementet i matematikk Utdanningsdirektoratet (2019b) trekker fram i den nye læreplanen. I undervisningsforløpet arbeidet elevene sammen og undersøkte egenskaper og strukturer i trekanter. Som vist i analysens funn åpnet undervisningsopplegget for at elevene selv valgte strategier for å løse problemene, og dette ble gjort på ulike måter. Utdanningsdirektoratet presiserer at når elever får tid til å tenke, reflektere, resonnere, stille spørsmål og oppleve faget som relevant, bidrar matematikkfaget til kreativitet og skapertrang. I tillegg utvikler de selvstendighet og utholdenhet gjennom elevsentrert undervisning (Utdanningsdirektoratet, 2019b).

Vi ser gjennom våre analyser av datamaterialet at det er sammenheng mellom kjerneelementene, og at de ikke er adskilte deler av læreplanen i matematikk. Vi har utviklet en forståelse og vist gjennom våre beskrivelser at utforsking og problemløsning, resonnering og argumentasjon, og abstraksjon og generalisering, kan alle ha stor plass i ett og samme undervisningsopplegg. Tredelingsstrukturen det legges opp til i dette undervisningsopplegget gir en rik variasjon i undervisningen og nyttig faglig innhold kommer til syne ulikt i de forskjellige fasene av undervisningen. Vi ser også at undervisningsopplegget legger opp til en mulig ny iscenesettelsesfase i oppsummeringsfasen. Læreren setter scenen på nytt ved å ta opp problemet med 3-3-6-trekanten. Den nye iscenesettelsesfasen fører til en ny undersøkelsesfase når elevene skal komme fram til trekantulikheten. Dermed ser vi at variasjon i undervisningen kommer enda sterke fram, samtidig som det gir mulighet for ulike abstraksjonsnivåer som nevnt over. Dette støttes også av Skånstrøm og Blomhøj (2016) som sier at tredelingsstrukturen ikke trenger å ha en fast rekkefølge, og at det er mulig å gjenta de ulike fasene. Utforskning er et verb som i større grad går igjen i den nye læreplanen sammenlignet med LK-06, og med dette kan det tenkes at elevene får arbeidet mer likt den vitenskapelige og matematiske arbeidsprosessen i skolen enn tidligere.

6 Avslutning

I denne studien har vi undersøkt følgende problemstilling og forskningsspørsmål:

Hvordan resonnerer elever på mellomtrinnet i et undersøkende undervisningsopplegg i temaet geometri?

1) *Hvilken tilnærming bruker elevene når de resonnerer i den undersøkende undervisningen?*
2) *Hva kjennetegner resonnementene i den undersøkende undervisningen?*

Studien tar utgangspunkt i undersøkende matematikkundervisning, og undervisningsopplegget The rope triangle som er benyttet i forbindelse med Primas-prosjektet (Blomhøj, 2020). Studien viser at undersøkende matematikkundervisning kan legge til rette for gode diskusjoner og refleksjoner mellom elever i deres selvstendige arbeid, og at matematiske resonnement kommer til syne gjennom store deler undervisningsopplegget.

For å svare på problemstillingen må vi sammenfatte forskningsspørsmålene. Vi kan vi si at elevene i den undersøkende matematikkundervisning i geometri resonnerer på en hensiktsmessig måte for å drive dem fremover mot målet for undervisningen. Dette gjør de med ulike strategivalg, som avhenger av hva elevene skal undersøke. Resonnementene elevene gjør innebærer å prøve seg fram gjennom gjetning og intuisjon, systematisk søk etter figurer, samt visualisere geometriske figurer de skal jobbe med. Videre beskriver elevene geometriske figurer ved hjelp av figurenes egenskaper, generaliserer geometriske ideer og de «leker» med figurer både konkret og abstrakt.

Det første forskningsspørsmålet blir besvart gjennom analysen av elevenes resonnement og deres tilnærming til oppgaven i undervisningens fase 2 og 3. Ved å analysere elevenes resonneringsprosesser i lys av Lithners (2008) beskrivelse av en slik prosess kom vi fram til at elevene hadde ulike strategivalg i resonnementene. Dette førte til fire kategorier av elevenes resonnement. Undervisningens trefasestruktur og innholdet i de ulike fasene medførte ulikt nivå av abstraksjon, som gjorde at elevenes resonnementer var ulike i de to fasene. I undervisningens fase 2 (elevenes selvstendige arbeid) jobbet elevene med den praktiske oppgaven med å finne trekanter. I dette arbeidet kom vi fram til at elevene hadde en tilnærming med å prøve og feile (kategori 1) eller en systematisk tilnærming (kategori 2). I undervisningens fase 3 (refleksjon og faglig læring) fikk elevene utfordringer på et høyere abstraksjonsnivå, noe som medførte to nye kategorier. For å forklare trekantulikheten tok de fleste elevene utgangspunkt i et eksempel, som ble kategori 3, mens den ene gruppen brukte en visuell forklaring (kategori 4). Disse to formene for forklaringer er i samsvar med Harel og Sowders (2007) beskrivelse av empirisk overbevisende bevis.

Det andre forskningsspørsmålet blir besvart gjennom nærmere analyse av resonnementene. Dette ble gjort med Driscoll et al. (2007) sin beskrivelse av geometriske tenkevaner som rammeverk. Tenkevanene ansees å gi suksessfull problemløsning i geometri. Ved å analysere resonnementene fant vi indikatorer på tenkevanene, noe som ble brukt for å svare på hva som kjennetegner elevenes resonnement. I løpet av hele undervisningsopplegget kom alle tenkevanene til syne, men på ulikt nivå. I undervisningens fase 2 var reasoning with relationship mest fremtredende, hvor elevene beskrev og reflekterte over trekantenes egenskaper. Balancing exploration and reflection kom fram i alle, bortsett fra ett resonnement. Dette fordi elevene ved ren tilfeldighet oppdaget at de hadde en rettvinkla trekant. Tenkevanene generalizing geometric ideas og investigating invariants, var ikke like fremtredende. De var mest fremtredende i fase 3 av undervisningen. På grunn av det ulike abstraksjonsnivået fra fase 2 til fase 3 kan det se ut til at de tenkevanene kommer tydeligere fram på et høyere abstraksjonsnivå.

Ifølge Gold (2017) ansees det som viktig å få elever til å tenke mer over meningen med matematikken de utøver, få elever til å utforske, finne ulike løsninger og gjøre oppgaver med blant annet flere mulige representasjoner. Resultatene fra denne studien viser at en undersøkende tilnærming i undervisningen kan gi variasjon i undervisningen, hvor elevene kan få arbeide med noe praktisk og konkret, samt bli utfordret på et mer abstrakt nivå. Videre får elevene mulighet til å diskutere, resonnere og argumentere, og undersøke matematiske konsepter i samarbeid med hverandre og med støtte fra læreren. I slike sammenhenger er det fokus på forståelse av og relasjoner mellom matematiske konsepter, fremfor å utføre manipulasjoner av uttrykk og memorerte prosedyrer. Samtidig ser vi at undervisningsformen kan legge til rette for arbeid med kjerneelementene Utdanningsdirektoratet (2019b) trekker fram i den nye læreplanen. Derfor ser vi det som hensiktsmessig å drive slik undervisning for å utvikle elevenes kompetanse innenfor viktige matematiske kunnskapsområder.

6.1 Videre forskning

Vi har gjennomført en casestudie og gjort analyser av ett undervisningsopplegg i én undervisningsøkt. Med utgangspunkt i et lite utvalg har vi analysert elevenes strategivalg og tenkevaner i resonnementene. Et naturlig steg videre vil være å undersøke om dette er gjeldene for et større utvalg, om det fremkommer flere strategier, andre trender med tanke på geometriske tenkevaner, og i andre undersøkende undervisningsopplegg i geometri. I en studie med et større omfang ville det vært interessant å studere elever på mellomtrinnet og ungdomstrinnet, for å undersøke elevers utvikling for resonnering og tenkevaner i geometri.

Trefasestrukturen er sentral i undervisningen, og videre ville det vært interessant å undersøke denne strukturen nærmere, i flere forskjellige undervisningsopplegg og matematiske emner, for å se på hvordan iscenesettelse fungerer og hvorfor det er viktig for elevenes deltakelse som del av denne undervisningsformen.

Referanseliste

Abril, A. M., Aguirre, D., Aldorf, A.-M., András, S., Antal, E., Ariza, M. R., . . .Tamási, C. (2013). *Primas - Promoting Inquiry In Mathematics And Science education across Europe*. Hentet fra https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/primas_final_publication.pdf

Alrø, H. & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education : intention, reflection, critique* (Mathematics education library, bd. v. 29). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, *45*(6), 797-810. 10.1007/s11858-013-0506-6

Artigue, M., Haspekian, M. & Corblin-Lenfant, A. (2014). Introduction to the Theory of Didactical Situations (TDS). I A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Red.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (s. 47-65). Cham: Springer International Publishing. Hentet fra https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_4

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *Mathematics, teachers and children*, 216-235.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructive Adaptive Expertise*, 1-33. https://doi.org/10.4324/9781410607218

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. I F. K. Lester & M. National Council of Teachers of (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (bd. 2). Charlotte, N.C: Information Age.

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag*: Scandinavian University Press (Universitetsforlaget).

Berthelot, R. & Salin, M. H. (1998). The role of pupils' spatial knowledge in the elementary teaching of geometry. I C. Mammana & V. Villani (Red.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century; An ICMI study* (bd. 5). Dordrecht: Kluwer.

Bjørndal, C. R. P. (2011). *Det vurderende øyet : observasjon, vurdering og utvikling i undervisning og veiledning* (2. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Blomhøj, M. (2020). Hvad er undersøgende matematikundervisning – og virker den? I M. W. Andersen & P. Weng (Red.), *Håndbog om matematik i grundskolen. Læring, undervisning og vejledning. (Upublisert)* (2 utg.). København: Dansk Psykologisk Forlag.

Boaler, J. (2019). *The elephant in the classroom : helping children learn and love maths* (Rev. ed. utg.). London: Souvenir.

Boesen, J., Lithner, J. & Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *An International Journal, 75*(1), 89-105. 10.1007/s10649-010-9242-9

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101. 10.1191/1478088706qp063oa

Bruder, R. & Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. *The International Journal on Mathematics Education, 45*(6), 811-822. 10.1007/s11858-013-0542-2

Bryman, A. & Bell, E. (2015). *Business research methods* (4 utg.). Oxford: Oxford University Press.

Corbin, J. M. & Strauss, A. L. (2008). *Basics of qualitative research : techniques and procedures for developing grounded theory* (3 utg.). Thousand Oaks, Calif: Sage.

Creswell, J. W. (2014). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches (International student ed.)* (4 utg.). Los Angeles, Calif: SAGE.

Creswell, J. W. & Miller, D. L. (2000). Determining validity in qualitative inquiry. *Theory into practice, 39*(3), 124-130. 10.1207/s15430421tip3903_2

Cuoco, A., Goldenberg, P. E. & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(4), 375-402. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90023-1

De nasjonale forskningsetiske komiteene, N. (2019). Uttalelse om forskningsprosjektet «Seksåringens deltakelse i samtaler i barnehage og skole». Hentet fra etikkom.no/hvem-er-vi-og-hva-gjor-vi/komiteenes-arbeid/Uttalelser/NESH/uttalelse-om-forskningsprosjektet-seksaringens-deltakelse-i-samtaler-i-barnehage-og-skole/

Dorier, J.-L. & Maass, K. (2014). Inquiry-Based Mathematics Education. *Springer Science+Business Media*. 10.1007/978-94-007-4978-8_176

Driscoll, M., DiMatteo, R. W., Nikula, J. & Egan, M. (2007). *Fostering geometric thinking; a guide for teachers, grades 5-10*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Duval, R. (1998). *Geometry from a cognitive point of view in Mammana Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study*: Kluwer.

Frøyland, M., Remmen, K. B., Mork, S. M., Ødegaard, M. & Christiansen, T. (2015). Researching science learning from students'view ; the potential of headcam. *Nordina (elektronisk ressurs), 11*, 249-267.

Golafshani, N. (2003). Understanding reliability and validity in qualitative research. *The qualitative report, 8*(4), 597-607.

Gold, B. (2017). School mathematics and "real" mathematics. I *Humanizing Mathematics and its Philosophy* (s. 125-137): Birkhäuser, Cham.

Grabiner, J. V. (2012). Why Proof? A Historian's Perspective. I G. Hanna & M. de Villiers (Red.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (s. 147-167). Dordrecht: Springer Netherlands. Hentet fra https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_6

Gulaker, D. (2014). Matematikk ute er inne. I T. A. Fiskum & J. A. Husby (Red.), *Uteskoledidaktikk : ta fagene med ut*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Haavold, P. Ø. & Blomhøj, M. (Feb 2019). *Coherence through inquiry based mathematics education*, Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht, Netherlands. hal-02429769.

Hanna, G. (2018). Reflections on Proof as Explanation. I A. J. Stylianides & G. Harel (Red.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective* (s. 3-18). Cham: Springer International Publishing. Hentet fra https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_1

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. I F. K. Lester (Red.), *Second Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (bd. 2, s. 805-842). Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. I C. Mammana & V. Villiani (Red.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (s. 29-36). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hmelo-Silver, C. E., Duncan, R. G. & Chinn, C. A. (2007). Scaffolding and Achievement in Problem-Based and Inquiry Learning: A Response to Kirschner, Sweller, and Clark (2006). *Educational Psychologist, 42*(2), 99-107. 10.1080/00461520701263368

Johannessen, A., Christoffersen, L. & Tufte, P. A. (2010). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (4 utg.). Oslo: Abstrakt Forlag.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kristensen, O. & Aanensen, S. (2018). Ulike bevis for Pytagoras' læresetning. Hentet 02.05.2020 fra https://ndla.no/nb/subjects/subject:32/topic:1:165765/topic:1:165770/resource:1:98029

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (T. M. Anderssen & J. Rygge, Overs. 3 utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problemsolving and modelling. I F. K. Lester & M. National Council of Teachers of (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning : Vol. 2* (bd. 2). Charlotte, N.C: Information Age.

Lithner, J. (2006). A Framework for Analysing Creative and Imitative Mathematical Reasoning. *Department of Mathematics and Mathematical Statistics, Umeå universitet*. 10.1007/s10649-007-9104-2

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276. 10.1007/s10649-007-9104-2

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative Research: A Guide to Design and Implementation* (3 utg.). San Francisco, California: Jossey-Bass.

NESH. (2016). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. Hentet 16.03 fra https://www.etikkom.no/forskningsetiske-retningslinjer/samfunnsvitenskap-jus-og-humaniora/

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring : ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie, bd. nr 18 - 2002). København: Undervisningsministeriet.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode : en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2 utg.). Oslo: Universitetsforl.

Postholm, M. B., Jacobsen, D. I. & Søbstad, R. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen* (Forskningsmetode). Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Ross, K. A. (1998). Doing and Proving: The Place of Algorithms and Proofs in School Mathematics. *The American Mathematical Monthly, 105*(3), 252-255. 10.1080/00029890.1998.12004875

Savery, J. R. (2006). Overview of Problem-based Learning: Defnitions and Distinctions. *Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning, 1*(1). 10.7771/1541-5015.1002

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. I *D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 334-370). New York: MacMillian.

Seidel, T. & Janík, T. (2009). *The Power of video studies in investigating teaching and learning in the classroom*. Münster: Waxmann.

Skånstrøm, M. & Blomhøj, M. (2016). Det kommer an på.... I T. E. Rangnes & H. Alrø (Red.), *Matematikklæring for framtida: festskrift til Marit Johnsen-Høines* Bergen: Caspar forlag.

Star, J. R. & Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology, 31*(3), 280-300. 10.1016/j.cedpsych.2005.08.001

Steffe, L. P. & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*: Springer Science & Business Media.

Tjora, A. H. (2010). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). Hentet fra http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2019a). Hva er kjerneelementer? Hentet 26.04.20 fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagovergripende-stotte/hva-er-kjerneelementer/

Utdanningsdirektoratet. (2019b). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn* (MAT01-05). Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Van de Walle, J. A. (2013). *Teaching student-centered mathematics : developmentally appropriate instruction for grades 6-8* (2nd ed. utg.): Pearson.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight - a theory of mathematics education*. Orlando, Florida: Academic Press, INC.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play. *Teaching Children Mathematics, 5*(6), 310-316.

Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications : design and methods* (6 utg.). Los Angeles: SAGE.

Vedlegg 1: The rope triangle – Oppgave

Undervisningsopplegg - The rope triangle

Undervisningsopplegget er utviklet med tanke på undersøkende matematikkundervisning og brukt for å illustrere et eksempel på undersøkelse innenfor det teoretiske rammeverket Theory of didactical situastions. Undervisningsopplegget er hentet fra Artigue og Blomhøjs artikkel «Conseptualizing Inquiry-based Education».
Det anbefales en tredeling i undervisningen som et verktøy for å hjelpe lærere å implementere undersøkende matematikk i undervisningen. Denne tredelingen er iscenesettelse, elevenes undersøkende arbeid, og refleksjon og faglig læring. Dette ligner i stor grad på tredeling i undervisningen innenfor problemløsningstradisjonen, særlig i henhold til Van de Walle som er mye bruk i utdanning av matematikklærere i Norge. Det er ikke meningen at dette har en fast rekkefølge, men at det skal kunne være dynamisk i undervisningen, altså er det mulig å gjenta de ulike fasene flere ganger i løpet av et undervisningsopplegg. Meningen er at de har ulike didaktiske fokus.

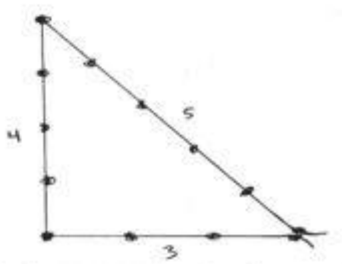
Hovedprinsippene i tredelingen av undervisning:

1. Iscenesettelse av undervisningsforløpet:
   - Forklaring av oppgaven/problemet til elevene
   - Etablering av et felles språk om utfordringen
   - Etablering av det didaktiske miljøet for arbeidet
   - Formidling av tidsmessige og praktiske rammer
   - Klargjøring av produktkrav, vurderingsformer og kriterier.
2. Elevenes selvstendige undersøkende arbeid krever
   - Tilstrekkelig tid, frihet og støtte til at de kan arbeide selvstendig med problemet
   - Støtte til å etablere et samarbeid mellom elevene
   - Støtte og utfordring gjennom dialog
   - Forberedelse gjennom konstruksjon av eksemplariske dialoger
3. Felles refleksjon og faglig læring innebærer:
   - At erfaringer og resultater fra forløpet systematiseres og gjøres felles
   - Trekke fram faglige poenger i elevenes arbeid

- Bygge en felles faglig kunnskap med et felles fagspråk
- Etablering av forbindelser til tidligere erfaringer og etablert viten
- Åpning for nye mulige spørsmål og undersøkelser

Mål for undervisningen:

- Lære om generelle betingelser for trekanter (trekantulikheten).
- Arbeide med trekanters egenskaper.
- Elevene skal forklare gjennom matematisk argumentasjon og resonnement trekantene de kommer fram til og trekantenes egenskaper.



Oppgaven presenteres til elevene slik i den første fasen (ca. 10 min):

- Dere skal lage trekanter med tauet slik at tre av knutene danner hvert sitt hjørne av trekanten.
- Dere kan lage trekanter ved at tre av dere holder i hver sin knute. (Hver knute vil ha en løkke, for å tydeliggjøre hvor man kan holde)
- For hver trekant dere finner skal dere:
    - Lage en tegning hvor lengdene av de tre sidene er satt inn (Den fjerde på gruppa skriver).
    - For hver trekant dere finner, diskuter og skriv ned egenskapene til trekanten.
- Deres oppgave er å lage så mange trekanter som mulig på denne måten.
- Det er viktig under oppstarten at det etableres en felles forståelse for det praktiske arbeidet, at elevene forstår oppgaven og kravene til arbeidet. Det er viktig at det legges vekt på at elevene skal diskutere og argumentere for egenskaper ved trekantene matematisk. De skal bruke så presist som mulig matematisk språk.
- Under oppstart i klasserommet vil vi bruke ett kamera for å filme seansen med mikrofon på lærer.

Gjennomføring av aktiviteten ute/gymsal (fase to 20-30 min.):

- Ideen bak undersøkende matematikkundervisning er at elevene arbeider sammen og utforsker problemet på egenhånd. Elevene avgrenser og formulerer problemet på sin måte, oppsøker informasjon, stiller spørsmål, danner hypoteser, lager modeller, diskuterer med hverandre og læreren, og lager faglige argumenter som de kan formidle.
- I grupper på 4 elever får de utdelt et tau. Tauet er delt opp med 13 knuter som danner 12 like «enheter». Av praktiske årsaker (bilde, avstand, lyd) bruker vi 0,5 m. avstand mellom knutene. Det vil kunne bidra til kortere avstand, bedre lyd på videoopptakene, og enklere for elevene å håndtere. Tauet ser ut som i illustrasjonsbilde ovenfor. Aktiviteten gjennomføres ute i skolegården eller i gymsal.
- I denne fasen er det viktig at elevene:
    - Får tilstrekkelig med tid, frihet og støtte slik at de kan arbeide selvstendig med problemet
    - Får støtte til å etablere et godt samarbeid
    - Støtte og utfordring gjennom dialog.
    - Et viktig poeng er at læreren skal gi støtte, men gi det uten å tømme situasjonen for potensiell læring, altså at læreren gir svar eller løsning på problemet.
- Det hender at elevene ikke forstår hva de skal gjøre etter introduksjonen, da kan de bli passive, i denne sammenhengen kan det være at man må ta hele introduksjonen på nytt med alle elevene, eller at man må gi enkeltelever mer informasjon, og kanskje til og med vise med tauet hvordan de skal gjøre det.
- Hvis noen blir ferdig tidlig kan lærer stille spørsmål som: hva skjer om dere kan frigjøre dere fra knutene?
    - Det er viktig underveis at lærer er aktiv og lyttende til elevenes diskusjoner, da kan lærer få mulighet til å støtte elevene i deres utfordringer, men også bidra til å løfte læringen og stille spørsmål som:
    - Hvordan tenkte du dette?
    - Hva tenker du om det?
    - Hvorfor er det slik?

- Kan du forklare det til de andre en gang til?
- Kan det gjøres på andre måter?
- Kan vi undersøke det nærmere?
- Er det flere muligheter?
- Hvordan kan vi være sikre på resultatet?

- Poenget er å støtte elevene til å bli motivert til å undersøke uten å tømme situasjonen for læringsinnhold. Videre støtte elevenes refleksjoner, erfaringer og resultater, og etablere en felles forståelse for matematikken.
- Å være bevisst på generelle grep man bruker for å få elevene i klassen til å diskutere, reflektere og argumentere vil være nyttig.
- Elevene er delt inn i grupper, på noen av gruppene vil det være en elev om skal ha et GoPro kamera festet til kroppen for å fange opp lyd og bilde. Vi kommer til å starte alle kameraene omtrent på samme tid.
- Vi vil bruke et håndholdt kamera/stasjonert kamera med mikrofon på lærer for oversiktsbilde, og for å se hvordan lærer deltar i undervisningen.

Etter aktiviteten (fase tre, 30 min):

- Klassen samles i klasserom for å diskutere hva elevene har kommet fram til.
- Det kan være fint at elevene sitter i de samme gruppene, gruppene får mulighet for å presentere hver sin løsning. (kamera er fortsatt med og følger elevene, slik at hver gruppe har ett kamera inne også).
- Når elevene kommer med en løsning, må de forklare hvorfor det er slik og egenskapene til trekanten. Hvis det er flere egenskaper som er relevant å trekke fram kan lærer be elevene å diskutere om det er flere egenskaper ved trekanten som er viktig.
- For hver løsning vil det være nyttig å la elevene se om de har de samme løsningene, hvis ikke, må de få tid til å se på løsningen og diskutere, samt diskutere trekantens egenskaper.
- Alle løsningene skrives fortløpende på tavla, enten av lærer eller elever.
- Når løsningene er presentert, kan tauet benyttes til å illustrere egenskapene ved hver trekant som er kommet inn som forslag. Ev. at dette gjøres på tavla, en vurdering læreren selv kan gjøre.

- Læreren stiller videre spørsmål:
    - Kan det være andre alternative trekanter? Brukte noen grupper andre lengder som ikke er nevnt?
    - Er det mulig med en side som er 6 enheter lang?

Disse spørsmålene er ment for å komme fram til et funn der andre muligheter ikke er mulig. For eksempel (2-4-6) og (3-3-6), selv om totallengde er 12 meter.

- Illustrer med tauet hvorfor en grunnlinje på 6 meter ikke vil funke, selv om den totale lengden i trekanten er den samme. Under ser vi eksempel på dette.

Videre får elevene utfordringen:

- Kan vi lage andre trekanter?
- **Kan dere formulere en generell regel som lengdene i trekanten må utfylle for at alle mulige trekanter skal være mulig å lage?** (Dette kan gi mulighet for systematisk resonnering og generalisering med støtte fra læreren).
    - Målet er å komme fram til følgende generelle regel for alle trekanter: $a + b \geq c$ eller $AC + BC \geq AB$ (trekantulikheten). Da undervisningen er på mellomtrinnet vil det være hensiktsmessig å forholde seg til den enkle forklaringen for trekantulikheten: $a + b > c$.

Vedlegg 2: Tegn & skriv

Tegn	Skriv egenskapene til figuren

Vedlegg 3: Kjøreplan

Fase	Innhold	Hvor	Lærer	Elev	Studenter	Utstyr
1 **Ca. 15-20 min**	Felles gjennomgang av undervisningsopplegget - Læreren klargjør forventninger til oppgaven og hva elevene skal gjøre - Dele grupper	Klasserom	Lærer gjennomgår undervisningsopplegget og forklarer hva som vil skje fram til slutten av økta. Læreren vil ha mic på.	Passive lyttere i denne fasen.	Styrer kamera og gir elevene tau for å jobbe med.	Stasjonert kamera m/ mic
2 **30-40 min**	Elevene går i grupper. En elev per gruppe får et kamera. Gruppene samles slik at elevene som er med på prosjektet blir med på film, og de andre ungår å bli filmet. Elevene arbeider med tau-oppgaven. Tre elever holder tauet og én elev er skribent.	Ute eller i gymsal.	Læreren støtter elevene i sitt arbeid både matematisk, men også for elevenes samarbeid. Stille spørsmål som fremmer resonnement. Læreren har mic på under hele økten.	Elevene jobber i grupper på 4 personer. Jobber med oppgaven, finne så mange trekant som mulig. For hver trekant lage en tegning hvor lengden på sidene er satt inn. Diskutere og skrive ned egenskaper ved trekanten.	Begge hjelper i starten med å få kamera på elevene og sjekke innstillinger. En student har ansvar for og styrer det håndholdte/stasjonære kameraet. Den andre studenten går rundt og assisterer grupper. Ansvar for to grupper m/GoPro hver (Starte film/avslutte film).	Et håndholdt kamera + mic 4 stk GoPro med brystsele. 6 stk tau m/ knuter. Halvmeter mellom hver knute. Ark til å skrive på + blyant
3 **30-40 min**	Elevene samles i klasserommet for felles diskusjon om hva elevene har kommet fram til. Sitter i gruppene. Løsningene skrives fortløpende på tavla.	Klasserommet	Læreren styrer den felles diskusjon. Stiller spørsmål som fremmer elevenes resonnement. For hver løsning som kommer, må læreren sjekke om alle gruppene har denne løsningen. Hvis ikke, gi tid til å diskutere. Stiller videre utfordring om generalisering (Trekantulikheten). Kamera m/ mic.	Når elevene kommer med en løsning, må de forklare hvorfor. GoPro-kamera på hver gruppe, fortsatt festet på brystet til elevene.	Styrer håndholdt kamera + oversikt over GoPro-kameraene. Støtte gruppene i eventuelle diskusjoner.	Kamera + mic 4 stk GoPro m/brystsele Ark fra forrige fase.

Vedlegg 4: NSD- Godkjenning

NSD NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Masteroppgave om utforskende undervisning utenfor klasserommet - Læring i friluft

Referansenummer

886266

Registrert

22.10.2019 av Mathias Vatnehol Fjørtoft - mfj013@post.uit.no

Behandlingsansvarlig institusjon

UIT – Norges Arktiske Universitet / Fakultet for humaniora, samfunnsvitenskap og lærerutdanning / Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Hilja Lisa Huru, hilja.huru@uit.no, tlf: 77660253

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Mathias V. Fjørtoft, mfj013@uit.no , tlf: 45499413

Prosjektperiode

18.10.2019 - 20.06.2020

Status

17.12.2019 - Vurdert

Vurdering (2)

17.12.2019 - Vurdert

Vi viser til endring registrert 17.12.2019. Vi kan ikke se at det er gjort noen oppdateringer i meldeskjemaet eller vedlegg som har innvirkning på NSD sin vurdering av hvordan personopplysninger behandles i prosjektet.

Her kan dere lese mer mer om hvilke endringer som skal registreres hos NSD:
nsd.uib.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp underveis (ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av

personopplysningene er avsluttet.

Lykke til videre med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Kajsa Amundsne
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

09.12.2019 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 09.12.2019 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html

Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 20.06.2020.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

TAUSHETSPLIKT
Lærere er underlagt taushetsplikt. Det er viktig at intervjuene med lærerne gjennomføres slik at det ikke samles inn opplysninger som kan identifisere enkeltpersoner eller avsløre annen taushetsbelagt informasjon.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).
NSD vurderer at informasjonen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Kajsa Amundsen
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

Vedlegg 5: Informasjonsskriv til elever

Vil du delta i forskningsprosjektet *«En kvalitativ studie om utforskende matematikkundervisning utenfor klasserommet»?*

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan læring utenfor klasserommet kan bidra til at matematikkundervisningen blir utforskende. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Vi er to studenter som skal gjennomføre et prosjekt i forbindelse med vår masteroppgave på lærerutdanningen 5.-10. trinn ved Universitetet i Tromsø. I dette prosjektet skal vi undersøke hvordan læring utenfor klasserommet kan bidra til at matematikkundervisningen blir utforskende. For å gjøre gode observasjoner er det ønskelig for oss å bruke video og lydopptak for å samle inn data. Alt av informasjon og datamateriale vil bli anonymisert, og ingen vil bli gjenkjennbar i masteroppgaven. Omfanget vil være på 1-2 undervisningsøkter og intervjuene vil vare mellom 10 og 20 minutter. Det blir stilt enkle spørsmål knyttet til undervisningen.

Den foreløpige problemstillingen og forskningsspørsmålene er:

Hvordan kan læring utenfor klasserommet bidra til at matematikkundervisningen blir utforskende?
- Hvordan resonnerer elever matematisk i utforskende arbeid med geometriske figurer utenfor klasserommet?

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Tromsø er ansvarlig for prosjektet. Vår veileder på prosjektet er Hilja Lisa Huru, Førsteamanuensis ved institutt for lærerutdanning og pedagogikk, UiT.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får spørsmål om å delta fordi vi har vært i kontakt med rektor på skolen og spurt etter en lærer som har matematikk som fag, og interesse av å delta i prosjektet som innebærer matematikkundervisning utenfor klasserommet. Alle elevene i klassen vil få spørsmål om å delta.

Hva innebærer det for deg å delta?
For å delta i prosjektet må dere samtykke for at vi kan gjennomføre videoobservasjon og intervju med lydopptak. Vi kommer til å gjennomføre én undervisningsøkt i tre deler. Læreren gjennomgår aktiviteten med elevene. Elevene gjennomfører en aktivitet utendørs, deretter gjennomføres det en oppsummering og faglig diskusjon i klasserommet eller i gymsalen på skolen. For å observere vil vi bruke GoPro kamera på enkeltelever, dette for å komme tett på aktiviteten, og fange opp lyd. I tillegg vil en av oss studentene ha et håndholdt kamera som

filmer hele seansen, med mikrofon også på læreren. Den andre av oss vil gjøre vanlig observasjon med observasjonsskjema for å kunne oppdage enkeltsituasjoner som kan være nyttig i det videre arbeidet. Aktiviteten ute og oppsummeringen inne i klasserommet vil bli filmet, og da ønsker vi å filme hvordan de løser oppgaven. Etter gjennomføring av undervisning kan det være aktuelt med et intervju med et utvalg elever i klassen på 10-20 minutter.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Hvis man ikke ønsker å delta eller ikke har fått samtykke fra foreldre eller foresatte vil man kunne gi beskjed til lærer, kontaktlærer, rektor og til oss om dette. Dette vil ikke påvirke deg som elev ved skolen eller ditt forhold til lærer og studenter ved Universitetet i Tromsø.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. De som vil ha tilgang til opplysningene er Hilja Lisa Huru og Per Øystein Haavold (Veiledere), og Mathias Fjørtoft og Aleksander Fallsen (undertegnede studenter).

Ingen sensitiv informasjon vil bli tilgjengelig for andre og alt vil bli anonymisert i arbeidsprosessen etter datainnsamlingen og ingen vil bli gjenkjent i masteroppgaven. Om foreldre eller foresatte ønsker mer informasjon og tilgang til spørsmål i intervjuguiden i forkant kan man ta kontakt med oss, se kontaktinformasjon nederst i dokumentet. Eventuelle navn og kontaktopplysninger vil erstattes med koder som lagres separat og adskilt fra øvrige data, og datamaterialet vil bli lagret innelåst og kryptert/passordbeskyttet.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 20.06.2020. Datamaterialet og personopplysninger vil bli fjernet ved prosjektets avslutning.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Tromsø har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Tromsø ved Hilja Lisa Huru, telefon: 77660253, e-post: hilja.huru@uit.no
- Studenter:
  Mathias V. Fjørtoft, telefon: 45499413, e-post: mfj013@uit.no
  Aleksander P. Fallsen, telefon: 96238832, e-post: afa040@uit.no
- Vårt personvernombud: Joakim Bakkevold, telefon: 776 46 322 og 976 915 78, e-post: personvernombud@uit.no
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig	Studenter
Hilja Lisa Huru	Aleksander P. Fallsen og Mathias V. Fjørtoft

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet Læring i friluft – en kvalitativ studie om utforskende matematikkundervisning utenfor klasserommet, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- å delta i undervisning med videobservasjon.
- å delta i intervju med studentene som tas opp på lydbånd

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles fram til prosjektet er avsluttet, ca. 20.06.2020

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 6: Informasjonsskriv til lærer

Vil du delta i forskningsprosjektet *"En kvalitativ studie om utforskende matematikkundervisning utenfor klasserommet"*?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan læring utenfor klasserommet kan bidra til at matematikkundervisningen blir utforskende. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Vi er to studenter som skal gjennomføre et prosjekt i forbindelse med vår masteroppgave på lærerutdanningen 5.-10. trinn ved Universitetet i Tromsø. I dette prosjektet skal vi undersøke hvordan læring utenfor klasserommet kan bidra til at matematikkundervisningen blir utforskende. For å gjøre gode observasjoner er det ønskelig for oss å bruke video og lydopptak for å samle inn data. Alt av informasjon og datamateriale vil bli anonymisert, og ingen vil bli gjenkjennbar i masteroppgaven. Omfanget vil være på 1-2 undervisningsøkter og intervjuene vil vare mellom 10 og 20 minutter. Det blir stilt enkle spørsmål knyttet til undervisningen.

Den foreløpige problemstillingen og forskningsspørsmålene er:

Hvordan kan læring utenfor klasserommet bidra til at matematikkundervisningen blir utforskende?

- Hvordan resonnerer elever matematisk i utforskende arbeid med geometriske figurer utenfor klasserommet?

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Tromsø er ansvarlig for prosjektet. Vår veileder på prosjektet er Hilja Lisa Huru, Førsteamanuensis ved institutt for lærerutdanning og pedagogikk, UiT.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får spørsmål om å delta fordi vi har vært i kontakt med rektor på skolen og spurt etter en lærer som har matematikk som fag, og interesse av å delta i prosjektet som innebærer matematikkundervisning utenfor klasserommet.

Hva innebærer det for deg å delta?
For å delta i prosjektet må du samtykke for at vi kan gjennomføre videoobservasjon og intervju med lydopptak. Vi kommer til å gjennomføre én undervisningsøkt i tre deler. Lærer gjennomgår aktiviteten med elevene. Elevene gjennomfører en aktivitet utendørs, deretter gjennomføres det en oppsummering og faglig diskusjon i klasserommet eller i gymsalen på skolen. For å observere vil vi bruke GoPro kamera på enkeltelever, dette for å komme tett på aktiviteten, og fange opp lyd. I tillegg vil en av oss studentene ha et håndholdt kamera som filmer hele seansen, med mikrofon også på læreren. Den andre av oss vil gjøre vanlig

observasjon med observasjonsskjema for å kunne oppdage enkeltsituasjoner som kan være nyttig i det videre arbeidet. Aktiviteten ute og oppsummeringen inne i klasserommet vil bli filmet, og da ønsker vi å filme hvordan de løser oppgaven. Etter gjennomføring av undervisning kan det være aktuelt med et intervju med omfang på rundt 10-20 minutter.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Hvis man ikke ønsker å delta vil du kunne gi beskjed til oss eller prosjektansvarlig om dette. Dette vil ikke påvirke deg som lærer eller ditt forhold til studentene ved Universitetet i Tromsø.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. De som vil ha tilgang til opplysningene er Hilja Lisa Huru og Per Øystein Haavold (Veiledere), og Mathias Fjørtoft og Aleksander Fallsen (undertegnede studenter).

Ingen sensitiv informasjon vil bli tilgjengelig for andre og alt vil bli anonymisert i arbeidsprosessen etter datainnsamlingen og ingen vil bli gjenkjent i masteroppgaven.
Om du ønsker mer informasjon og tilgang til spørsmål i intervjuguiden i forkant kan du ta kontakt med oss, se kontaktinformasjon nederst i dokumentet.
Eventuelle navn og kontaktopplysninger vil erstattes med koder som lagres separat og adskilt fra øvrige data, og datamaterialet vil bli lagret innelåst og kryptert/passordbeskyttet.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 20.06.2020. Datamaterialet og personopplysninger vil bli fjernet ved prosjektets avslutning.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Tromsø har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Tromsø ved Hilja Lisa Huru, telefon: 77660253, e-post: hilja.huru@uit.no
- Studenter:
  Mathias V. Fjørtoft, telefon: 45499413, e-post: mfj013@uit.no
  Aleksander P. Fallsen, telefon: 96238832, e-post: afa040@uit.no
- Vårt personvernombud: Joakim Bakkevold, telefon: 776 46 322 og 976 915 78, e-post: personvernombud@uit.no
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig	Studenter
Hilja Lisa Huru	Aleksander P. Fallsen og Mathias V. Fjørtoft

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet Læring i friluft – en kvalitativ studie om utforskende matematikkundervisning utenfor klasserommet, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- å delta i undervisning med videobservasjon.
- å delta i intervju med studentene som tas opp på lydbånd

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles fram til prosjektet er avsluttet, ca. 20.06.2020

(Signert av prosjektdeltaker, dato)