UiT Norges arktiske universitet

Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Argumentasjon i matematikk

En kvalitativ studie om elevers argumentasjon på 10. trinn

Sebastien Lecomte & Steinar Suhr

Masteroppgave i matematikkdidaktikk, LRU-3903F, mai 2021

Sammendrag

Vår studie har undersøkt hvordan elever argumenterer i arbeid med matematikkoppgaver. Hensikten med dette var å belyse hvordan argumentasjon oppstår og utspiller seg. Studiens forskningsspørsmål er: Hva karakteriserer elevenes argumentasjon i arbeid med matematikkoppgaver på 10.trinn?

Denne studien har tatt i bruk kvalitativ metode for datainnsamling i form av observasjon av to elevgrupper. Elevene arbeidet med tre oppgaver fra PISA undersøkelsen i 2012. Hensikten med datainnsamlingen var å få innsikt i hvordan elevene samarbeidet, og hvilken rolle argumentasjon fikk i dette samspillet. Analysen benyttet induktiv koding og et rammeverk for matematisk resonnering (Lithner, 2008), støttet opp av et rammeverk for bevis og argumentasjon i skole matematikk (Stylianides, 2007b). Vårt teoretiske ståsted er sosiokulturelt læringsperspektiv, noe som har påvirket studiens fokusområde.

Studien indikerer at elevenes argumentasjon kan knyttes opp mot flere av de ulike resonneringsformene som er beskrevet i rammeverket (Lithner, 2008). Videre ser vi at argumentasjonen deres i enkelte tilfeller kan oppfylle kravene for bevis i skolen (Stylianides, 2007b). Resultatene våre viser til at elevene validerer utsagn i fellesskap, og at dette baseres på sosial aksept og/eller matematisk forankring.

Studiens nøkkelord: matematisk resonnering, kreativ og imitativ resonnering, argumentasjon, bevis.

Abstract

Our study explored how students reason in relation to work with mathematical problems. The purpose is the highlight/illuminate how argumentation occurs and unfolds. The research question is: What characterizes students' argumentation in work with mathematical problems in 10th grade.

This study has used qualitative methods to collect empirical data in the form of observation of two student groups. The students worked with mathematical problems from the 2012 PISA survey. The purpose of this data collection was to get some insight into how they interact and what role argumentation inhabits in their cooperation. The analysis utilized coding through inductive methods and a framework for mathematical reasoning (Lithner, 2008), supported by a framework for proof and argumentation in school mathematics (Stylianides, 2007b). This study is influenced by sociocultural learning theory, which is our theoretical perspective.

The study indicates that students' argumentation can be tied to several of the reasoning types described in the framework (Lithner, 2008). Additionally, the students' argumentation occasionally fulfils the criteria for proof in school mathematics (Stylianides, 2007b). Our results furthermore indicate that the students validate their statements through interaction, and that this is based on social acceptance and/or mathematical anchoring.

Keywords of the study: mathematical reasoning, creative and imitative reasoning, argumentation, proof.

Forord

Vi avslutter med dette vårt femårige masterstudium under perioden 2016-2021 ved Universitet i Tromsø, campus Alta. Det har vært en lærerik reise i fortreffelig selskap iblant lærere, studenter og administrasjon. Studieforløpet vårt har gitt oss innsikt i noen av de mange sidene ved læreryrket som tar med oss videre i yrkeslivet. Denne studien har latt oss gå inn i dybden på et tema som vil være aktuell i vår undervisningspraksis.

Vi vil takke vår veileder Saeed Manshadi for gode tilbakemeldinger og oppmuntrende samtaler. Videre vil vi takke elevene som valgte å ta del i vår studie, for deres innsats og bidrag. Vi takker også universitetsskolen og elevenes lærer for muligheten de har gitt oss, og for godt samarbeid. Til slutt vil vi takke venner og familie som har vært til god støtte gjennom studieforløpet.

Alta, mai 2021

Steinar Suhr

Sebastien Lecomte

Innholdsfortegnelse

Tabelliste

Figurliste

1 Innledning

Tema for denne studien er argumentasjon i skolen. Elevers argumentasjon er på mange måter et ukjent tema for oss personlig. Gjennom utdanningen har vi vært innom dette, men vi har ikke fått tid til å sette oss grundig inn i de mer detaljerte sidene ved temaet. Vår interesse stammer på denne måten delvis fra en form for nysgjerrighet som har oppstått under utdanningen. Ettersom vi ble kjent med den nye læreplanen og hvilken plass resonnement og argumentasjoner er tildelt, ble interessen større. Videre gjennom arbeidet med studien har vi tilegnet oss et bredere perspektiv rundt både nytten og relevansen av temaet. Argumentasjon som tema er blitt mer relevant etter innføringen av kunnskapsløftet 2020. Resonnering og argumentasjon er nå et av kjerneelementene for matematikkopplæringen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Kjerneelementene er ifølge utdanningsdirektoratet en liste over det viktigste materialet elevene skal lære i de ulike fagene. Vi kom frem til forskningsspørsmålet: Hva karakteriserer elevenes argumentasjon i arbeid med matematikkoppgaver på 10.trinn? Andre viktige begreper tilknyttet argumentasjon er resonnering og bevis. Læreplanen sier at elever skal kunne begrunne "fremgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige". Innenfor kjerneelementet "utforskning og problemløsning" finner vi også et fokus som omhandler at elever skal kunne se sammenhenger og diskutere seg frem til felles forståelse. Ettersom vi er ute etter å finne hva som karakteriserer elevenes argumentasjon, er det svært viktig at de er i stand til å diskutere. Dette blir gjennomgått nærmere i studiens teoridel.

Studiens formål er å skape mer kunnskap om hvordan elever argumenterer innenfor matematikkfaget i arbeid og sosiale sammenhenger. Kunnskap innenfor dette temaet er viktig fra et undervisningsperspektiv for å kunne dra nytte av den sosiale delen av matematikken, samt hvordan lærere kan implementere det i undervisningen. I tillegg er argumentasjon viktig i utviklingen for å bli selvstendig. Elevene vil dra nytte av kjennskap til hvordan diskusjon og argumentasjon burde føres senere i livet. Kunnskapen innenfor temaet argumentasjon er også tverrfaglig. Demokrati og medborgerskap omhandler blant annet evnen til å formulere argumenter, og vurderingen av om funn er gyldige (Utdanningsdirektoratet, 2020). For å skape kunnskap rundt dette temaet vil det i studien bli gjennomført en analyse av elevers samhandling under arbeid med matematikkoppgaver. Analysen vil basere seg på Lithners rammeverk for imitativ og kreativ resonnering (2008).

Tidligere forskning angående elevers argumentasjon hevder blant annet at elever har tendenser til å beregne empiriske eksempler som akseptable argumenter og bevis innenfor matematikken (Stylianides, 2007; Stylianides et al, 2017; Yackel & Hanna 2003). Forskningen peker på at elever ofte betrakter enkle eksempler som gyldige argumenter for bevis, men ser samtidig ikke på moteksempler som argumenter for motbevisning. Lithner (2008) viser til at elevers resonnering og argumentasjon ofte er preget av imitativ tenkning, og sjeldnere kreativ tenkning. Under elevers arbeid med resonnering i matematikk, gjengir elever ofte informasjon som har blitt undervist dem direkte. Det er noe manglende form for nytenkning fra elevenes side, og at dette delvis kan være et resultat av at elever oftest arbeider med repetisjonsoppgaver (rote learning).

Kapittel 2 av studien vil vi redegjøre for studiens teoretiske grunnlag. Her vil vi ha en begrepsavklaring hvor vi definerer argumentasjon og andre relevante begreper for studien. Dette etterfølges av en presentasjon av teoretisk ståsted og rammeverk for analyse. Kapittel 3 inneholder redegjørelse for valg av metode og oppgaver. Videre vil kapittelet presentere noen refleksjoner rundt de etiske aspektene og studiens validitet og reliabilitet. I kapittel 4 introduserer vi kodene og kategoriene som er utarbeidet fra vår empiri, samt en analyse av disse knyttet opp mot relevant teori. Kapittel 5 inneholder diskusjon med utgangspunkt i interessante funn. Til slutt vil vi oppsummere og konkludere studien i kapittel 6.

2 Teori

I denne studien skal vi se hva som karakteriserer elevenes argumentasjon i arbeid med matematikkoppgaver på 10.trinn. For å belyse problemstillingen starter vi med redegjørelse for sentral teori tilknyttet tema. Først vil vi definere begrepene argumentasjon, bevis, og resonnering. Videre redegjøres det rundt utfyllende teori for studien vår. Deretter presenterer vi sosiokulturelt læringssyn som overordnet teoretisk rammeverk. Til slutt vil vi gjennomgå vårt rammeverk for analyse. Vi har valgt Lithners (2008) rammeverk for imitativ og kreativ resonnering.

2.1 Begrepsavklaring

Argumentasjon kan ha ulik betydning og kriterier ut ifra hvilken setting en befinner seg i. Samtidig skilles også det vi ser på som et argument i hverdagen, fra et matematisk argument. I denne studien fokuserer vi på argumentasjon i matematisk kontekst. Stylianides (2007a) forklarer matematisk argument som en sammenhengende sekvens av påstander ment å verifisere eller motbevise en matematisk påstand. Det matematiske med argument kommer inn ved at fokuset ligger på å enten verifisere eller motbevise noe matematisk. For Lithner (2008) vil kvaliteten på et argument avgjøres ut ifra argumentets validitet, evne til å overbevise og konstruktivitet. Hana (2013) beskriver sammenheng mellom argumentasjon og resonnering, ved at et argument kan bestå av sannsynliggjørende resonnement.

Lithner (2008) beskriver resonnering som en rekke tanker tilegnet å produsere påstander og komme frem til konklusjoner i oppgaveløsning. Det er ikke nødvendigvis basert på formell logikk og trenger ikke å være rett så lenge det gir mening for den som resonnerer. Innenfor resonnering finner vi i hovedsak tre ulike former (Hana, 2013). Disse tre er deduksjon, induksjon, og abduksjon. Deduksjon vil si å trekke en konklusjon ut ifra gitte premisser. Dette utføres ved å trekke logiske slutninger. Induksjon, i likhet med deduksjon, prøver å trekke en konklusjon fra gitte premisser, forskjellen ligger i at dette skjer gjennom å gjette seg frem til konklusjonen i stedet for å trekke logiske slutninger. Ved abduksjon resonnerer en i motsatt retning av deduksjon. Essensen i deduksjon ligger i å finne premissene til den gitte konklusjonen. En hovedforskjell mellom de tre resonnementsformene er at deduksjon kommer frem til et sikkert resultat, og induksjon og abduksjon kommer derimot kun frem til et sannsynlig resultat. Duval (1995) mener en kun gjennom deduksjon kan endre matematisk kunnskap fra sannsynlig til sann.

Jeannotte & Kieran (2017) har utarbeidet et rammeverk som beskriver elementene i matematisk resonnering i skolematematikk. Rammeverket baseres på et rikt spekter av kjent matematikkdidaktisk litteratur, hvor de kobler sammen overlappende teori om matematisk resonnering. Jeannotte og Kieran har et kommognitivt perspektiv (Sfard, 2008) som er basert på sosiokulturell læringsteori. Rammeverket beskriver blant annet de ulike prosessene som foregår i matematisk resonnering. Prosessene kan relateres til to kategorier. Den første kategorien er det å søke etter likheter og ulikheter. Her finner vi prosessene Generalisering (Generalizing), Formodning (Conjecturing), Identifisere mønstre (Identifying a pattern), Sammenligning (Comparing), Klassifisering (Classifying). Den andre kategorien er Validering, hvor prosessene er Rettferdiggjøring (Justifying), Bevise (Proving) og Bevise formelt (Formal proving). Bruk av Eksempler (Exemplifying) fungerer som støtte innenfor begge kategoriene. I søken etter likheter og ulikheter kan den resonnerende finne relasjoner mellom objekter og matematiske fenomen. Matematiske objekter omhandler representasjoner av matematikk, eksempelvis tall, funksjoner og geometriske former (Sfard, 2008). Sfard diskuterer også utfordringer ved å gi en tydelig definisjon på matematiske objekter. Søken etter likheter og ulikheter kan føre til en formodning om at noe har en trolig eller sannsynlig epistemologisk verdi, og med dette har potensial innen matematisk teori. Videre har formodninger evne til å bidra til den matematiske diskursen, ved at den bygger sannsynlige narrativer som er basert på søken etter likheter og ulikheter. Klassifisering handler om å identifisere matematiske objekters likheter og ulikheter. Dette bygger på matematiske egenskaper og definisjoner som kan knyttes til objektene. Klassifisering er viktig for å kunne sette sammen eller isolere matematiske objekter. Validering går ut på å endre den epistemologiske verdien fra sannsynlig til sann eller usann. Veien vil vanligvis gå fra sannsynlig til enten sann, usann eller mer sannsynlig.

2.1.1 Sammenhengen mellom argumentasjon og bevis

Argumentasjon og bevis er to begreper som ligger hverandre nært, men som ikke er helt likestilt (Hana, 2013). Argumentasjon brukes for å overbevise noen om hvorvidt et utsagn er korrekt eller ikke. Et bevis vil bestå av logiske implikasjoner som skal stå for å støtte et gitt utsagn. Vi kan se på hver enkel implikasjon i et bevis som et argument, vi kan dermed se på et bevis som bestående av flere argumenter. Stylianides (2007b) definerer bevis i skolen som et matematisk argument, en sammenhengende sekvens av påstander for eller mot et matematisk krav, med følgende egenskaper:

1. Det brukes uttalelser som er akseptert av klasserommet (sett med aksepterte uttalelser) som er sanne og tilgjengelige uten ytterligere begrunnelse;
2. Det benyttes former for resonnement (argumenteringsmåter) som er gyldige og kjent for, eller innenfor konseptuell rekkevidde for klasseromsfellesskapet; og
3. Det kommuniseres med uttrykksformer (argumentasjonsrepresentasjonsmåter) som er passende og kjent for eller innenfor konseptuell rekkevidde for klassesamfunnet.

Definisjonen er ifølge Stylianides (2007b) egnet for bevis i skolen fordi den blant annet følger både det intellektuelle-ærlighets prinsippet (Intellectual-honesty principle) og kontinuitetsprinsippet (Continuum principle). Det intellektuelle-ærlighets prinsippet sier at forestillingen om bevis i skolematematikken burde konseptualiseres, slik at det både er ærlig overfor matematikk som fagdisiplin og tar hensyn til elevene på et matematisk plan (Stylianides, 2007a). Kontinuitetsprinsippet sier at det burde være kontinuitet i hvordan forestillingen av bevis blir konseptualisert i ulike nivåer, slik at elevenes erfaringer med bevis i skolen får sammenheng. For de fleste elevene blir det første møtet med bevis i skolen på 9-12 trinn i USA. Vi kan trekke paralleller til den norske læreplanen LK06, hvor det ikke er noen læremål i grunnskolen som eksplisitt tar for seg bevis og argumentasjon (Utdanningsdirektoratet, 2013). I disse tilfellene blir bevis ofte fjernt og ukjent for elevene, i stedet for en påbygging av deres matematiske erfaringer (Stylianides, 2007a). Stylianides (2007b) definisjon av bevis i skolen bygger på fire hovedelementer som må tilfredsstilles for at argumentet skal regnes som bevis (Stylianides, 2007a). De fire hovedelementene som avgjør dette er grunnlag, formulering, representasjon, og sosial dimensjon. Grunnlag er det matematiske grunnlaget som argumentet står på, her har vi definisjoner og aksiomer. Formulering går ut på hvordan argumentet oppstår. Dette omhandler oppbyggingen av argumentet, og kan for eksempel være deduksjon. Representasjon er hvordan argumentet uttrykkes med hverdagsspråk eller matematisk språk, som for eksempel algebra. Til sist har vi sosial dimensjon som omhandler hvordan argumentet utspiller seg i den sosiale konteksten den befinner seg i. Eksempelvis blant elever, lærere eller matematikere. Disse fire elementene finner støtte i hvordan bevis generelt dannes i matematikk. Argument og bevis bygger vanligvis på aksepterte utsagn og definisjoner. Eksempelvis Euklids aksiomer (Hana, 2013). Dette er grunnpilarene som blir den matematiske diskursens regler. Argumentet må presenteres med passende matematisk språk. Videre vil bevisets validitet avgjøres gjennom matematikkfellesskapets aksept eller fornektelse.

Den sosiale dimensjonen er dynamisk og kontekstbasert. Bevis i det matematiske fagmiljøet blir til gjennom sosiale diskurser hvor deltakerne aksepterer eller avviser matematiske teorier (Stylianides, 2007a). Slik er bevis et resultat av sosialt aksepterte regler og matematiske objekter. Matematikernes overbevisning kan føre til at et bevis blir akseptert, men det er ikke en nødvendig prosess i seg selv. Det er de sosialt aksepterte reglene i diskursen som garanterer bevisets kvalitet når det blir akseptert av det matematiske fellesskapet. Overbevisning kan føre til at ugyldige bevis blir akseptert som bevis blant elever. Aktiviteter som ikke inneholder matematiske operasjoner eller tenkning kan lede til bevis, eksempelvis elev-avstemning. At et overbevisende argument alene kan regnes som et bevis viser hvor viktig rolle de sosialt aksepterte reglene i diskursen har i klasserommet. Slike regler kan være enighet om definisjonene på konseptene som er relevante for bevisoppgaven, og en felles forståelse for hva som er en legitim måte å bruke disse definisjonene på i utviklingen av argumenter. For eksempel kan elevene ha en forestilling om at lærerens utsagn alltid er sann, "argumentet" blir i slike tilfeller lærerens autoritet (Lithner, 2008). Diskursens regler bør ikke gis gjennom autoritet, men bør i stedet læres gjennom aktivitet i samspill med elevene og læreren (Stylianides, 2007a). Læreren har en sentral rolle i forhandlingene, aksepteringen og utviklingen av diskursens regler i klassen. Det er lærerens ansvar å lede elevene mot kunnskap som er kompatibel med samfunnet.

For å bedre forstå de intrikate sidene ved argumentasjon i skolen, har vi tatt for oss Balacheffs taksonomi for bevisnivåer (Balacheff, 1988). Den ble utviklet ut ifra elevers uttalelser i et eksperiment hvor de ble observert i arbeid med matematiske bevis. Balacheffs taksonomi består av et hierarki av fire nivåer som viser til hvor sofistikerte elevenes utsagn er. Nivåene går i stigende rekkefølge: naiv empiri (naive empiricism), det avgjørende eksperiment (the crucial experiment), generisk eksempel (generic example), og tankeeksperiment (thought experiment). Nederst på hierarkiet finner vi naiv empiri. Slike bevis inngår argumentasjon i form av eksempler og kommer i to ulike former (Balacheff, 1988). Den ene går ut på å observere noe som faktisk skjer og anse denne observasjonen som tilstrekkelig bevis. Slike bevis kan komme av konflikter mellom elevene eller at eleven velger å svare læreren kjapt for å slippe å gå inn i bevisprosessen selv. Den andre formen omhandler å ha en genuin tro om at noe er riktig, slik at dette blir en overbevisning som også blir valideringsgrunnlaget. En av utfordringene for elevene kan være å kommunisere deres underliggende tanker for denne troen, både overfor dem selv og andre. Bruk av eksempler i undervisningen kan på denne måten være en hindring for elevene når de skal lære om bevis.

Det neste trinnet i hierarkiet er "det avgjørende eksperiment" (Balacheff, 1988). Dette er et viktig steg som identifiserer behovet for validering av matematiske utsagn. Det tar også for seg problemet med generalisering. Dette steget kan komme når eleven ser mangel på validering gjennom et par eksempel, men mangler ferdigheter og språk for å vise det på andre måter. Det avgjørende eksperimentet skjer når et eksempel overbeviser eleven, og dette avgjør om utsagnet er sant eller ikke for eleven. På denne måten handler dette trinnet mer om å overbevise fremfor å bevise. Det tredje trinnet i Balachefs (1988) hierarki er generisk eksempel. Et generisk eksempel er en generalisering som gjelder for alle tilfeller, ikke bare noen (Varghese, 2011). Dette gjøres ved å bruke matematiske egenskaper for å konstruere et eksempel som gjelder for en klasse og ikke bare for et bestemt tilfelle. På toppen av hierarkiet har vi tankeeksperiment (Balacheff, 1988). På dette nivået klarer elevene å gjøre logiske deduksjoner basert på bevissthet rundt egenskapene og forholdene som kjennetegner situasjonen (Varghese, 2011).

2.2 Veien til resonnering og argumentasjon

2.2.1 Elevenes sosiale normer

Stylianides forklaring av hva som utgjør et gyldig matematisk argument kan sees i sammenheng med de ulike sosiale normene elevene har utviklet. Disse vil ha stor påvirkning på elevenes evne til å akseptere og vurdere ulike matematiske forklaringer (Yackel og Cobb, 1996; Kleve & Ånestad, 2016). De relevante normene kan deles inn i sosiale og sosiomatematiske normer. Innenfor de sosiale normene finner vi generelle strukturer som gjelder for alle fag. Forståelsen av at det forventes at elevene skal forklare og gi begrunnelser for egne hypoteser er en sosial norm. Sosiomatematiske normer omhandler den matematiske praksisen i klasserommet, hvordan faglige metoder og resultater behandles og aksepteres innenfor matematikken. Eksempelvis kan dette være kunnskap om hva som utgjør akseptable matematiske forklaringer og begrunnelser.

Normene som oppstår i klassen er et produkt av både lærer-elev og elev-elev interaksjon, men det er læreren som har den største påvirkningskraften for etableringen av normer (McClain & Cobb, 2001). Utviklingen av de sosiomatematiske normene bidrar til regulering av deltakelse i klassefellesskapet. Yackel og Cobb (1996) nevner at det er viktig for elever å øve på sammenligning av hverandres løsninger og metoder for å utvikle deres evne til å vurdere hvilke spesifikke trekk ens egen løsning inneholder. Læreren må oppmuntre til og tilrettelegge for sammenligning og diskusjon. På denne måten kan sosiomatematiske normer knyttet til kunnskap om hva som utgjør matematiske forskjeller etableres i klasserommet (Yackel & Cobb, 1996).

2.2.2 Oppgavens utforming

Skovsmose (1998) beskriver undersøkelseslandskap som noe læreren må invitere klassen ut på. En oppgave kan befinne seg i “oppgaveparadigme” eller i “undersøkelseslandskap”. Hvordan oppgaven formulerer problemene som skal løses, vil avgjøre hvilken kategori oppgaven befinner seg i. En oppgave kan med dette raskt flytte seg fra den ene kategorien til den andre. Eksempelvis en oppgave hvor elevene skal finne ut hvor stort arealet av en innhegning er. Lengdene på gjerdet er to 10 meter og to 30 meter, det vil si 80 meter gjerde, altså 10x30 meter. Denne oppgaven kan løses rett frem og er innenfor oppgaveparadigme. Det neste spørsmålet er at elevene har de samme 80 meterne med gjerde, men denne gangen kan de konstruere lengdene på gjerdet selv. Problemet i denne oppgaven er å finne kombinasjonen som gir det største arealet. Her beveger oppgaven seg mer mot undersøkelseslandskap, fordi elevene har mulighet til å undre og prøve seg frem for å finne svaret. Kanskje er dette en oppgave som vil oppmuntre for undring i en 4. klasse, men i en 10. klasse vil elevene kanskje være raske med å foreslå at 20x20 vil gi det største arealet. Hvilke oppgaver som fungerer som undersøkelseslandskaper vil variere med blant annet alder, interesse og kjønn (Skovsmose, 1998). En oppgave som er innenfor oppgaveparadigme eller undersøkelseslandskap, kan videre inndeles i tre ulike kategorier etter hvilken kontekst de inneholder. Disse er: Referanser til “ren matematikk”, Semi-referanser til “virkeligheten”, og Reelle referanser. Referanser til “ren matematikk” er oppgaver som kun inneholder matematiske problem uten kobling til en virkelig kontekst. Semi-referanser til “virkeligheten” er matematiske oppgaver som er knyttet til en tenkt virkelig kontekst. Reelle referanser er matematiske problem som finner sted i en virkelig kontekst. Kombinasjonene av kategoriene gir 6 ulike oppgavetyper, som presentert i tabell 2.1.

Tabell 2.1 Oversatt figur 4 Læringsmiljøer (Skovsmose, 1998, s.29)

	Oppgaveparadigme	Undersøkelseslandskap
Referanser til “ren matematikk”	(1)	(2)
Semi-referanser til “virkeligheten”	(3)	(4)
Reelle referanser	(5)	(6)

Skovsmose (1998) mener det er viktig å utfordre oppgaveparadigmet. Dette kan gjøres ved å gå fra eksempelvis kategori (1) til (2), ved å utforme spørsmål og arbeidsmetoder i oppgavene som oppmuntrer til undring fra elevene. Samtidig nevner Skovsmose (1998) at oppgaveparadigmet fortsatt er relevant, og at noen elever kanskje trives bedre innenfor disse rammene. Med å utfordre oppgaveparadigmet mener han altså ikke å utskifte. En av de positive sidene ved undersøkelseslandskap vil potensielt være å motivere elevene til å bli kritiske matematikere. Ved å skape et syn på matematikken som noe mer enn simple lærebokoppgaver. Matematikk innebærer også å skape, rekonstruere og vurdere arbeidet. Kommunikasjon er et viktig element for å bevege seg mot undersøkelseslandskap. Eksempelvis kan de rette spørsmålene fra læreren være det som trigger undring og matematiske diskusjoner. Oppgaver innenfor undersøkelseslandskap er ofte av typen rike oppgaver og problemløsningsoppgaver (Skovsmose, 1998). Denne typen oppgaver innebærer også en viss risiko, ettersom elevene ikke alltid vet hva de er på jakt etter. Slik er lærerens rolle som leder og fagstøtte avgjørende for utfallet av aktiviteten. Utforsking og problemløsing er kjerneelementer i læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Problemløsning i skolematematikken inngår oppgaver hvor fremgangsmåten ikke er åpenbar (Hana, 2014). Lithner (2008) beskriver problemløsning som et element som kan skape behov for resonnering. Motsetningen til problemløsningsoppgaver er rutineoppgaver (Hana, 2014). I rutineoppgaver kan en ofte løse oppgaven uten å overkomme et eller flere problem. Problemløsning kan brukes i matematikkundervisningen for ulike formål. Eksempelvis er et av argumentene for å lære matematikk i skolen at elevene skal kunne løse hverdagslige utfordringer ved hjelp av matematikk. Problemløsning er en vanlig arbeidsoppgave for profesjonelle matematikere (Hitching & Mørch, 2014). Å arbeide på denne måten krever mobilisering av energi. Det kan derfor være viktig at elevene har en genuin interesse for å løse problemet. Problemløsning kan også være en motiverende aktivitet, og underholdning for noen. Det å løse et utfordrende problem kan gi tilfredsstillelse (Hana, 2014). Videre kan en se på fenomenet som et fartøy eller redskap. Her brukes det for å lære matematiske ferdigheter og begreper. Problemløsningsoppgaver krever at elevene bruker sine ferdigheter og erfaringer for å produsere en løsning. Denne faktoren kan være avgjørende for aktivitetens utfall, for eksempel dersom oppgaven krever ferdigheter som elevene ikke besitter. Det er ulike metoder for problemløsning, den mest vanlige i matematikkdidaktikk er Polyas firefasemodell. Den første fasen er å stille opp, formulere og forstå problemet. Den andre fasen er å lage en plan for hvordan en skal løse problemet. Her er det snakk om å finne en angrepsvinkel eller et utgangspunkt å jobbe med. Fase tre er gjennomførelsen av planen. Og fase fire er å undersøke og analysere det en har kommet frem til. I denne fasen vil en vurdere svaret eller vurdere hvorfor en ikke fant svaret. Disse fasene vil vektlegges ulikt i forhold til forskjellige oppgaver. Elever i skolen er for det meste innenfor fase tre, nemlig å gjennomføre det som trengs for å finne svaret. Dette kan være effektivt i rutineoppgaver, men ved problemløsningsoppgaver vil elevene slite dersom de ikke kan bevege seg mellom de 4 fasene. En av utfordringene med problemløsning i undervisningen er at det tar tid (Hitching & Mørch, 2014). Det kan være urealistisk å komme gjennom pensum hvis en bruker problemløsning i mange matematikkemner.

2.2.3 Virkelighetskontekst og abstraksjon

Når elevene matematiserer en situasjon for å løse den er det en abstraksjon, så fremst situasjonen ikke er rent matematisk i utgangspunktet (Hana, 2014). Derfor kan abstraksjon være et viktig element å mestre når elevene arbeider med oppgaver som omhandler virkelighetskontekst. Abstraksjon har historisk sett blitt beskrevet som å trekke ut essensen av en eller flere situasjoner, og se på essensen adskilt fra situasjonen. Når en abstraherer, går en fra det konkrete mot det abstrakte. I likhet er konkretisering å gå fra det abstrakte mot det konkrete. Hensikten med abstraksjon kan være å løse et problem med matematikk. En annen hensikt kan være å abstrahere noe slik at løsningen i den abstraherte beskrivelsen kan gjelde for andre situasjoner også. Denne måten å abstrahere på ligger nært generalisering. En kan se på abstraksjon som vektlegging og nedtoning av bestemte forhold (Hana, 2014). Eksempelvis kan en se på 3 stykker flasker som kun noen flasker, eller en kan se på dem som et antall, altså tallet 3. Abstraksjon kan også sees på som idealisering. En sirkel for eksempel er visuelt sammenhengende og uten kanter. Men hvis en zoomer inn på sirkelen vil en se at den inneholder flere kanter og på atomnivå vil den ikke engang henge sammen. Elevenes ferdigheter for abstrahering kan hjelpe dem i arbeidet med det som Skovmose (1998) beskriver som oppgaver med semi-referanser til "virkeligheten". Harel og Tall (1989) peker på at det vil være enklere å konsentrere seg om de abstraherte egenskapene og ignorere de andre i en gitt situasjon, etter at abstraksjonsprosessen er gjort. Dette vil medføre en lavere kognitiv belastning for elevene.

2.2.4 Representasjoner

På grunn av matematikkens abstrakte natur er matematiske ideer kun tilgjengelig gjennom representasjoner av de matematiske ideene (National Council of Teachers of Mathematics, 2014). I hovedsak er disse representasjonsformene visuell, verbal, symbolsk, fysisk og kontekstuell. Bruk av fysiske gjenstander og gjennomføring av aktiviteter kan hjelpe elevene i problemløsning. Bruk av konkreter er generelt en fordel for elevene i matematikk (Hana, 2014). I tilfeller hvor elever kan slite med å delta verbalt i diskusjoner, gir visuell representasjon flere elever muligheten til å delta i matematiske diskurser (National Council of Teachers of Mathematics, 2014). Visuelle representasjoner kan fremheve elevenes problemløsning som videre kan vises frem, kritiseres og diskuteres. Det gir også muligheter for at elevene kan presentere og følge hverandres resonnering i klasseromssituasjoner. I problemløsning kan det å arbeide med flere representasjonsformer være et verktøy for elevene. Gjennom å representere, diskutere og koble sammen matematikk på flere former, viser elevene dypere forståelse og gode problemløsningsevner.

2.3 Teoretisk rammeverk

Vi har valgt sosiokulturell læringsteori som teoretisk rammeverk for studien vår. Innenfor Sosiokulturell læringsteori ses læring på som en aktivitet som foregår i samhandling med andre mennesker, og ved bruk av språk som det aller viktigste redskapet i læringssammenheng (Lyngsnes og Rismark, 2015). Ifølge Vygotsky skjer læring i samhandling med andre, og det aller viktigste redskapet vi kan ta i bruk er språket (Lyngsnes og Rismark. 2015). Vi bruker språket til å kommunisere med hverandre, og gjennom kommunikasjonen, skaper vi utvikling. Ifølge Sfard (2008) kan kommunikasjon også skje på et individuelt plan. Sfard definerer tenkning som en individualisert versjon av interpersonlig kommunikasjon (interpersonal communication), hvor individet har en intern samtale med seg selv gjennom tenkning. Vygotsky utarbeidet to begrep innenfor utvikling av ferdigheter og kunnskap: Det aktuelle utviklingsnivået, og den nærmeste utviklingssonen (Lyngsnes og Rismark, 2015). Det aktuelle utviklingsnivået omhandler det eleven kan i nåværende tidspunkt. Eleven klarer å arbeide selvstendig innenfor denne sonen uten hjelp, men eleven vil heller ikke dra mye læring ut av det, ettersom de allerede kan det. Det er her den nærmeste utviklingssonen blir relevant. Denne sonen bygger videre på elevens aktuelle utviklingssone, og vil være en plass mellom det elevene klarer selvstendig og det eleven klarer med hjelp. Ettersom det aktuelle utviklingsnivået blir større når elevene tar til seg ny kunnskap, vil den nærmeste utviklingssonen i tillegg bevege seg. Den som står for å hjelpe eleven, må være en med dypere kunnskap innenfor det aktuelle temaet ettersom de ellers ikke vil være i stand til å trekke frem viktig informasjon under arbeidet eller komme med spørsmål med hensikt å videreføre elevens tenkning. Elevens motivasjon for arbeidet er også noe hjelperen kan bidra til. I det klassiske eksempelet er det læreren selv som stiller opp som hjelperen under elevens arbeid med den nærmeste utviklingssonen. Skulle eleven sitte fast blir heller ikke oppgaven til den hjelpende å komme med løsningen, men heller å støtte elevene i forsøkene de har utarbeidet. Dette fenomenet kan beskrives som støttestillas ettersom den lærende støttes opp ved hjelp av andre.

I løpet av de siste tiårene har det blitt gitt større oppmerksomhet til teorier som retter fokus på at læring ikke skjer gjennom en individuell kognitiv prosess på den som skal lære, men heller gjennom aktivitet, praksisfellesskap og deltakelse (Lyngsnes og Rismark. 2015). Læringen er sosialt distribuert mellom mennesker, gjennom verktøy, og gjennom regler og normer. De kulturelle verktøyene kan eksempelvis være fysiske i form av datamaskiner eller blyanter, og symbolske i form av tall og språk. Tilgangen til disse verktøyene fører til at potensialet for læring blir mye større. Uten tallsystemet vårt ville mulighetene for læring vært svært redusert. Ifølge Vygotsky (Lyngsnes og Rismark, 2015) vil alle kulturelle verktøy støtte hver enkelt individs tenkning, og at resonnering og problemløsning gjennomføres ved bruk av de psykologiske verktøyene som språk og symboler. De symbolske verktøyene blir skapt gjennom sosialt fellesskap, og tilegnelsen av disse verktøyene skjer gjennom deltakelse i fellesskap. På denne måten blir et individs potensial for læring sterkt avhengig av tilgjengeligheten for sosial samhandling. Situert læring er også en sentral del av sosiokulturell læringsteori (Hinna et al, 2011). Konteksten for læringssituasjonen har stor innvirkning på selve læringen. Dette gjelder ikke bare at læringen skjer i sosiale sammenhenger, men at den også kan ha tilknytning til spesifikke sted eller situasjoner. Bruk av realistiske kontekster i læringsprosessen er ikke alltid en mulighet. Konteksten elevene befinner seg i kan likevel tilrettelegges for å bedre simulere den realistiske settingen.

2.4 Rammeverk for analyse

I søken etter mulige rammeverk for analysen vår, undersøkte vi flere muligheter. Balacheffs (1988) taksonomi for bevisnivåer var en av de vi så nærmere på. Balacheffs rammeverk fokuserer på bevis, og elevenes begrunnelser for disse. Ettersom vår problemstilling omhandler karakterisering av elevers argumentasjon, vurderte vi at Lithners (2008) rammeverk for imitativ og kreativ resonnering egnet seg bedre for å belyse dette. Rammeverket karakteriserer elevenes tankeprosesser som aktiveres i læringssituasjoner (Lithner, 2015).

Rammeverket ble satt sammen for å analysere lærevansker knyttet til repetisjonslære (rote learning) og imitativ resonnering (Lithner, 2015). Repetisjonslære blir her definert som en prosess hvor læringen skjer gjennom repetisjon for å huske noe i stedet for å forstå det. Læremetoden legger opp for det Skemp (1978) beskriver som instrumentell forståelse av matematikk. I dagens matematikkundervisning ønskes det at elevene skal bli effektive problemløsere, men fortsatt etter over 30 år med forskning og reformer er det mange elever som praktiserer ineffektiv repetisjonstenkning (rotethinking) (Lithner, 2015). En av grunnene til at repetisjonslære har denne plassen i matematikk i dag, kan knyttes opp mot et uberettiget og langstrakt forsøk på å redusere matematikkens kompleksitet med et algoritmisk fokus. Dette er ifølge Lithner en av hovedutfordringene for lærevansker i matematikk.

Lithner (2008) deler resonnering inn i to hovedgrupper i sitt rammeverk. Imitativ resonnering (IR) og kreativ resonnering (KR). Innenfor imitativ resonnering vil elevenes tankegang være fokusert rundt å memorere informasjon som de tidligere har blitt presentert for. Imitativ resonnering deles videre inn i kategoriene algoritmisk resonnering (AR) og memorert resonnering (MR). Memorert resonnering er en strategi som er basert på å huske et komplett svar. Videre blir implementasjonen av denne strategien kun å skrive ned det eleven husker. I tillegg kan memorert resonnering også påvirkes gjennom tidligere erfaringer. Eksempelvis kan en elev tenke at et matematisk svar de har kommet frem til må være feil, fordi det ikke er i overenstemmelse med tidligere erfaringer. En slik erfaringsbasert tankegang vil ofte kunne overstyre en mer matematisk tankegang.

Matematikkoppgaver i skolen vil sjeldent løses effektivt ved å memorere en hel utregning (Lithner, 2008). Det vil ofte være mer effektivt og realistisk å huske algoritmen til en oppgavetype. Eksempelvis å finne nullpunktene til en graf med løsningsformelen for andregradsligninger. En algoritme er en avgrenset sekvens av utførbare instruksjoner som gir en mulighet til å finne et klart svar på gitte problemtyper (Brousseau, 1997). Det viktige med en algoritme er at matematiske valg og operasjoner er forhåndsbestemt ut ifra hvilken algoritme som brukes (Lithner, 2008). Eleven trenger ikke foreta vurderinger eller tolkning av fremgangsmåte. De resterende delene av løsningsstrategien vil være mer trivielle. Hvis algoritmen og gjennomførelse av den er korrekt, vil eleven alltid komme frem til rett svar. Lithner nevner at begrepet "algoritme" i dette rammeverket ikke bare omhandler kalkulasjoner, men også alle forhånds-spesifiserte prosedyrer. Et eksempel på dette kan være å finne stigningstallet til en ukjent lineær funksjon ved å lese av grafen. Du kan finne stigningstallet ved å se hvor mye y-verdien stiger fra en valgfri x-verdi til den neste x-verdien.

Denne prosedyren er ikke en algoritme i seg selv, men metoden kategoriseres som å bruke algoritme Lithners (2008) rammeverk.

AR kan deles opp i tre ulike varianter: Kjent AR, avgrenset AR og guidet AR (Lithner, 2008). Kjent AR er når eleven gjenkjenner oppgave typen og en algoritme tilknyttet oppgave typen. Det er tidligere erfaringer som avgjør elevens valg av denne strategien. Ofte er dette gjenkjenning av tekstoppbygging, symbolbruk og/eller grafiske egenskaper som kan knyttes opp mot en kjent algoritme. Kjent AR egner seg ikke til mer kompliserte oppgaver ettersom strategien ikke er forankret i matematiske egenskaper, men heller gjennom elevens tidligere erfaringer.

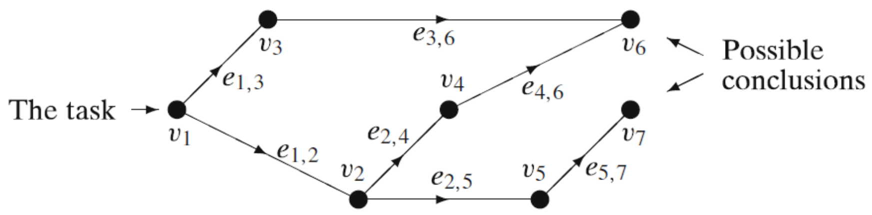
Avgrenset AR vil ofte kunne bli tatt i bruk i mer kompliserte oppgaver hvor eleven ikke har tilstrekkelig erfaring til å benytte kjent AR (Lithner, 2008). Innenfor denne strategien vil den resonnerende ofte ha forventninger om at konklusjonen til en oppgave burde være innenfor visse premisser, og vil kunne forkaste resultater som ikke tilsvarer forventningene. Eksempelvis kan eleven tro at svaret bør være et negativt tall, men algoritmen eleven bruker fører til et positivt tall. Fordi svaret ikke har den egenskapen eleven forventet, tror eleven at algoritmen må være feil. Det konstateres at det ikke er noe problematisk ved å utforske ulike algoritmer basert på antagelser. Svakheten ligger i å blindt forkaste eller akseptere svaret uten noen form for validering.

Guidet AR går ut på å støtte seg på eksterne ressurser og forekommer i to former (Lithner, 2008). Tekst-guidet AR handler om å identifisere overfladiske likheter mellom oppgaven og eksempler, definisjoner, teorem, regler eller lignende situasjoner fra en tekstkilde, eksempelvis læreboken. I guidet AR blir ikke disse valgene validert. Person-guidet AR baserer seg på at eleven tar imot instrukser for hvordan oppgaven løses, uten å validere løsningsmetoden. For eksempel en lærer eller elev som gir instrukser til en elev.

Elevene kan tilsynelatende komme langt ved bruk av overfladiske AR metoder i øvelser og på tester (Lithner, 2008). Men dette kommer på bekostning av at leting etter og bruk av algoritmer blir selve matematikken i stedet for en del av den. Kreativ resonnering og konseptuell forståelse vil også nedprioriteres eller ikke være til stede.

Ved kreativ resonnering (KR) inngår det at eleven skaper en løsning som er original for dem selv (Lithner, 2015). Lithner sammenligner dette med IR hvor fokuset er på å imitere kunnskap. På denne måten blir kreativ resonnering det motsatte av imitativ resonnering.

Kreativ matematisk forankret resonnering (KMR) er et videre begrep som bygger på KR. KMR må i likhet med KR også være nyskapende ved at den resonnerende skaper en original matematisk løsning, eller gjenskaper en glemt løsning. Argumenter som støtter for at strategivalget og/eller strategiimplementeringen er rett eller sannsynlig må være til stede. Til slutt må argumentene være forankret i matematiske egenskaper ved de involverte komponentene i resonneringen. Lithner nevner at studier viser til at AR er dominerende i skolen, mens KMR er mer sjelden.



Figur 2.1: Oppgaveløsning som en sti i en graf, figur 2 i (Lithner, 2008, s. 258).

Vi kan betrakte oppgaveløsning som en sti fra et punkt til et annet slik det er vist i figur 2.1 over. Hvis vi deretter prøver å se oppgaveløsning i lys av Lithners (2008) kategorier, vil AR bli utført ved at den resonnerende følger en kjent sti av fra start til slutt. Stien inneholder de matematiske prosedyrene som er relevante for oppgaven. Gjennom MR vil den resonnerende umiddelbart bli plassert i enden av figuren ved kun å bruke hukommelsen. Ved bruk av KMR vil det ikke være noen kjent sti å følge, og den resonnerende vil da konstruere en ny sti fra start til slutt. Ved bruk av KMR vil begrunnelsen for at svaret er rett bygge på resonnementets sannsynlighet og logiske verdi, mens i AR og MR bygger det på autoriteten til kilden av den imiterte kunnskapen. En av de største ulempene med imitativ resonnering er at den analytiske og konseptuelle tankeprosessen kan være fraværende. Konsekvensen av dette kan være at strategivalg og strategiimplementering mangler analytisk støtte og blir tilfeldig.

3 Metode

I denne studien har vi undersøkt hva som karakteriserer elevers argumentasjon innenfor arbeid med matematikkoppgaver. For å få innsikt i dette, observerte vi en gruppe elever som jobbet sammen med matematikkoppgaver. I dette kapittelet kommer utdypelse av metode for datainnsamling, utvalg, oppgavene elevene arbeidet med, og metode for analyse. Videre blir det redegjort for de etiske vurderingene som har blitt tatt, samt en gjennomgåelse av studiens validitet og reliabilitet.

3.1 Metode for datainnsamling

3.1.1 Valg av metode

Vi har valgt å bruke observasjon, som er en kvalitativ metode. Designet vårt ligger innenfor "basic qualitative study" (Merriam, 2014). Denne typen kvalitative studier kjennetegnes ved at individene konstruerer virkeligheten i samspill med deres sosiale verden. Den som gjennomfører en slik studie vil være ønske i å vite noe om hvordan menneskene tolker erfaringene sine, hvor de konstruerer deres verden, og hvilken mening de knytter til erfaringene sine. Basic qualitative study er sannsynligvis det mest vanlige kvalitative studiedesignet som brukes (Merriam, 2014). Data innhentes gjennom intervju, observasjon og analyse av dokumenter. Data analyseres med at forskeren ser etter gjentakende mønstre som karakteriserer dataen. Funnene er de mønstrene som støttes opp av dataen den er avledet fra. Videre vil den helhetlige tolkningen bli forskerens forståelse av deltakernes forståelse for studiens fenomener. I tillegg til observasjon har datainnsamlingsmetoden vår et trekk av intervju. Dette omhandler siste del av observasjonen, hvor vi stiller noen spørsmål angående deres arbeid under økten. Dette kan sees på som kombinasjon av ulike datainnsamlingsmetoder (Dalland, 2017). Å stille spørsmål til hendelser fra observasjon, kan utfylle bildet og utdype forståelsen rundt det. Når det er sprik mellom det du observerer og det informanten forteller, er det en indikasjon på at grundigere undersøkelser er nødvendig. Dette kan være en form for metodetriangulering (Postholm, 2020).

3.1.2 Observasjon

Observasjon som metode egner seg godt i undersøkelser hvor fokuset er rettet mot samhandlingen mellom elever (Christoffersen og Johannesen, 2018). For å kunne observere argumentasjon blant elevene valgte vi å legge opp for gruppearbeid. Vi valgte å observere en liten gruppe elever for å oppmuntre til deltakelse fra alle elevene i undersøkelsen. Det vil også være enklere for oss å observere når det kun foregår et samspill og ikke flere på samme tid.

En stor gruppe kunne ledet til flere interne samspill, men disse ville være vanskeligere å registrere hver for seg. Vi ønsket også mindre grupper slik at elevene skulle føle seg trygge nok til å delta i større grad. Det kan tenkes at elevene har lavere terskel for å dele sine tanker i en mindre gruppe.

Vi valgte å ta i bruk videoopptak under prosjektet for å få et mest mulig pålitelig datamateriale. Videoopptak sikrer blant annet at alle hendelser som blir utført, også blir registrert for videre analyse (Bjørndal, 2015). Ved tradisjonell observasjon kan øyeblikk passere uten at observatør er i stand til å registrere det. I etterkant av observasjonen har vi ved bruk av video, mulighet til å gjennomgå prosjektet grundig ettersom vi kan se hendelsene flere ganger. Dette ga oss også mulighet til å sette fokus på ulike deler av den overordnede situasjonen hver gang vi så opptaket. Ved bruk av opptakene kunne vi også bedre fange opp hvordan elevenes ikke-verbale kommunikasjon foregikk. Valget av å ta i bruk video ble også gjort med hensikt for å motvirke eventuelle utfordringer som kunne forekomme ved ordinær observasjon. Dalland (2017) understreker at det er fordel å notere førsteinntrykket ved gjennomførelse av observasjon, selv om førsteinntrykket ofte varierer fra det endelige inntrykket. Et førsteinntrykk som varierer fra det endelige inntrykket, når transkripsjon og analyse er gjennomført, kan bidra til et videre perspektiv på datamaterialet.

Vår rolle under observasjon er todelt. Ved oppstart og avslutning av økten vil vi ha en klasseleder rolle. Under selve observasjonen vil vår rolle være fullstendig observatør (Postholm, 2020). Med denne rollen inngår det at vi er til stede under observasjon, men ikke har noen deltagelse i aktiviteten. Til tross for dette inntar vi en kort intervjurolle ved slutten av observasjon, hvor vi som tidligere nevnt vil spørre elevene om elementer fra observasjonen. Når vi går inn som observatører i elevenes skolehverdag er det stor sannsynlighet for at deres oppførsel vil påvirkes. Dette kaller Dalland (2017) "forskningseffekten". Dette vil påvirke observasjonens gyldighet i stor grad. Her er vår rolle som både klasseleder og observatør sentral. Dersom elevene ser på oss som klasseledere, fremfor observatører av deres handlinger og utsagn, vil vi potensielt få en mer naturlig læringsøkt.

3.1.3 Gjennomførelse av metode

Vi fikk tildelt et eget rom hvor vi skulle gjennomføre observasjonen. Utstyret vi brukte var to kameraer plassert på hver sin side av rommet og en ekstra mikrofon som ble plassert i midten av elevgruppen. Elevene ble tildelt blyant, viskelær, linjal, passer, skriveark og kalkulator. Vi forklarte vår rolle som observatører, men la til at vi ville være behjelpelig ved spørsmål som ikke direkte hjalp dem med å løse oppgavene. Eksempelvis hvis det er noe ved oppgaveteksten som er uforståelig. Ved oppstart tildelte vi oppgavene med instruksjon om at vi var ute etter å se hvordan elevene samarbeider med oppgaven. Vi understreket at vi ikke fokuserer på elevenes kunnskapsnivå og prestasjoner under arbeidet. Elevenes arbeid ble gjort uten innblanding fra andre. Når elevene var ferdige med oppgavene kunne vi ha tilleggsspørsmål, som i hovedsak ba om en forklaring av det de allerede hadde gjort under arbeidet. Dette gjorde vi for å få frem eventuelle underliggende tanker som ikke nødvendigvis ble kommunisert gjennom samhandling med de andre elevene.

Etter endt observasjon transkriberte vi videoopptaket. I transkripsjonen ble språket oversatt til bokmål. Vi noterte fysiske tegn som virket relevant for kommunikasjonen, eksempelvis når elevene peker på ulike deler av oppgavearket. I løpet av transkripsjonsprosessen fikk vi en fornemmelse av at datamaterialet var noe tynt. Denne opplevelsen stammer sannsynligvis fra korte ubevisste analyser vi gjorde av datamaterialet, og med dette en vurdering av hvor mye av datamaterialet som var relevant for forskningsspørsmålet vårt. Dette var kanskje påvirket av vår forforståelse av teorien tilknyttet forskningsspørsmålet, noe vi vil se nærmere på i kapittel 3.4. Vurderingen resulterte i gjentagelse av metoden for å få et ekstra sett med data. Med dette gjennomførte vi nevnt metode to ganger. Når transkripsjonen var ferdiggjort, destruerte vi videoopptakene i henhold til planen vår. Hele metode prosessen tok to uker å gjennomføre.

3.2 Utvalg

Valget av skole, klasse, og elever var i stor grad styrt av hva som var tilgjengelig for oss. Vi kontaktet ledelsen ved en universitetsskole, og ble videresendt til en av lærerne. Vi forespurte om å få 3 deltagere til forskningsprosjektet vårt. Vi fortalte at vi ønsket elever som var motivert til å være med på prosjektet, fordi å løse oppgavene potensielt ville kreve innsats og utholdenhet. Vi informerte både skolen og læreren om hvordan undersøkelsen ville foregå, og hvordan vi ville behandle datamaterialet i etterkant. Alle elevene i lærerens klasse fikk utlevert samtykkeskjema (vedlegg 1). Læreren valgte ut 3 elever av de som ville delta i undersøkelsen. Det er verdt å merke at det var et fåtall elever som ønsket å delta. På denne måten ble utvalget mer tilfeldig enn strategisk.

3.3 Oppgavene

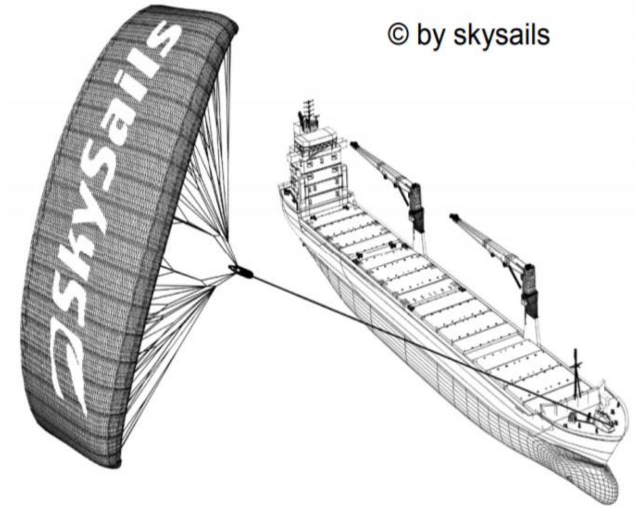
For å kunne observere karakteristikkene i elevenes argumentasjon må oppgavene oppfylle visse kriterier. Vi ønsket oppgaver med potensial og oppmuntring for samhandling og argumentasjon. I tillegg ønsket vi mulighet for å løse dem på ulike måter ettersom det kan gi rom for rike diskusjoner. Dersom elevene sliter med å forstå oppgaven matematisk, blir det vanskelig å komme frem til gode argumentasjoner rundt oppgaven. På samme måte kan oppgaver med lav utfordring føre til mindre behov for argumentasjon og samhandling. Dette tilsier oppgaver som befinner et sted mellom den aktuelle og nærmeste utviklingssonen (Lyngstad & Rismark, 2015). For å oppnå dette valgte vi oppgaver med variert matematisk innhold. Oppgavene vi valgte er hentet i PISA undersøkelsen fra 2012 (PISA, 2013) og er oversatt til norsk. De har ulike matematiske nivåer og er konstruert for elever på 15 år.

PISA undersøkelsen måles etter poengskår som igjen inndeles i 6 ulike nivå fra lavest til høyest kunnskapsnivå (1-6). For å gi skalaen en sterkere faglig forankring har PISA utviklet beskrivelser av hva elever med ulike skår typisk mestrer (Nortvedt, 2013). Ut ifra dette har vi forsøkt å klassifisere de utvalgte oppgavene gjennom nivåbeskrivelsene for å få oversikt over kunnskapsnivået.

SEILENDE SKIP

Nittifem prosent av verdens handel blir flyttet til sjøs, av omtrent 50 000 tankskip, bulkskip og containerskip. De fleste av disse skipene bruker diesel.

Ingeniører planlegger å utvikle vindkraftstøtte for skip. Forslaget deres er å feste drageseil til skip og å bruke vindkraft til hjelp for å redusere dieselforbruk og drivstoffets innvirkning på miljøet.



Oppgave 1

Drageseilet som båten bruker flyr i en høyde på 150 meter over båten. Der er vindstyrken omtrent 25% sterkere enn den er nede på skipsdekket. Med hvilken styrke blåser vinden i seilet, når vindstyrken blir målt til 24 km/t på skipsdekket.

A 6 km/t

B 18 km/t

C 25 km/t

D 30 km/t

E 49 km/t

Figur 3.1: Oppgave 1.

Oppgave 2

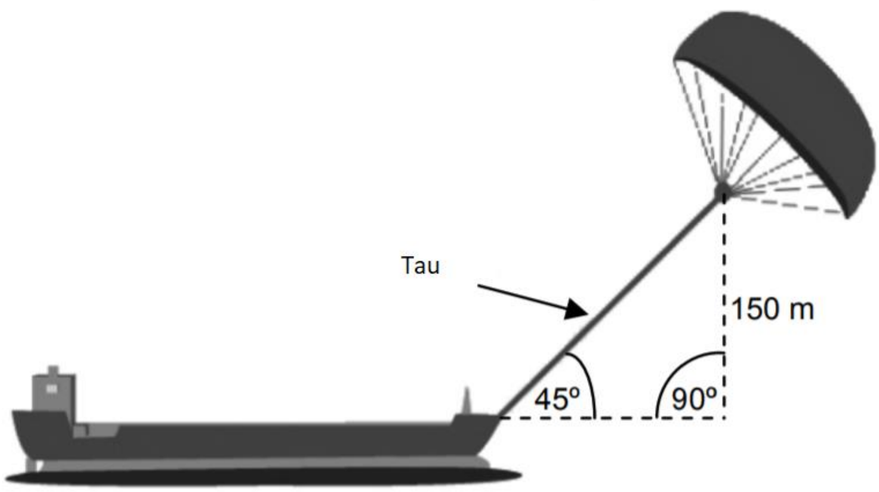
Hva må lengden på tauet til drageseilet omtrentlig være, for at drageseilet skal dra skipet i en vinkel på 45° og være 150 m vertikal høyde i luften, som vist på tegningen.

A 173 m

B 212 m

C 285 m

D 300 m



Oppgave 3

På grunn av høy diesel kostnad på 0,42 zeds per liter, tenker eierne av skipet NewWave å utstyre skipet deres med et drageseil. Det er estimert at et slikt drageseil har potensial til å redusere dieselforbruket med opptil 20%.

Navn: NewWave

Type: Lasteskip

Lengde: 117 meter

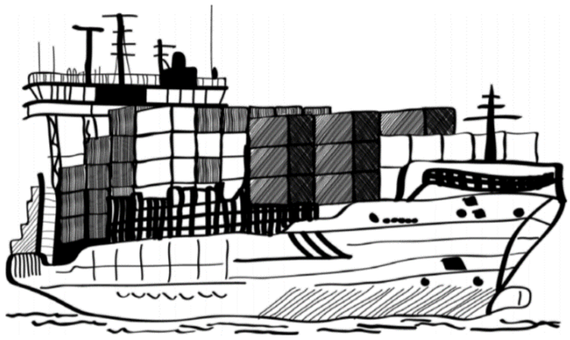
Bredde: 18 meter

Lastekapasitet: 12 000 tonn

Maximal hastighet: 19 knop

Diesel forbruk per år uten et drageseil: Omtrent 3 500 000 liter.

Kostnaden for å utstyre skipet med et drageseil er 2 500 000 zeds



Etter hvor mange år omtrent vil pengene spart på diesel dekke kostnaden for drageseilet?

Figur 3.2: Oppgave 2 og 3.

I den første oppgaven gis det informasjon for vindhastighet, høyde for drageseilet, og økningen i vindhastighet. Elevene må identifisere hva som er relevant informasjon, og hvordan denne informasjonen skal brukes for å finne svaret. De må også ha en viss fortrolighet med prosent, desimaltall og brøk for å kunne løse oppgaven. Denne oppgaven, i likhet med de andre, er tekstoppgaver. Dette fører til at elevene i større grad må kunne identifisere matematikken i oppgaven, og sette opp regnestykket som kan føre til et relevant svar på de stilte spørsmålene. Dermed kan vi se at oppgave 1 forutsetter mestring fra nivå 2 og 3 (Nortvedt, 2013). Ut ifra funnene fra PISA 2012 kan vi se at Norges gjennomsnitt ligger rett under nivå 3 dette året (Kjærnsli & Olsen, 2013). Oppgave 1 vil da etter vår tolkning være mulig å gjennomføre for en gjennomsnittlig norsk elev i 10. klasse. Denne oppgaven vil i mindre grad oppmuntre til argumentasjon og resonnering ettersom det den spør etter kan løses med henholdsvis simpel matematikk. I lk06 kan vi se at elevene møter på desimaltall, prosent og brøk allerede på mellomtrinnet. "Beskrive og bruke plassverdisystemet for desimaltal, rekne med positive og negative heile tal, desimaltal, brøkar og prosent og plassere dei ulike storleikane på tallina" (Utdanningsdirektoratet, 2013). I tillegg har denne oppgaven svaralternativ som kan føre til at elevene føler et mindre behov for å begrunne svarene sine, eller at de bruker ren gjetning for hvilket svar som er rett. En fordel med svaralternativer er at elevene kan bruke dem som støtte for å løse oppgaven. Eksempelvis ved å vurdere om en løsning er rett eller galt. Denne oppgaven ligger i Skovsmoses (1998) oppgaveparadigme med semi-referanser til "virkeligheten" (3).

Den andre oppgaven inneholder trekk av problemløsning. Den kan løses på flere måter eksempelvis ved bruk av Pytagoras teorem eller formlikhet. Elevene må kunne identifisere og klassifisere skjulte matematiske egenskaper knyttet til figuren, ettersom all den nødvendige informasjonen ikke er lagt frem. Et eksempel på dette kan være at Pytagoras teorem kun kan brukes med rettvinklede trekanter, noe som ikke blir presentert direkte for elevene. De må selv undersøke figuren å trekke konklusjonene rundt den, for så å kunne ta i bruk teoremet. Oppgaven vil i større grad oppmuntre til argumentasjon ettersom matematikken som skal brukes er av høyere kompleksitet enn i oppgave 1. Om en elev ser en løsning, er det ingen selvfølge at de andre elevene ser den samme løsningen. Dette kan ha stort potensial for diskusjon og drøfting. Videre vil oppgavens trekk av problemløsning kunne føre til at elevene ser ulike løsninger, som også vil legge opp for argumentasjon for dem. Oppgaven har i likhet med oppgave 1 også tilknyttet svaralternativ. Denne oppgaven vil ligge et sted mellom Skovsmoses (1998) oppgaveparadigme med semi-referanser til "virkeligheten" (3) og undersøkelseslandskap med semi-referanser til “virkeligheten” (4). Med hensyn til ferdighetene vi vurderer som relevante for oppgaven, ser vi kjennetegn på nivå 3 og 4 (Nortvedt, 2013). Med dette kan vi anse elever over det norske gjennomsnittet til å være i stand til å løse oppgaven på egenhånd (Kjærnsli & Olsen, 2013).

I likhet med de to første oppgavene, må elevene identifisere hvilke sider ved den oppgitte informasjonen som er relevante for dem i oppgave 3. I dette tilfellet er det langt mer informasjon i form av tall. Hovedutfordringen i oppgaven er å organisere informasjon og sette opp regnestykkene. Ferdigheter knyttet til sammenhengen mellom virkeligheten og grunnleggende matematikk vil være sentral for å løse oppgaven. Denne oppgaven vil også ligge et sted mellom Skovsmoses (1998) oppgaveparadigme med semi-referanser til “virkeligheten” (3) og undersøkelseslandskap med semi-referanser til “virkeligheten” (4). En av oppgavens utfordringer er at den inneholder flere elementer: drageseil, drivstoff, skip, valuta, tid osv. Relasjonell forståelse (Skemp, 1978) vil kunne ha betydning for hvordan elevene løser dette. I motsetning til oppgave 1 og 2, har elevene ikke mulighet til å støtte seg på svaralternativer i oppgave 3. Denne oppgaven har i likhet med oppgave 2 også kjennetegn av nivå 3 og 4 (Nortvedt, 2013).

3.4 Metode for analyse

For å få bedre oversikt på, og mulighet til å skape system i empirien, har vi valgt å benytte oss av induktiv koding som metode for analyse (Nilssen, 2012). Gjennom induktiv metode blir ulike mønstre, temaer, og kategorier oppdaget gjennom arbeidet med datamaterialet. Ved å jobbe med induktiv koding, går vi gjennom transkripsjonen, og grupperer deler av datamaterialet gjennom koder. Kodene vil være konstruert av oss, og skal fortelle oss i grove trekk hva denne delen av empirien omhandler. Etter kodingsfasen er neste steg å samle sammen kodene i ulike kategorier. Deres funksjon er å gi oversikt over de ulike kodene for å skape mer presise forklaringer på de ulike fenomenene som er observert. Kodingsprosessen fører også til en datareduksjon av empirien vår (Postholm, 2020). Datareduksjon er nødvendig for å gjøre materialet håndterlig. Induktiv tilnærming vil være hovedmetoden for analysen, men den vil i tillegg være deduktivt påvirket. Innenfor deduktiv metode blir datamaterialet analysert ved hjelp av et rammeverk (Nilssen, 2012). Analysen vår vil dermed bli en både induktiv og deduktiv ettersom vi tar i bruk Lithners (2008) rammeverk for matematisk resonnering. Kodene og kategoriene vi produserer vil være relevante overfor rammeverket, forskningsspørsmålet, og vårt teoretiske ståsted. Vi har fordypet oss i teorien og vurdert dens relevans for forskningsspørsmålet. Dette er gjort en tid før gjennomførelsen av datainnsamlingen. Det er dermed meget sannsynlig at analysen vår er påvirket av det vi forventer å finne i datamaterialet. De ulike teoriene vi har satt oss inn i blir en del av våre personlige opplevelser og dermed en del av vår forforståelse (Gilje & Grimen, 1993).

3.5 Forskningsetikk

For å ivareta personene i denne studien har vi fulgt retningslinjene satt opp av De nasjonale forskningsetiske komiteene (u.å) innenfor samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. I tillegg ble det sendt inn søknad til NSD ettersom vi skulle behandle personopplysninger i form av videoopptak (Norsk senter for forskningsdata, u.å). Denne har vi fått godkjent av NSD (vedlegg 2). Vi kontaktet ledelsen ved skolen, og ble foreslått en lærer vi kunne kontakte. Av den grunn at informantene i prosjektet er under myndighetsalderen, har vi satt stort fokus på tydelighet. Under utdeling av samtykkeskjemaet ga vi i tillegg muntlig beskjed om at det var frivillig å delta, og at det ville være mulig å trekke seg hvis de skulle angre i ettertid. Dette var informasjon som også stod i samtykkeskjemaet (vedlegg 1). Ettersom elevene gikk i 10. klasse, fikk de selv full kontroll over hvorvidt de skulle delta eller ikke. Informasjon om behandling av personopplysninger og hvilke rettigheter elevene har ble utlevert skriftlig gjennom samtykkeskjemaet, og muntlig både under utleveringen av skjemaet og før videokameraene ble slått på. Opptakene ble overført fra kameraene til minnepenn, slik at vi kunne gjennomføre transkripsjons arbeidet. Opptakene ble destruert samme dag som transkripsjonen ble ferdigstilt. Elevene ble informert om at opptakene ville bli transkribert, men at de ble anonymisert i prosjektet.

Taushetsplikten vår har ledet oss til valget av å referere til alle informantene med pronomenet “han”. Dette for å bedre sikre anonymiseringen og beskyttelsen av informantene våre (Christoffersen & Johannessen, 2012). I tillegg har vi ingen informasjon om hvilken skole eller lærere vi har vært i kontakt med. Det var kun vi som skriver denne studien som var vitne til personopplysningene før anonymiseringen fant sted. De eneste andre som vet hvem som har deltatt i prosjektet er elevene selv og én av lærerne deres.

I møtet med informantene er det viktig at vi behandler dem med respekt. Vi forsøker å gjennomføre observasjonen på en måte som fører til at deres personlige integritet blir ivaretatt. Dette gjelder likeså ved behandlingen av datamaterialet og presentasjon av studien. Vi er også klar over at det er opplevelsen og følelsen til informantene som avgjør om dette er gjort i tilstrekkelig grad.

3.6 Validitet og Reliabilitet

Validitet omhandler hvor relevant det en gjør som forsker er (Dalland, 2017; Christoffersen & Johannessen, 2012). Undersøker studien virkelig det den er beskrevet å gjøre, og er teorien relevant for forskningsspørsmålene. Konklusjonene og tolkningene vi gjør må også kunne forsvares ut ifra den presenterte teorien. I tilfeller hvor våre påstander og tolkninger støttes opp av flere teoretikere og teorier, vil relevansen og troverdigheten styrkes. Dette er triangulering av teori ifølge Postholm (2020). Dersom vi er overbevist om at observasjonen gir noen form for svar på problemstillingen, er datamaterialet gyldig for studien vår (Dalland, 2017). Gjennom prosjektet vårt har vi reflektert og diskutert rundt hvilken datainnsamlingsmetode som var best egnet for å svare på problemstillingen. Valget av observasjon ble fastslått med grunn i at vi var ute etter data knyttet til elevene i en naturlig tilstand, hvor vi kunne hente inn materiale rett fra situasjonen vi er ute etter å undersøke. På denne måten unngår vi et ledd av tolking som vi ellers ville fått ved bruk av intervju. Ved bruk av intervju vil vi få innsikt i elevenes, eller lærerens forståelse rundt argumentasjon. Når vi fikk observere, kunne vi se hvordan argumentasjonen utspilte seg direkte. Når vi har to eller flere uavhengige grupper vil det være mulig at funnene i de ulike observasjonene støtter opp om hverandre. Dette kan medføre større sannsynlighet for at funnene er relevante. Hvilke oppgaver vi har valgt vil også være svært relevant for hvilke data vi får. Derfor har det vært viktig å redegjøre for de valgene vi har gjort. Hvilket fokus og nivå oppgavene ligger på, og hva vi ønsker å oppnå med oppgavene er belyst. Vi støtter oss på (PISA) Programme for International Student Assessment (2013) i valg av oppgavene. Valget er også vurdert nøye, ettersom vi har valgt ut tre oppgaver av mange mulige kandidater. Vi har forsøkt å ta hensyn til "Forskningseffekten" (Dalland, 2017), som omhandler elevenes påvirkning av observasjonssettingen. For å motvirke effekten har vi informert elevene om at deres prestasjon ikke vil ha innvirkning på deres faglige vurdering. I informasjonsskrivet understreker vi at læreren deres ikke har noen innblanding i opplegget. I hvor stor grad elevene var påvirket av forskningseffekten vil være umulig å fastslå (Dalland, 2017). Det eneste vi kan ta høyde for, er at den eksisterer i mindre eller større grad.

Reliabilitet gjelder hvor pålitelig dataene vi har samlet inn er (Christoffersen & Johannessen, 2012). Videre knyttes dette til hvor nøyaktig arbeidet i prosjektet er, hvilke data som blir brukt, hvilken metode ble de innhentet på, og hvordan datamaterialet bearbeides. En metode for å undersøke hvor pålitelig undersøkelsen er kan være å utføre den gjentatte ganger, enten med samme gruppe ved et annet tidspunkt eller med ulike grupper. En slik kvalitetssikring vil være utfordrende å gjennomføre ved vår metode og generelt i kvalitative studier. En mulighet er å utføre metodetriangulering, og på denne måten fått et bredere perspektiv på fenomenet (Postholm, 2020). Dette vil kunne innebære bekreftelser eller avkreftelser av tolkningene våre. Vi valgte derimot å utføre en kort utspørring av elevene i sluttfasen av observasjonen med hensikt å få informantene til å utdype om tanker og meninger de hadde under arbeidet. Samtidig gjør vi rede for at de uttalelsene elevene kommer med i denne fasen, kan være påvirket av hva de forestiller seg at vi vil høre. Dette kan mulig påvirke empiriens autentisitet.

Som nevnt tidligere i metodedelen brukte vi video med hensikt å motarbeide noen av utfordringene som kommer med observasjon som metode. Video gir oss mulighet til å se gjennom data flere ganger, og det gir oss muligheten for en fullstendig transkripsjon og mindre sannsynlighet for feilkilde på datasettet (Dalland, 2017). Observasjon er ikke objektivt ettersom vi som observatører har ulik bakgrunn og forutsetninger. Dette vil kunne resultere i at vi får ulike observasjoner fra de samme hendelsene. Dersom vi gjennom observasjon oppfatter hendelser på like eller ulike måter, kan vi diskutere og underbygge påliteligheten for tolkningene våre (Dalland, 2017).

4 Analyse

I dette kapittelet presenterer vi våre resultater samt analyse av to elevgruppers argumentasjon i arbeid med matematikkoppgaver. Den helhetlige transkripsjonen er tilgjengelig i vedlegg 3. Linje 1-114 inneholder arbeidet til gruppe 1, og linje 115-355 inneholder arbeidet til gruppe 2. Analysen blir grunnlaget for å svare på forskningsspørsmålet vårt: Hva karakteriserer elevenes argumentasjon i arbeid med matematikkoppgaver på 10.trinn? Vi har benyttet oss av induktiv koding som metode for analysen og vil ta i bruk kategoriene som vi har utarbeidet i analyseprosessen. Kategoriene er algoritme, forklare og verifisere. Disse kan bidra til få en bedre oversikt over de ulike interaksjonene hvor argumentasjon mulig har funnet sted under datainnsamlingen. Analysekapittelet er satt opp slik at hver kategori har sitt eget delkapittel. Før vi går inn på selve analysen, vil vi gjennomføre en redegjørelse av de ulike kategoriene, og kodene de er satt sammen av. I tillegg til kategoriene vil vi ta i bruk blant annet Lithners (2008) rammeverk, og Stylianides (2007a, 2007b) begreper for å gjennomføre analysen. Gjennomgangen av kategoriene etterfølges av en tabell hvor vi presenterer en oversikt over kodene og hvor de er identifisert gjennom transkripsjonen. Disse gir et lite overblikk av hvilke typer interaksjoner vi observerte som mest fremtredende og relevante for videre analyse.

“Algoritme” kategorien er satt sammen av kodene “algoritmisk prosedyre” og “bruker algoritme”. Kategorien omhandler at elevene tar i bruk det som vi i studien har definert som algoritme. Dette innebærer mer tradisjonelle algoritmer, eksempelvis kan dette være hvis elevene tar i bruk kvadratsetninger eller utregningen av arealet av en sirkel. Med algoritmiske prosedyrer menes ikke bare utregninger, men også forhåndsbestemte prosedyrer som gir et matematisk svar. Eksempelvis ved å finne nullpunktet av en funksjon ved å lese av grafen hvor y-verdien er lik 0 (Lithner, 2008).

“Forklare” er en kode vi identifiserte, som i tillegg endte opp som en kategori. Grunnen til dette var at koden viste seg i ettertid å være veldig overordnet og generell. Det var mer hensiktsmessig for oss å bruke det samme begrepet som kategori ettersom den også inneholdt en stor mengde av episodene. Innenfor denne kategorien presenterer elevene ulike hypoteser og meninger som de har for de tre oppgavene.

Innenfor kategorien “Verifisere” ligger kodene “matematisk verifisering” og “sosial verifisering”. Matematisk verifikasjon omhandler at elevene bruker matematiske argument for å validere sine utsagn. Det vil si logiske slutninger som er matematisk forankret. Den "sosiale verifiseringen" kjennetegnes ved at elevene validerer i samspill med hverandre. Eksempelvis at et utsagn bekreftes ved at flertallet av elevene er enig.

Tabell 4.1: Oversikt over koder og kategorier.

Linje	Algoritme	Forklare	Verifisere	Annet
1-9			Sosial verifisering	
15-26	Bruker algoritme			Klassifisering og Formodning
27-37			Matematisk verifisering	
58-90		Forklare		
90-102			Matematisk verifisering	
107-114		Forklare		
123-130		Forklare		
134-142		Forklare	Matematisk verifisering	Klassifisering
142-158	Bruker algoritme			Formodning
159-168			Matematisk verifisering	
171-185	Algoritmisk prosedyre			
193-194				Formodning
220-240	Algoritmisk prosedyre	Forklare	Sosial verifisering	Formodning
241-266		Forklare	Matematisk verifisering	
277-292		Forklare	Matematisk verifisering	
314-321		Forklare	Sosial og matematisk verifisering	
342-353		Forklare		

4.1 Algoritme

4.1.1 Algoritme: episode 1

Gruppe 1 jobber med å finne løsningsmetode for oppgave 2. Kodene vi har identifisert i utvekslingen under er "bruker algoritme", "klassifisere", og "formodning".

15- Elev 1: "hvor langt tauet må være. Så vi vet hva… Det så nu ganske likt ut lengden, er lengden på de her sidene like lang?" (Ser på observatør 1). "Tror det."
16- Elev 3: "Hva de der?" (peker på arket).
17- Elev 1: "Den og den" (peker på arket).
18- Elev 3: "Måle?".
19- Elev 1: "Den der… Den der… skal vi se… Jeg må tenke".
20- Elev 2: "tre komma to."
1 minutt stillhet
21- Elev 2: "Jeg tror det må være 212. Fordi." (peker på arket). "Den der er 150 centimeter. Det er".
22- Elev 1: "30".
23- Elev 2: "Ja, meter… Der er 3,2. 3,2 der. Et merke her. Så da må resten av... så en komma.
24- Elev 1: "Så det e jo ka, 150 her. Hvis vi sier at den er A den er B den er C". (peker på arket). "A i andre pluss B i andre er lik C i andre. Så det er sikkert pytagoras… Så hva 150 i andre pluss".
25- Elev 3: "Tror det blir 150 ganger 150, pluss 150, 150 tror jeg."
26- Elev 1: "Er lik".

Elev 2 tror han vet svaret (linje 21), dette kan tolkes som en formodning (Jeannotte & Kieran, 2017). Eleven forsøker å forklare hvorfor han tror dette, og forklaringen blir noe ufullstendig. Det er mulig at forklaringen ikke er klargjort eller at han avbrytes av elev 5 (linje 22). Det er også mulig at formodningen i hovedsak er en gjetning ut ifra svaralternativene. Forslaget til elev 2 blir ikke videre utdypet og forslaget får ikke en muntlig respons fra gruppen. Slik kan vi tolke at argumentet ikke godtas som bevis av fellesskapet (Stylianides 2007a, 2007b). Det kommer ikke frem hvilke matematiske regler som er brukt for løsningen til elev 2. Både representasjonen og den sosiale dimensjonen for argumentet ser ut til å mangle. Forklaringen blir ufullstendig, selv om det kan være tanker som er matematisk forankret til grunne for resonneringen. Forklaringen kan påvirke hvordan de andre elevene oppfatter argumentet, ettersom det tilsynelatende ikke anerkjennes.

Ved bruk av måling finner gruppen ut at sidene på trekanten er like lange. De måler sidene på figuren, og finner ut at de er like lange (linje 23). Målingen gir informasjonen de trenger, fordi figuren er korrekt i forhold til hvilke mål som er angitt i oppgaven. Med dette klassifiserer elevene figurens egenskaper (Jeannotte & Kieran, 2017). Videre identifiserer elev 1 muligheten for bruk av Pytagoras teorem. Han får respons av elev 3 som henger med på tankegangen. Dette er kjent algoritmisk resonnering (AR) (Lithner, 2008) for begge elevene. De gjenkjenner figurens egenskaper, og videre en algoritme som kan si noe om det de ønsker å vite. Det blir ingen diskusjon, usikkerhet eller forklaringer rundt påstanden. En konsekvens av AR kan være at elevene ikke kommer innom noen form for verifisering av metoden og/eller ikke føler behov for verifisering i utgangspunktet (Lithner, 2008). Elevene synes å være enige om metode. Med dette kan AR tenkes å være en kjent og pålitelig metode i denne gruppen, og med dette kan AR bli en verifiseringsmetode i seg selv.

4.1.2 Algoritme: episode 2

Gruppe 2 arbeider med oppgave 2. De har nettopp identifisert figuren til å være en likebeint rettvinklet trekant. Videre leter elevene etter en løsningsmetode ut ifra de matematiske egenskapene som er identifisert.

142- Elev 5: "Og så må vi jo bruke den der, hva heter det pyragoras setning eller noe sånt?".
143- Elev 6: "Pytagoras?".
144- Elev 5: "hæ?".
145- Elev 6: "Pytagoras".
146- Elev 5: "Pytagoras ja… Men var det ikke, hvordan var det den var igjen? 150 150 og hva det var dem 2 gange hverandre?".
147- Elev 6: "Er det ikke katet ganger katet hypotenus?".
148- Elev 5: "Ja, er det det? Ja, og det blir katet hvis vi ganger 150 ganger 150 så får vi kateten som er her, så får vi den er jo like mye da, så får vi begge de katetene, så må vi gange dem for å få den der og så dele den med, hva skulle man dele den på igjen? å jeg husker ikke dette her".
149- Elev 6: "Sikkert sånn 180 eller noe".
(ca. 1 minutt Stillhet)
150- Elev 5: "Nei jeg har ikke peiling… Jeg husker ikke hvordan vi gjorde det".
151- Elev 4: "Jeg husker heller ikke".
152- Elev 6: "Hvis vi tar, den der siste vinkelen der er også 45".
153- Elev 5: "Ja dem to er begge 45".
(Ca. 30 sekunder stillhet)
154- Elev 5: "Å nå husker jeg, hvordan tar man kvadratrot på denne her?" (holder opp kalkulatoren).
155- Elev 4: "Kvadratrot det er faktisk en knapp som er det".
156- Elev 5: "Åja der sånn… Eller kanskje ikke… Å var det ikke noe sånn der… mm mm... Nei da blir det jo… (20 sekund stillhet) Jeg tror det blir to tolv (212), fordi jeg synes jeg husker at det var, at man skal plusse dem der to i lag".
157- Elev 6: "Mhm".
158- Elev 5: "Den pytagoras setningen blir det dem to, pluss den der eller først gange 150 ganger 150 for å finne den, og så finne den der som er like mye. Og så plusse man den, og så da får man hvor stor hele denne er, og da er det bare å ta kvadratroten av den som da er".

Elevene har identifisert de matematiske egenskapene til en likebeint rettvinklet trekant (kapittel 4.2.4), og elev 5 antar at de kan bruke Pytagoras teorem for å løse oppgaven. Det er tydelig at gruppen er usikker på hvordan algoritmen nøyaktig skal settes opp, og de diskuterer en kort stund om hvilke matematiske operasjoner som er de rette (Linje 146-158). Prosessen å identifisere oppgaven og figurens egenskaper er til dels kreativ, dette blir analysert i kapittel 4.2.4. Med det samme elevene finner ut at Pytagoras teorem kan brukes som algoritme, går arbeidsprosessen i stor grad ut på å huske algoritmen. I tråd med Lithner (2008) er dette en indikasjon på algoritmisk resonnering, innenfor den imitative resonneringskategorien. Elevene støtter seg på at algoritmen vil gi dem det rette svaret, hvis de kan memorere den godt nok. Til å begynne med svever gruppen mellom kjent AR og avgrenset AR, kun fordi de ikke helt klarer å memorere algoritmen. Elev 5 ser ut til å arbeide seg fram til algoritmen og svaret (Linje 156). Elevene tenker for seg selv en god stund under denne episoden (Linje 142-158) hvor det er ca. 2 minutt stillhet. Hvordan denne resonneringsprosessen faktisk foregikk vet vi ikke med sikkerhet. Tenkningen deres kan ifølge Sfard (2008) anses som interpersonlig kommunikasjon, og kan inneholde kreativ matematisk forankret resonnering (KMR) uten at det har blitt ytret, ettersom et av kjennetegnene i KMR er å skape eller gjenoppdage matematisk kunnskap (Lithner, 2008). Det kan også hende at eleven kun husker algoritmen "Jeg tror det blir to tolv (212), fordi jeg synes jeg husker at det var, at man skal plusse dem der to i lag" (linje 156), i dette tilfellet vil det gå innen kategorien kjent AR. Valget av algoritme synes å være godkjent av gruppen (Stylianides, 2007a). Det kan tyde på at de sosiomatematiske normene inkluderer algoritmer som en akseptabel forklaring på oppgaveløsning (Yackel & Cobb, 1996). At elevene tilsynelatende blir relativt sikre på svaret, kan også være et tegn på at en eller flere av dem har andre matematiske resonnementer som støtter algoritmen de har brukt. Likevel kan denne tryggheten bygge på at svaret de kom frem til traff et av svaralternativene. Noe vi vil se nærmere på i kapittel 4.3.4.

4.1.3 Algoritme: episode 3

Denne sekvensen omhandler en del av gruppe 2 sitt arbeid med oppgave 3. Denne fasen inneholder koden "algoritmisk prosedyre". Her prøver elevene å identifisere hvor høy dieselkostnad skipet har i løpet av et år. Dette er informasjon de trenger for å kunne løse oppgaven, noe som blir sett nærmere på i delkapittel 4.2.5 - 4.2.6.

174- Elev 6: "Og dieselforbruket er 3,5".
175- Elev 5: "Og den er hva?".
176- Elev 6: "3,5 million".
177- Elev 5: "3,5 million liter. Og da er det jo 3,5 million ganger 0,42, da får du hvor mye dem bruker på… Bruker hvert år på".
178- Elev 6: "På 3,5?".
179- Elev 5: "Hæ?.. Ja ta ehm… 3,5 (utydelige tall)… Ganger 0,42 som blir 7… Som blir da 1,4 million som cirka".
180- Elev 4: "Okei".
181- Elev 6: "hva fikk du?".
182- Elev 5: "hva fikk jeg, på hva?".
183- Elev 6: "På Hvor mye den bruker på diesel".
184- Elev 5: "1,4 mill. En komma fire-syvhundretusen. Nei syttitusen. Nei, er det? Ja syttitusen".
185- Elev 6: "Ja".

Elev 5 presenterer et regnestykke for å finne ut hva båtens dieselkostnader per år er (Linje 177). Sekvensen har tydelige AR trekk (Lithner, 2008). Elev 5 tar i bruk standard multiplikasjon ved å gjennomføre regneoperasjonen "3 500 000*0,42 = 1 470 000". Det kan tenkes at alle elevene har denne algoritmen innenfor kjent AR, men det er kun elev 5 som eksplisitt viser dette i denne fasen. Det er tilsynelatende gjennomgående enighet om at metoden er rett fordi det ikke oppstår diskusjoner eller utdypninger om prosedyren for å finne dieselkostnaden. Samtidig er dette en relativt enkel utregning, i den grad at elevene kan dobbeltsjekke utregningen selv, og vurdere den individuelt. Metoden verifiseres ikke på noen måter. Elev 5 får kun aksepterende kommentarer "Okei" (linje 180) og "Ja" (linje 185).

4.2 Forklare

4.2.1 Forklare: episode 1

Gruppe 1 jobber med oppgave 3. Episoden er delt inn i to deler. Den første er prosessen hvor de finner ut hvor mye penger de sparer på drageseil hvert år, i den andre delen finner de ut hvor mange år det tar å tjene inn kostnaden for drageseilet.

> **58- Elev 1:** "Det der er etter ett år uten seil, så vi må hva, ta minus 20 prosent av det der, og da vet vi hvor mye det bruker".
> **59- Elev 3:** "Med seil".
> **60- Elev 1:** "Med seil".
> **61- Elev 3:** "På et år".
> **62- Elev 1:** "Ja… Så må vi".
> **63- Elev 3:** "Finne ut hvor mange ganger det blir opp i 35 millioner".
> **64- Elev 1:** "Det er jo hva, med en gang vi vet da hvor mye det sparer hvert år, så må vi bare".
> **65- Elev 3:** "Ja"
> **66- Elev 1:** Hva, ta det, hva seilet koster, dele det på, hvor mye det sparer så har vi det, så hva…(20 sekunder stillhet) "Så hva, med seil så bruker den 1, 1, 7, skriv den".
> **67- Elev 2:** "1,17".
> **68- Elev 1:** 1 hva nei, når bruker seil så bruker det, så bruker det hva, 100 tusen, 117 tusen, 6 tusen, med seil, formulerte det litt rart."
> **69- Elev 3:** "Med seil, en komma en million hundre og sytten tusen".
> **70- Elev 1:** "Se her så hva, det der er uten seil og det der er med seil" (peker på arket).
> **71- Elev 3:** "Ja".
> **72- Elev 1:** "Så, ja.. Jeg må tenke litt".
> **73- Elev 2:** "skal vi spørre dem?".
> **74- Elev 1:** "Hva sa du?".
> **75- Elev 2:** "Kan vi spørre dem?".
> **76- Elev 1:** "Jeg tror jeg tastet noe feil på kalkulatoren, 2 sek".
> **77- Elev 1:** "Okei, de pengene som blir spart hvert år er da 294000 okei ja".

I denne sekvensen er det tydelig at elev 1 leder arbeidet. Elev 1 foreslår trinnvis fremgangsmåte for å løse oppgaven. Det blir i hovedsak en samtale mellom elev 1 og 3, hvor elev 1 leder samtalen, og elev 3 enten legger til informasjon eller er enig i utsagnene gitt av elev 1. Fra linje 58 til linje 77 kan vi se at gruppen er ute etter å finne ut hvor mye penger de sparer på diesel hvert år. Det er vanskelig å si hvordan elev 1 resonnerer seg frem til svaret, men ut ifra tallene som nevnes har vi identifisert en mulig fremgangsmåte. Elev begynner med å nevne hva som vil gi ønsket svar (linje 58). Han finner ut hvor mye dieselkostnaden er uten seil (linje 64), og finner videre ut hva kostnaden er med seil (linje 66). Dette tror vi begynner med 3 500 000 (liter) multiplisert med 0,42 (literpris) som er 1 470 000, dette er da dieselkostanden uten seil. Videre tar eleven 1 470 000 multiplisert med 0,8 som blir 1 176 000 (linje 68), dette er da dieselkostnaden med seil. Dieselkostnaden uten seil subtrahert med dieselkostanden med seil blir da 1 470 000 - 1 176 000 = 294 000 (linje 77). Det er kun elev 1 som bidrar til det matematiske i samtalen som fører til tallet 294000. Det kan tolkes som at elev 1 finner svaret for denne delen av oppgaven alene og uten hjelp fra de andre elevene.

78- Elev 3: "Du har to million, nihundre".
79- Elev 1: "ikke 2 million, 2 hundretusen".
80- Elev 2: "294000".
81- Elev 3: "294000".
82- Elev 1: "Det er så mange zeds som blir spart hvert år da med seil".
83- Elev 2: "Så da hvis vi bare runde opp til 300".
84- Elev 1: "Nei ikke rund opp, det er ikke vits".
85- Elev 2: "Åja vi har kalkulator".
86- Elev 1: "Da sier vi at han kan spare, så hva?".
87- Elev 2: "Drageseilet koster to og en halv million".
88- Elev 1: "Så da, hva?".
89- Elev 2: "Hvis du ganger det med".
90- Elev 1: "to og en halv million, det var *dyrt* seil. Og deler det på hvor mye det sparer… 8 punkt 5 år. Det virker mer… åtte og et halvt… 8,5034013, det er så mange år det tar. Og det virker forsåvidt ganske riktig".

Her arbeider elev 1 for å finne det endelige svaret på oppgave 3 (linje 90). Igjen er det ingen tydelig fremgangsmåte som deles med de andre elevene. Samtalen blir ikke en diskusjon, kanskje fordi elev 2 og 3 ikke henger med resonneringen til elev 1. Dette kan tenkes å være påvirket av diskusjonens tilsynelatende svake kommunikasjon. Elev 1 har gode løsninger for oppgaven, men svikter i formidlingen av disse. Likevel gir ikke elev 2 og 3 uttrykk for å være kritiske til det de blir presentert. De kan oppleve at matematikken overgår deres evner. En kan se på de ulike delene av utsagnene til elev 1 som en sammenhengende sekvens av påstander for en matematisk løsning av oppgaven (Stylianides, 2007b). Presentasjonen av fremgangsmåten er derimot noe utydelig, og kan være svært vanskelig å forstå for de andre elevene. Videre er elev 1 innenfor KMR fordi han først identifiserer relevante data for oppgaven, deretter går han stegvis frem med ulike matematiske metoder for å komme frem til løsningen (Lithner, 2008). Samtidig er det ingen direkte implementering av en algoritme som forenkler oppgaven.

4.2.2 Forklare: episode 2

I forkant av denne episoden blir gruppe 1 spurt om hvordan de løste oppgave 2. Elev 1 forklarer hvordan de løste oppgaven. Videre ville vi undersøke nærmere om elevene var inne på andre løsningsmetoder i løpet av økten.

> **107- Observatør 2:** “Var dere inne på noen andre måter å løse det på?”.
> **108- Elev 2:** “Jeg målte”.
> **109- Observatør 2:** “Hva gjorde du da?”.
> **110- Elev 2:** “Jeg bare målte hvor mange centimeter det var (Alle elevene ler kort). Jeg bare målte hvor mange centimeter det var derfra og ned og så tok jeg det på det der tauet og så tok jeg hvor mange centimeter det var igjen, og så regnet jeg med de der prikkene som står der”.
> **111- Observatør 2:** Okei så du målte (målene til figuren i oppgaven) og brukte bare de målene for å finne ut?
> **112- Elev 2:** “Ja”.
> **113- Elev 1:** “Ikke en matematisk måte å gjøre det på. Visuelt”.
> **114- Elev 2:** “Nei”.

I begynnelsen av forklaringen til elev 2 sin metode (linje 110) bryter elevene ut i kort latter. Det kan være flere underliggende grunner til dette. Elevene kan ha blitt enig på forhånd om at denne metoden ikke var korrekt. Det kan også være at de andre elevene ikke har anerkjent metoden (Stylianides, 2007a). Det kan være noe med metoden som ikke tilfredsstiller deres matematiske krav eller at presentasjonen ikke er overbevisende. Presentasjon er et hovedelement i bevis (Stylianides, 2007a, 2007b). Tilsynelatende mangel på presentasjon kan da være en faktor for at metoden til elev 2 ikke aksepteres. I transkripsjonen finner vi ikke noe tydelig kommunikasjon om fremgangsmåten til eleven, ikke før vi spurte i etterkant. Elev 2 har kanskje en visuell representasjonsform som vil kunne hjelpe elevene å følge resonnementet hans (National Council of Teachers of Mathematics, 2014). På linje 113 sier elev 1 derimot rett ut at metoden ikke er matematisk, men visuell. Nøyaktig hva elev 1 mener med visuell metode kan vi ikke si. Det kan tenkes at elev 1 ser på matematikk som kun tall og matematiske symboler, eller i det minste at en visuell matematikk ikke er nøyaktig. Slik kan det virke som visuelle metoder ikke er godkjent som matematisk bevis i denne elevgruppen. Kanskje er det derfor metoden blir avskrevet selv om den gav et omtrentlig riktig svar (linje 35). På grunn av motstanden fra de andre elevene i gruppen, kan elev 2 ha tilegnet seg et distansert forhold til metoden sin, noe som også kan ha ført til en mer forhastet og ufullstendig forklaring av metoden (linje 110). Eleven bruker måling i sin metode, men utover dette vet vi ikke hvordan han regner seg frem til svaret. Vår tolkning av episoden er at eleven er kreativ i sin fremgangsmåte (Lithner, 2008), ettersom eleven så vidt vi kan se ikke bruker kjente algoritmer for å finne svaret. Metoden eleven faktisk brukte kan ha vært formlikhet. En av grunnene til at metoden til elev 2 ikke får innpass i gruppen, kan være at elev 1 allerede har kommet frem til algoritmen som vil gi dem svaret. I dette tilfellet stilles KMR opp mot AR, og AR tilsidesetter KMR.

4.2.3 Forklare: episode 3

I denne sekvensen arbeider gruppe 2 med oppgave 1. Den omhandler diskusjon med elev 5 og 6 hvor de forklarer sine fremgangsmåter.

> **123- Elev 5:** "Ja men det e vel lettere å ta notater ja. Drageseilet på båten flyr 150 meter over båten, der er vindstyrken 150 og 25 prosent sterkere enn det er nede på skipsdekket, hvilken styrke blåser vinden i seilet når vindstyrken blir målt til 24 kilometer i timen på skipsdekket. Da er det jo bare å gange 24 gange 0,25 er det vel… Fordi det er jo det samme som, er ikke det det samme som 25 prosent? Ja".
> **124- Elev 6:** "Kan vel bare finne ut…"
> **125- Elev 5:** "Eller? nei".
> **126- Elev 6:** "Finne ut hva en fjerdedel er?".
> **127- Elev 5:** "Vent... Blåser sterkere så da må vi gange det med 1,25, ja, så da får vi jo 25 prosent mere enn 24 kilometer i timen. Da kan vi jo bruke kalkulator… Gange… komma 25 er lik 30 kilometer i timen".
> **129- Elev 6 :** "Ja fordi at vi kunne jo bare tatt 24 delt på 4 som blir 6, og så plusset på 6 slik at det blir 30".
> **130- Elev 5:** "Ja det og. Men vi har jo også lært at 25 prosent er det samme som 25 hundredeler som i brøk, kan jo skrive det, 25 hundre og det kan vi også gjøre til desimaltall som er 0,25, og fordi det er allerede, vi skal allerede ha den der en gang, putte vi bare 1 foran der, og da får vi 25 % mer… Og da er det 30 kilometer i timen…
> Hva må lengden på tauet til drageseilet omtrentlig være for at drageseilet skal dra skipet i en vinkel av 25 grader og være 150 meter".

Elev 5 og 6 forklarer hver sin fremgangsmåte. Elevene diskuterer først hvordan de kan finne svaret. De har en felles forståelse over oppgaven, men de har litt ulike metoder. Elev 5 tenker seg frem til et regnestykke hvor han bruker tallet 24 ganger 1,25, og elev 6 bruker tallet 24 og finner det tallet som skal adderes for å komme frem til svaret. Begge kommer frem til svaret 30, og metoden er grovt sett den samme, nemlig å legge på 25% av 24 sammen med 24. Elev 5 sier: "Da er det jo bare å gange 24 gange 0,25 er det vel… Fordi det er jo det samme som, er ikke det det samme som 25 prosent? Ja" (linje 123). Dette kan klassifiseres som kjent AR, fordi eleven gjenkjenner at han finner løsningen ved å gjøre denne prosedyren (Lithner, 2008). Eleven måtte i tillegg ha lagt på 24, men det identifiserer han straks (linje 127). I likhet nevner elev 6: "Ja fordi at vi kunne jo bare tatt 24 delt på 4 som blir 6, og så plusset på 6 slik at det blir 30" (linje 129). Begge disse metodene kan påpekes å ha kjennetegn av AR. Videre tolker vi at elevene har forståelse for sine matematiske utsagn, det er ikke den algoritmiske utregningen som gjør dem sikre på svaret. Derimot er det resonnering og drøfting rundt de matematiske egenskapene som bekrefter deres påstand i henhold til KMR (Lithner, 2008). Oppsummert kan vi si at løsningene har kjennetegn av både AR og KMR. Diskusjonen oppfyller også (Stylianides, 2007b) kriterier for at et argument skal regnes som bevis. Hvorav elevene bruker matematiske utsagn som er kjent og sanne for gruppen, videre er resonneringen forståelig og til slutt er kommunikasjon og språk innenfor en konseptuell rekkevidde for gruppen. Elevene ser også en sammenheng mellom de ulike fremgangsmåtene de bruker.

4.2.4 Forklare: episode 4

I denne episoden jobber gruppe 2 med å finne en løsning på oppgave 2. Denne sekvensen havner i kategoriene forklare og verifisere.

> **134- Elev 5:** "Hva må lengden på tauet være på 100 meter... Da må vi jo finne ut hvis, det skal være 45 grader, da er det jo en som det er her (peker på arket), da er det en rettvinklet trekant".
> **135- Elev 4:** "De har like lange sider … Ja".
> **136- Elev 6:** "Ja".
> **137- Elev 5:** "Ja, og da er jo de her to sidene like lange, må dem jo være da for at det skal bli 45 sånn rett over, og da er det jo hva heter det, kan man bruke, hva gjør man igjen, ja 150 ganger 150, nei vi må finne den der" (peker på arket).
> **138- Elev 4:** "Ja det jeg mener som er problemet".
> **139- Elev 6:** "Det er jo som en trekant".
> **140- Elev 5:** "Ja".
> **141- Elev 4:** "Ja".
> **142- Elev 5:** "Og så må vi jo bruke den der, hva heter det pyragoras setning eller noe sånt?".

Elev 5 konkluder med at trekanten er rettvinklet (linje 134) Elev 4 svarer med å påstå at sidene på den rettvinklede trekanten er like lange (linje 135). Elev 6 sier seg tilsynelatende enig (linje 136). Elev 4 forklarer ikke sin påstand, men elev 5 argumenterer for denne påstanden i linje 137. Elev 5 argumenter for at sidene i trekanten må være like lange for at det siste hjørnet i trekanten skal kunne være 45 grader. Elev 5 bruker de matematiske premissene gitt i oppgaven for å underbygge hvorfor sidene er like lange. Dette er i tråd med Lithner (2008) et tydelig eksempel på KMR. Selv om identifisering av figuren og egenskaper ved den kan kjennetegnes imitativ resonnering, er argumentasjon basert på matematiske egenskaper kjennetegn på KMR. Vi kan ikke si noe om hvordan elev 4 har resonnert rundt påstanden om at sidene er like lange. Det er mulig at eleven ser at sidene er like lange på øyemål. En påstand uten et matematisk grunnlag kan minne om IR, fordi det ikke kommer frem noe om hvorfor påstanden er logisk eller sann. Påstanden til elev 4 kan tolkes som en formodning (Jeannotte & Kieran, 2017). Formodningen bidrar til videre diskusjon av påstanden, noe som tilsynelatende fører gruppen nærmere svaret. Videre i resonnering til elev 5 er det tydelig at han minnes Pytagoras teorem i det han sier: "da er det jo hva heter det, kan man bruke, hva gjør man igjen, ja 150 ganger 150, nei vi må finne den der" (linje 137). Her skifter resonnering raskt om fra kreativ til imitativ (Lithner, 2008). Verifiseringen i episoden er matematisk forankret i forklaringen til elev 5 "Ja, og da er jo de her to sidene like lange, må dem jo være da for at det skal bli 45 sånn rett over…" (linje 137). Vi vet ikke nøyaktig hva resonnementet er, men vi kan tolke at elev 5 er klar over at den siste vinkelen må være 45 grader. De andre kjente vinklene er 90 grader og 45 grader, da kan eleven vite at den siste vinkelen også må være 45 grader. Vinklene tilsier at figuren er en likebeint trekant, og slik vet eleven at sidene er like lange. Elev 4 er den eleven som først mener at sidene på trekanten er like lange. Samtidig har vi elev 6 som svarer "ja" (linje 136), uten å ha en konkret forklaring på hvorfor elev 4 mener at sidene er like lange. I dette tilfellet er det fullt mulig at alle elevene tenker det samme, altså at sidene er like lange, men at de ikke alle har en forklaring på hvorfor. Enigheten til Elev 6 (linje 136) kan også være ment som respons til elev 5 sin klassifisering av en rettvinklet trekant (linje 134).

4.2.5 Forklare: episode 5

Episoden inneholder kodene forklare, sosial verifisering og formodning. Den bygger på at elev 5 har funnet et svar på oppgave 3. Elev 4 og 6 er uenig i svaret, og en diskusjon oppstår. Vi har delt denne sekvensen opp i to deler: linje 211-227 og 228-241.

211- Elev 5: "Ja, men da bruke det, dem spare, så her mye spare dem... Peng, hvis dem bruke drageseilet hvert år".
212- Elev 6: "Vent på hvor mange år?".
213- Elev 5: "På hvor mange år?".
214- Elev 6: "Dem du sir at spare det her".
215- Elev 5: "Ja dem spare så mye (peker på arket) hvert år hvis dem bruke drageseil. Så mye peng…".
216- Elev 4: "Ja".
217- Elev 6: "Ja"
218- Elev 5: "På bensin, så da er det jo…".
219- Elev 4: "To år tror jeg".
220- Elev 5: "Da blir det, da kan vi jo bare ta kor mye peng vent, hvor mye kosta den? 2,5".
221- Elev 4: "2,5 mill".
222- Elev 5: "2,5 og så gange vi jo bare, 2,5 millioner og så dele vi det på 294000, som er da 8,5 år, åtte og et halvt år".
223- Elev 6: "Åtte og et halvt år, okei".
224- Elev 5: "Hvis det gir mening".
225- Elev 4: "Ikke så mye...".
226- Elev 6: "Kan si det".
227- Elev 4 og 5: "Ja".

Elev 5 bygger svaret sitt opp med matematisk forankring (linje 215, 222). Han har funnet ut hvor mye penger de vil spare på diesel i året (linje 215). Videre virker det som om gruppen er enig i dette (linje 216 og 217). Det kan være verdt å nevne at eleven ikke kommuniserer tallet muntlig, noe som kan ha påvirket kvaliteten av kommunikasjonen. Med dette er det mulig at elev 4 og 6 ikke har fått med seg hvor mye penger det spares hvert år. Dette kan svekke sammenhengen for resonnementet som presenteres (Stylianides 2007b). Elev 5 oversetter her en reel situasjon til en matematisk representasjon og manipulerer deretter disse for å komme frem til et svar. Denne prosessen er en abstraksjon (Hana, 2014), hvor eleven matematiserer et problem. Elev 4 har en klar formodning om at svaret blir 2 år (linje 219). Når elev 5 presenterer svaret er det tydelig at både elev 4 og 6 ikke henger med. Verifiseringen i sekvensen starter med dette når elev 5 spør de andre elevene om svaret gir mening (linje 224). Elev 6 aksepterer delvis svaret til elev 5 (linje 223 og 226). Men Elev 4 er klar på at dette ikke gir mening for han (linje 225). Meningene utdypes ikke matematisk, og fornektelsen av svaret blir til dels sosialt i form av at det er to mot en. I denne sekvensen har resonneringen til elev 5 kjennetegn av AR (Lithner, 2008). Elev 5 presenterer en algoritmisk prosedyre som angivelig vil gi dem svaret, (linje 222) "... 2,5 millioner og så deler vi det på 294 000, som er da 8,5 år, åtte og et halvt år". Denne delen av resonnering er tydelig kjent AR, hvor eleven bruker kostnaden 2 500 000 delt på besparelsen per år 294 000, for å finne ut hvor mange år det tar å spare inn 2 500 000. I dette tilfellet er ikke den presenterte algoritmiske metoden overbevisende for de andre elevene. Dette kan tenkes å være påvirket av mulig kommunikasjonssvikt, om at tallet 294 000 er hvor mye de sparer hvert år. Representasjonen av argumentet (Stylianides 2007a) er med dette ikke tilfredsstillende for at argumentet skal få status som bevis. Måten elev 4 og 6 avviser svaret til elev 5 kan sees på som avgrenset AR, fordi elevene i dette øyeblikk ikke er kjent med den algoritmiske prosedyren som er brukt. Et av kjennetegnene til avgrenset AR er nettopp at elevene kan avvise et svar uten analyse og begrunnelse.

228- Elev 4: "Jeg står fortsatt og tenker først 2-3 år".
229- Elev 6: "Jeg tenkte også 2 år".
230- Elev 4: Jeg tenkte 2 år fordi... men jeg tror ikke det blir nok
231- Elev 5: "Fordi jeg tenker jo sånn at, hva heter det? Først ganget jeg jo bare null komma…".
232- Elev 6: "Dem slipper jo å bruke så mye peng på…".
233- Elev 5: "Ja men det er derfor man først tar, helst først så tar man jo 0,42 ganger…".
234- Elev 6: "8,5 år er jo helt ulogisk".
235- Elev 5: "Syns du?".
236- Elev 6: "Ja".
237- Elev 4: "Ja veldig".
238- Elev 6: "Ja veldig".
239- Elev 5: "Er du sikker?".
240- Elev 4: "Det er liksom kostnaden, den er 20 prosent".
241- Elev 6: "Jeg tenkte sånn 2 år".

I fortsettelsen av sekvensen påpeker elev 4 at han tenker svaret ligger rundt 2-3 år (linje 228), og elev 6 har noe av samme tanke (linje 229). Formodningen til elev 4 danner grunnlaget for den fremtredende diskusjonen, slik Jeannotte & Kieran (2017) beskriver formodningens potensial og funksjon i diskursen. I denne delen av diskusjonen prøver elev 5 tilsynelatende å forklare hvorfor metoden og svaret er rett. Samtidig prøver elev 4 og 6 å forklare hvorfor svaret bør ligge nærmere 2 år. Argumentasjonen deres synes ikke å være av matematisk art, videre tror vi resonnering som ikke kommer tydelig frem fra elev 4 og 6 kan ha matematisk forankring. Dette er i hovedsak fordi elev 4 og 6 har en overbevisning om at svaret bør være noe et stykke unna det elev 5 har presentert. Elev 4 har et utsagn som tyder på en mulig misoppfatning: "Det er liksom kostnaden, den er 20 prosent" (linje 240). Her sier elev 4 at kostnaden er 20 prosent, i stedet for at besparelsen er 20 prosent. Det vil si at de sparer 80 prosent på drivstoff hvert år, noe som ville resultere i at de sparer 1 176 000 per år. På denne måten ville de ha spart inn seilet som koster 2 500 000 på cirka 2,1 år. Slik er det tenkelig at formodningen til elev 4 er matematisk forankret, men basert på en misoppfatning. Elev 4 styrker kanskje elev 6 sin overbevisning om at svaret er omtrent 2 år, ettersom elev 6 til å begynne med var delvis enig med elev 5 om svaret (linje 223 og 226). Det kan også tenkes at elev 4 har blitt støttet opp av elev 6, ettersom elev 6 i ettertid sier seg enig med elev 4 (linje 234 og 241).

4.2.6 Forklare: episode 6

Dette er fortsettelsen på en av de lengre diskusjonene gruppe 2 har under arbeidet med oppgave 3. Både elev 4 og 6 har en formodning om at svaret de leter etter kan være 2 år, hvorimot elev 5 er overbevist over at hans "8,5 år" forslag er korrekt.

242- Elev 5: "2 år? Tingen er, du må jo se dem kan spare opptil 20 prosent på dieselforbruket".
243- Elev 4: "Ja".
244- Elev 5: "Og så mye betaler dem hver liter".
245- Elev 6: "mhm".
246- Elev 5: "Men da tar du jo bare å fjerne 20 prosent av det der" (peker på arket).
247- Elev 6: "Ja".
248- Elev 5: "Ja, fjerner 20 prosent av det der som var, hva var det igjen?".
(Elev 4 og 5 gjør egne beregninger og tenker høyt hver for seg)
249- Elev 5: "Det kan være at jeg har regnet litt feil…".
250- Elev 4: "300 000 første året negativt og så".
251- Elev 5: "Så mye bruker dem, hvis dem bruker drageseil så spare dem så mye penger per liter. Og da sparer dem, hvor mye sa du dem sparte?".
252- Elev 4: " 3 hundretusen fordi hvis man tar kostnadene så blir det jo minus 20 prosent på dieselet, som det blir hvert år, og 2 million og 8 hundretusen og så har vi selve kostnaden for drageseilet, og det blir jo 3 hundretusen, 3 hundretusen som er i negativt, som liksom blir igjen. Og da er det bare å gjøre…".
253- Elev 5: "Så mye peng, dem bruke så mye peng".
254- Elev 4: "Det blir 300 000 hvert år".
256- Elev 5: "Ja dem spare, ja da minus… Som er, da spare dem 2900 nei, 294 000, ja spare dem".
257- Elev 4: "Ja så ca. nesten 300 000 ja. Og da når vi tar det igjen, hvor mange år det tar for å…".
(Elev 5 tenker høyt)
258- Elev 4: "Hva sa du?".
259- Elev 5: "Ja det blir fortsatt 8,5 år".
260- Elev 4: "Ja".
261- Elev 5: "Fordi du må jo dele det du får her (peker på arket). Det du får her som er hvor mye du sparer på diesel hvert år, det må du jo dele på det der. Når du deler det på det, så får du 8,5".
262- Elev 6: "Så du er sikker på det?".
263- Elev 5: "Ganske sikker".
264- Elev 6: "Okei".
265- Elev 5: "8 og et halvt år er rett".

266- Elev 4: “Ja det gir mening, det gir faktisk veldig mening det her”.

Her er det tydelig at Elev 5 forsøker å argumentere for sitt svar, og at han tilsynelatende gjør dette ved å føre dem gjennom samme sekvens som han selv arbeidet gjennom. Selve diskusjonen som skapes her, er et resultat av formodningen fra elev 4 som ble presentert i delkapittel 4.2.5. I linje 242 presenteres begynnelsen av et argument for å stille spørsmål til “2 år” som en mulig løsning. Han går deretter steg for steg gjennom prosessen sammen med elev 4 og ender opp med et argument for eget svar (linje 261). Ved å gå steg for steg har elev 4 og 5 identifisert de relevante matematiske faktorene for løsningen til oppgaven: 20 prosent avslag, prisen på seilet, og dieselkostnaden for et år. Disse brukes deretter i linje 261 når eleven forklarer at seilkostnaden må divideres på antall zeds spart på et år. Argumentet blir på denne måten matematisk forankret i de tidligere nevnte relevante faktorene. Elev 5 vil på dermed ha kjennetegn av KMR i sitt arbeid (Lithner, 2008). Som følge av å bli utfordret på konklusjon sin, blir elev 5 tvunget til å analysere arbeidet sitt ved å utføre beregningene på nytt. På denne måten får han til dels verifisert svaret og kan ha ledet han til å bli sikrere på konklusjonen.

Etterfulgt av hovedargumentet fra elev 5, spør elev 6 om han er sikker i sitt resonnement. Elev 6 har ikke vært deltakende i diskusjonen rundt oppgaven i denne fasen, og spør om elev 5 er sikker i stedet for å bekrefte det selv. Faktumet at eleven søker overbevisning om at svaret er korrekt, indikerer at det kan være problem ved uttrykksformen for argumentet. Dette tyder på at det kan være et sprik i et av de grunnleggende kriteriene ved matematiske argument (Stylianides 2007b). Presentasjonen av argumentet må ta i bruk kjente eller forståelige uttrykksformer slik at argumentet kan forstås av alle. Det kan være flere årsaker bak et slikt sprik, og det kan identifiseres noen i dette tilfellet. I linje 261 ser vi at elevens argument formidles ved at han forteller stegene i regneoperasjonen. I dette tilfellet blir argumentet presentert algoritmisk ved at eleven gjengir fremgangsmåten som et regnestykke som medelevene må løse. Forståelsen til elev 5 har trekk av KMR, men representasjonen av denne forståelsen har kjennetegn av AR (Lithner 2015). Dette kan ha påvirket argumentets logiske og matematiske forankring. Selv om resonneringsprosessen som har ledet opp til argumentet er kreativ, fører ikke dette nødvendigvis til kreative argument. Videre kan måten situasjonen utspiller seg på oppfattes som guidet AR hvor elev 5 gir instruksjoner for løsningen. I slike tilfeller er svaret riktig nettopp fordi algoritmen er det. Situasjonen blir dermed en hvor elev 5 resonnerer kreativt på en matematisk måte, samtidig som han skaper et ugyldig argument ettersom det ikke er forståelig nok for alle partene i fellesskapet.

For elev 4 virker det som om det skapes større forståelse for hvorfor 8,5 er riktig svar. Gjennom episoden har elev 4 vært langt mer matematisk involvert enn hva elev 6 var. Vi kan se dette gjentatte ganger og det skapes en form for diskusjon rundt temaet. Elev 5 er i en mer fremtredende rolle, men de er begge involverte i resonneringen. Dette er hovedforskjellen mellom elev 4 og 6 i denne situasjonen, og kan være den fundamentale grunnen til at elev 4 ser ut til å få større utbytte som følger. Sett fra et sosiokulturelt perspektiv kan dynamikken mellom elev 4 og 5 tolkes som en form for stillasbygging. Elev 5, som har arbeidet kreativt og resonnert seg frem til et sannsynlig svar, prøver å hjelpe sin medelev mot samme konklusjon (Lyngsnes & Rismark, 2015). Dette vil ikke bli et perfekt eksempel ettersom det i teorien er ment at den lærende kun skal bli oppmuntret til å selv finne løsninger. Her blir den hjelpende i en mer aktiv rolle, hvor han ikke kun peker i riktig retning, men leder den lærende gjennom hele situasjonen. Grunnlaget for å kalle dette for stillasbygging er dermed noe svekket, men det kan være en av flere faktorer som er skyldig i ulikhetene bak hvordan elev 4 og 6 går ut av denne fasen i gruppearbeidet. Den sosiale samhandlingen som skapes her, er med på å styrke evnen deres til å resonnere rundt det relevante materialet. De får begge utnyttet språket som verktøy, og blir ikke begrenset på denne måten. Gjennom bruken av språket som verktøy, har vi sett at elev 4 går fra en formodning om at svaret er rundt 2 år, til linje 266 hvor han konstaterer at medelevens argument er forståelig: "Ja det gir mening, det gir faktisk veldig mening det her".

Vi kan se på denne episoden i sammenheng med figur 2.1 kapittel 2.4. Her har elevene startet oppgaveløsning i ulike retninger og endt opp med to ulike konklusjoner. Prosessen hvor elev 4 og 6 utfordrer løsningen til elev 5 resulterer i at elev 4 og 6 endrer retning og får samme konklusjon som elev 5. Det er noe ved diskusjonen som gjør at elevene endrer retning i oppgaveløsning deres. Når Elev 5 utfordres til å utdype tankegangen sin og metoden for løsningen, vil prosessen kunne styrke læringen hans. Når han blir plassert i denne stillingen må han gå nøye gjennom egne tanker, og vil ha mulighet for å komme ut av diskusjonen med mer faglig styrke enn før. En av styrkene ved at elev 5 tok i bruk KMR er at han har kontroll over sine resonnement. Det gir mulighet for å analysere metoden på en grundig måte, noe som sjeldent er mulig ved bruk av IR. I tilfeller hvor IR brukes har eleven kun mulighet til å vurdere om selve algoritmen er korrekt. Eleven vil vanligvis ikke være i stand til å analysere de ulike prosedyrene algoritmen gjennomfører (Lithner, 2008).

4.2.7 Forklare: episode 7

Gruppe 2 oppsummerer oppgavene de har gjennomført. Når de presenterer oppgave 3 fortsetter diskusjonen fra tidligere (kapittel 2.4.6).

> **277- Elev 4:** "8,5".
> **278- Elev 5:** "Åtte og et halvt år. Og vi er enig i hva det er?".
> **279- Elev 4:** "Jeg vet ikke, jeg er litt usikker på den siste men".
> **280- Elev 6:** "Jeg også".
> **281- Elev 5:** "På den siste. Den var litt sånn her".
> **282- Elev 4:** "Den var litt litt sånn forvirrende".
> **283- Elev 5**: "Ja. Men jeg tror nå det bare var å først finne ut, ta å gange hvor mye liter de bruker hvert år på diesel, eller hvor mye penger de bruker".
> **284- Elev 4:** "Først finne ut hvor mye de bruker på diesel, og hvor mye de bruker på".
> **285- Elev 5:** "ja, uten det der drageseilet, og så finne ut hvor mye de bruker med drageseilet".
> **286- Elev 4:** "Ja"
> **287- Elev 5:** "Og så bare ta å, ta det lille som er i veien nedover der. Og det er jo 2 9 4 da".
> **288- Elev 4:** "294".
> **289- Elev 5:** "Ja, og så tar du bare 294 tusen, og deler det på, eller, ja, ta 2,5 million og deler det på 294 tusen, og da får du 8,5".
> **290- Elev 4:** "*Ja*, det gir mening".
> **291- Elev 5:** "Da blir det åtte og et halvt år...ja".
> **292- Elev 6:** "Ja".

Elev 4 og 6 er fortsatt "litt usikker" på om svaret faktisk er korrekt. Det betyr ikke nødvendigvis at de mener at svaret er feil. Det er tydelig at elev 5 som tidligere, fortsatt er sikker i sin sak. Videre går elev 5 gjennom metoden sammen med elev 4. Konklusjonen blir den samme som i kapittel 4.2.6. Elev 5 kommer frem til 8,5 år som svar, og elev 4 synes at presentasjonen og svaret gir mening. Elev 6 sier seg også enig i dette tilfellet, men som tidligere er det vanskelig å si noe om hans forståelse av metoden. Elev 4 har i forrige episode (kapittel 4.2.6) sagt at forklaringen og svaret til elev 5 gir mening. Her kan det tenkes at elev 4 ikke har den forståelsen av argumentet som han gir uttrykk for, grunnet de tidligere hendelsene hvor han konstaterte sin forståelse, selv om han var usikker. At elev 4 blir overbevist om at svaret er rett og fremdeles er usikker på svaret, kan tyde på at han kun overbevises av argumentet, men mangler forståelse for det. Slik har argumentet kanskje bare evnen til å overbevise i henhold til argumentets kvaliteter (Lithner, 2008). Det kan også tenkes at mangel på svaralternativer er det som hindrer en fullstendig trygghet til svaret, ettersom oppgave 1 og 2 hadde svaralternativ som kunne bekrefte svaret deres. Det er tydelig at gruppen sliter med å verifisere svaret i fellesskap. De to tidligere oppgavene inneholdt ingen tydelige tegn på at noen av elevene ikke var trygge på svarene gruppen kom frem til.

4.2.8 Forklare: episode 8

I følgende utdrag gjør elev 5 og 6 forsøk på å forklare hvordan de løste oppgave 2. Vi identifiserte kodene "forklare", "sosial verifisering" og "matematisk verifisering" i episoden. I motsetning til tidligere er denne delen av datamaterialet i utspørringsfasen. Uttalelsene fra elevene vil derfor ikke være like naturlige ettersom de ikke er resultat av elevgruppens egen diskusjon, men som følger av spørsmål fra en av observatørene.

> **314- Elev 6**: "Ja for først når jeg regnet ut så fikk jeg sånn 218, så tenkte jeg bare, jeg tar bare 212 fordi det var nærmest, også skulle jeg bare høre hva de tenkte, også når de også fikk så, rundt 212 komma et eller annet, så".
> **315- Observatør 1**:" Men hvordan kom du frem til 218?".
> **316- Elev 6**: "Jeg vet ikke".
> **317- Observatør 1**: "Du må jo har regnet et eller annet?".
> **318- Elev 6**: "Ja, jeg må jo det, men jeg vet ikke hva jeg regnet".

Elev 6 forklarer tankegangen deres rundt hvordan de kom frem til et endelig svar på oppgaven. Her ser vi blant annet at svaralternativene fungerer som bekreftelse for svaret de har funnet. Videre i forklaringen ser vi et sosialt aspekt i bekreftelsen når eleven forteller at han sammenlignet med de andre elevenes svar (Linje 314). Selv om det kan være positivt å sammenligne svar med andre, fører det i dette tilfellet til argumentasjon som ikke inneholder matematisk forankring. Det er ved denne sammenligningen vi finner elevens verifisering. Eleven forklarer at han støttet seg på medelevenes svar, ved uttalelsen "også fikk så, rundt 212 komma et eller annet" (linje 314). Dette viser til en mulig imitativ form for verifisering ettersom det er tilfredsstillende for eleven at de andres hypoteser er likt sin egen. Verifiseringen blir her delvis sosial ved at eleven bruker andres svar som et argument for sitt eget. Å bygge argumentet delvis på dens nærhet til et av alternativet kan være upålitelig ettersom det går ut ifra at alternativet er rett. Eksempelvis kan elevene utføre beregninger som resulterer i gale konklusjoner, men som samtidig befinner seg innenfor akseptert rekkevidde til et av alternativene. Svaret kan da bli styrket i elevens syn, selv om argumentet for dette ikke er gyldig. I dette tilfellet viste det seg at alternativet som eleven støttet seg på var korrekt, men det viser til at der er en manglende matematisk forankring i tankegangen.

> **319- Elev 5**: "Jeg tok bare å husket hva "læreren vår" hadde lært oss. Og så tok jeg først å fant de kvadratene som er utenfor trekanten da, som er 150m på alle sidene da, tok jeg bare 150 ganger 150. Jeg vet at begge de der sidene er like lange fordi det er jo en rettvinklet trekant, også tok jeg bare...hva fikk jeg...ja, det jeg fikk som svar, som var 150 ganger 150, tok jeg å plus- ganget det ganger 2. Så tok jeg kvadratroten av det fordi de to sidene til sammen er like mye som den der hypotenusen da. Hvor mye den er, ganger seg selv".
> **320- Observatør 2**: "Og du ganget det med 2 fordi?".
> **321- Elev 5**: "Fordi, ja 150 ganger 2 fordi jeg må finne først kvadratroten av den der, den der firkanten som er på siden der. For så å finne hypotenusen, og så har jeg jo to som er like mye, så da ganget jeg bare de to".

I linje 319 blir det gitt en lengre forklaring på hvordan elev 5 tenkte når han løste oppgaven. Det kan fastslås raskt at dette tyder på en klar bruk av kjent AR ettersom han nevner at han husket algoritmen fra det læreren tidligere hadde undervist om (Lithner 2008).

4.2.9 Forklare: episode 9

I likhet med forrige episode inneholder denne utspørring av elevene. Elev 4 har vært inne på en alternativ løsningsmetode for oppgave 2.

> **342- Elev 4**: "Jeg gikk litt annerledes, men jeg fikk, jeg ble ikke ferdig helt med den".
> **343- Observatør 1:** "Hvordan valgte du å gjøre det?".
> **345- Elev 4:** "Jeg gikk en helt annen metode så…".
> **346- Observatør 1:** "Bare fortell".
> **347- Elev 4:** "nei, for den var jo helt av, nesten av".
> **348- Observatør 1:** "Ja det gjør ingenting".
> **349- Elev 4:** "Den havnet i midten av de der to".
> **350- Observatør 1:** "Ingenting galt med det".
> **351- Elev 4:** "Med en gang jeg fikk høyden der så målte jeg, ut egentlig alt av, alt jeg visste. Hva var det jeg gjorde igjen... nå må jeg tenke".
> **352- Observatør 1:** "Hva målte du ut da?".
> **353- Elev 4:** "Jeg målte ut, først visste jeg hva de her nede var, ikke sant? så prøvde jeg å finne disse her nede, de blir ca. nesten sånn 70, 60 prosent mindre enn den. brukte den faktaen på å beregne meg opp til det. det går jo liksom i den skalaen der. så fikk jeg, nermeste jeg var er 238, og det laveste var 242".

Ideen til elev 4 kommer til syne i linje 353. Ved å måle figurens lengder finner elev 4 ut hva målene er i forhold til hverandre. Dette forsøker han å overføre til de aktuelle målene for oppgaven. Slik vi tolker det er elev 4 på jakt etter et standardisert forholdstall mellom katet og hypotenus i en likebeint trekant. Dette er faktisk mulig å finne, men eleven klarte ikke å fullføre metoden. Denne fremgangsmåten ville vært KR ifølge Lithner (2008). Eleven resonnerer seg frem til en ny mulig måte å finne svaret på. Her bruker han logiske slutninger om at det kan være et standard forhold mellom katet og hypotenus, noe som kan være begrunnet ved at figuren vil være formlik uansett størrelse. Eleven forsøker å bruke sin kunnskap og formodning til å matematisk komme frem til et svar. Her kan det antydes at svaralternativene vil brukes som bekreftelse eller avkreftelse av svarene han kommer frem til.

4.3 Verifisere

4.3.1 Verifisere: episode 1

Arbeidet med oppgave 1 gikk vesentlig raskt for gruppe 1. Utdraget under er det første som blir sagt av elevene etter at de har startet å arbeide. Gjennom dette eksempelet vises det hvordan denne gruppen går frem når de verifiserer svarene som kommer frem i løpet av arbeidet.

1- Elev 2: “Nittifem prosent av verdens handel blir flyttet til sjøs omtrent 50 tusen tankskip, bulkskip og containerskip. De fleste av de skipene de bruker diesel.”
2- Elev 1: “Oppgave en ka… 150 meter over båten så er vindstyrken 25 prosent sterkere enn den er nede på skipsdekket.”
3- Elev 2: “Mhm”
4- Elev 1: “25 prosent av“
5- Elev 1 og 2: “24“
6- Elev 1: “er 6 prosent. 24 pluss”
7- Elev 1 og 2: “6 er 30”
8- Elev 1: “Den er vi enig om?” (Ser på elev 3)
9- Elev 3: “Ja”

Elev 1 og 2 står for den matematiske diskusjonen i denne sekvensen. Når svaret er identifisert, spør elev 1: “den er vi enig om?”. Selv om det er stilt som et spørsmål, kan måten det blir sagt på heller tolkes som at elev 1 har bestemt seg for at dette er det korrekte svaret. Eller dette kan være en formodning (Jeannotte og Kieran, 2017) som inviterer de andre elevene til diskusjon. Verifiseringen som finner sted, blir likevel elev 3 sitt bekreftende “ja” på spørsmålet om de er enige i svaret. Denne replikken kan være en bekreftelse for at elev 3 har forståelse for tankegangen bak svaret. At elev 2 og 3 ikke stiller spørsmål til elev 1 kan være et tegn på at de ser på oppgaven som enkel nok til at det ikke er behov for å bekrefte påstanden. Replikken kan også være et tegn på at eleven ikke har forståelse for oppgaven. Et simpelt “ja” kan være en måte for elev 3 å unngå videre diskusjon rundt oppgaven, uten å avsløre mangel på forståelse.

Hva som kjennetegner elevenes argumentasjon i dette tilfellet, kan være vanskelig å identifisere ettersom elev 1 ikke blir utfordret på det svaret han kommer med. Å se argumentasjonen og resonnering i lys av Lithners (2008) rammeverk kan derfor virke noe umulig. Der er derimot mulig å se på elevens fremgangsmåte som noe innenfor kjent AR ettersom metoden for beregning av prosent er en forhåndsbestemt prosedyre.

Elev 1 har en tilsynelatende konkluderende ytring (linje 8), hvor han antyder at løsningen er korrekt. Elev 2 og 3 kan føle et press for å følge elev 1 sin påstand, selv om de ikke nødvendigvis er enig i påstanden. Det sosiale aspektet ved denne episoden kan være en av faktorene som er skyldig i å svekke kvaliteten av resonneringen som kunne funnet sted. Språk er et av de viktigste psykologiske redskapene, og vil være med på å styrke elevenes resonneringsprosess hvis det brukes i sosial sammenheng. Når avgjørelsen tas uten innspill fra medelevene, tar gruppen avstand fra den sosiale dimensjonen og dermed svekkes deres mulighet for resonnering (Hinna et al. 2011).

4.3.2 Verifisere: episode 2

Gjennom denne sekvensen gjør gruppe 1 seg ferdig med oppgave 2 ved å fastslå et av de svaralternativene de kom frem til som riktig, fordi det er i overensstemmelse med et av svaralternativene som er oppgitt for oppgaven.

27- Elev 1: "Ka du sa?".
28- Elev 2: "212".
29- Elev 3: "Står 212".
30- Elev 1: "212".
31- Elev 2: "Jeg fikk 210 fordi".
32- Elev 1: "Åja den står jo A, B og C der, jeg tenkte ikke på det".
33- Elev 2: "Ja".
34- Elev 1: "Ja nei svaret er B, for at her når vi legger inn regnestykket så er det 212 punktum 132".
35- Elev 2: "Jeg fikk 210, men så var det jo sikkert noen centimeter jeg glemte".
36- Elev 3: "Ja det er jo noe".

Her ser vi at elev 1 og 2 har kommet frem til litt forskjellige svar på oppgave 2, og at elev 1 trekker konklusjonen om alternativ B må være den korrekte, fordi det stemmer med svaret han fant ved beregning. Elevene får på denne måten to argumenter for at svaret de har funnet er korrekt. Det første er at de har kommet frem til tallet "212" ved regning. Det andre argumentet kommer av at dette tallet er et av svaralternativene presentert i oppgaven. Disse to argumentene kan på denne måten sies å danne beviset for elevenes svar. Elev 1 fastslår ikke at disse argumentene danner et bevis eksplisitt, men i denne situasjonen fungerer de som nettopp dette. Dette kan ses på som et delvis gyldig bevis (Stylianides, 2007b) med tanke på at medelevene aksepterer argumentene som gjeldende og forstår tankegangen nok til å ikke stille seg imot argumentene.

4.3.3 Verifisere: episode 3

Episoden under viser sluttfasen av arbeidet med oppgave 3 fra gruppe 1. Elev 1 presenterer her sitt løsningsforslag, og gruppen prøver å utføre en vurdering om svaret deres er riktig.

90- Elev 1: "to og en halv million, det var *dyrt* seil. Og deler det på hvor mye det sparer… 8 punkt 5 år. Det virker mer… åtte og et halvt… 8,5034013, det er så mange år det tar. Og det virker forsåvidt ganske riktig".
91- Elev 2: "294000 så vi kan gange det med 8,5… 2,499 million".
92- Elev 1: "Ja".
93- Elev 3: "Ja det blir jo".
94- Elev 2: "Men 1000 under".
95- Elev 1: "Ja det er jo bare fordi, hva, du ikke tok de der desimalene".
96- Elev 2 og 3: "Ja".
97- Elev 3: "Hvis man tar desimaltall så blir" (peker)

Elev 1 går her gjennom hvordan han kom frem til svaret "8,5" i oppgave 3, etterfulgt av elev 2 som forsøker å verifisere dette svaret ved å utføre regneoperasjonen i motsatt retning. Dette er en indikasjon på relasjonell forståelse (Skemp, 1978). Tankegangen ligger i at 8,5 må være riktig svar ettersom 294000 * 8,5 ≈ 2,5 million. Elev 2 konstaterer en unøyaktighet med svaret (linje 94). Elev 1 legger til at svaret blir rett ved uttalelsen "Ja det er jo bare fordi, hva, du ikke tok de der desimalene" (linje 95). Argumentet aksepteres av fellesskapet og gruppen har med dette løst oppgave 3. I dette tilfellet er verifiseringsmetoden matematisk forankret i egenskapene ved de involverte delene i oppgaven. Elev 2 bruker informasjonen om hvor mye de sparer hvert år og multipliserer besparelsen (294 000 per år) med antall år (8,5) som det angivelig tar for dem å spare inn 2,5 millioner (linje 91). Dette bekrefter at deres utregninger og tankegang mest sannsynlig stemmer. Her kan vi se et tydelig skille mellom denne formen for verifisering, og den vist i eksempelet i delkapittel 4.3.2. Bekreftelsen for svaret var da kun forankret i et av de fire mulige svaralternativene, i motsetning til i dette tilfellet. Denne tankegangen kan tyde på delvis KMR fra elev 2. Han følger ingen forhåndsbestemt prosedyre når han skal validere svaret, og det er heller ingen bestemt algoritme som blir tatt i bruk (Lithner, 2008, 2015). En viktig klargjøring er at selve verifiseringen kan være memorert resonnering (MR), AR, eller KMR, uavhengig av hva som ligger bak selve metoden for elevenes løsningsforslag. Selv om det var tegn på KMR ved løsningsmetoden fra gruppe 1 for denne oppgaven som vist i delkapittel 4.2.1, ser vi her at det ikke nødvendigvis fører til en verifisering preget av samme resonneringsform. Gjennom linje 90 og 95 viser elev 1 oss at han har en relativ forståelse for hvordan avrunding av desimaltall kan ha effekt på den resulterende konklusjonen. I tillegg viser han til sin kjennskap for prosedyren for multiplisering. Vet vi at eleven til dels bygger sitt støtteargument i linje 95 på kjent AR. Han har identifisert prosessen og egenskapene ved multiplikasjon og avrunding til å trekke konklusjonen om at medelevens verifisering er gyldig. Både elev 2 og 3 anerkjenner støtteargumentet (linje 96) og det kan da ses på som gyldig og gjeldende (Stylianides 2007b).

4.3.4 Verifisere: episode 4

I sekvensen under forsøker gruppe 2 å forsvare løsningen de tidligere har kommet frem til. Under kodingsfasen identifiserte vi dette som en matematisk verifisering, men det er også fullt mulig å plassere den under koden sosial verifisering. I likhet med gruppe 1 tar elevene her i bruk svaralternativene for å sikre at svaret de har kommet frem til er gyldig, men de har også en sosial komponent når elevene benytter seg av sammenligninger med egne svar.

159- Elev 6: "Det er jo ikke den (peker på arket)".
160- Elev 5: "Nei".
161- Elev 6: "Det er jo ikke D eller A".
162- Elev 5: "Ja".

163- Elev 6: “Jeg fikk 212, et eller annet”.
164- Elev 5: “Ja komma 1, 3, 2”.
165- Elev 6: “Ja”.
166- Elev 5: “Ja men da er det jo”.
167- Elev 4: “Jaja”.
168- Elev 6: “Så bare runde det av til 212”.

Slik som tidligere i delkapittel 4.3.2, ser vi her at elevene bruker det svaret de har funnet til å avgrense de mulige riktige alternativene på oppgaven. Her våger ikke elevene i utgangspunktet å avskrive alternativ C (285m) som feil, mest sannsynlig fordi de ser på det som for nært svaret de fikk til å sikkert kunne avskrive det. Til tross for dette setter gruppen alternativ A (173m) til sides, selv om det i realiteten er mye nærmere svaret de har funnet. Igjen, dette kan skyldes at tallet 285 kan oppfattes som mye nærmere enn hva 173 er. Ved å forkaste alternativer på denne måten, vil den resonnerende ta i bruk avgrenset AR (Lithner, 2008) ettersom det ikke ligger noen form for validering bak valget som elevene har tatt. Dette gjelder da spesifikt valget av å utelukke Alternativ A, og ikke C. Avgrensningen av alternativet virker ikke til å skape noen synlige fremtidige problemer for gruppen i og med at de konkluderer med at de har klarlagt deres svar allerede.

4.4 Oppsummering

I dette delkapittel vil vi oppsummere de funnene vi ser på som relevante for vårt forskningsspørsmål. Memorert resonnering (MR) er den resonneringsformen som er minst tilstedeværende i studien. Gjennom analysen har vi ingen funn av MR. Det er identifisert noen få indikasjoner på avgrenset algoritmisk resonnering (AR). Der avgrenset AR finner sted er det kun kjennetegn av denne resonneringstypen og ikke tydelig bruk av den. Situasjonene som i hovedsak leder til avgrenset AR, er preget av mangel på memorert kunnskap rundt algoritmene som brukes. Gjennom analysen har vi kun registrert ett tilfelle av Guidet AR. Vi tolket situasjonen for å tilsynelatende inneholde guidet AR, ettersom en av elevene forsøkte å videreformidle sin forståelse til medelevene. Denne sekvensen bar likevel lite preg av guidet AR, fordi situasjonens hovedelement omhandlet kreativ matematisk forankret resonnering (KMR).

Vi har mange funn som inneholder kjent algoritmisk resonnering. Vi har registrert noen kjennetegn som gjentas når elevene tar i bruk kjent AR. Valideringen av argumentene er sjeldne eller fraværende. Den valideringen som finner sted omhandler også i mindre grad matematisk forankret verifisering. Denne sammenhengen finner vi også i tabell 4.1, hvor koder fra kategorien “algoritme” ikke sammenfaller med koden “matematisk verifisering”. Vi identifiserte kjent AR innenfor alle kategoriene, og det er gjennomgående under kategorien "algoritme". Kjent AR har som kjennetegn et relativt harmonisk samspill som i liten grad inneholder spørsmål og utfordringer til matematiske utsagn. Denne typen resonneringen foregår i hovedsak under elevenes arbeid med oppgave 1 og 2. Både gruppe 1 og 2 utnyttet seg av kjent AR når de brukte Pytagoras teorem for å løse oppgave 2.

I kategorien "forklare" finner vi flere funn som inneholder kreativ matematisk forankret resonnering blant elevene. Et av funnene våre er at det kun er ved sekvenser av KMR at vi ser matematisk forankret verifisering. Dette er en indikasjon på en sammenheng mellom KMR og bruk av matematisk verifisering. Dette mønsteret finner vi igjen ved at koden "matematisk verifisering" kun eksisterer alene eller sammen med kategorien "forklare" i tabell 4.1. Et av kjennetegnene med KMR i analysen er at samspillet mellom elevene blir mer dynamisk. Elevene deltar i større grad i diskusjon gjennom spørsmål og kritisk respons rundt matematiske utsagn. I analysen ser vi gjentatte ganger at elevene aksepterer uttalelser uten verifisering. Dette kan tyde på både sosiale og sosiomatematiske normer hvor verifikasjon og begrunnelser ikke er fremtredende. Gjennom analysen kom det frem at KMR var mest fremtredende under arbeidet med oppgave 3. Under forekomstene av KMR i de to elevgruppene, viste det seg at de var på individuelt plan. En variasjon mellom gruppe 1 og 2, er at gruppe 2 ikke diskuterer og vurderer de kreative resonnementene i like stor grad som gruppe 1. Vi ser at KMR oppstår ved at en elev har en individuell kreativ resonnering. Hvordan betydning dette fikk for samspillet, ble i stor grad påvirket av elevens evne til å formidle resonneringen, og medelevenes mottakelse av resonnementet. Vi har også funn av at den sosiale dimensjonen (Stylianides 2007a) kan stille sterkere enn KMR i noen situasjoner.

5 Diskusjon

Analysen vi har gjennomført har gitt oss innsikt i hvilke karakteristikker som kjennetegner to ulike elevgrupper sin argumentasjon i arbeid med matematikkoppgaver. Vi ser at elevene tar i bruk flere av Lithners (2008) resonneringsformer. Deres argumentasjon preges av resonnementer med både kreativ og imitativ art. Våre funn omhandler flere elementer vi anser som interessant og relevant for denne studien. Med dette har vi kommet frem til noen temaer vi ønsker å fremheve gjennom diskusjon. Vi vil først diskutere hvordan oppgaver påvirker elevenes argumentasjon. Deretter vil vi ta for oss hvilken rolle det sosiale aspektet har i studien. Videre gjør vi refleksjoner rundt imitativ og kreativ resonnering, før vi til slutt ser på noen implikasjoner vedrørende tabell 4.1.

5.1 Oppgavens betydning for elevenes argumentasjon

Et av funnene våre omhandler hvordan kjennetegne til elevenes argumentasjon varierer mellom de tre oppgavene de gjennomførte. Oppgavens rolle for elevenes samspill var tydelig, og de ulike oppgavene påvirket på ulikt vis. Valget av oppgaver var forventet å være en avgjørende faktor for datamaterialet vårt. I studien vår har vi vurdert hvilke oppgaver som kan bidra til å belyse problemstillingen vår. Vi begynte med å vurdere om vi skulle lage oppgaver selv eller finne tidligere brukte oppgaver. Vi vurderte hvilke elementer oppgavene burde inneholde for å skape et problem hvor det oppmuntres for matematisk argumentasjon i et fellesskap. Vi kom tidlig frem til at slike oppgaver kjennetegner problemløsning. I tillegg havnet vi på oppgaver som inneholder en virkelighetskontekst. Oppgavene har vi kategorisert å ligge i Skovsmoses (1998) oppgaveparadigme med semi-referanser til "virkeligheten" (3) og undersøkelseslandskap med semi-referanser til "virkeligheten" (4). Denne virkelighetskonteksten krever i noen tilfeller at elevene klarer å matematisere problemene. Når elevene matematiserer en situasjon kan prosessen inneholde abstrahering (Hana, 2014). Ettersom elevene må anvende matematikken i ulike kontekster kan det underbygge behovet for relasjonell forståelse (Skemp, 1978). Alle disse utfordringene legger opp for at de elevene som deltar i det matematiske samspillet vil ha ulike utgangspunkt for å løse oppgavene. Et samspill med ulike perspektiv og ulike kognitive konflikter kan lede elevene inn i situasjoner hvor forklaringer og utdypninger er nødvendig.

Vi ser at oppgave 1 (kapittel 3.3) er den oppgaven som løses raskest og enklest. Det er få eller ingen uenigheter, og diskusjonene rundt oppgaven gjenspeiler at elevene har en felles forståelse for oppgaven. Det er begrenset materiale å analysere opp mot Lithners (2008) rammeverk for imitativ resonnering (IR) og kreativ resonnering (KR). Vi ser at elevene kan ha ulik innfallsvinkel på hvordan de bruker prosent og desimaltall, sett bort ifra dette er det lite variasjon i fremgangsmåte. Oppgave 2 var den oppgaven vi forventet skulle innlede til mest argumentasjon. Begge elevgruppene kom frem til svaret sitt ved å bruke Pytagoras teorem. En kan se på oppgaven som todelt ved bruk av denne fremgangsmåten. Først må elevene gjenkjenne figurens egenskaper slik at de kan identifisere de matematiske verdiene de trenger for å implementere Pytagoras teorem. Her må elevene ha en viss relasjonell forståelse rundt figuren, de må blant annet kunne trekke ut matematisk kontekst fra informasjonen gitt i oppgaveteksten. I kapittel 4.2.4 ser vi at elevene bruker den matematiske kunnskapen de besitter for å finne frem til den "skjulte" informasjonen. I et sosialt samspill vil dette legge opp for at elevene må argumentere for hvordan og hvorfor deres fremgangsmåte kan brukes. Dette kan også gi rom for at elevene kan fungere som støttestillas for hverandre i matematikklæringen (Lyngsnes & Rismark, 2015). I oppgaven har vi analysert argumentasjon som baserer seg på både AR og KMR (Lithner, 2008). Den andre delen av oppgaven går i hovedsak ut på å bruke Pytagoras teorem ut ifra den informasjonen som er oppdaget. Denne delen blir i stor grad gjennomført algoritmisk. Hva som kjennetegner valideringsprosessen, blir påvirket av hvilken type resonnering argumentene baserer seg på. Lithner (2008) nevner at en av funksjonene til bruk av algoritmer kan være at elevene ikke trenger å gjøre de mer avanserte vurderingene og avgjørelsene for utregningen. Eleven ender opp med rett svar, gitt at algoritmen og utregningene er korrekt. En mulig konsekvens er at eleven ikke nødvendigvis sitter igjen med noen form for resonnement annet enn at algoritmen vil gi det korrekte svaret. Dette kjennetegner også samhandlingene vi har analysert i oppgave 2, hvor det i liten grad tas opp spørsmål rundt fremgangsmåten og det tilhørende svaret. Vurderingene som gjøres ser ut til i hovedsak å omhandle svaralternativene, altså om det svaret de har funnet stemmer overens med et av svaralternativene, dette ser vi i kapittel 4.3.2 og 4.3.4. Likevel er det mulig at eleven har en relasjonell forståelse for en algoritme. Eleven kan for eksempel vite hvordan algoritmen er utarbeidet, eller i det minste hva den baserer seg på. Vi ser at den første delen av oppgave 2 hvor elevene må finne den skjulte informasjonen, fører til argumentasjon basert på KMR. Når elevene gjennomfører KMR, vil de også danne et grunnlag for argumentasjon. Dette reflekteres i de samspillene hvor elevene argumenterer for fremgangsmåtene deres, eksempelvis i kapittel 4.2.4.

Oppgave 3 vurderte vi for å være enklere å løse enn det skulle vise seg å være. I etterkant av observasjon og analyse har vi reflektert over dette. Vi har nå en videre forståelse og erfaring tilegnet hvilke elementer som påvirker hvilke ulike ferdigheter som testes. Elever som tidligere har arbeidet med oppgaver som omhandler problemløsning og abstrahering kan oppleve oppgave 3 som mindre utfordrende. Selv om vi ikke anså oppgaven som en stor problemløsningsoppgave, viste vi at oppgaven hadde trekk som kan minne om dette. Elevene må selv avgjøre hvilken informasjon som er relevant for problemet og det er ikke gitt hvordan elevene skal sette opp regnestykkene for å få finne svaret. Alle disse faktorene kan tenkes å legge opp for kreativ resonnering. Denne oppgaven skiller seg ut fra de andre med at den ikke har noen tilhørende svaralternativ. Denne faktoren er svært tydelig i gruppe 2 sine diskusjoner rundt svaret som elev 5 legger frem (kapittel 4.2.5 - 4.2.7). I disse sekvensene har elev 5 med sin KMR kommet frem til svaret, og er med dette relativt overbevist om at svaret er korrekt. Eleven er trygg i sitt resonnement, noe som kan skyldes kjennetegn av KMR som fremgangsmåte (Lithner, 2008). Ettersom elev 4 og 6 ikke har det samme forholdet til, og forståelsen for resonnementet er de usikre. Dette skaper en gylden situasjon hvor elev 5 forsøker å overbevise de andre (i kapittel 4.2.6 og 4.2.7), dette gjøres gjennom logiske slutninger som organiseres til ulike argument (Stylianides 2007a, 2007b). Dersom svaralternativ var tilgjengelig i oppgave 3, ville det kunne ført til at medelevene ble tryggere eller overbevist om at svaret 8,5 år var korrekt. En konsekvens av dette kunne vært at den gylne situasjonen aldri hadde oppstått. Svaralternativ kan på denne måten være hemmende for hvilke faktorer som påvirker elevenes overbevisning. I tilfeller hvor elevenes overbevisning støtter seg på bekreftelse gjennom svaralternativer, kan det tenkes at prosessen inneholder mindre trygghet og forståelse over det matematiske innholdet som svaret baseres på. Når elevene overbevises av et matematisk forankret argument, vil de sannsynligvis ha en viss forståelse for det matematiske som argumentet baserer seg på. Her kan en utfordring oppstå når elevene ikke besitter den kunnskapen som er nødvendig for å forstå argumentet, men det skaper også muligheten for at eleven som argumenter kan fungere som støttestillas for medelevene (Lyngsnes & Rismark, 2015).

Videre kan vi også sammenligne oppgave 3 med oppgave 2 som resulterer i bruk av algoritme. Det er tilnærmet ingen argumentasjon rundt bruken av Pytagoras teorem. Det kan se ut som om valget av algoritmen er åpenbar for alle elevene. Det kan også være at elevene ikke ser muligheten for å utfordre algoritmen. Det kan hende at elevene ikke våger å utfordre eller stille spørsmål til algoritmen. Dette kan skyldes at de enten stoler på algoritmen eller at de ikke har forståelse for den. Valget av Pytagoras teorem som fremgangsmåte er i dette tilfellet kjent AR (Lithner, 2008) for minst noen av elevene. De gjenkjenner en rettvinkletrekant hvor de vil finne en ukjent side. Slik blir de kanskje trygge på at dette er veien å gå. Likevel er det mistenkelig lite diskusjon rundt denne prosessen. Når vi analyserer samspillet i oppgave 2 og 3, er det tegn på at det algoritmiske fokuset og muligheten for verifisering gjennom svaralternativ, fører til en mindre rik argumentasjon i oppgave 2 sammenlignet med oppgave 3. Til tross for dette vil vi påpeke at oppgave 2 kan være utfordrende å løse uten Pytagoras teorem, men det er absolutt flere løsningsmetoder som kan brukes. Formlikhet er kanskje den enkleste, men dette forutsetter også til dels at elevene har kunnskap om dette fra før. Fordelen med at elevene kan bruke AR for å løse oppgaven, er at de faktisk klarer å løse oppgaven på egenhånd. Svakheten ligger i hva elevene faktisk lærer av å kun bruke kjente algoritmer som løsningsmetode (Lithner, 2015).

Gjennom arbeidet i denne studien har vi kommet frem til noen faktorer som kan være avgjørende for oppgavens rolle i henhold til elevenes argumentasjon i matematikkarbeid. Lithners (2008) imitative resonnering fører i vår studie sjeldent til matematisk argumentasjon som tilfredsstiller kravene til Stylianides (2007b). Rutineoppgaver kan tenkes å føre til IR i de fleste tilfeller. Rutineoppgaver vil ofte føre til fattig argumentasjon, likevel er det andre faktorer som kan legge opp for argumentasjon, eksempelvis lærerens spørsmål eller elevenes undring. Åpne oppgaver med flere fremgangsmåter vil derimot skape behov for argumentasjon. Det bør ikke være opplagt hvordan oppgaven skal løses, slik vi ser i oppgave 2 og i oppgave 3. Skjult informasjon kan føre til at elevene må tenke kreativt for finne løsningen. Dette kan generelt betegnes som problemløsningsoppgaver. I tillegg til dette kan også virkelighetskonteksten spille en stor rolle. Abstrahering ved matematisering av et problem gir rom for tolkning av oppgavene. Elevenes valg i denne prosessen legger opp for mulige argumentasjoner. At oppgavene er av undersøkende art kan også bli en faktor for motivasjonen i matematikkfaget. Når en jobber med problemløsning er det viktig at elevene er motiverte, fordi slike oppgaver krever en viss utholdenhet (Hitching & Mørch, 2014). Problemløsning, utforskning og abstraksjon er alle aktiviteter som inngår som kjerneelement i læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Aastrup & Johnsen (2014) betegner problemløsningsoppgaver som en del av det de kaller dynamisk undervisning. I slik undervisning er det et dynamisk samspill mellom lærer og elev. I matematikkundervisning hvor det brukes problemløsningsoppgaver vil lærerens ferdigheter og erfaringer være avgjørende faktor for aktivitetens læringspotensial. Læreren må forsøke å støtte eleven i søken etter løsningsmetode, men uten å faktisk vise hvordan eleven skal løse oppgaven. Dette skjer ofte gjennom å stille spørsmål som aktiviserer elevens egne tanker. Svaralternativ kan bli en hindring for matematiske forankrede argumenter etter vår tolkning. Dette når svaralternativet blir argumentet fremfor den matematiske fremgangsmåten. Samtidig kan det i enkelte tilfeller føre til at elevene diskuterer og argumenter rundt alternativene, og vurderingen av dem kan være matematisk forankret. For eksempel overslagsregning eller en elimineringsprosess hvor en kan utelukke enkelte alternativer ved bruk av matematikk. Vi kan se trekk av dette i kapittel 4.3.4., når eleven utelukker enkelte svaralternativer. Når elevene i tillegg befinner seg i et gruppearbeid, blir det nødvendig for dem å forklare, og begrunne de fremgangsmåtene de tenker kan være veien til løsningen, slik vi ser i vår empiri.

5.2 Sosiale aspekter

Resultatene fra observasjonen viser oss at elevene utnytter den sosiale konteksten i arbeidet med oppgavene. Elevene anvender denne konteksten til å støtte hypoteser og uttalelser, til å vurdere utsagn og muligheter, og diskutere ulike ståsted. I dette delkapittelet vil vi se nærmere på hvordan samhandlingen mellom elevene kan ha bidratt til deres arbeid i prosjektet, og hvilke elementer som kan ha påvirket samhandlingen.

Et av funnene var at elevene tilsynelatende la stor vekt på den sosiale aksepten av en hypotese eller et utsagn. Dette er ikke uventet ettersom aksept og fornektelse er en naturlig del av den sosiale dimensjonen som befinner seg i valideringsprosessen av argument og bevis (Stylianides, 2007a). Gjennom funnene kom det derimot frem at gruppe 2 i større grad stilte spørsmål som bidro til diskusjon. Gruppe 1 viste en tendens til å si seg enig med den første hypotesen som ble frembrakt, hvorimot gruppe 2 i større grad stilte spørsmål til de ulike hypotesene som ble presentert. Hva som ligger til grunne for forskjellene ved den sosiale samhandlingen kan være mange. Hvis en forsøker å se elevenes handlingsmønstre i lys av sosiale- og sosiomatematiske normer (Yackel & Cobb, 1996), kan det være mulig å se noen sammenhenger. Som lærere ønsker vi at elevene skal forklare og gi begrunnelser for deres utsagn og meninger. Fra elevenes side kan de derimot sitte med helt andre fundamentale tilnærminger. Hvilke behov elevene føler for å gi forklaringer rundt sine meninger og løsninger trenger ikke nødvendigvis måle opp mot våre ønsker. “Hvorfor er det nødvendig å forklare hele tiden?”. Dette kan være noe av tankegangen elevene har i slike situasjoner. Det er mulig elevene ikke ser behovet for forklaring når de har identifisert korrekt svar. Dette kan ses i sammenheng med det Lithner (2015) ser på som en av hovedutfordringene med lærevansker i matematikk. Lærere ønsker elever med kompetanse innenfor problemløsning, men har endt opp med elever som fortsatt praktiserer ineffektiv repetisjonstenkning. Mange år med gjennomførelse av matematikkoppgaver basert på å lære gjennom repetisjon kan ha ført til en forståelse for matematikk hvor fokuset kun ligger i det å få korrekt svar. Et slikt læringsmiljø vil i mindre grad invitere til matematisk diskusjon og argumentasjon. Sett fra et mer hverdagslig perspektiv kan det også sies at det ikke nødvendigvis er vanlig å alltid gi detaljerte forklaringer hver gang en kommer med et utsagn, noe som kan gjenspeile seg i elevenes skolearbeid.

Skulle slike hindringer oppstå kan det være ønskelig med arbeid for gode sosiale og sosiomatematiske normer (Yackel & Cobb, 1996) slik de tidligere har blitt redegjort for. Når gruppene ikke følger opp med forklaringer for egne utsagn, eller ikke spør etter utdypning for medelevenes uttalelser, kan det være et tegn på manglende normer for arbeid rundt både generell klasseromsdiskusjon, og matematiske diskusjoner. En stor fordel med gode normer er også at de automatiseres i elevenes skolehverdag (Yackel & Cobb, 1996). Ved å skape de ønskede normene kan det skapes et klassemiljø hvor elevenes matematiske diskusjoner er automatisert, noe som lærer ikke nødvendigvis trenger å eksplisitt spørre etter. Et klassemiljø som preges av slike normer kan hjelpe til med å skape mer kreativ matematisk resonnering (Lithner, 2008). Dette er selvsagt et tenkt scenario som kan være noe urealistisk med tanke på å skape et slikt klassemiljø. Det er også flere mulige årsaker bak funnene våre, enn elevenes sosiomatematiske normer.

En mulig påvirkning for elevenes samhandling kan være deres evne til å opptre som stillas for hverandre. Som stillas vil de kunne hjelpe hverandre gjennom matematikk som er litt for vanskelig for å løse individuelt (Hinna et al, 2011). En nødvendighet for dette er derimot at det ikke kan være et for stort sprik i elevenes kunnskapsnivå. Ettersom gruppene i studien vår er sammensatt av tilfeldige elever, vil også nivåene på gruppene være tilfeldige. Dette kan være en av faktorene som er skyldig i ulikhetene ved diskusjonene i gruppe 1 og 2.

I kapittel 4.2.1 ser vi at gruppe 1 sin diskusjon preges av høy aktivitet fra elev 1 og lavere aktivitet fra elev 2 og 3. Det er i hovedsak elev 1 som bidrar for progresjonen i oppgaven. Når elev 2 og 3 i hovedsak kun har bekreftende uttalelser, og ingen spørsmål eller utfordringer til det elev 1 presenterer. Gruppe 2 (kapittel 4.2.6) har i likhet elev 5 som kommer med gode bidrag til progresjon av oppgaven. Her er derimot samspillet mer dynamisk, hvor elevene i større grad utfordrer og stiller spørsmål til hverandre, og med dette bidrar til matematisk diskusjon.

Hvis elevene i gruppe 1 har store forskjeller i deres matematiske kunnskap, kan det ha svekket evnen deres til å føre matematiske diskusjoner ettersom det blir vanskeligere for elevene å være støttestillas. På samme måte kan dette være en av grunnene bak gruppe 2 sin evne for spørsmålsstilling og forklaring, gitt at elevene kunnskapsmessig er innenfor rekkevidde for hverandre.

5.3 Refleksjoner rundt imitativ og kreativ resonnering

Lithner (2008, 2015) drar frem at skolen i dag domineres av imitativ oppgaveløsning og tenkning. Imitativ resonnering kan tolkes som noe negativt stilt i lys av kreativ resonnering. Problemet eller utfordringen med IR er at matematikkforståelsen vil omhandle rutinemessige og memorerte øvelser, fremfor en relasjonell og kreativ matematisk forståelse. Når en starter med et nytt emne i matematikk er det ønskelig at det bygger på eksisterende kunnskap og erfaringer. Men dette kan være utfordrende i en skolehverdag med et mangfold av ulike elevkompetanser. En tradisjonell forelesning legger opp for en overførende læringssituasjon, hvor elevene imiterer det læreren presenterer. Instrumentell matematikk er noen ganger mye enklere å forstå (Skemp, 1978). Det kan være en naturlig tanke for en lærer å introdusere et nytt tema så enkelt som mulig, på denne måten kan en tenke seg at imitativ resonnering er en fundamental del av den matematiske læringsprosessen. For noen elever i dagens skole er kanskje potensialet kun instrumentell forståelse og imitativ resonnering. Lithner (2015) ser på vektlegging av repetisjonslære som en av hovedårsakene til lærevansker i matematikk. Derfor vil undervisning som legger opp for mer kreativ resonnering tidlig i grunnskolen, ha mulighet for å lede elevene mot en mer relasjonell forståelse og utvide læringspotensialet. Den nye læreplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020) inneholder kjerneelementet resonnering og argumentasjon. Dette gir muligheter for en undervisning som i større grad er basert på aktiviteter tilknyttet dette temaet. I denne studien har identifisert ulike varianter av resonnering blant elevene. Vi vil videre drøfte styrker og utfordringer tilknyttet disse.

En av styrkene ved KMR kommer til syne i sekvensene hvor elev 5 argumenter for sin fremgangsmåte i arbeidet med oppgave 3 (kapittel 4.2.5 - 4.2.7). Her ser vi elev 5 som utfordres på sine resonnement, og bruker sin relasjonelle forståelse for å underbygge sine påstander og overbevise sine medelever. Resonneringen er matematisk forankret og kan klassifiseres som KMR. Det er tydelig at denne eleven drar nytte av KMR for å løse, vurdere og presentere det matematiske arbeidet. Elev 4 og 6 er uenig med elev 5 og kritiserer svaret hans, dette kommer frem i linjene 234-238, hvor elev 6 blant annet sier at svaret er helt ulogisk og elev 4 sier seg enig. Elev 5 svarer med “er du sikker?” (linje 239). Dette etterfølges av et forsøk på å forklare, noe som resulterer i at elev 4 sier seg enig med elev 5 (linje 266). Elev 6 aksepter også svaret, men en kan stille spørsmål hvor overbevist eleven faktisk var (Linje 262-264). Disse sekvensene er et av våre største funn i denne studien, ettersom de viser et samspill hvor læring finner sted. Dette underbygger læringspotensialet KMR kan bidra med i matematikkundervisning. Det er mulig at elevene ikke ville kommet frem til enigheten om svaret på oppgave 3, dersom elev 5 baserte sine argumentasjoner på AR fremfor KMR. Likevel kan vi se at bruk av AR i kapittel 4.1.1 - 4.1.3 leder til at elevene er tilsynelatende enige i svarene. Det kan tenkes at elevenes matematiske erfaringer også i større grad er basert på imitative øvelser. I tilfeller hvor AR gir korrekt svar kan det skape en situasjon hvor tålmodigheten overfor andre løsninger blir redusert. Ved episoden i kapittel 4.1.1 overkjøres et kreativt resonnement av et algoritmisk resonnement. Det er sannsynlig at en fremgangsmåte basert KMR ville fått større oppmerksomhet dersom elevene ikke fant svaret ved bruk av AR i denne sekvensen. Problemet med AR er at valideringen ligger i autoriteten til algoritmens kilde (Lithner, 2008). Hvor valideringen i KMR baseres på aksepterte logiske slutninger som er matematisk forankret, noe som indirekte er et av Stylianides (2007a, 2007b) krav til et matematisk bevis. KMR kan oppstå i flere tilfeller uten at det er synlig. I Kapittel 4.3.2 er det utfordrende å avgjøre hvorvidt elevenes resonnering i denne fasen er kreativ eller imitativ. Ettersom vi ikke har dyp kunnskap til de spesifikke elevenes tidligere skolekunnskaper, er vi naturligvis usikker på hva som vil være ny, eller gjenoppdaget kunnskap. Vi kan derimot trekke frem at argumentene som elevene tar i bruk ikke er matematisk forankret og at det derfor ikke er KMR. repetisjonslære

Lithner (2008) mener at en kan få effektive resultater i skolen ved å fokusere på AR i matematikkundervisning. Dette skyldes at lærestoff i stor grad er tilpasset slik at AR er en effektiv arbeidsprosess. Utfordringen med dette kan være at elevene med tiden møter på mer kompleks matematikk som er vanskeligere å tilpasse for AR. Utenfor skolesammenheng kan elevene møte på fremtidige utfordringer, for eksempel er ikke AR pålitelig i problemløsning situasjoner (Lithner, 2008). Problemløsning er ifølge (Hitching & Mørch, 2014) en vanlig arbeidsoppgave for en profesjonell matematiker. Lithners kritikk av imitativ resonnering og repetisjonslære omhandler mangelen på kreativ resonnering (Lithner 2008, 2015). Det å repetere grunnleggende matematiske operasjoner, eksempelvis å lære gangetabellen kan være nyttig for videre utvikling av matematiske ferdigheter. Repetisjonslære kan sees på som en effektiv metode når det er behov for den, og kanskje også som en nødvendighet i enkelte sammenhenger. For å kunne arbeide kreativt kreves det til dels at eleven innehar visse matematiske ferdigheter og begrepsforståelse, noe som kanskje ofte læres gjennom repetisjonslære. Problemet slik vi tolker det, ligger rundt IR og repetisjonslære som dominant læringsform i matematikkundervisning. I oppgave 2 ser vi en tydelig kombinasjon av AR og KMR, en kan argumentere for at det ligger en viss styrke i å kunne bruke begge formene i matematikkundervisningen. En undervisning som kun fokuserer på kreativ resonnering i matematikk kan bli komplisert og vanskelig å holde målrettet i henhold til læremålene. Samtidig ser vi hvordan Lithner (2015) beskriver dagens skole med fokus på AR, hvor en kanskje går på bekostning av kreative arbeidsmetoder og tankeganger. Særlig har vi vært inne på styrkene til KMR som underbygger ferdigheter iblant annet argumentasjon, bevis og problemløsning. En elev som mestrer disse, vil kunne arbeide mer selvstendig og utforskende enn en elev som ikke mestrer ferdighetene.

5.4 Implikasjoner vedrørende tabell 4.1

For å skape oversikt over datamaterialet valgte vi å lage en tabell med de ulike kodene og kategoriene. Den ga oss også muligheten til å kryssjekke hvilke koder som oppstod i de ulike episodene. Videre kan vi bruke tabellen som et verktøy for å identifisere mulige sammenhenger mellom de ulike kodene. En av sammenhengene tilknyttet tabellen var at kategorien algoritme ikke forekommer sammen med koden matematisk verifisering. Videre kan det trekkes linjer til funnet vårt fra analysen, der vi konkluderer med at det kun er ved sekvenser av KMR vi ser matematisk forankret verifisering. Dette underbygger en av svakhetene til AR hvor Lithner (2008) mener at argumentasjon ikke er en nødvendighet når algoritmen er valgt.

I tabellen kan vi se at kategorien algoritme er lite representert relativt til kategoriene forklare og verifisere. Til tross for den lave representasjonen er bruk av algoritme en sentral del for begge gruppene i oppgave 2. Likevel ser vi i tabellen at det er lite kommunikasjon rundt algoritme, noe som tyder på en effektiv arbeidsprosess tilknyttet bruk av algoritmer. Elevene løser oppgave 2 effektivt med bruk av algoritme. Dette kan være en av appellene til algoritme, hvor en kan finne svar raskt og pålitelig. Skemp (1978) sier at selv matematikere med relasjonell forståelse tar i bruk instrumentell tenkning ettersom det er raskere og pålitelig. Dette kan også være en av grunnene til dens sterke status i skolen. Også i en læringssituasjon kan det være enklere og mindre tidkrevende å fokusere på algoritmer fremfor en dypere matematisk forståelse. Slik Lithner (2015) nevner at overrepresentasjon av repetisjonslære og bruk av algoritmer stammer fra et ønske om å redusere kompleksiteten tilknyttet matematikken. Lithner (2008) nevner også at elever kan komme langt med AR i skolesammenheng. Oppsummert kan vi si at repetisjonslære og bruk av algoritme kan være effektivt med tanke på tidsbruk, ettersom temaer og oppgaver kan gjennomgås raskt. Det kan derimot diskuteres hvilket læringsutbytte elevene har av en slik undervisning, slik Lithner (2008, 2015) kritiserer repetisjonslære som en av hovedårsakene til lærevansker i dagens skole.

6 Avslutning

I denne studien har vi undersøkt hva som karakteriserer elevenes argumentasjon i arbeid med matematikkoppgaver på 10.trinn. Vår empiri viser til at elevenes argumenter til dels oppfyller Stylianides (2007b) kriterier for bevis, hvor vi ser at elevene ikke alltid oppfyller de tre kravene. Disse er henholdsvis at argumentene skulle bruke uttalelser som er akseptert av klasserommet, og som er sanne og tilgjengelige uten ytterligere begrunnelse. Videre skulle de benytte former for resonnement som er gyldige og kjent for, eller innenfor konseptuell rekkevidde for klasseromsfellesskapet. Til slutt må argumentene også kommuniseres med uttrykksformer som er passende og kjent for eller innenfor konseptuell rekkevidde for klassesamfunnet. Elevenes resonnering varierer i hovedsak mellom algoritmisk resonnering (AR) og kreativ matematisk forankret resonnering (KMR) (Lithner, 2008) i denne studien. Funnene våre viser til god representasjon av KMR, og en litt mindre representasjon av AR. Dette er sammenfaller ikke med Lithners (2008, 2015) beskrivelser av dagens skole som domineres av imitativ resonnering. Dette er noe vi har diskutert i forhold til hvilke oppgaver som elevene arbeider med i studien, hvor vi konkluderer med at oppgavetype kan være en avgjørende faktor for hvilke resonneringsformer som anvendes. I vår studie ser vi blant annet at KMR fremkommer i større grad i arbeid med oppgaver som inneholder både skjult fremgangsmetode og skjult informasjon.

Gjennom diskusjonskapittelet har vi redegjort for noen mulige elementer som kan ha påvirket samspillet i elevgruppene, og hvordan de også kan påvirke deres argumentasjon. Elevenes sosiale og sosiomatematiske normer, samt potensielle sprik i elevenes kunnskapsbasis, kan være faktorer som påvirker de ulike karakteristikkene vi har observert i studien. Emnene vi har tatt opp er kun noen av mange mulige og vil ikke kunne konkludere om elementer som ligger til grunne for karakteristikkene til elevenes argumentasjon. For å videre kartlegge hva som karakteriserer elevenes argumentasjon i arbeid med matematikkoppgaver og hva som påvirker dette, vil det være nødvendig med videre studie rundt emnet. Studiens omfang er kun en stikkprøve som ikke er representativt for hele landets 10.klasse elever. Studien kan derimot være en indikasjon på at elever i den norske skolen benytter seg av både kreative og imitative former for argumentasjon.

Litteratur

Aastrup, S., & Johnsen, K. (2014) Kartlegging og undervisning i dynamisk perspektiv. I Gustavsen, T. S., Hinna, K. R. C., Borge, I. C., & Andersen, P. S. (Red.) *QED 5-10: Matematikk For Grunnskolelærere Bind 2* (s. 689-744). Cappelen Damm.

Balacheff, N. (1988) *A study of students' proving processes at the junior high school level.* Second UCSMP international conference on mathematics education, Chicago, United States.

Bjørndal, C. R. P. (2015) *Det vurderende øyet* (2. utg.). Gyldendal norsk forlag.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Kluwer.

Christoffersen, L., & Johannesen, A. (2018) *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Abstrakt forlag.

Dalland, O. (2017) *Metode og oppgaveskriving*. (6. utg.). Gyldendal Norsk Forlag.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels [Semiosis and human thinking: Semiotic registers and intellectual learning]. Lang.

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (u.å). Etiske retningslinjer. Hentet fra https://www.forskningsetikk.no/ 15.02.2021.

Gilje, N., & Grimen, H. (1993) *Samfunnsvitenskapenes forutsetninger: Innføring i samfunnsvitenskapenes vitenskapsfilosofi.* Universitetsforlaget.

Hitching, G. H., & Mørch, H. W. (2014) Problemløsning i matematikk. I Gustavsen, T. S., Hinna, K. R. C., Borge, I. C., & Andersen, P. S. (Red.) *QED 5-10: Matematikk For Grunnskolelærere Bind 2* (s. 745-778). Cappelen Damm.

Hana, G. M. (2013) *Matematiske Byggesteiner*. Caspar Forlag.

Hana, G. M. (2014) *Matematiske Tenkemåter*. Caspar Forlag.

Harel, G., & Tall, D. (1989) The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning og Mathematics*, 11(1), 38-42.

Hinna, K. R., Rinvold, R. A., & Gustavsen, T. S. (2011) *QED 5-10 Matematikk For Grunnskolelærere Bind 1*. Høyskoleforlaget.

Kleve, B. & Ånestad, G. (2016) Læringspartner og sosiomatematiske normer som potensial for elevers læring. I Hovik, E. K. & Kleve, B. (Red.), *Undervisningskunnskap i matematikk* (s. 31-45). Cappelen Damm Akademisk forlag.

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017) A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1-16.

Kjærnsli, M., & Olsen, R. V. (2013) Matematikk i PISA - matematikkdidaktiske perspektiver. I Kjærnsli, M., & Olsen, R. V. (Red.) *Fortsatt en vei å gå: Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012.* Universitetsforlaget.

Lithner, J. (2008) A Research Framework for Creative and Imitative Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*. 67(3), 255-276.

Lithner, J. (2015) Education Learning Mathematics by Creative or Imitative Reasoning. I S. J. Cho (Red.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 487-506). Springer.

Lyngsnes, K., & Rismark, M. (2015) *Didaktisk Arbeid.* (3. utg.). Gyldendal Akademisk Forlag.

McClain, K. & Cobb, P. (2001) An analysis of development of sociomathematical norms in one first-grade classroom. *Journal for research in Mathematics education.* 32(3) 236-266.

Merriam, S. B. (2014) *Qualitative Research: A Guide to Design and Implementation* (3 utg.). Wiley.

National Council of Teachers of Mathematics, NCTM (2014) *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

Nilssen, V. (2012) *Analyse i kvalitative studier: Den skrivende forskeren.* Universitetsforlaget.

NSD - Norsk senter for forskningsdata. (u.å.). Hentet fra https://www.nsd.no/ 15.02.2021.

Nortvedt, G. A. (2013) Matematikk i PISA - matematikkdidaktiske perspektiver. I Kjærnsli, M., & Olsen, R. V. (Red.) *Fortsatt en vei å gå: Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012* (s. 43-66). Universitetsforlaget.

Postholm, M. B. (2020) *Kvalitativ metode* (2.Utg.) Universitetsforlaget.

Programme for International Student Assessment (2013) *PISA 2012 released mathematics items.* Hentet fra https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisa2012-2006-rel-items-maths-ENG.pdf 14.04.2021.

Sandefur, J., Mason, J., Stylianides, G. J. & Watson, A. (2013) Generating and Using Examples in the proving process. *Educational studies in mathematics.* 83(3) 323-340.

Sfard, A. (2008) *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Skemp, R. R. (1978) The Arithmetic Teacher. *Relational Understanding and Instrumental Understanding*, 26(3), 9-15.

Skovsmose, O. (1998) Undersøgelseslandskaber. I Dalvang, T., & Rohde, V. (Red.) *Matematikk for alle* (s. 24-37). Landslaget for matematikk i skolen.

Stylianides, A. J. (2007a) The Notion of Proof in the Context of Elementary School Mathematics. *Educational studies in mathematics*, 65(1), 1-20.

Stylianides, A. J. (2007b) Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. I J. Cai (Red.), *Compendium for research in mathematics education* (s. 237–266). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Utdanningsdirektoratet (2013) *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/mat1-04# 14.04.2021.

Utdanningsdirektoratet (2020) *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn* (MAT01-05). Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nno 22.04.2021.

Universitetet i Tromsø (2018) Retningslinjer for personvern og forsknings- og studentprosjekt. Hentet fra https://uit.no/forskning/art?dim=179056&p_document_id=604029#kap08 22.02.2021.

Varghese, T. (2011) Considerations Concerning Balacheff's 1988 Taxonomy of Mathematical Proofs. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 7(3), 181-192.

Yackel, E & Cobb, P. (1996) Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.

Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. I J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (Red.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (s. 227-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vedlegg

Vedlegg 1: Samtykkeskjema

Vedlegg 2: NSD kvittering

Vedlegg 3: Transkripsjon

Vedlegg 1 samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

Elevers argumentasjon i skolen?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke elevers oppfattelse av bevis og argumentasjon i matematikkundervisning. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med prosjektet er å undersøke hva som kjennetegner elevers argumentasjon når de arbeider med matematikk sammen med andre. Vi har valgt å se på elevers bruk av bevis og argumentasjon fordi vi er interessert i den sosiale delen av faget.

Prosjektet er en masteroppgave som vi skal gjennonføre i løpet av våren 2021.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Norges Arktiske Universitet er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Utvalgt av elever er gjort ved at vi har kontaktet inspektør ved skolen og blitt videresendt til lærer for en 10. klasse ved universitetsskolen Alta Ungdomsskole. Vi spurte lærer om det var mulig å låne en gruppe med elever (4-5) som kunne tenkt seg å være med på forskningsprosjektet.

Hva innebærer det for deg å delta?

I forskningsprosjektet vil de som deltar bli observert gjennom arbeidet sitt og filmet på video. Opplysningene som samles inn, vil være knyttet tankene og meninger dere har rundt argumentasjon og bevis i matematikk. Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du sir deg villig til å bli filmet i gruppe. Selve opplegget vil opp til to skoletimer.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. I tillegg vil vi understreke at lærer ikke tar del i prosjektet og at det ikke forventes fra lærer sin side at dere deltar.

De som blir med vil bli tatt ut av ordinær skoletime for å ta del i prosjektet.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- De eneste som har tilgang til opplysningene vi samler inn er Sebastien Lecomte og Steinar Suhr
- Navnene deres vil bli anonymisert og filmen vil bli lagret eksternt for sikkerhet

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er 8. mars, da vil filmen bli slettet

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene.
- å få rettet personopplysninger om deg.
- å få slettet personopplysninger om deg.
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Norges Arktiske Universitet har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Norges Arktiske Universitet ved

  - Saeed Manshadi på saeed.d.manshadi@uit.no eller 784 501 30.

  - Sebastien Lecomte på sle033@uit.no eller 948 190 59

  - Steinar Suhr på ssu018@uit.no eller 903 700 95
- Vårt personvernombud: Joakim Bakkevold personvernombud@uit.no eller 776 46 322 og 976 915 78

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Saeed Manshadi *Sebastien Lecomte* *Steinar Suhr*

(Veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Elevers argumentasjon i skolen* og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

Å delta i forskningsprosjektet

Å bli filmet under prosjektet

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 2 kvittering fra NSD

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Masteroppgave matematikkdidaktikk lektorutdanning (5-10)

Referansenummer

942007

Registrert

14.01.2021 av Steinar Suhr - ssu018@post.uit.no

Behandlingsansvarlig institusjon

UiT Norges Arktiske Universitet / Fakultet for humaniora, samfunnsvitenskap og lærerutdanning / Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Saeed Manshadi, saeed.d.manshadi@uit.no, tlf: 98682682

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Steinar Suhr, ssu018@post.uit.no, tlf: 90770095

Prosjektperiode

22.02.2021 - 08.03.2021

Status

08.03.2021 - Avsluttet

Vurdering (1)

18.02.2021 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen vil være i samsvar med personvernlovgivningen, så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet den 18.02.2021 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-

meldeskjema
Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige personopplysninger frem til 08.03.2021.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 nr. 11 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse, som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake.

For alminnelige personopplysninger vil lovlig grunnlag for behandlingen være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen:

- om lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet.

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må prosjektansvarlig følge interne retningslinjer/rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Simon Gogl
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

Vedlegg 3 Transkripsjon av observasjon

Transkripsjon 1

1- Elev 2: “Nittifem prosent av verdens handel blir flyttet til sjøs omtrent 50 tusen tankskip, bulkskip og containerskip. De fleste av de skipene de bruker diesel.”

2- Elev 1: “Oppgave en ka… 150 meter over båten så er vindstyrken 25 prosent sterkere enn den er nede på skipsdekket.”

3- Elev 2: “Mhm”

4- Elev1: “25 prosent av“

5- Elev 1 og 2: “24“

6- Elev 1: “er 6 prosent. 24 pluss”

7- Elev 1 og 2: “6 er 30”

8- Elev 1: “Den er vi enig om?” (Ser på elev 3)

9- Elev 3: “Ja”

10- Elev 2: “Oppgave 2 hva må lengden på tauet til drageseilet omtrent være, for at drageseilet skal dra skipet i en vinkel på 45 grader… Så båten drar jo i 24 timer 24 kilometer i timen 150…”

11- Elev 1: “Hva må lengden på tauet til drageseilet”

12- Elev 2: “Det er dobbelt så fort”

13- Elev 1: “*Hæ*?.. det neste det er jo bare ka?”

14- Elev 2: “*Nei.*”

15- Elev 1: “Kor langt tauet må være. Så vi vet hva… Det så nu ganske likt ut lengden, er lengden på de her sidene like lang?” (Ser på observatør 1). “Tror det.”

16- Elev 3: “Hva de der?” (peker på arket).

17- Elev 1: “Den og den” (peker på arket).

18- Elev 3: “Måle?”.

19- Elev 1: “Den der… Den der… skal vi se… Jeg må tenke”.

20- Elev 2: “tre komma to.”

1 minutt stillhet

21- Elev 2: “Jeg tror det må være 212. Fordi.” (peker på arket). “Den der er 150 centimeter. Det er”.

22- Elev 1: “30”.

23- Elev 2: “Ja, meter… Der er 3,2. 3,2 der. Et merke her. Så da må resten av... så en komma.

24- Elev 1: “Så det e jo hva, 150 her. Hvis vi sier at den er A den er B den er C”. (peker på arket). “A i andre pluss B i andre er lik C i andre. Så det er sikkert pytagoras… Så ka 150 i andre pluss”.

25- Elev 3: “Tror det blir 150 ganger 150, pluss 150, 150 tror jeg.”

26- Elev 1: “Er lik”.

1 minutt stillhet

27- Elev 1: “Ka du sa?”.

28- Elev 2: “212”.

29- Elev 3: “Står 212”.

30- Elev 1: “212”.

31- Elev 2: “Jeg fikk 210 fordi”.

32- Elev 1: “Åja den står jo A, B og C der, jeg tenkte ikke på det”.

33- Elev 2: “Ja”.

34- Elev 1: “Ja nei svaret er B, for at her når vi legger inn regnestykket så er det 212 punktum 132”.

35- Elev 2: “Jeg fikk 210, men så var det jo sikkert noen centimeter jeg glemte”.

36- Elev 3: “Ja det er jo noe”.

37- 1 minutt stillhet.

38- Elev 1: “Ja okei”.

39- Elev 2: “Hva er 3,5 millioner ganger 0,42?”.

40- Elev 1: “Hva sa du?”.

41- Elev 2: “3,5 millioner ganger 0,42”.

42- Elev 1: “3,5 millioner, hva sa du, ganger?.

43- Elev 2: “Ganger 0,42”.

44- Elev 1: “0,42… Det var et tall eeh… hva? 1, 4, 7... med fire nuller... Se ka dieselforbruket “.

45- Elev 2: ”Koster”

46- Elev 1: “Ja hva det koster”

47- Elev 3: “Hva det koster for”

48- Elev 2: ”For et år”

49- Elev 1: “Ja”

20 sekunder stillhet

50- Elev 1: Jeg vet ikke, jeg tror ikke sånn, jeg tror ikke de her hva, navn, type, lengde, bredde, lastekapasitet og maksimal hastighet har noe særlig å si”.

51- Elev 2: “Nei”.

52- Elev 1: “Fordi det eneste vi trenger å vite er jo hva” .

53- Elev 1 og 2: “Hvor mye den bruker”.

54- Elev 1: “Hvor mye det koster”.

55- Elev 3: “Hvis det er etter ett år, etter 2 år da?”.

56- Elev 1: “Hva sa du?”.

57- Elev 3: “Hvis det der er etter ett år”.

58- Elev 1: “Det der er etter ett år uten seil, så vi må hva, ta minus 20 prosent av det der, og da vet vi hvor mye det bruker”.

59- Elev 3: “Med seil”.

60- Elev 1: “Med seil”.

61- Elev 3: “På et år”.

62- Elev 1: “Ja… Så må vi”.

63- Elev 3: “Finne ut hvor mange ganger det blir opp i 35 millioner”.

64- Elev 1: “Det er jo hva, med en gang vi vet da hvor mye det sparer hvert år, så må vi bare”.

65- Elev 3: “Ja”

66- Elev 1: Hva, ta det, hva seilet koster, dele det på, hvor mye det sparer så har vi det, så hva…(20 sekunder stillhet) “Så hva, med seil så bruker den 1, 1, 7, skriv den”.

67- Elev 2: “1,17”.

68- Elev 1: 1 hva nei, når bruker seil så bruker det, så bruker det hva, 100 tusen, 117 tusen, 6 tusen, med seil, formulerte det litt rart.”

69- Elev 3: “Med seil, en komma en million hundre og sytten tusen”.

70- Elev 1: “Se her så hva, det der er uten seil og det der er med seil” (peker på arket).

71- Elev 3: “Ja”.

72- Elev 1: “Så, ja.. Jeg må tenke litt”.

73- Elev 2: “skal vi spørre dem?”.

74- Elev 1: “Hva sa du?”.

75- Elev 2: “Kan vi spørre dem?”.

76- Elev 1: “Jeg tror jeg tastet noe feil på kalkulatoren, 2 sek”.

30 sekund stillhet.

77- Elev 1: “Okei, de pengene som blir spart hvert år er da 294000 okei ja”.

78- Elev 3: “Du har to million, nihundre”.

79- Elev 1: “ikke 2 million, 2 hundretusen”.

80- Elev 2: “294000”.

81- Elev 3: “294000”.

82- Elev 1: “Det er så mange zeds som blir spart hvert år da med seil”.

83- Elev 2: “Så da hvis vi bare runde opp til 300”.

84- Elev 1: “Nei ikke rund opp, det er ikke vits”.

85- Elev 2: “Åja vi har kalkulator”.

86- Elev 1: “Da sier vi at han kan spare, så hva?”.

87- Elev 2: “Drageseilet koster to og en halv million”.

88- Elev 1: “Så da hva?”.

89- Elev 2: “Hvis du ganger det med”.

90- Elev 1: “to og en halv million, det var *dyrt* seil. Og deler det på hvor mye det sparer… 8 punkt 5 år. Det virker mer… åtte og et halvt… 8,5034013, det er så mange år det tar. Og det virker forsåvidt ganske riktig”.

91- Elev 2: “294000 så vi kan gange det med 8,5… 2,499 million”.

92- Elev 1: “Ja”.

93- Elev 3: “Ja det blir jo”.

94- Elev 2: “Men 1000 under”.

95- Elev 1: “Ja det er jo bare fordi, hva, du ikke tok de der desimalene”.

96- Elev 2 og 3: “Ja”.

97- Elev 3: “Hvis man tar desimaltall så blir” (peker).

98- Elev 1:”Hva var det original tallet var? Det var… Hva?.. Da sitter vi igjen med åtte punkt, tror vi det er vits å skrive alle disse desimalene?”.

99- Elev 2 og 3: “Nei”.

100- Elev 1: “8 punkt 5 år”

101- Elev 3: “åtte og et halvt”

102- Elev 1: Så hva, etter hvor mange år omtrent vil pengene spart på diesel dekke kostnaden for drageseilet? 8,5. Da har vi alle svarene”.

103- Elev 2 og 3: “Ja”.

104- Elev 1: “Så hva, D, B og 8,5”.

Observatør deltar

105- Observatør 2: “Vi har et lite tilleggsspørsmål på oppgave 2, hvordan har dere løst den?”.

106- Elev 1: “Pytagoras. Dette er jo en... hva heter det, en rettvinklet trekant og 90 grader 45 45. Lengdene er jo lik (peker på figuren i oppgave 2) så når vi vet hva de er, hva er det, kateter de heter? tror det er det det er. Den 150 meter i andre pluss 150 meter i andre er lik den her (peker på den ukjente) det vil si C i andre, så regner vi bare ut det".

107- Observatør 2: "Var dere inne på noen andre måter å løse det på?".

108- Elev 2: "Jeg målte".

109- Observatør 2: "Hva gjorde du da?".

110- Elev 2: "Jeg bare målte hvor mange centimeter det var (Alle elevene ler kort). Jeg bare målte hvor mange centimeter det var derfra og ned og så tok jeg det på det der tauet og så tok jeg hvor mange centimeter det var igjen, og så regnet jeg med de der prikkene som står der".

111- Observatør 2: Okei så du målte (målene til figuren i oppgaven) og brukte bare de målene for å finne ut?

112- Elev 2: "Ja".

113- Elev 1: "Ikke en matematisk måte å gjøre det på. Visuelt".

114- Elev 2: "Nei".

Transkripsjon 2

115- Elev 5: "Har dere lest?".

116- Elev 6: "Ja".

117- Elev 5: "Den første oppgaven".

118- Elev 6: "Skal jeg skrive?".

119- Elev 5: "Hæ?".

120- Elev 6: "Skal jeg skrive?".

121- Elev 5: "Ehm må vi alle skrive" (ser på observatør 1).

122- Observatør 1: "Dere trenger ikke å skrive i det hele tatt hvis dere ikke vil, dere ser helt selv hvordan dere løser det".

123- Elev 5: "Ja men det e vel lettere å ta notater ja. Drageseilet på båten flyr 150 meter over båten, der er vindstyrken 150 og 25 prosent sterkere enn det er nede på skipsdekket, hvilken styrke blåser vinden i seilet når vindstyrken blir målt til 24 kilometer i timen på skipsdekket. Da er det jo bare å gange 24 gange 0,25 er det vel… Fordi det er jo det samme som, er ikke det det samme som 25 prosent? Ja".

124- Elev 6: “Kan vel bare finne ut…”

125- Elev 5: “Eller? nei”.

126- Elev 6: “Finne ut hva en fjerdedel er?”.

127- Elev 5: “Vent... Blåser sterkere så da må vi gange det med 1,25, ja, så da får vi jo 25 prosent mere enn 24 kilometer i timen. Da kan vi jo bruke kalkulator”.

128- Elev 5: “Gange… komma 25 er lik 30 kilometer i timen”.

129- Elev 6 : “Ja fordi at vi kunne jo bare tatt 24 delt på 4 som blir 6, og så plusset på 6 slik at det blir 30”.

130- Elev 5: “Ja det og. Men vi har jo også lært at 25 prosent er det samme som 25 hundredeler som i brøk, kan jo skrive det, 25 hundre og det kan vi også gjøre til desimaltall som er 0,25, og fordi det er allerede, vi skal allerede ha den der en gang, putte vi bare 1 foran der, og da får vi 25 % mer… Og da er det 30 kilometer i timen... Hva må lengden på tauet til drageseilet omtrentlig være for at drageseilet skal dra skipet i en vinkel av 25 grader og være 150 meter”.

131- Elev 6: “Vinkel på 45 grader”.

132- Elev 5 “Åja sa jeg 25? Ja ehm hmm… Hva spør dem om?”.

133- Elev 6: “Hva må lengden på tauet være”.

134- Elev 5: “Hva må lengden på tauet være på 100 meter... Da må vi jo finne ut hvis, det skal være 45 grader, da er det jo en som det er her” (peker på arket), “da er det en rettvinklet trekant”.

135- Elev 4: “De har like lange sider … Ja”.

136- Elev 6: “Ja”.

137- Elev 5: “Ja, og da er jo de her to sidene like lange, må dem jo være da for at det skal bli 45 sånn rett over, og da er det jo hva heter det, kan man bruke, hva gjør man igjen, ja 150 ganger 150, nei vi må finne den der” (peker på arket).

138- Elev 4: “Ja det jeg mener som er problemet”.

139- Elev 6: “Det er jo som en trekant”.

140- Elev 5: “Ja”.

141- Elev 4: “Ja”.

142- Elev 5: “Og så må vi jo bruke den der, hva heter det pyragoras setning eller noe sånt?”.

143- Elev 6: “Pytagoras?”.

144- Elev 5: “hæ?”.

145- Elev 6: “Pytagoras”.

146- Elev 5: “Pytagoras ja… Men var det ikke, hvordan var det den var igjen? 150 150 og hva det var dem 2 gange hverandre?”.

147- Elev 6: “Er det ikke katet ganger katet hypotenus?”.

148- Elev 5: “Ja, er det det? Ja, og det blir katet hvis vi ganger 150 ganger 150 så får vi kateten som er her, så får vi den er jo like mye da, så får vi begge de katetene, så må vi gange dem for å få den der og så dele den med, hva skulle man dele den på igjen? å jeg husker ikke dette her”.

149- Elev 6: “Sikkert sånn 180 eller noe”.

(ca. 1 minutt Stillhet)

150- Elev 5: “Nei jeg har ikke peiling… Jeg husker ikke hvordan vi gjorde det”.

151- Elev 4: “Jeg husker heller ikke”.

152- Elev 6: “Hvis vi tar, den der siste vinkelen der er også 45”.

153- Elev 5: “Ja dem to er begge 45”.

(Ca. 30 sekunder stillhet)

154- Elev 5: “Å nå husker jeg, hvordan tar man kvadratrot på denne her?” (holder opp kalkulatoren).

155- Elev 4: “Kvadratrot det er faktisk en knapp som er det”.

156- Elev 5: “Åja der sånn… Eller kanskje ikke… Å var det ikke noe sånn der… mm mm... Nei da blir det jo… (20 sekund stillhet) Jeg tror det blir to tolv (212), fordi jeg synes jeg husker at det var, at man skal plusse dem der to i lag”.

157- Elev 6: “Mhm”.

158- Elev 5: “Den pytagoras setningen blir det dem to, pluss den der eller først gange 150 ganger 150 for å finne den, og så finne den der som er like mye. Og så plusse man den, og så da får man hvor stor hele denne er, og da er det bare å ta kvadratroten av den som da er”.

159- Elev 6: “Det er jo ikke den (peker på arket)”.

160- Elev 5: “Nei”.

161- Elev 6: “Det er jo ikke D eller A”.

162- Elev 5: “Ja”.

163- Elev 6: “Jeg fikk 212, et eller annet”.

164- Elev 5: “Ja komma 1, 3, 2”.

165- Elev 6: “Ja”.

166- Elev 5: “Ja men da er det jo”.

167- Elev 4: “Jaja”.

168- Elev 6: “Så bare runde det av til 212”.

169- Elev 5: “Ja”... Så var det siste oppgave. På grunn av høy diesel kostnad på 0,42 zeds. Hva er zeds?”.

170- Elev 6: “Sikkert penger eller noe”.

171- Elev 5: “Per liter, ja… Tenker eierne av skipet NewWave å utstyre deres med drageseil er estimert at et slikt drageseilet har potensial til å redusere dieselforbruket med opptil 20 prosent… Etter hvor mange år omtrent vil pengene spart på diesel dekke kostnadene for drageseilet… Okei, det koster... Hva? 2,5 million”.

172- Elev 6: “Mhm”.

173- Elev 5: “2,5 mill”.

174- Elev 6: “Og dieselforbruket er 3,5”.

175- Elev 5: “Og den er hva?”.

176- Elev 6: “3,5 million”.

177- Elev 5: “3,5 million liter. Og da er det jo 3,5 million ganger 0,42, da får du hvor mye dem bruker på… Bruker hvert år på”.

178- Elev 6: “På 3,5?”.

179- Elev 5: “Hæ?.. Ja ta ehm… 3,5 (utydelige tall)… Ganger 0,42 som blir 7… Som blir da 1,4 million som cirka”.

180- Elev 4: “Okei”.

181- Elev 6: “hva fikk du?”.

182- Elev 5: “hva fikk jeg, på hva?”.

183- Elev 6: “På Hvor mye den bruker på diesel”.

184- Elev 5: “1,4 mill. En komma fire-syvhundretusen. Nei syttitusen (1470000). Nei, er det? Ja syttitusen”.

185- Elev 6: “Ja”.

186- Elev 5: “Lastekapasitet det har vel ikke så mye å si. Maks hastighet har heller ikke så mye å si”.

187- Elev 6: “Men tror du det har noe å si siden det står der eller tror du det bare kan?”.

188- Elev 5: “Kanskje det bare er der bare for å forvirre. Fordi dem lure etter hvor mye omtrent dem har spart på diesel for å dekke kostnaden for drageseil”.

189- Elev 6: “For spørsmålet har ingenting med lastekapasitet eller bredde å gjøre”.

190- Elev 5: “Ja, men da kan vi jo ta da, ehm 0,42… 0,42 ganger 0,2”.

191- Elev 4: “Et år”.

192- Elev 5: “Som er da 0,084 Så mye koste det da for 1 liter bensin til sammen da, og det blir jo ganske mye mindre”.

193- Elev 6: “Men hvor mange år omtrent vil pengene?”.

194- Elev 4: “Jeg tror 2 år”.

195- Elev 5: “Men det var ikke noen alternativ på denne her?”.

196- Elev 4: “Nei”.

197- Elev 6: “Er det ikke bare... Hvor mange år omtrent vil pengene spart på diesel dekke kostnadene på seilet, da blir det 3,5 million på diesel”.

198- Elev 5: “På den ja”.

199- Elev 6: “Og 2,5 for sånn der seil greie”.

200- Elev 5: “Ja dem bruke 1,4 million på diesel hvert år, også bruker dem 2,5 på den der”.

201- Elev 4: “2,5 mill på drageseilet”.

202- Elev 5: “Ja… Så men hvis”.

203- Elev 4: “Det betyr at dem”.

204- Elev 5: “Men når dem bruker drageseilet så bruker dem”.

205- Elev 4: “Spare dem 20 prosent”.

206- Elev 4: “Skal vi runde dem opp til 1,5?” (peker på arket).

207- Elev 5: “Ja så…”.

208- Elev 4: “Ja”

209- Elev 5: “2, 9, 400…”

210- Elev 4 “Først blir det jo, dem blir jo en million, nei vent litt så tror, så andre året blir dem å, tror jeg de blir å spare”.

(Elev 4 og 5 “tenker høyt” hver for seg i 15 sekunder)

211- Elev 5: “Ja, men da bruke det, dem spare, så her mye spare dem... Peng, hvis dem bruke drageseilet hvert år”.

212- Elev 6: “Vent på hvor mange år?”.

213- Elev 5: “På hvor mange år?”.

214- Elev 6: “Dem du sir at spare det her”.

215- Elev 5: “Ja dem spare så mye (peker på arket) hvert år hvis dem bruke drageseil. Så mye peng…”.

216- Elev 4: “Ja”.

217- Elev 6: “Ja”

218- Elev 5: “På bensin, så da er det jo…”.

219- Elev 4: “To år tror jeg”.

220- Elev 5: “Da blir det, da kan vi jo bare ta kor mye peng vent, hvor mye kosta den? 2,5”.

221- Elev 4: “2,5 mill”.

222- Elev 5: “2,5 og så gange vi jo bare, 2,5 millioner og så deler vi det på 294000 som er da 8,5 år, åtte og et halvt år”.

223- Elev 6: “Åtte og et halvt år, okei”.

224- Elev 5: “Hvis det gir mening”.

225- Elev 4: “Ikke så mye...”.

226- Elev 6: “Kan si det”.

227- Elev 4 og 5: “Ja”.

228- Elev 4: “Jeg står fortsatt og tenker først 2-3 år”.

229- Elev 6: “Jeg tenkte også 2 år”.

230- Elev 4: Jeg tenkte 2 år fordi... men jeg tror ikke det blir nok

231- Elev 5: “Fordi jeg tenker jo sånn at, hva heter det? Først ganget jeg jo bare null komma…”.

232- Elev 6: “Dem slipper jo å bruke så mye peng på…”.

233- Elev 5: “Ja men det er derfor man først tar, helst først så tar man jo 0,42 ganger…”.

234- Elev 6: “8,5 år er jo helt ulogisk”.

235-Elev 5: “Syns du?”.

236- Elev 6: “Ja”.

237- Elev 4: “Ja veldig”.

238- Elev 6: “Ja veldig”.

239- Elev 5: “Er du sikker?”.

240- Elev 4: “Det er liksom kostnaden, den er 20 prosent”.

241- Elev 6: “Jeg tenkte sånn 2 år”.

242- Elev 5: “2 år? Tingen er, du må jo se dem kan spare opptil 20 prosent på dieselforbruket”.

243- Elev 4: “Ja”.

244- Elev 5: “Og så mye betaler dem hver liter”.

245- Elev 6: “mhm”.

246- Elev 5: “Men da tar du jo bare å fjerne 20 prosent av det der” (peker på arket).

247- Elev 6: “Ja”.

248- Elev 5: “Ja, fjerner 20 prosent av det der som var, hva var det igjen?”.

(Elev 4 og 5 gjør egne beregninger og tenker høyt hver for seg)

249- Elev 5: “Det kan være at jeg har regnet litt feil…”.

250- Elev 4: “300 000 første året negativt og så”.

251- Elev 5: “Så mye bruker dem, hvis dem bruker drageseil så spare dem så mye penger per liter. Og da sparer dem, hvor mye sa du dem sparte?”.

252- Elev 4: “ 3 hundretusen fordi hvis man tar kostnadene så blir det jo minus 20 prosent på dieselet, som det blir hvert år, og 2 million og 8 hundretusen og så har vi selve kostnaden for drageseilet, og det blir jo 3 hundretusen, 3 hundretusen som er i negativt, som liksom blir igjen. Og da er det bare å gjøre…”.

253- Elev 5: “Så mye peng, dem bruke så mye peng”.

254- Elev 4: “Det blir 300 000 hvert år”.

256- Elev 5: “Ja dem spare, ja da minus… Som er, da spare dem 2900 nei, 294 000, ja spare dem”.

257- Elev 4: “Ja så ca. nesten 300 000 ja. Og da når vi tar det igjen, hvor mange år det tar for å…”.

(Elev 5 tenker høyt)

258- Elev 4: “Hva sa du?”.

259- Elev 5: “Ja det blir fortsatt 8,5 år”.

260- Elev 4: “Ja”.

261- Elev 5: “Fordi du må jo dele det du får her (peker på arket). Det du får her som er hvor mye du sparer på diesel hvert år, det må du jo dele på det der. Når du deler det på det, så får du 8,5”.

262- Elev 6: “Så du er sikker på det?”.

263- Elev 5: “Ganske sikker”.

264- Elev 6: “Okei”.

265- Elev 5: “8 og et halvt år er rett”.

266- Elev 4: “Ja det gir mening, det gir faktisk veldig mening det her”.

267- Elev 5: “Ja, det var varmt her”.

268- Elev 6: “Syns du?”.

269- Elev 5: “jeg synes det var helt sykt varmt her”.

270- Observatør 1: “Det er varmt ja”.

271- Observatør 2: “jeg skrudde litt ned”.

272- Elev 5: “Tror det var det. hva fikk vi på første...det var den 30 kilometeren”.

273- Elev 4: “30 kilometer i timen”.

274- Elev 5: “Og så var det”.

275- Elev 6: “B”.

276- Elev 5: “2 12… så fikk vi“.

277- Elev 4: “8,5”.

278- Elev 5: “Åtte og et halvt år. Og vi er enig i hva det er?”.

279- Elev 4: “Jeg vet ikke, jeg er litt usikker på den siste men”.

280- Elev 6: “Jeg også”.

281- Elev 5: “På den siste. Den var litt sånn her”.

282- Elev 4: “Den var litt litt sånn forvirrende”.

283- Elev 5: “Ja. Men jeg tror nå det bare var å først finne ut, ta å gange hvor mye liter de bruker hvert år på diesel, eller hvor mye penger de bruker”.

284- Elev 4: “Først finne ut hvor mye de bruker på diesel, og hvor mye de bruker på”.

285- Elev 5: “ja, uten det der drageseilet, og så finne ut hvor mye de bruker med drageseilet”.

286- Elev 4: “Ja”

287- Elev 5: “Og så bare ta å, ta det lille som er i veien nedover der. Og det er jo 2 9 4 da”.

288- Elev 4: “294”.

289- Elev 5: “Ja, og så tar du bare 294 tusen, og deler det på, eller, ja, ta 2,5 million og deler det på 294 tusen, og da får du 8,5”.

290- Elev 4: “*Ja*, det gir mening”.

291- Elev 5: “Da blir det åtte og et halvt år...ja”.

292- Elev 6: “Ja”.

293- Observatør 2: “ja, også tror jeg du fikk ganske god forklaring på den her oppgave 1, hvordan dere kom frem til den”.

294- Elev 5: “hvordan den der…”.

295- Observatør 2: “Dere var ganske, det virket som dere var enig der”.

296- Elev 5: “Ja, den var ganske kjapt gjort. Den hadde litt enkel, det var jo bare, hva heter det, å finne ut hva 25 prosent av 24 var”.

297- Observatør 1: “Var du enig i det dere fant ut på oppgave 1?”.

298- Elev 6: “Ja, jeg fikk samme svar”.

299- Elev 5: “Det ble samme svar, han gjorde det bare litt annerledes”.

300- Observatør 1: “Hvordan gjorde du det?”.

301- Elev 6: “Altså han delte jo”.

302- Elev 5: “ja, jeg delte på, 1,25 fordi det blir jo 125 prosent da. Som da, da blir det jo, ja, da får du jo pluss 25 prosent av det du har”.

303- Observatør 1:” Og hvordan gjorde du det?”.

304- Elev 6: “Jeg tok bare å delte 24 på 4, og da blir det 6, også plusset 6 på 24”.

305- Observatør 1: “ja det er jo det, hvis man får riktig svar så er det ikke så nøye hvordan man får det”.

306- Elev 5: “Ja”.

307- Elev 4: “Forskjellige tenkemåter”.

308- Observatør 2: “Ja, den oppgave 2 da. det virket som det ble pytagoras, som dere brukte”.

309- Elev 5: “Ja, jeg husker...er det det det heter?”.

310- Elev 6: “Det heter pytagoras”.

311- Observatør 2: “Og dere fikk jo svar”.

312- Elev 5: “Ja”.

313- Observatør 1: “Ble dere enige om fremgangsmåten deres på den oppgaven?”.

314- Elev 6: “Ja for først når jeg regnet ut så fikk jeg sånn 218, så tenkte jeg bare, jeg tar bare 212 fordi det var nærmest, også skulle jeg bare høre hva de tenkte, også når de også fikk så, rundt 212 komma et eller annet, så”.

315- Observatør 1:” Men hvordan kom du frem til 218?”.

316- Elev 6: “Jeg vet ikke”.

317- Observatør 1: “Du må jo har regnet et eller annet?”.

318- Elev 6: “Ja, jeg må jo det, men jeg vet ikke hva jeg regnet”.

319- Elev 5: “Jeg tok bare å husket hva “læreren vår” hadde lært oss. Og så tok jeg først å fant de kvadratene som er utenfor trekanten da, som er 150m på alle sidene da, tok jeg bare 150 ganger 150. Jeg vet at begge de der sidene er like lange fordi det er jo en rettvinklet trekant, også tok jeg bare...hva fikk jeg...ja, det jeg fikk som svar, som var 150 ganger 150, tok jeg å plus- ganget det ganger 2. Så tok jeg kvadratroten av det fordi de to sidene til sammen er like mye som den der hypotenusen da. Hvor mye den er, ganger seg selv”.

320- Observatør 2: “Og du ganget det med 2 fordi?”.

321- Elev 5: “Fordi, ja 150 ganger 2 fordi jeg må finne først kvadratroten av den der, den der firkanten som er på siden der. For så å finne hypotenusen, og så har jeg jo to som er like mye, så da ganget jeg bare de to”.

322- Observatør 1: “Vi hadde et tilleggsspørsmål, det var da til oppgave 2 da. vi lurte på om dere kan se for dere noen andre løsningsmetoder som ikke inngår pytagoras for å finne rett svar på oppgave 2”.

323- Elev 5: “Kanskje det du gjorde?”. (ser på elev 6)

324- Elev 4: “Ja, det er det jeg…”.

325- Observatør 2: “Og det er også, en ting er at det er omtrentlig. Det er også litt derfor det er svaralternativer der, at det ikke er om å gjøre at, når du regner, om du treffer helt presist, for det finnes andre måter som er...vi vil gjerne vite hvis du har en annen metode”.

326- Elev 5: “Ja du fikk jo 212, nei 218, som er nærmest 212 da, og det...Hva gjorde du for å gjøre det?”.

327- Elev 6: “Vet ikke”.

328- Elev 5: “Husker ikke”.

329- Observatør 1: “Det er ikke noe farlig, altså”.

330- Elev 6: “Nei, jeg tok bare, fordi at, den andre var jo også 45 grader. Så tok jeg bare dem, også gjorde jeg et eller annet med den 90 graderen, og så fikk jeg bare 218”.

331- Observatør 1:” Et eller annet?”.

332- Elev 6: “Ja”.

333- Observatør 2: “Men du brukte bare gradene?”.

334- Elev 6:” Ja, jeg brukte gradene, og den der 150 meter, så var det, når de tok kvadratroten...var det 150 ganger 150?”.

335- Elev 5: “Ja”.

336- Elev 6: “Og det gjorde jo jeg også først, og så tok jeg å brukte det der grader, hva var det igjen? også fikk jeg 218”.

337- Observatør 2: “Brukte du noe lignende som de gjorde med pytagoras da?”.

338- Elev 6: “Ja, jeg gjorde som de gjorde i starten, men så tok jeg ikke å brukte… hva er det kateter det heter?”.

339- Elev 6: “Jeg brukte ikke resten av det der pytagoras”.

340- Observatør 2: “Ok”.

341- Observatør 1: “Enn her på venstresiden, var det noen andre tanker rundt det her?”.

342- Elev 4: “Jeg gikk litt annerledes, men jeg fikk, jeg ble ikke ferdig helt med den”.

343- Observatør 1: “Hvordan valgte du å gjøre det?”.

345- Elev 4: “Jeg gikk en helt annen metode så…”.

346- Observatør 1: “Bare fortell”.

347- Elev 4: “nei, for den var jo helt av, nesten av”.

348- Observatør 1: “Ja det gjør ingenting”.

349- Elev 4: “Den havnet i midten av de der to”.

350- Observatør 1: “Ingenting galt med det”.

351- Elev 4: “Med en gang jeg fikk høyden der så målte jeg, ut egentlig alt av, alt jeg visste. Hva var det jeg gjorde igjen... nå må jeg tenke”.

352- Observatør 1: “Hva målte du ut da?”.

353- Elev 4: “Jeg målte ut, først visste jeg hva de her nede var, ikke sant? så prøvde jeg å finne disse her nede, de blir ca. nesten sånn 70, 60 prosent mindre enn den. brukte den faktaen på å beregne meg opp til det. det går jo liksom i den skalaen der. så fikk jeg, nermeste jeg var er 238, og det laveste var 242”.

354- Observatør 1: “Ja, det er ikke så langt unna. kanskje hvis man hadde mer nøyaktige…”.

355- Elev 4: “Ja, mer nøyaktige beregninger så kunne jeg ha fått det”.