UiT Norges arktiske universitet

Fakultet for humaniora, samfunnsvitenskap og lærerutdanning

Et rammeverk for å identifisere hvordan lærerveiledninger støtter læreren

Mailiss Fløtten Andreassen og Maiken Ingerøynen

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk, LER – 3903, November 2023

Sammendrag

I denne masteroppgaven har vi utviklet et rammeverk for lærerveiledningsanalyse for å undersøke i hvor stor grad lærerveiledninger hjelper lærere til å undervise etter kjerneelementene i LK20. Først måtte sette oss godt inn i forskningslitteraturen for å prøve og finne essensen i kjerneelementene i LK20. På den måten fant vi kodeord for de ulike kjerneelementene. Deretter tok vi utgangspunkt i, og tilpasset Charalambous et al. (2010) rammeverk for tekstbokanalyse og Smith og Steins (1998) *Task analysis guide* for å komme fram til vårt rammeverk for lærerveiledningsanalyse. Charalambous et al. (2010) rammeverk består av en horisontal analyse, som ser på generell bakgrunnsinformasjon og struktur i bøkene, og en vertikal analyse som går i dybden på et matematisk konsept eller tema. Fordi vi skulle finne ut i hvor stor grad lærerveiledninger støtter lærerne i å undervise etter kjerneelementene, og to av kjerneelementene henger tett sammen med oppgavenes kognitive krav, ble vi også nødt til å analysere oppgavene.

Vi har analysert tre lærerveiledninger med tilhørende oppgaver fra elevbøkene. Matematikk 4A fra Cappelen Damms, Multi 4A fra Gyldendal og Matematikk grunnbok 4A fra Barentsforlaget. Det er krevende for læreren å undervise etter kjerneelementene, og funnene våre viser at de tre lærerveiledningene er ulike i måten og graden de støtter læreren i dette arbeidet på.

Forord

Med denne masteroppgaven avslutter vi vårt spennende og lærerike etter– og videreutdannings eventyr ved Universitetet i Tromsø – Norges arktiske universitet! Først med to år på Lærerspesialiststudiet, for så å «hoppe i det» å skrive en masteroppgave. Arbeidet med masteroppgaven har vært interessant og lærerikt, og vi har fått mye nyttig faglig påfyll som vi vil ta med oss videre i læreryrket.

Vi vil takke våre veiledere Thomas Eidissen og Ove Gunnar Drageset for god hjelp og veiledning. Vi vil også takke venner og kolleger som har heiet på oss hele veien. Vi må også rette en spesiell takk til familiene våre som har stilt opp sent og tidlig. Dette hadde vi aldri klart uten deres forståelse, tålmodighet og raushet. Dere har støttet oss, og motivert oss når vi har trengt det som mest! Til slutt må vi takke hverandre. Det har vært godt å være to om et til tider krevende studie ved siden av full jobb og familie. Uten hverandre hadde det ikke blitt noen masteroppgave!

Bjørnevatn 08. november 2023

Maiken Ingerøynen og Mailiss Fløtten Andreassen

Innhold

Tabelliste

Figurliste

1 Innledning

I denne oppgaven vil vi i første kapittel redegjøre for personlig og teoretisk bakgrunn for valg av tema. Deretter vil vi presentere problemstillingen, før vi til slutt i kapittelet vil ha en kort redegjørelse for oppbygningen til oppgaven vår.

1.1 Personlig og teoretisk bakgrunn for valg av tema

Etter mange år i læreryrket og innførsel av Kunnskapsløftet, LK20, kjente vi et behov for faglig oppdatering. Vi startet på etterutdanning høsten 2020 på UiT, Norges Arktiske Universitet, og studiet Lærerspesialist i matematikk. Vårt prosjekt har dermed bakgrunn i lærerspesialist studiet, der vi lærte mye nytt om hvordan undervise matematikk etter hvordan forskning viser at elevene lærer best. I tillegg innførte LK20 begrepet kjerneelementer, satte et økt fokus på dybdelæring, og på at elevene skal rustes til å løse problemer som vi ennå ikke vet hva er. Dermed har fokuset blitt snudd til at elevene skal tilegne seg en relasjonell forståelse for matematikken, slik at de kan bruke det de kan til å løse utfordringer i framtiden. Dette er helt i motsetning til hvordan vi selv lærte matematikk på barneskolen, og ikke minst hvordan vi har lært at vi skal undervis matematikk. I våre øyne setter dermed LK20 nye krav til lærerens rolle i klasserommet, og hvordan læreren skal drive undervisning. Gjennom mange års erfaring har vi både opplevd selv, og sett hvor viktig lærerveiledningene kan bli i planleggingen av undervisningen. Når Ball og Cohen (1996, s. 6) hevder at bruk av *Curriculum material* er en av de eldste strategiene for å prøve og påvirke undervisningen i klasserommet, og at *Curriculum material* kan brukes som verktøy for å gjennomføre og oppnå mål og standarder for undervisningen, kjente vi ekstra på viktigheten av tilgangen til gode lærerveiledninger for alle lærere. Vi tolker her curriculum material som blant annet lærerveiledninger (Drake et al., 2014, s. 154). Dette kan tyde på at lærerveiledning kan være et viktig hjelpemiddel for lærere som skal lære seg noe nytt. Da vi under lærerspesialist studiet fikk erfare hvordan planlegge, gjennomføre og ikke minst trene på undervisning lagt opp etter kjerneelementene, med «eksperthjelp» fra UiT og Matematikksenteret, for at elevene skal få en relasjonell forståelse for faget, og hvor annerledes det følte for oss, kom tanken om at det er svært viktig at alle lærere får tilgang til gode lærerveiledninger, som gir læreren konkret hjelp til hvordan undervise etter kjerneelementene i matematikk. Når denne tanken hadde satt seg i hodet, kom neste tanke. Hvordan kan vi bestemme hvilke lærerveiledninger som er gode eller ikke?

Mange masteroppgaver har analysert ulike læreverk. De fleste med hovedfokus på oppgavene elevene skal løse. Vi ønsker derimot å legge hovedfokuset på hvordan lærerveiledningene legger til rette for at læreren skal lykkes med å undervise etter kjerneelementene, i den tro at lærerveiledningen kan være til hjelp for lærerne hvis den er god. Om vi har slike lærerveiledninger tilgjengelig i dag blir for oss spennende å undersøke.

Vi har selv vært med på ulike utviklingsarbeid i skolen, og har erfart på egne arbeidsplasser at det ikke alltid er like lett å implementere noe nytt i hele organisasjonen, og at endring tar tid. Da kan det være fint å ha en lærerveiledning å støtte seg på som er oppdatert til den nye læreplanen. Vi ønsker å se på om det er mulig å lage et rammeverk som kan sjekke om lærerveiledningene legger til rette for, og støtter opp om hva læreren må gjøre i sin undervisning for å omfavne bruken av kjerneelementene. Dette for å lykkes med å undervise etter LK20, slik at elevene oppnår den relasjonelle forståelsen som kjerneelementene legger opp til.

1.2 Problemstilling og avgrensing

Siden vi ønsker å se om lærerveiledninger hjelper læreren til å undervise etter kjerneelementene har vi valgt å ta utgangspunkt i teori og læreplanens definisjoner. Videre har vi valgt å ta utgangspunkt i eksisterende rammeverk av Charalambous et al. (2010), gjort modifikasjoner og utviklet et eget rammeverk. Rammeverket vil se på kognitive krav i oppgaver og om læreren får hjelp til å undervise etter kjerneelementene. Dette innebærer at det var mye teori å sette seg inn i, og mye teori å presentere.

Vår problemstilling blir derfor følgende:

> *I hvor stor grad hjelper lærerveiledningene læreren med å undervise etter de ulike kjerneelementene gjennom oppgavene?*

Vi har valgt tre lærerveiledninger og utvalgte kapitler. Bakgrunnen for utvalget vårt, vil vi komme nærmere inn på i metodekapitlet.

1.3 Oppgavens oppbygning

Vår oppgave består av seks kapitler der kapitel en er innledningen. I kapitel to vil vi presentere relevant teori for vår oppgave. Først vil vi si litt om hvorfor vi har fått ny læreplan, og litt om hva som er nytt i LK20. Deretter vil vi presentere teori om matematisk forståelse og kompetanse, før vi presenterer teorien vi har brukt for å finne essensen i de ulike kjerneelementene. Med utgangspunkt i kodeordene vi fant fra kjerneelementene vil vi presentere relevant teori om hvordan vi ser lærerens nye rolle i klasserommet. Det neste vi presenterer i teorikapittelet er først tidligere forskning på lærerveiledninger, og så tidligere forskning på tekstbøker. Til slutt vil vi presentere to konseptuelle rammeverk som vi vil bruke i utarbeidelsen av et rammeverk til bruk på lærerveiledningsanalyse. Kapitel tre er metodekapittelet vårt. Her vil vi presentere valg av tilnærming og metode, utvalg, forskningsetikk og forskningskvalitet, og hvordan vi har utviklet vårt rammeverk for lærerveiledningsanalyse. Til slutt i teorikapitlet vil vi presentere hvordan vi har gjennomført datainnsamlingen vår. I kapittel fire vil vi presentere analyse og funn, før vi i kapitel fem drøfter funnene våre. Til slutt, i kapittel seks, vil vi komme med en avslutning og konklusjon der vi ser om vi har svart på problemstillingen vår, og deretter prøve å si noe om veien videre.

2 Teori

I denne delen vil vi presentere relevant teori som vi vil bruke til å svare på problemstillingen.

2.1 Hvorfor fikk vi ny læreplan, og hva er nytt i LK20?

Her vil vi trekke fram noe av bakgrunnen for at vi har fått ny læreplan, hvilke sammenhenger vi ser mellom læreplanen i matematikk og forskning på hvordan undervise slik at elevene oppnår en dypere forståelse for faget, altså dybdelæring. Først vil vi skrive litt generelt om bakgrunnen for nye læreplaner, før vi vil belyse noen endringer fra Kunnskapsløftet 2006, LK06, til LK20, som påvirker hvordan matematikkundervisningen skal foregå.

I Norge skal opplæringsloven sikre at alle barn får en god og likeverdig opplæring, der elevene utvikler kunnskaper for å mestre eget liv, og kunne delta i samfunnet. Samfunnet er i rask endring, og at det elevene skal lære nå, må være relevant og framtidsrettet. Fordi dagens samfunn stadig er i endring, er det svært viktig at dagens elever blir rustet til å kunne bruke det de lærer nå på områder og utfordringer som ennå ikke er kjent for oss (Utdanningsdirektoratet, 2021a). TIMMS undersøkelsen, *Trends in International Mathematics and Sience Study,* er en internasjonal undersøkelse der ca. 60 land deltar for å måle og sammenlikne matematikk og naturfagsprestasjonene til elevene på tvers av landegrenser. Undersøkelsen måler elevenes evne til å bruke kunnskaper og ferdigheter i ulike situasjoner. Herunder blant annet elevenes evne til å resonnere, argumentere, se sammenhenger og trekke slutninger (Utdanningsdirektoratet, 2023a). Flere av disse evnene finner vi igjen i LK20, under fellesbetegnelsen kjerneelementer. I utarbeidelsen av ny læreplan var det kjerneelementene som ble prioritert først, og Udir sier selv at kjerneelementene er «det viktigste faglige innholdet elevene skal arbeide med i opplæringen», og er det elevene må lære for å mestre, og bruke faget (Utdanningsdirektoratet, 2019b). Evnen til å resonnere og argumentere, utforske matematikken og kommunisere om den, finner vi igjen i navnene til kjerneelementene. Evnen til å se eller oppdage sammenhenger er også presisert, og lagt vekt på i den nye læreplanen, og det legges vekt på at elevene skal bli gode problemløsere (Utdanningsdirektoratet, 2023b). I forordet skriver Opheim at det ikke lengere er tilstrekkelig at elever kun kan regne seg frem til et riktig svar, men at de skal lære seg en kompleks kompetanse, som krever mye av læreren (Kazemi & Hintz, 2019, s. 9).

Fra den gamle læreplanen, LK06, var tilbakemeldingene at det var for mange temaer. Dette førte igjen til utfordringer med å gå i dybden og arbeide med de viktigste elementene i de ulike fagene, noe som kunne føre til overflatelæring. Et ledd i arbeidet med å motvirke overflatelæring i LK20 var innførselen av kjerneelementene, og større fokus på begrepet dybdelæring. Kjerneelementene ble retningsgivende, og ga prioriteringer for læreplanene som ble laget i Fagfornyelsen. Kjerneelementene ble det mest sentrale og viktigste for elevenes læring i hvert fag, og kan være metoder, begrep, tenkemåter og uttrykksformer, i tillegg til kunnskapsområder (Utdanningsdirektoratet, 2021b; (Meld. St.132-18, 2018). Et større fokus på at elevene skal oppnå dybdelæring gjennom at de får mer tid til å utvikle forståelse og kunnskaper i matematikk, gir elevene kompetansen de trenger i framtidens arbeidsliv. Det å kunne se og oppdage sammenhenger innen et fagfelt, eller mellom fagfelt er med på å legge til rette for dybdelæring og forståelse i faget (Meld. St.132-18, 2018).

2.2 Matematisk forståelse

LK20 innførte kjerneelement i matematikk for å unngå overflatelæring. Kjerneelement skal være et ledd i å oppnå en dypere forståelse og kompetanse i matematikk. Her vil vi forklare hvordan vi forstår begrepet matematisk forståelse ut fra teori. Dette er viktig for at elever skal kunne oppnå dybdeforståelse i matematikken.

Skemp (2006, s. 92) omtaler matematisk forståelse på to ulike måter. På den ene siden har vi den instrumentelle forståelsen. Her bruker en regler og formler uten å forstå hvorfor reglen eller formelen virker, og uten å forstå hvorfor resultatet blir som det blir. Instrumentell forståelse blir ofte koblet opp mot tradisjonell undervisning der læreren forklarer framgangsmåten eller regler på tavla, før elevene skal løse liknende oppgaver ved hjelp av det læreren akkurat har demonstrert, gjerne kalt instrumentell innlæring. Matematikk blir da å huske regler og framgangsmåter. Elevene kan da få store utfordringer med å utføre oppgaver som ikke likner eksempeloppgavene fra lærerens demonstrasjon, fra eksempler i læreboka eller tidligere oppgaver de har øvd seg på. Ved instrumentell forståelse er det også større sannsynlighet for at elevene tar tak i tallene i en tekstoppgave og gjør en regneoperasjon, men uten å tenke på om svaret kan være logisk.

På den andre siden har vi relasjonell forståelse som handler om å ha kunnskap om hva man gjør og hvorfor man gjør det. Altså forstå konsepter, ideer og sammenhenger i større grad. Fordelen med relasjonell forståelse er at kunnskapen er lettere å overføre til andre oppgaver ved at man antar ut fra det man allerede vet. Kunnskapen er lettere å huske ettersom det ofte er prinsipper som kan knyttes til andre områder. For eksempel kan det å finne arealet av figurer, bygges videre på ved at en kan finne arealet av rektangler og trekanter. Instrumentell forståelse kan ha raskere effekt ved at en lærer en regel, for så å anvende den, mens i relasjonell forståelse kan det ta lengere tid å bygge forståelse, men kunnskapen blir mer varig (Skemp, 2006, s. 92).

Hiebert og Lefevre (1986, s. 23) beskriver matematisk forståelse på en liknende måte som Skemp (2006), men de bruker begrepene konseptuell kunnskap og prosedyrekunnskap, også omtalt som ferdighet og forståelse. De beskriver konseptuell kunnskap som kunnskaper med sterke relasjoner, der all informasjon er bundet sammen i ett nettverk. Ny konseptuell kunnskap blir konstruert ved at ny informasjon blir sammenvevd i det eksisterende nettverket av kunnskap, eller at eksisterende memoriset kunnskap, som er isolerte fakta, blir knyttet til det øvrige kunnskapsnettet (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 23).

Prosedyrekunnskap består av det formelle matematikkspråket og symboler, i tillegg til algoritmer for å løse oppgaver. Prosedyrekunnskap er gjerne et sett med steg for steg instruksjon som har blitt pugget og memorert (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 6). Hiebert og Lefevre (1986, s. 9) mener at å ha matematisk kunnskap inkluderer både kunnskaper om konseptuell kunnskap og prosedyrekunnskap. Videre sier de at det holder ikke bare å ha denne kunnskapen hver for seg, men for å inneha matematisk kompetanse må disse kobles sammen, og ikke være to isolerte kompetanser.

Relasjonell forståelse har likhetstrekk med konseptuell kunnskap der begge beskrives ved at kunnskap i matematikk er å finne sammenhenger, og at kunnskap bygges på hverandre. Instrumentell forståelse har likhetstrekk med prosedyrekunnskap da begge beskrives med å kunne regler, pugging og utføre trinnvise prosedyrer, uten forståelse for hvorfor det fungerer (Skemp, 2006, s. 92; Hiebert & Lefevre, 1986, s. 9).

Det som skiller Skemps (2006) beskrivelser fra Hiebert og Lefevre (1986, s. 9), er at de sistnevnte mener at for å ha matematisk kunnskap er det behov for både prosedyrekunnskap og konseptuell kunnskap ettersom de utfyller hverandre. De sier også at prosedyrekunnskap ikke utelukker forståelse, slik som instrumentell forståelse gjør. Det er da snakk om at Hiebert og Lefevre (1986, s. 23) sine definisjoner er to forskjellige kompetanser som hører sammen, mens Skemp (2006) er enten eller.

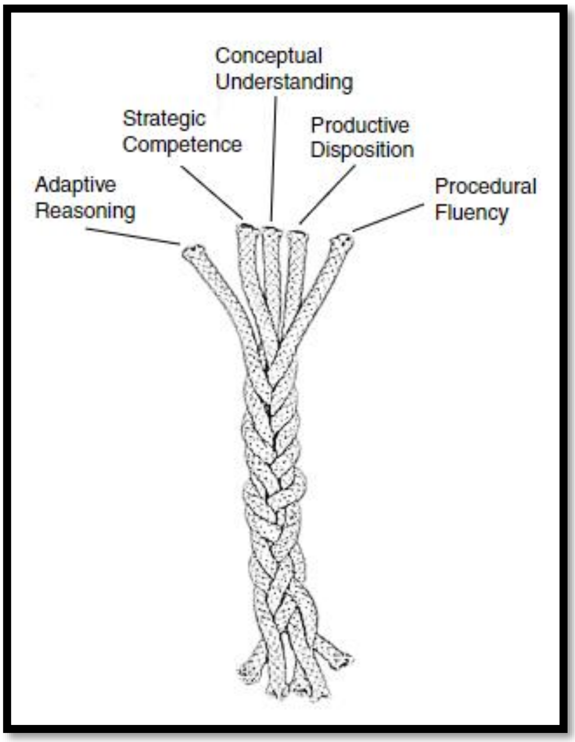
Hiebert og Lefevre (1986, s. 23) mener forholdet mellom konseptuell kunnskap og prosedyrekunnskap, er viktig ettersom disse to typer av kunnskap har en avgjørende og interaktiv rolle i utvikling av matematisk kompetanse.

2.3 Matematisk kompetanse

Å inneha matematiske kunnskaper som ferdighet og forståelse, har avgjørende og interaktiv rolle i utvikling av matematisk kompetanse (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 23), og er viktig for dybdelæring i matematikk slik vi nevnte over.

Her vil vi presentere teori om matematisk kompetanse, og hva det innebærer. Vi har valgt å bruke de engelske begrepene fordi vi ikke har funnet noen gode entydige oversettelser. Vi ønsker ikke å skape forvirring rundt begrepene kompetanse og ferdighet. Flere forskere har definert hva det betyr å inneha matematisk kompetanse, og vi har tatt utgangspunkt i Kilpatrick et al. (2001) og Niss og Jensen (2002). Å inneha matematiske kunnskaper som ferdighet og forståelse har avgjørende og interaktiv rolle i utvikling av matematisk kompetanse (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 23), og viktig for dybdelæring i matematikk

Kilpatrick et al. (2001, s. 115-119) har utviklet et rammeverk, som de kaller *Mathematical proficiency*, for de kunnskaper, forståelser og ferdigheter de mener er nødvendig for å lære matematikk. Rammeverket består av fem ulike komponenter som utfyller hverandre, representerer ulike sider av helheten, og er gjensidig avhengige av hverandre. Kilpatrick et al. (2001, s. 117) har utviklet en modell (se fig. 1) for å visualisere sammenhengen. Denne modellen kalles *Intertwined Strands of Proficiency*, og viser fem tråder som er flettet sammen. De illustrerer at man ikke kan fokusere på kun en eller to komponenter. Alle må utvikles. Kilpatrick et al. (2001, s. 115-119) beskriver at de fem trådene til sammen utgjør *Mathematical Proficiency*.



Figur 1 Kilpatrick et al. (2001, s. 117) Trådmodell

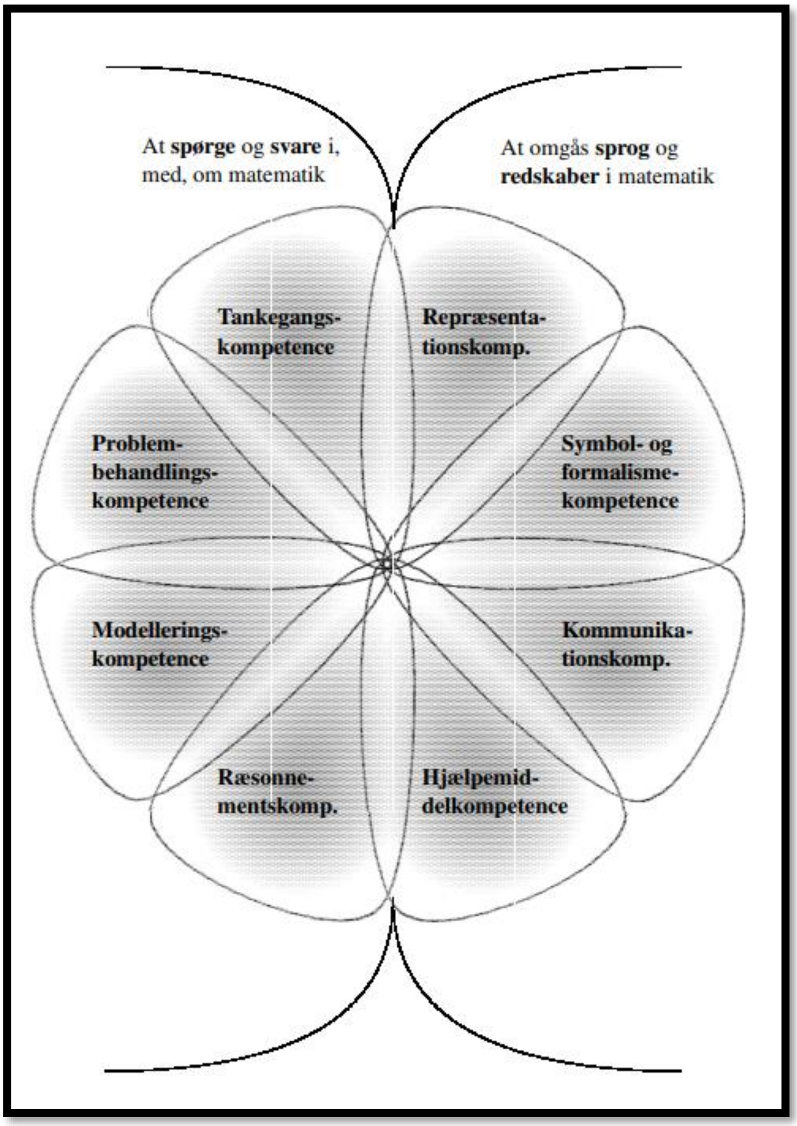
Conceptual understanding er å forstå matematiske konsepter, operasjoner og relasjoner. Det handler om å se helheten og sammenhenger mellom matematiske ideer, bruke og omgjøre mellom ulike representasjoner og tenke om svar er logiske (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-20). Dette har store likhetstrekk med det Skemp (2006) betegner som relasjonell forståelse, som vi omtalte ovenfor; å forstå konsepter, ideer og sammenhenger (Skemp, 2006, s. 92).

Procedural fluency, som er å inneha ferdighet til å utføre prosedyrer og eller beregninger, bruke de hensiktsmessig, fleksibelt, nøyaktig og effektivt (Kilpatrick et al., 2001, s. 121). Dette minner om Hiebert og Lefevres (1986, s. 6–8) prosedyremessige kunnskap som inneholder det formelle matematikkspråket, og likner ved at begge handler om å kunne utføre algoritmer for å kunne løse oppgaver. De to skiller seg fra hverandre ved at Hiebert og Lefevres (1986, s. 6) prosedyremsessige kunnskap gjerne kan være et sett med steg for steg instruksjoner som er blitt pugget og memorert, mens Kilpatrick et al. (2001, s. 121) framhever at prosedyrene skal kunne brukes fleksibelt.

Strategic competence er å kunne formulere matematiske problem, finne hensiktsmessig strategier, kunne representere problemet og sjekke om løsningen er gyldig (Kilpatrick et al. 2001, s. 124). Dette ligner på problemløsning som vi skal komme tilbake til senere. *Adaptive reasonning* handler om å kunne tenke logisk om sammenhengene mellom ulike konsepter og situasjoner. Det handler om å resonnere seg frem til en løsning og kunne bevise hvorfor det er slik. Resonnering handler om å skape forståelse som muliggjør læring (Kilpatrick et al., 2001, s. 129). *Productive disposition* handler om å kunne se matematikk som nyttig og nødvendig, og ha forståelse for at matematikk er noe man har behov for (Kilpatrick et al., 2001, s. 131).

Den matematiske kompetansen, som Kilpatrick et al. (2001) har vurdert til å være viktig, inneholder ingen matematiske tema, men kognitive prosesser. Dette har likhetstrekk med kjerneelementene i LK20. De første kjerneelementene har ingen matematiske tema. men kan gjerne kalles metoder for å tilegne seg kunnskaper for å lære matematikk.

Niss og Jensen (2002, s. 43) definerer matematisk kompetanse på to måter. Den generelle, som de beskriver å inneha ekspertise i matematikk, er å ha kunnskap om å kunne bruke matematikk i alle områder i livet som måtte kreve det. Den andre matematiske kompetansen de definerer, er en matematisk kompetanse, eller en delkompetanse, som vi har valgt å kalle det heretter. Disse delkompetansene definerer de som å være i stand til å handle hensiktsmessig i situasjoner som har gitte matematiske utfordringer. Slik vi forstår det, er dette å inneha ekspertise i matematikk, og ha alle de åtte delkompetansene, altså hele blomsten. Niss og Jensen (2002) har beskrevet åtte delkompetanser, som inngår i den generelle eller overordnede matematiske kompetansen. Slik de beskriver, innebærer en generell matematisk kompetanse noe mer enn bare faktakunnskaper og ferdigheter innen flere matematiske områder. Disse faktakunnskapene og ferdighetene må sees i sammenheng, da de både henger sammen og delvis overlapper hverandre, samtidig som de har sin egen identitet. De har valgt å illustrere dette som en blomst (se fig. 2) med åtte kronblader som er bundet sammen i et overlappende knutepunkt i midten (Niss & Jensen, 2002, s. 43-47).



Figur 2 Niss og Jensens (2002, s. 45) Modell av de åtte matematiske kompetansene.

De åtte delkompetanse er, som vi ser på figuren, igjen delt inn i to overordnede grupper med fire deler hver. De overordnede gruppene kalles «Å spørre og svare i, og om matematikk» og «Å kunne håndtere matematikkens språk og redskaper». Den første overordnede gruppen inneholder tankegangskompetanse som er kunnskap om spørsmål og svar som er karakteristiske for matematikk, og forståelse av begrepers
rekkevidde. Problembehandlingskompetanse er å kunne formulere og løse matematiske problem (Niss & Jensen, 2002, s. 49). Dette likner på Kilpatrick et al. (2001, s. 124) definisjon om *strategic competence*, som blant annet er å kunne formulere matematiske problem og finne hensiktsmessig strategier. Modelleringskompetanse er å kunne analysere og

bygge matematiske modeller som også omhandler kunnskap utenfor matematikken (Niss & Jensen, 2002, s. 52). Resonnementskompetanse er å kunne følge og bedømme et matematisk resonnement, kjenne argumenter og ha forståelse for matematisk bevis (Niss & Jensen, 2002, s. 54). Det kan minne om Kilpatrick et al. (2001, s. 129) definisjon på *adaptive reasonning* som blant annet er å resonnere seg frem til en løsning og kunne bevise hvorfor det er slik.

Den andre overordnede gruppen, «Å kunne håndtere matematikkens språk og redskaper», inneholder representasjonskompetanse. Det er å kunne forstå, bruke og se sammenheng mellom ulike representasjoner. Symbol og formalismekompetanse er å avkode og oversette symbolsk og formelt språk til dagligdags språk, og bruke symbolske utsagn, uttrykk og formler. Kommunikasjonskompetanse er å kunne kommunisere i, med og om matematikk. Hjelpemiddelkompetanse er å ha kjennskap til og kunne bruke relevante hjelpemidler, eks IT, kalkulator, linjal, passer, vinkelmåler, tabell osv. (Niss & Jensen, 2002, s. 58).

Både Kilpatrick et al., (2001) og Niss og Jensen (2002) har altså utviklet modeller/teorier for hva som skal til for å oppnå matematisk kompetanse. Likt for begge modellene er at begrepet er satt sammen av flere delferdigheter. Kilpatrick et al. (2001, s. 133) vektlegger at alle disse ferdighetene er koblet sammen, må arbeides med samtidig og utvikles synkront, mens Niss og Jensen (2002, s. 49) vektlegger at det er viktig å ikke overtolke modellen/teorien, da alt kan overlappes.

Forskjellen mellom disse to teoriene er blant annet at Niss og Jensen (2002, s. 44) har to overordnede grupper de har delt kompetansene i, og har åtte delkompetanser. Kilpatrick et al. (2001, s. 116) har kun fem komponenter. Trådene i Kilpatrick et al. (2001, s. 133) fremstår som mer isolerte komponenter, mens Niss og Jensens (2002, s. 45) åtte blad har overlappinger. Trådmodellen til Kilpatrick et al. (2001, s. 116-117) viser at de ulike delkompetansene er avhengige av hverandre, og at man må inneha dem alle for å oppnå suksessfull læring i matematikk. Niss og Jensens (2002, s. 43-47) blomst derimot viser at den ene kompetansen inneholder deler av den andre, og at det er vanskelig å skille dem fra hverandre, fordi de er overlappende. Kilpatrick et al. (2001, s. 133) understreker at det ikke nytter å kun arbeide med en eller to tråder ettersom trådene er avhengige av hverandre og at de kan inneholde andre aspekter, for eksempel hensyn til sender og mottaker, formål, budskap og medier for kommunikasjon. I tillegg har Niss og Jensen (2002, s. 47-72) større fokus på det didaktiske der de har eksempler på hvordan læreren kan øve på de spesifikke delkompetansene med elevene.

2.4 Kjerneelementer

Som nevnt tidligere skal kjerneelement være et ledd i å oppnå en dypere forståelse og kompetanse i matematikk. Kjerneelement skal gjennomsyre all matematikkundervisning uavhengig av trinn og faglig tema, og skal arbeides med gjennom hele skoleløpet (Hagelia, 2021). Det vil si at læreren må ha fokus på både kompetansemålene og kjerneelementene i planleggingsarbeidet sitt. De seks kjerneelementene i matematikk er Utforskning og problemløsning, Modellering og anvendelse, Resonnering og argumentasjon, Representasjon og kommunikasjon, Abstraksjon og generalisering, og Matematiske kunnskapsområder. Kjerneelementene er sentrale begreper, metoder, tenkemåter, kunnskapsområder og uttrykksformer som skal bidra til at elevene gjennom hele skoleløpet, skal utvikle en forståelse i fagets innhold og sammenheng (Utdanningsdirektoratet, 2019). Vi tolker at kjerneelementet Matematisk kunnskapsområde er delt inn i kompetansemålene på de ulike trinn. Vi vil ikke omtale dette kjerneelementet i vår oppgave, da den ikke går ut på å undersøke om elevene oppnår målene for trinnet.

I dette delkapitlet vil vi presentere kjerneelementene i matematikk og definere de ut fra LK20 og relevant teori.

2.4.1 Utforsking og problemløsning

I dette delkapittelet vil vi prøve å redegjøre for hvordan vi tolker kjerneelementet utforsking og problemløsning i LK20 gjennom teori. Ut fra dette vil vi finne essensen i kjerneelementet, og bestemme kodeord som vi skal se etter i lærerveiledningen for å identifisere det.
I LK20 står det at utforsking og problemløsning går ut på at elevene skal finne mønster og sammenhenger, og diskutere seg fram til en felles forståelse. Fokus skal være på strategier og framgangsmåter enn på selve løsningen. Problemløsning handler om å utvikle en metode for å løse problemer som de ikke har kjennskap til fra før. Her trekkes også fram at algoritmisk tenking er viktig i prosessen med å utvikle strategier og fremgangsmåter for å løse ulike problemer. I den forbindelse er det at elvene skal lære å bryte ned et problem i delproblemer som kan løses systematisk. LK20 sier også at problemløsning handler om det å kunne analysere og omforme kjente og ukjente problemer, man skal kunne løse problemene og i tillegg vurdere om løsningene er gyldige (Kunnskapsdepartementet, 2019). I engelskspråklig forskningslitteratur finner vi ulike begreper brukt om tilnærmet like arbeidsmetoder. Begreper som går igjen er *Inquiry*, *Inquiry based learnig*, *Inquiry based teaching* og *landscapes of*

Investigation. Vi har ikke funnet noen entydige oversettelser av disse begrepene til norsk, men vi ser at begrepene undersøkende matematikkundervisning, utforskning og undersøkelseslandskapet brukes i norskspråklig og skandinavisk litteratur.

I følge Dewey (1945, referert i Artigue og Blomhøj, 2013, s. 789) er *inquiry*, som vi velger å oversette til utforskning, grunnlaget for oppdagelse og læring, og at utforskning ikke bare ender med et svar om at «det virker», men at det er viktig å også vite hvorfor «det virker». Nosrati og Wæge (2015, s. 3) har oversatt begrepene *inquiry based* learning and teaching til undersøkende matematikkundervisning, og skriver at dette er en alternativ undervisningsform til oppgaveparadigme, som er at elevene arbeider med mange like oppgaver. Jensen og Wæge (2010, s. 5) beskriver undersøkende matematikkundervisning som en læringsaktivitet der det er fokus på elevenes tenkning og resonnering. Elevene skal selv finne mulige løsningsstrategier, metoder og løsninger. Læreren skal oppmuntre og støtte elevene i dette arbeidet ved å oppfordre dem til å finne egne løsningsstrategier, forklare hvordan de har tenkt og begrunner hvorfor de mener det må bli slik. Dette støttes av det Dewey (1945, referert i Artigue & Blomhøj, 2013, s. 798) bidro med, at elevene ikke bare skal finne ut om «det virker», men også «hvorfor».

"Et (formuleret) matematisk problem er et særlig type matematisk spørsmål, nemlig ét hvor en matematisk undersøgelse er nødvendig for besvarelsen" sier Niss og Jensen, (2002, s. 49). Dette bygger opp under Artigue og Blomhøjs (2013, s. 808-809) beskrivelse av *Inquiery-based Education* in Mathematics, der utforskning og problemløsning kan sees i lag. De skriver at elever som møter ikke-standardiserte problemer må utvikle egne strategier og framgangsmåter for hvordan løse et problem. Elevene må undersøke, gjøre antagelser og formodninger, eksperimentere og evaluere. Elevene får selv et betydelig ansvar for matematikken, blir oppmuntret til å stille egne spørsmål, og se for seg mulige generaliseringer av resultatene de kommer fram til. Det har likhetstrekk med hvordan Andersen et al. (2018, s. 20) beskriver utforskning som å undersøke eller granske, med mål om å finne svaret på en problemstilling. Andersen et al. (2018) sier i tillegg at det er læreren som skal sette målet og rammene for undersøkelsen, mens elevene selv får bestemme løsningsstrategien de vil bruke. Videre at det å arbeide utforskende legger til rette for å lære i samarbeid med andre.

Skovmose (2001, s. 125) beskriver et undersøkelseslandskap der elevene er aktive i egen læringsprosess, tar over prosessen med utforskning av matematikken, forklarer og reflekterer rundt matematikk og matematikkens bruksområder, er lik Nosrati og Wæge (2015, s. 12) beskrivelse av en undersøkende undervisningskontekst, der elevene utforsker mønstre og system i matematiske problem. Skovmose ser undersøkelseslandskapet som alternativ til oppgaveparadigmet. Elevene skal heller stille egne spørsmål, og lete etter forklaringer og begrunnelser. Elevene skal altså sammen med læreren stille spørsmål og undre seg over "hvorfor blir det sånn?" I undersøkelseslandskapet er det større fokus på prosessen enn at elevene finner kun ett svar, (Skovmose, 2001, s. 123), som også Jensen og Wæge (2010, s. 5) belyser. Jensen og Wæge (2010, s. 5) tilfører at elevene heller ikke skal gjette hva læreren vil frem til.

Skovmose (2001, s. 125-128) definerer oppgaver i undersøkelseslandskapet som oppgaver der elevene skal lete etter mønster og systemer i tall, problemløsningsoppgaver og prosjektoppgaver med reelle problemstillinger. På den måten vil elevene utvikle kompetanse i å tolke og handle i sosiale og politiske situasjoner ut fra matematikken. Noe som også læreplanen setter fokus på. Dagens elever må lære hvordan de kan løse problemer som vi ennå ikke vet hva vil være (Kunnskapsdepartementet, 2019). Noe Dewey (1945, referert i Artigue & Blomhøj, 2013, s. 799) hevdet at det er viktig å velge oppgaver fra *real-life situations*, og gjennom disse linke sammen elevenes skolekunnskaper og ikke-skole kunnskaper.

Boaler et al. (2017, s.1) hevder at de største ideene som gjennomsyrer all matematikk er å se etter mønster, undersøke og navngi relasjoner, sette sammen og ta fra hverandre tall og former. Devlin (1994, s. 6) hevdet at matematikk kan defineres som *the sience of Patterns* og at matematikere utforsker abstrakte mønster, som for eksempel numeriske, former, og bevegelser. Altså kan mønstrene være abstrakte, reelle, statiske, dynamiske, tenkte eller virkelige, kvantitative eller kvalitative. Cuoco, et al. (1996, s. 378) sier blant annet at elever bør oppmuntres til å finne glede i å finne skjulte mønstre i matematikken, altså oppmuntre elevene til å bli det Cuoco et.al (1996) har valgt å kalle mønstersniffere. Carpenter et al. (2003, s.1) hevder at å lære matematikk er å lære måter å tenke på, som igjen involverer å lære kraftfulle matematiske ideer, *Big Ideas*. Vi har valgt å oversette dette til store ideer i matematikk. Dette er likt med det Boaler et al. (2017, s. 1) hevder om at matematikk består av flere store ideer som gjennomsyrer all matematikk. Forbindelsene mellom disse ideene gir matematikken sammenheng, og gjennom å se sammenhengene får elevene større forståelse for matematikk.

Lester (2013, s. 3) hevder det finnes minst fire ulike forskningstradisjoner på problemløsning. Alle er enige om at et problem er en oppgave der den som skal løse oppgaven ikke umiddelbart vet hvilken fremgangsmåte hen skal bruke. Hiebert et al. (1997, s. 8-13) bruker en definisjon på problemløsningsoppgaver som har likhetstrekk med Lesters (2013) ovenfor-nevnte utsagn om problem, at en oppgave må være problematisk for den som skal løse den. I tillegg hevder Hiebert et al. (1997, s. 8) at elever som skal løse problemet også må kunne bruke den kunnskapen de allerede har for å løse problemet, og i tillegg må problemet kunne engasjere eleven til å tenke på det Hiebert et al. (1997) mener er viktig matematikk. Niss og Jensen (2002, s. 53) hevder at en rutineoppgave i matematikk kan være et problem, dersom den som skal løse problemet ikke vet hvordan hen skal løse det. For eksempel fordi hen ikke har lært algoritmen. Et problem kan både være abstrakt og kontekst-uavhengig.

Wæge og Nosrati (2018, s. 79) fremhever viktigheten av at elevene får arbeide med kognitivt krevende oppgaver som fremmer resonering og problemløsning. Både Van de Walle et al. (2020, s. 61) og Wæge og Nosrati (2018, s. 83) sier at det er viktig at oppgavene kan angripes på flere måter, da elevene vil ha ulik forhåndskompetanse. Det som skiller de to kildene fra hverandre er at Van de Walle et al. (2020, s. 64-65) framhever viktigheten av at elevene kan kjenne seg igjen i konteksten i oppgaven, mens Wæge og Nosrati (2018, s. 79-90) framhever viktigheten av mestring og motivasjon. Van de Walle et al. (2020, s. 61) hevder at oppgaver som fremmer problemløsning må være kognitivt krevende. Dette ligner på det Lester (2013, s. 4) skriver om at problemløsning som aktivitet krever at de som skal løse problemet engasjerer seg i flere kognitive prosesser. Det sammenfaller med hvordan Wæge og Nosrati (2018, s. 79) definerer kognitivt krevende oppgaver, som gir elevene en genuin utfordring. Samtidig har vi over skrevet om hvordan både Lester (2013, s. 3-4) og Hiebert et al. (1997, s. 8-13) sier at et problem eller en problemløsningsoppgave er en oppgave som er problematisk for den som skal løse den fordi hen ikke har en framgangsmåte eller en prosedyre på forhånd. Som vi skrev over sier Niss og Jensen (2002, s. 53) at et matematisk problem er en spesiell type problem som krever en matematisk undersøkelse for å kunne besvares. Ut fra dette tolker vi det slik at for at en oppgave skal kunne være problemløsende, må oppgaven være kognitivt krevende for den som skal løse den.

Stein og Lane (1996, referert av Smith & Stein, 1998, s. 344) sier at elever lærer best hvis de blir presentert for oppgaver med høye kognitive krav, og som engasjerer dem på et høyt kognitivt nivå av tenking og resonnering. Videre sier de at dersom målet er at elevene skal utvikle evnen til å tenke, resonnere og løse problemer, er det viktig å starte med oppgaver med høye kognitive krav. Dette passer godt sammen med det Smith og Stein (1998, s 344) sier om at oppgavetypen elevene får er med på å bestemme hva elevene lærer. Dersom målet er at elevene skal lære å tenke selv, resonnere og løse problemer er det viktig å starte med oppgaver med høye kognitive krav. Pseudonymet Ron Castleman (referert i Smith & Stein 1998, s. 12-13) hevder at å gi oppgaver med høye kognitive krav i seg selv ikke er en garanti for at elevene engasjerer seg i problemet på et høyt kognitivt nivå. Men det er en forutsetning for at de skal ha mulighet til å gjøre det (Smith & Stein, 1998, s. 12). Carpenter et al. (2003, s.1) hevder at alle barn kan engasjeres i å tenke matematikk på et høyere nivå, men ofte ikke får muligheten til det.

Tabellen under viser essensen i kjerneelementet utforsking og problemløsning i form av kodeord ut fra teorien. Kodeord står med fete bokstaver, og kilden står til høyre for kodeordet.

Tabell 1 Kodeord for utforsking og problemløsing

Kodeord	Kilde	Kodeord	Kilde
Antall spørsmål i elevboka som får elevene til å forklare og begrunne	Skovmose (2001, s. 125)	**Hva hvis**	Skovmose (2001, s. 125)
Antall hjelpespørsmål i lærerveiledningen	Skovmose (2001, s. 125)	**Felles – samarbeid – oppsummering**	Læreplan kjerneelementene (Kunnskapsdepartementet, 2019) Andersen et al. (2018, s. 20) Liljedahl (2021, s. 43-44)
Sammenheng i matematikk	Læreplanen – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Boaler et al. (2017, s.1)	**Klassesamtale, samtale, snakk om**	Smith og Stein (2018, s. 13-14) Læreplan kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019)
Forklar	Jensen og Wæge (2010, s. 5) Skovmose (2001, s. 125) Sriraman og Umland (2014, s. 46)	**Strategier**	Læreplanen -kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Jensen og Wæge (2010, s. 5) Andersen et al. (2018, s. 20) Artigue og Blomhøjs (2013, s.808 - 809)

Forslag	Jensen og Wæge (2010, s. 5)	**Sammenheng**	Læreplanen- kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Boaler et al. (2017, s. 1)
Begrunn	Jensen og Wæge (2010, s. 5) Skovmose, (2001, s. 123)	**Utforsking**	Læreplanen – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Artigue og Blomhøj (2013, s. 789) referer til Dewey Nosrati og Wæge (2015, s. 3) Skovmose (2001, s. 125)
Hvorfor	Jensen og Wæge (2010, s. 5) Skovmose (2001, s.123) Drageset (2016, s. 129) Artigue og Blomhøjs (2013, s. 789)	**Problemløsning**	Læreplanen- kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Skovmose (2001, s, 125-128) Hiebert et al. (1997, s. 8-13) Wæge og Nosrati (2018, s. 79) Van de Walle (2020, s. 61) Lester (2013, s. 4)
Hvordan	Jensen & Wæge (2010, s. 5) Artigue og Blomhøjs (2013, s. 808 - 809) Læreplanen – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Niss og Jensen (2002, s. 53)	**Undersøke**	Jensen og Wæge (2010, s. 5) Artigue og Blomhøj (2013, s.808-809) Andersen et al. (2018, s. 20) Skovmose (2001, s. 125) Boaler et al. (2017, s.1) Niss og Jensen (2002 s. 49)

2.4.2 Modellering og anvendelse

Kjerneelementet modellering og anvendelse beskrives som at modellering handler om å lage modeller som beskriver virkeligheten med et matematisk språk, og kritisk vurdere gyldigheten i slike modeller. Dette handler om å kunne bruke matematikken i ulike situasjoner (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Som vi beskrev i kapitlet om matematisk forståelse sier Niss og Jensen (2002, s. 52-53) at modelleringskompetanse går ut på å både kunne lage en modell av en situasjon utenfor matematikken, og å kunne vurdere gyldigheten av den. De hevder videre at det er mange likhetstrekk mellom problemløsningskompetanse og modelleringskompetanse. Likheten er at de begge er kognitivt krevende, og forutsetter ofte flere steg før en kommer fram til en løsning. Det som skiller problemløsningskompetanse fra modelleringskompetanse er at modelleringskompetansen fordrer at en tar hensyn til faktorer som ligger utenfor matematikkens områder, og at modellering krever virkelighetsnære kontekster. I modellering er målet å bruke matematikken til å lage en modell som representerer virkeligheten. Blum (2015, s. 79) hevder også at modellering er kognitivt krevende, med sine flere steg, og eleven må oversette konteksten til et matematisk språk. Han nevner i tillegg at arbeidet ofte går i sykluser, men dette sier ikke Niss og Jensen (2002, s. 52-53) noe om.

Matematisk modellering kan defineres som prosessen der man oversetter mellom den virkelige verden og matematikken, eller fra matematikken og til den virkelige verden. Virkelighetssituasjonen gjøres om til en matematisk modell, der modellen brukes til å utforske, forutsi eller løse problemer i virkeligheten (Blum & Ferri, 2009, s. 45; Blum, 2015 s. 73).

Niss og Jensen (2002, s.52) beskriver også at modelleringskompetansen er todelt. En må både kunne analysere grunnlaget for, og egenskapene til, en eksisterende modell og kunne bedømme holdbarheten til modellen ut fra dette. Det vil si at en må kunne avkode og fortolke de ulike delene av modellen i lys av situasjonen, eller de virkelige forholdene rundt det som er modellert. Man må også kunne lage matematiske modeller om andre felter enn matematikk. Det vil si å kunne oversette en situasjon fra et annet felt enn matematikk eller fra virkeligheten til matematikk. For deretter å lage en matematisk modell av situasjonen. Dette krever at en må beherske flere delelementer. Først må en kunne strukturere situasjonen som skal modelleres. Deretter må en kunne oversette den konkrete virkelige situasjonen til matematikk, eller matematisk språk (Niss & Jensen, 2002, s. 52). Blum og Ferri (2009, s. 54) viser til en enkel modell for modelleringssyklus som kan passe for elever, som kun inneholder fire steg: 1) Forstå oppgaven 2) Lage modell 3) Bruke matematikk 4) Forklare resultatet og eventuelt gjenta modelleringssyklusen.

Blum (2015, s. 73) påstår at ved å bruke begrepene *applications and modelling* kan vi adressere både prosessen med å utarbeide en modell, og selve modellen som oppstår i samspillet mellom "den virkelige verden" og matematikken. Vi velger å oversette ordet *applications* til anvendelse.

I tabellen under viser essensen av kjerneelementet modellering og anvendelse i form av kodeord ut fra nevnte teori. Kodeord er plassert i venstre kolonne og kildene i høyre kolonne.

Tabell 2 Kodeord for modellering og anvendelse

Kodeord	Kilde
Kognitivt krevende oppgaver med kontekst	Niss og Jensen (2002, s. 52- 53) Blum (2015, s. 79)
Lage modell til en oppgave	Læreplan – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Niss og Jensen (2002, s. 52- 53)
Modell fra virkeligheten som skal tolkes (graf, tabell ol)	Læreplan – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Niss og Jensen (2002, s. 52- 53)
Lage modell til kognitivt krevende oppgaver med kontekst	Niss og Jensen (2002, s. 52- 53) Blum (2015, s. 79)
Vurder	Læreplan – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Niss og Jensen (2002, s. 52- 53)

2.4.3 Resonnering og argumentasjon

Udir skriver at resonnering i matematikk handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultat ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Elevene skal utforme egne resonnement både for å forstå og for å løse problemer. Argumentasjon i matematikk handler om at elevene begrunner framgangsmåter, resonnement og løsninger og beviser at disse er gyldige (Kunnskapsdepartemenet, 2019).

Jeannotte og Kieran (2017, s.7) definerer matematiske resonnement som en kommunikasjonsprosess med seg selv, eller andre, som fører til en tankerekke. Denne definisjonen har likhetstrekk med Ball og Bass (2003, s. 29) definisjon for resonnering. Det som skiller dem fra hverandre er at Ball og Bass (2003) fremhever at for å gjøre matematikk forståelig, eller fornuftig, er det viktig at matematikk ikke kun sees på, og forstås, individuelt. Matematisk resonering omhandler en del kollektive prosesser og normer med bakgrunn og røtter i faget.

Lithner (2008, s. 257) har også definert resonnering som en tankerekke som tas i bruk for å produsere påstander eller utsagn, og komme fram til en konklusjon i oppgaveløsningen. Påstandene eller utsagnene trenger ikke være basert på formell logikk, og er derfor ikke begrenset til bevis. Påstandene eller utsagnene kan til og med være gale så lenge det er noen fornuftige tanker som støtter opp om dem, hos den som resonerer. Dette skiller seg fra Jeannotte og Kieran (2017, s. 7) og Ball og Bass (2003, s. 29) da de ikke sier noe om utsagnene må være korrekte.

Sriraman og Umland (2014, s. 46) definerer argumentasjon i et matematikklasserom som en tankerekke som har til hensikt å vise eller forklare hvorfor et matematisk resultat er sant. På bakgrunn av dette kan et matematisk argument være et formelt eller uformelt bevis. Dette likner på hvordan Lithner (2008, s. 27) definerer matematiske resonnement. Begge vektlegger tankerekke, men Sriraman og Umland (2014) skiller seg fra Lithner (2008) ved at de bruker begrepene argumentasjon og bevis, mens Lithner (2008) bruker begrepet resonnement, og ikke nevner bevis. Drageset (2016, s. 129) sier at på mellomtrinnet er det stort sett snakk om uformell argumentasjon, men at det er viktig å øve på å argumentere også her, fordi det legger grunnlaget for mer formell argumentasjon og bevis senere. Et enkelt grep læreren kan gjøre for å øve elevene i argumentasjon er å stille spørsmålet “hvorfor?”. “Hvorfor har du valgt denne metoden?», “hvorfor har du gjort slik?”, “hvorfor er det rett å gjøre slik?”, eller “hvorfor er det matematisk korrekt?”. Å stille “hvorfor-spørsmål” handler om å få elevene til å gi en begrunnelse for det de har tenkt eller gjort. Det er altså ikke nok å la elevene bare fortelle hva de har tenkt, eller dele sine strategier, men elevene skal reflektere over hvorfor de har gjort som de har gjort.

Tabellen under viser essensen i kjerneelementet argumentasjon og resonnering i form av kodeord ut fra nevnte teori. Kodeord er plassert til venstre i tabellen og kildene til høyre.

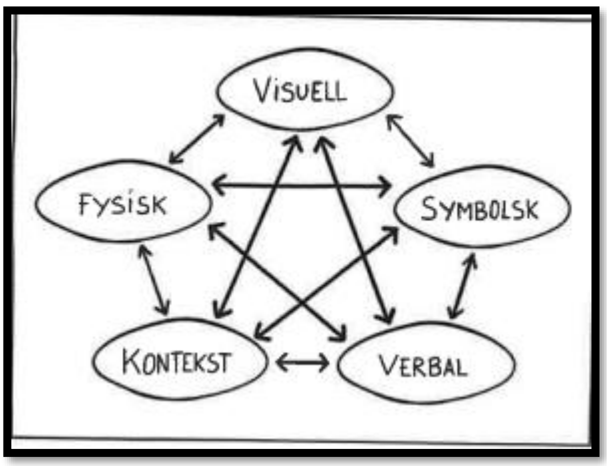
Tabell 3 Kodeord for argumentasjon og resonnering

Kodeord	Kilde
Samarbeid, læringspar, to og to	Jeannotte og Kieran (2017, s.7) Ball og Bass (2003, s. 29)
Tankerekke	Smith og Stein (1998, s. 12). Læreplanen – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Sriraman og Umland (2014, s. 46) Lithner (2008, s. 257)
Begrunn	Læreplanen- Kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Jensen og Wæge (2010, s. 5). Skovmose, 2001 (s.123)
Forklar	Sriraman og Umland (2014, s. 46) Jensen og Wæge (2010, s. 5) Skovmose (2001, s. 125)
Diskuter	Læreplanen – kjerneelementene, utforsking og problemløsning, (Kunnskapsdepartementet, 2019)
Bevis	Sriraman og Umland (2014, s. 46) Drageset (2016, s. 129)
Hvorfor	Drageset (2016, s. 129)
Hvordan	Jensen og Wæge, (2010, s 5) Artigue og Blomhøjs (2013, s. 808 - 809) Niss og Jensen (2002, s. 53)
Vurder	Læreplanen – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019)
Resonnere	Læreplanen – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Lithner (2008, s. 257) Jeannotte og Kieran (2017, s.7)

	Ball og Bass (2003, s. 29)
Argumentere	Læreplanen -kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Sriraman og Umland (2014, s. 46) Drageset (2016, s. 129)
Tankerekke	Læreplanen – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Jeannotte og Kieran (2017, s.7) Lithner (2008, s. 257) Sriraman og Umland (2014, s. 46)
Reflekter	Drageset, 2016, (s. 129)

2.4.4 Representasjon og kommunikasjon

Udir skriver at representasjoner i matematikk er måter å uttrykke matematiske begreper, sammenhenger og problemer på. Representasjoner kan være konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske (Kunnskapsdepartementet, 2019). Kilpatrick et al. (2001, s. 119) mener at å kunne bruke og omgjøre ulike representasjoner på en hensiktsmessig måte er å vise at man har god forståelse for matematiske sammenhenger. Det er viktig at elevene lærer hvordan de ulike representasjonene henger sammen og hvordan de er ulike og like. Wæge og Nosrati (2018, s. 99) hevder at å kunne omgjøre mellom ulike representasjonsformer er viktig for å oppnå relasjonell forståelse i matematikk. Figuren til høyre (fig. 3) gir en oversikt over de ulike typer representasjoner og hvordan de relaterer seg til hverandre (Wæge & Nosrati, 2018, s. 99).



Figur 3 Ulike representasjonsformer (Wæge & Nosrati, 2018, s. 99).

Niss og Jensen (2002, s. 56 - 57) sier at representasjonskompetanse er viktig, og at å kunne velge og omgjøre mellom ulike representasjoner er viktig. De trekker også fram at det er viktig å kunne forstå hvordan de ulike representasjonene henger sammen, og kjenne de ulike representasjonenes styrker og svakheter. Kilpatrick (2001), Niss og Jensen (2002) og Wæge og Nosrati (2018) trekker fram at det å se sammenhenger mellom representasjoner er viktig for den relasjonelle matematiske forståelsen. Dette henger sammen med det Udir sier om at elevene må kunne omgjøre og oversette mellom de ulike representasjonene (Kunnskapsdepartementet, 2019).

I Udir står det:

> *kommunikasjon i matematikk handler om at elevene bruker matematisk språk i samtaler, argumentasjon og resonnement. Elevene skal få mulighet til å bruke matematiske representasjoner i ulike sammenhenger gjennom egne erfaringer og matematiske samtaler. Elevene må få mulighet til å forklare å begrunne valg av representasjonsform* (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Udir bruker begrepene argumentasjon og resonnement som viktige deler av kommunikasjon. Dette viser at kjerneelementene overlapper hverandre. Dette likner på Niss og Jensens (2002, s. 43) forståelse av matematiske kompetanser, som også «overlapper» hverandre.

Niss og Jensen (2001, s. 60) definerer kommunikasjonskompetanse som å kunne kommunisere i og med matematikken. Kommunikasjonskompetanse er todelt og går ut på å både kunne sette seg inn i hva andre uttrykker, og kunne uttrykke seg selv slik at andre forstår hva en mener ved hjelp av matematiske representasjoner. Ball og Bass (2003) hevder at elevene skal lære det matematiske språket (definisjoner, begreper) gjennom å aktivt undersøke og reflektere. Gjennom å utforske er elevene med på å utvikle et matematisk språk som blir et felles språk i klassen. Kommunikasjon og språk er viktig i omgjøring av representasjonene for å tolke og forklare sammenhenger mellom dem. Som vi har nevnt tidligere, er dette viktig for relasjonell forståelse. Et presist språk er nødvendig for å kunne artikulere sammenhenger i matematikk. Matematisk språk er viktig for å konstruere ny matematisk kunnskap. Wæge (2019) sier: «*…målet er ikke å øke mengden av samtaler i klasserommet, men å øke mengden av samtaler med høy kvalitet...*»" (Wæge, 2019 s. 18-19) og begrunner det med at kommunikasjon i matematikk bør lede til et matematisk læringsmål, lede elevene mot utvalgte strategier og mot matematiske konsepter.

Tabellen under viser essensen av kjerneelementet kommunikasjon og representasjoner fra teorien i form av kodeord. Kodeordene står i venstre kolonne og kildehenvisning i høyre kolonne.

Tabell 4 Kodeord fra kommunikasjon og representasjon.

Kodeord	Kilde
Antall ganger læreren oppmuntres til bruk av representasjoner	Wæge og Nosrati (2021, s. 99) Niss og Jensen (2002, s. 56-57) Kilpatrick et al. (2001, s. 119)
Oppmuntring til bruk av representasjoner	Wæge og Nosrati (2018, s. 99) Niss og Jensen (2002, s. 56-57) Kilpatrick et al. (2001, s. 119)
Fokus på omgjøring av representasjoner	Læreplanen – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Kilpatrick et al. (2001, s. 119) Wæge og Nosrati (2018, s. 99) Niss og Jensen (2002, s. 56-57)
Oppmuntre til å lage modell	Læreplanen – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019)
Kommunikasjon: **Kommunikasjon/kommuniser, samtale, snakk om, fortell, diskuter, resonnere, argumentere, forklare, forslag, begrunn, hvorfor, hvordan bevis, reflekter, tankerekke**	Læreplanen – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Smith og Stein (2018, s. 13-14) Andersen et al. (2018, s. 20) Liljedahl (2021, s. 43-44) Jensen & Wæge (2010, s. 5) Skovmose (2001, s. 125) Sriraman og Umland (2014, s. 46) Skovmose (2001, s.123) Drageset (2016, s. 129) Artigue og Blomhøjs (2013, s.808 - 809) Niss &Jensen (2002, s. 53) Lithner (2008, s. 257)

	Jeannotte og Kieran (2017, s.7) Ball og Bass (2003, s. 29) Niss og Jensen (2001, s. 58) Wæge (2019 s. 18) Drageset (2016, s. 129)
Spørsmål rettet mot elevene/hjelpe spørsmål «spør gjerne elevene om»	Skovmose (2001, s. 125)
Representasjon: **Visuell, kontekstuell, verbal, konkret, symbolsk**	Læreplanen – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Wæge og Nosrati, (2018, s. 99)

2.4.5 Abstraksjon og generalisering

I Udir er definisjonen at abstraksjon i matematikk innebærer at elevene gradvis utvikler ei formalisering av tanker, strategier og matematisk språk. Utviklingen går fra konkrete beskrivelser til formelt symbolspråk og formelle resonnement.
Om generalisering sier Udir at det i matematikk handler om at elevene oppdager sammenhenger og strukturer og ikke blir presenterte for «ei ferdig løysing». Det vil si at elevene kan utforske tall, utregninger, og figurer for å finne sammenhenger og deretter formaliserer ved å bruke algebra og hensiktsmessige representasjoner. Læreplanens definisjon på kjerneelementet utforsking og problemløsning har flere likhetstrekk med kjerneelementet abstraksjon og generalisering. Begge har fokus på å finne sammenhenger og finne egne strategier eller løsningsmetoder. Utforsking nevnes i kjerneelementet argumentasjon og generalisering. Noe som er ulikt er at fokuset ligger i å formalisere i kjerneelementet abstraksjon og generalisering (Kunnskapsdepartementet, 2019).
Mason et al. (2011, s. 44; s. 351-352) beskriver generalisering som "*å finne det spesielle i det generelle, og det generelle i det spesielle".* Videre skriver Mason et al. (2011) at mennesket er laget for å se etter mønster, og bruker likt, ulikt, forskjellig, konstant og se på eventuelle endringer for å belyse hvordan man kan arbeide med å finne det som skiller seg ut. Altså leter vi etter det spesielle i det generelle, eller det generelle i det spesielle for å lage "ro i kaoset". Vi tolker dermed at generalisering handler om å finne "ro i kaoset", en sammenheng som forenkler, slik at vi kan løse det som er problemet. Å finne en regularitet, eller et

mønster, som mest sannsynlig vil fortsette utover det du selv har observert, blir den observasjonen til en antakelse. En antagelse er noe du kan prøve å generalisere (Mason et al., 2011, s. 19). I tilfeller der læreren skal få elevene til å tenke over om en påstand alltid er sann, kan et enkelt spørsmål være til hjelp. "Vil det alltid bli sånn?" eller "Kan du bevise det?" er eksempler på slike spørsmål læreren kan stille elevene, når elevene skal prøve å begrunne antakelser (Ball og Bass, 2003, s. 33).
Det er skrevet mye om generalisering, aritmetikk og algebra i sammenheng med hverandre. Vi forstår det slik at generalisering henger tett sammen med algebra, fordi det i algebra også brukes bokstaver for å uttrykke variabler (generaliserte tall). I generalisering skal elevene oppdage mønster og systemer som de igjen kan bruke til å uttrykke generelle sammenhenger, eller få bekreftet at en regel gjelder (Brekke et al., 2000, s. 7).

Tabellen under viser essensen av kjerneelementet abstraksjon og generalisering fra teorien, i form av kodeord. Kodeordene står i venstre kolonne og kilde i høyre kolonne.

Tabell 5 Kodeord for abstraksjon og generalisering.

Kodeord	Kilde
Abstraksjon	Læreplanen – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019)
Generalisering	Læreplanen – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Mason et al. (2011, s.44; s. 351-352) Brekke (2000, s. 7) Ball og Bass (2003, s. 29)
Regel	Brekke (2000, s. 7) Læreplanen – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019)
Algoritme	Læreplanen – kjerneelementet Utforsking og problemløsing, (Kunnskapsdepartementet, 2019)
Definisjon	Læreplanen – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019)

Lov	
Blir det alltid slik?	Ball og Bass (2003, s. 33)
Sammenheng, mønster i matematikken	Læreplanen – kjerneelementene, (Kunnskapsdepartementet, 2019) Mason et al. (2011, s.44; s. 351-352) Brekke (2000, s. 7)
Mønster i matematikken	Mason et al. (2011, s.44; s. 351-352)
Hva er likt? **Hva er ulikt/forskjellig?**	Mason et al. (2011, s.44; s. 351-352)

2.5 Lærerens nye rolle

Undervisning gjennom kjerneelementene stiller altså nye krav til læreren. Læreren må ta utgangspunkt i både kompetansemål og kjerneelement i planleggingen (Kunnskapsdepartementet, 2019).

I dette delkapitlet vil vi presentere teori om noen praksiser læreren kan gjøre for å mestre sin nye rolle, som er å undervise gjennom kjerneelementene, slik at elevene oppnår dybdelæring. Fra den gamle læreplanen, LK06, var tilbakemeldingene at det var for mange temaer. Dermed ble det utfordrende å gå i dybden på de viktigste områdene i faget. Da LK20 ble utarbeidet ble det et større fokus på dybdelæring, og begrepet kjerneelement ble innført (Meld. St.132-18, 2018). Liljedahl (2021, s. 1-6) har gjort omfattende forskning på området. Vi vil presentere tre undervisningspraksiser fra nyere forskning om hvordan lærere kan legge til rette for undervisning etter kjerneelementene.

Læreren må få elevene til å tenke. Han sier at tenking er en viktig forløper til læring, og dersom en ikke tenker, kan en ikke lære (Liljedahl, 2021, s. 5). Som vi skrev under kjerneelementet utforsking og problemløsing er det viktig med kognitivt krevende oppgaver, for da lærer elever best (Smith & Stein, 1998, s. 344). Oppgaver må være slike som elevene ikke vet framgangsmåten på hvordan løse, gi refleksjon i arbeidet og at det må legges til rette for at elevene kan oppdage mønstre og sammenhenger i matematikken. Dette har likheter med det Boaler et al. (2017, s. 3) hevder er de største ideene i matematikken, som er å se etter mønster for å finne de store matematiske ideene, og det Cuoco et al. (1996, s. 378) fremhever er viktig for elevene, å bli mønstersniffere. For å få til dette må læreren gi elevene oppgaver som de ikke på forhånd har en metode eller prosedyre for å løse (Liljedahl, 2021, s 20-21). Dette er med på å gjøre oppgavene til det Liljedahl (2021) kaller *highly engaging thinking tasks*, oppgaver som krever et høyt engasjement av tenking. Gode problemløsningsoppgaver leder til at elevene setter seg fast, og må bruke det de kan på kreative måter for å komme seg videre med oppgaven. Elevene må utforske og prøve og feile. Oppgavene må gjerne være «rike» eller åpne oppgaver i den form at de krever at elevene tar i bruk mange av sine matematiske kunnskaper, og setter dem sammen på ulike måter for å løse problemet (Liljedahl, 2021, s. 20-21). Oppgavene må gjerne også ha flere mulige løsningsstrategier og innfallsvinkler (Wæge & Nosrati, 2018, s. 82-84). Den faktoren som gir størst læringsutbytte i undervisningen er det Smith og Stein (1998, s. 344) kaller kognitivt krevende oppgaver, mens Liljedahl (2021, s. 19-20) sier elever blir aktive med problemløsningsoppgaver, oppgaver som krever et høyt engasjement av tenking.

Smith og Stein (1998, s. 9-17) har utviklet 5 praksiser som utgangspunkt for å få til en god matematisk samtale. Da trenger læreren et godt grunnlag å bygge samtalen på. **Steg null** blir å sette et mål for undervisningsøkta og den gode matematiske samtalen. Det **første steget** i planleggingsfasen er at læreren finner en oppgaver som kan løses på flere ulike måter. Deretter må læreren prøve å forutse hvilken respons, løsningsforslag eller svar elevene kan komme med. De kan være både rette og gale. Læreren må i planleggingsfasen tenke ut hvordan hen kan respondere på disse. Læreren må også tenke over hvordan elevenes ulike løsningsforslag kan henge sammen med det matematiske målet som er satt for timen, og hvilke spørsmål læreren kan stille elevene hvis de står fast. Det er viktig at disse spørsmålene ikke er ledende, og at læreren ikke begynner å forenkle oppgaven til elevene (Smith & Stein, 2018, s. 9-17).

Liljedahl (2021, s.39-45) har beskrevet hvordan danne fungerende samarbeidsgrupper i et tenkende klasserom. Det er svært viktig at gruppen samarbeider, fordi samarbeid har stor effekt på læring. Han kom fram til at fra 3.trinn var den ideelle gruppestørrelsen tre personer, og gruppene må dannes tilfeldig på en slik måte at elevene ser det. Gruppene må også endres hyppig, helst hver undervisningsøkt. Da kommer en bort fra at elevene inntar forhåndsbestemte roller som de selv mener å ha ut fra hvem hen kom på gruppe med. Når gruppene dannes på denne måten, og elevene ikke inntar forhåndsbestemte roller får en til diskusjoner i klasserommet. Å la elevene arbeide sammen passer bra med det vi har nevnt tidligere, at matematikk bør læres sammen med andre, og er en kollektiv prosess (Ball & Bass, 2003, s. 29).

Liljedahl (2021, s. 43-44; s. 99-105) har også forsket på hvordan best gi elevene oppgaver. Metoden som førte til at elevene var raskest i gang med å arbeide med oppgavene, hadde høyere energinivå og større grad av tenking, var at læreren gav elevene oppgaven muntlig, med elevene stående rundt læreren i små grupper. Han fant også ut at fra timen starter og til oppgaven burde gis, har læreren tre til fem minutter på seg. Dette fordi etter fem minutter begynner elevenes energinivå å falle, og dess lengre læreren snakker, dess større er sannsynligheten for at læreren begynner å undervise elevene i hvordan oppgaven kan løses (Liljedahl 2021, s. 43-44; s. 99-105).

Mens elevene arbeider med oppgaven, kan læreren følge Smith og Steins (2018, s. 11) **andre praksis**, som er å gå rundt og observere hva elevene gjør, deres matematiske tenkning og løsningsstrategier. Læreren kan gjøre dette ved å sirkulere rundt i klasserommet mellom elevgruppene. Liljedahl (2021, s. 58-61) kom fram til at å la elevene arbeide stående på whiteboard-tavler som henger på veggen når de arbeidet med tenkeoppgaver, førte til et meget høyt aktivitetsnivå i klasserommet. Mens læreren går rundt og observerer er det viktig at læreren også følger Smith og Steins (2018, s. 13) **tredje praksis** som er å velge ut hvilke elever som skal få presentere sine løsningsstrategier i den oppsummerende klassediskusjonen, eller om det er løsningsstrategier som læreren vil løfte frem for at klassen skal undersøke matematikken i strategien. Læreren kan også velge å løfte fram en strategi eller en løsning som er «feil», for eksempel en vanlig misoppfatning, slik at den også kan adresseres. Det er viktig at læreren under steg en, forventning, også ser på hvilke strategier som bygger på hverandre, og som kan være fine å løfte fram for at elevene skal oppnå det matematiske målet for timen (Smith & Stein, 2018, s. 13). Etter at læreren har valgt ut hvilke elever som skal få presentere sitt arbeid, kan læreren gjennomføre Smith og Steins (2018, s. 13-14) **fjerde praksis** som er å bestemme hvilken rekkefølge de utvalgte elevene skal presentere løsningsstrategiene sine i. Til sist gjennomfører læreren den **femte praksisen** som er å dra sammenhengen mellom de ulike løsningsstrategiene og matematikken, slik at elevene kan oppnå målet for økta (Smith & Stein, 2018, s. 13-14). Liljedahl (2021, s. 170-172) har også beskrevet hvordan denne samtalen eller sammenhengen mellom enten strategier, løsninger eller matematikk bør foregå. Han sier på samme måte som Smith og Stein (2018, s. 14) at en må starte med den enkleste løsningen som alle får til, for deretter å dra sammenhengen mellom den opp til neste nivå, og neste nivå helt til en står klar med en generalisering, eller med det som var målet med økta (Liljedahl, 2021, s. 170-172).

Når læreren går rundt i klassen og observerer, er det viktig at læreren ikke glemmer seg bort og begynner å forklare eller forenkle oppgaven til elevene dersom de står fast. For å trene elevene på å argumentere, kan læreren stille elevene spørsmålet «hvorfor?». Hvorfor de har valgt den metoden de har valgt, hvorfor har du gjort det slik, hvorfor er det rett, eller hvorfor er det matematisk korrekt? (Drageset, 2016, s. 129).

Smith og Stein (2018, s. 44-46) har presentert to typer spørsmål som læreren kan stille elevene når hen går rundt og observerer. De to typene er *assessing questions og advancing questions.*

Assessing questions har som mål å få fram/ gjøre elevenes nåværende tenkning synlig, og at læreren kan forsikre seg om at hen forstår hva eleven har gjort og hvorfor eleven har gjort det. Typiske slike spørsmål kan være; kan du fortelle meg hva du har gjort her? Hvorfor stoppet du her (konkret i forhold til oppgaven)? Hva betyr eller representerer det tallet? Når læreren har stilt et *assessing question* blir læreren stående å høre på svaret til elevene. *Advancing questions* har som mål å få elevene videre i prosessen og mot målet for timen. Typiske slike spørsmål kan være; «Kan du lage en modell?» «Kan du skrive svaret (tallet) på en annen måte?» Når læreren har stilt et *advancing question* kan læreren gå videre, uten å høre på hva elevene sier videre på gruppa (Smith & Stein, 2018, s. 44-46). De har også presentert tre typer spørsmål som læreren kan stille i en helklasse-diskusjon, og som har til hensikt å få elevene til å tenke på et dypere nivå, og holde elevene ansvarlig for egen tenkning og kommunikasjon i klassediskusjoner. De kaller de tre typene for *discussion-generating questions, probing questions* og *questions that make the mathematics visible. Discussion-generating questions* har som mål å få samtalen i gang, og kan være åpne spørsmål som f. eks «Kan noen dele hva de fant ut?» «Finnes det flere måter å gjøre det på?» *Probing questions:* har som mål å gjøre diskusjonen dypere ved at elevene må forklare hvordan de har tenkt. F. eks «Hvordan tenkte du her?» «Hvorfor har du gjort slik?» Typisk spørsmål som begynner med hvordan og hvorfor. *Questions that make the mathematics visible:* har som mål å synliggjøre selve matematikken bak, og kan f.eks. være «Vil det alltid bli slik?» Eller «Hvordan kan vi vite det sikkert?» (Smith & Stein, 2018, s. 89-90).

Kazemi og Hintz (2019, s. 12-15) definerer seks ulike målrettede samtaler i matematikk. De har alle fire prinsipper for hva matematiske samtaler bør inneholde. En matematisk samtale er en samtale som har som mål å bidra til at elevene oppnår målet for timen eller økta. I den matematiske samtalen vet elevene hvordan de kan dele ideene sine slik at de blir hørt, og at alles ideer kan være viktige for andre. I en matematisk samtale må læreren orientere elevene mot hverandre, og de matematiske begrepene som blir brukt, eller dukker opp. På den måten blir alle elevene i klassen involvert i prosessen med å nå målet for timen. Læreren må også sørge for at alle elevene vet at de er med på å skape forståelse, og at hver og en av deres innspill kan være viktige. I tillegg presenterer de samtaletrekk for å støtte klasseromssamtaler som nyttige grep for å få i gang gode samtaler i klasserommet (Kazemi & Hintz, 2019, s. 33). Samtaletrekk er små samtalegrep som kan få elevene til blant annet å oppklare, resonnere eller tilføye elementer i samtalen, og kan være så enkelt som at læreren bruker samtalegrep som for eksempel «Så det du sier er …», «Kan du gjenta …?», «Er du enig eller ikke?», «Vil noen tilføye noe?»(Kazemi & Hintz, 2019, s. 33-34).

Smith og Stein (2018) og Kazemi og Hintz (2019) har flere likhetstrekk i sine praksiser. Blant annet at begge praksiser fremhever at mål for undervisningsøkta er viktig. Kazemi og Hintz (2019, s. 12-15) mener alle elever skal vite at de er med på å skape forståelse, mens Smith og Stein (2018, s. 14) kaller aktiviteten at elevene skal finne sammenheng mellom ulike løsningsstrategier og i matematikken. Smith og Stein (2018) og Liljedahl (2021) ser begge på viktigheten av spørsmål. Smith og Stein (2018, s. 44-46) ønsker å få frem elevenes tenkning i prosessen for å oppnå målet for timen, mens Liljedahl (2021, s. 87) beskriver hvordan læreren skal svare på elevenes spørsmålsstilling for å ikke ødelegge tenkningen til elevene, for eksempel « Er ikke det interessant?», «Kan du vise meg hvordan du gjorde dette?» «Er det alltid slik?». Liljedahl (2021, s. 20) og Smith og Stein (2018, s. 20-23) har fokus på at oppgaven er sentral for elevenes tenkning og læring. Liljedahl (2021, s 20) sier at oppgavene må være problemløsende, skape engasjement, få elevene til å tenke fordi det fører til at elevene engasjerer seg i matematikken. Smith og Stein (1998, s. 344) bruker begrepet kognitivt krevende oppgaver, noe vi kommer tilbake til seinere i oppgaven.

2.6 Tidligere forskning på lærerveiledninger

Her vil vi presentere tidligere forskning på lærerveiledninger, slik at vi kan se vårt prosjekt opp mot lærerens nye rolle og hvordan lærerveiledninger kan støtte læreren i dette arbeidet. Det er ikke gjort så mye forskning på lærerveiledninger kun om matematikk. Dermed så vi oss nødt til å se på forskning som også omhandler andre fag.

Buch et al. (2023, s. 12) gjennomførte en systematisk analyse av forskningsartikler som omhandler analyse av lærerveiledninger i alle fag. De oppdaget at det er gjort lite forskning på lærerveiledninger internasjonalt, og sto kun igjen med 43 studier å undersøke. Ut fra disse 43 studiene kategoriserte de forskningen i seks kategorier.

- Hvordan lærerveiledninger har utviklet og endret seg gjennom historien.
- Hva fokusområdet analysene av lærerveiledninger har.
- Hvordan lærerne bruker lærerveiledninger.
- Lærernes tolkning eller engasjement med lærerveiledninger.
- Hva lærerveiledningene bør inneholde ut fra lærerens perspektiv.
- Hva lærerveiledningene bør inneholde ut ifra forskning.

Fordi vi skal undersøke hvilke konkrete tips og råd lærerveiledningen gir til læreren, er det mest relevant å se på de fire nederste punktene i listen over.

2.6.1 Lærerens bruk av veiledningene

Design og bruk av *Curriculum material* er en av de eldste strategiene for å prøve og påvirke undervisningen i klasserommet. Utviklingen har gått fra at «gode» lærere ikke benytter seg av *textbooks*, men lager sitt eget *curriculum* eller læreplan (Ball & Cohen, 1996, s.6), og til at gode lærere er de som bruker *educative curriculum materials*» på en god måte. Heretter vil vi omtale *textbook* som elevbok. Drake et al. (2014, s. 154) presiserer at *curriculum material* innbefatter blant annet elevbøker, lærerveiledninger og annet trykket materiale som kan brukes som verktøy for å gjennomføre og oppnå mål og standarder for undervisningen.

Ahl et al. (2015, s. 6) skriver om at mer erfarne lærere bruker lærerveiledninger annerledes enn lærere med mindre erfaring. Lærere uten særlig erfaring ønsket mer støtte for planleggingen, hvordan forstå elevenes tenkning, konsepter og progresjon enn lærere med mer erfaring.

Både Finland og Kina har tradisjon for at et team bestående av “eksperter” og erfarne lærere går sammen om å utvikle godt og informativt undervisningsmateriell. I Kina lager teamet både tekstbøker og lærerveiledninger (Ma, 1999, s. 131), mens i Finland lager de gode og informative lærerveiledninger fra 1.-6. trinn (Hemmi et al., 2019, s. 343). I et forsøk på å forbedre matematikkundervisningen sin ble 12 svenske lærere med i en casestudie der de fikk et finsk læreverk oversatt til svensk. Studien varte i fire år, og det kom blant annet fram at ved innførsel av nytt læreplanmateriell har det stor betydning at lærere, og omgivelsene i samfunnet rundt, har kunnskaper om og bakgrunnsforståelsen av det nye materialet, selv om lærerveiledningen følges grundig. Studien kom også fram til at ulik undervisningskultur også vil påvirke hvordan nytt læringsmateriell tas i bruk (Hemmi et al., 2019, s. 358). Ut fra dette kan det se ut som at å oversette et læreverk til et annet språk, ikke alltid er nok til at det vil fungere like godt i et annet land. Det er viktig for oss å vite, da det ene læreverket vi analyserer er et russisk læreverk oversatt til norsk.

2.6.2 Lærerne skal lære

Ball og Cohen (1996, s. 7-8) mener at innholdet i lærerveiledningene kan bli mer sentralt for at læreren skal lære, hvis noen faktorer blir tatt mer hensyn til i utformingen. Faktorer de to mener det bør tas mer hensyn til, er for eksempel:

- Lærerens egen forståelse av materialet.
- Hvordan denne forståelsen kan knyttes til de store matematiske ideene.
- Hvordan læreren kan lære å lytte til elevene, forutse elevenes tenkning og dermed hva de kan svare ut fra elevenes forutsetninger.
- Hvordan evaluere og respondere på elevenes ideer.
- Hvordan læreren kan fokusere på og rammer inn materialet for elevene.
- Velge ut oppgaver, aktiviteter og metoder i planleggingen.
- Hvordan det intellektuelle og sosiale miljøet i klassen påvirker undervisningen.
- Hvordan læreren er påvirket av nærmiljøet, både politisk og sosialt
- Lærerveiledningene kan også komme med konkrete illustrasjoner av elevenes forståelse, som er viktig for emnet der andre lærere har fått det til.

Ball og Cohen (1996, s .7-8) argumenterer også for hvordan lærveiledningen kan fungere som et redskap for å forbedre undervisningen ved å undersøke forholdet mellom lærebøker, lærere og undervisning ettersom de mener lærerveiledningen har spilt en ujevn rolle i den pedagogiske praksis.

Lærerne har et krevende yrke. De skal omgjøre læreplan til kunnskap for elevene på en meningsfull måte. Tradisjonelt sett har *curriculum materials* vært utarbeidet for elevenes læring. De kan ha gitt støtte til læringsstrategier, men ikke gitt støtte til lærerens læring (Davis & Krajcik, 2005, s. 3). Ball og Cohen (1996, s. 6-8) foreslår at læringsmateriell kan lages slik at både lærere og elever kan lære. De påpekte at det ofte mangler en god lærerveiledning som gjør at læreren forstår hvordan man skal bruke læreverket, hvordan undervise og hvilken rolle læreren skal ha i undervisningen. Mangelen på en tydelig lærerveiledning kan føre til at læreren justerer læringsmaterialet, som igjen fører til at oppgavens opprinnelige intensjon ikke følges. Det kan føre til at lærerne ikke forstår hensikten med lærebøkene og lærerveiledningene, og at tanken om at gode lærere ikke trenger bøker, men lager sitt eget læringsmateriell består (Ball & Cohen, 1996, s. 7). Det kan sees i sammenheng med Remillards (1999) studie der to erfarne matematikklærere valgte å stole mer på egne erfaringer og ideer, framfor et nytt læreverk. De brukte kun oppgaver og fikk inspirasjon fra det nye læreverket sitt.

Davis og Krajcik (2005, s. 4) laget noen retningslinjer for læringsmateriell ut fra Ball og Cohens tanker om å støtte både elever og læreres læring. De kalte dette for *educative curriculum materials*, altså læringsmateriell som skal fremme både lærerens og elevens læring. Målet med disse er at læreren skal videreutvikle både fagkunnskaper og fagdidaktikk for at undervisningen skal bli bedre. Hvordan læreren lærer fra læringsmaterialet kan være avhengig av flere faktorer, både interesse, tolkning av innholdet og ikke minst tiden læreren har til rådighet. Davis og Krajcik, (2005) hevder blant annet at det kan være mer komplekst å legge til rette for lærerens læring enn elevenes læring. Ettersom lærerne må ta hensyn til egen kunnskap om emnet, og kunne lage sammenhenger både mellom egne kunnskaper og kunne knytte disse til nye ideer og læringsprinsipper. I tillegg til dette skal lærerne kunne ta avgjørelser i undervisningen samtidig som de skal ta hensyn til elevene (Davis & Krajcik, 2005, s. 4).

2.6.3 Forskjellig oppbygning av lærerveiledninger

Buch et al. (2023, s. 19) fant ut at lærerveiledninger har endret seg igjennom tiden. De har blitt større og mer styrende for læreren, ved at de skal lede læreren steg for steg gjennom undervisningsforløpet.

I en krysskulturell studie fant forskerne både likheter og ulikheter mellom hvordan lærerveiledningene kan støtte lærerne. USA, Sverige og Flanderen har ulik kulturell utdanningskontekst. Dette ble gjenspeilet i lærerveiledningene. De amerikanske og flanderske lærerveiledningene var mer lik enn den svenske, ved at de var mer instruerende og detaljerte. Den flanderske lærerveiledning ga retningslinjer i større grad enn den var lærende, enn de amerikanske og svenske (Remillard et al., 2014, s. 399; Buch et al., 2023, s. 21).

Davis og Krajcik (2005, s. 9) problematiserer også i forhold til hvor mye info en lærerveiledning skal inneholde ettersom de fleste lærere ikke har tid til å lese veldig utvidede lærerveiledninger, uansett hvor nyttig det må være. De problematiserer også rundt hvor eksplisitt en slik veiledning bør være.

Remillard (2005, s. 225) kom med forslag om tre fokusområder angående lærerveiledninger: *Design area*, som omhandler å velge ut og designe oppgaver til klasserommet, *Construction area*, som omhandler den reelle hjelpen læreren får i selve gjennomføringen av undervisningen, der læreren er avhengig av å ta avgjørelser på sparket, *The mapping arena*, som omhandler overordnet planlegging og organisering i løpet av året (Remillard, 2005, s. 225).

Stylianides (2008, s. 211) har gjort en analyse med bruk av bevis, og fant ut at lærerveiledningen ikke alltid gir nok støtte til læreren, og foreslår at den bør gi mer støtte til lærerne. Spesielt hvis veiledningen gir flere ulike løsningsforslag, og det er spesielt viktig med innhold regnet som vanskelig å lære, eller hvis læreren selv har begrenset kunnskap om området. Li et al. (2008, s. 203) sammenliknet lærebøker og lærerveiledninger fra Kina og USA om innlæring/undervisning om likhetstegnet. De oppdaget at lærerveiledningen i USA hadde færre veiledningsstrategier for å skape forståelse enn i Kina, og at i USA var veiledningene mer forslagsbasert, mens de kinesiske var mer direkte. I Kina ser lærerne lærerveiledninger som mer autorative og følges i større grad for å få gjennomført en god undervisningsøkt (Li et al., 2008, s. 203). Ma (1999, s. 131) hevder at elevbok er det de i Kina følger mest slavisk. Her beskriver Ma tradisjonen med at lærerne studerer læringsmateriellet godt i starten av året, bruker lærerveiledning som en god støtte, spesielt de uerfarne lærerne, og har ukentlige møter med kollegaer i *teaching researsh groups* der de studerer læringsmateriell (Ma, 1999, s. 146).

Gjennom å analysere ulike forskningsrapporter på lærerveiledninger, fant Buch et al. (2023, s. 28-29) forskernes syn på hva en lærerveiledning bør inneholde. I hovedsak burde lærerveiledninger ikke bare ha instruksjoner for hvordan materiell skal brukes, men bør også støtte opp om læring for lærerne som skal bruke dem. Dette for å gi lærerne bakgrunnsforståelse for veiledningene i tillegg til å forklare hvorfor. Dette er spesielt viktig når nytt didaktisk materiell blir presentert for å unngå at endringene i undervisningen kun blir overfladisk.

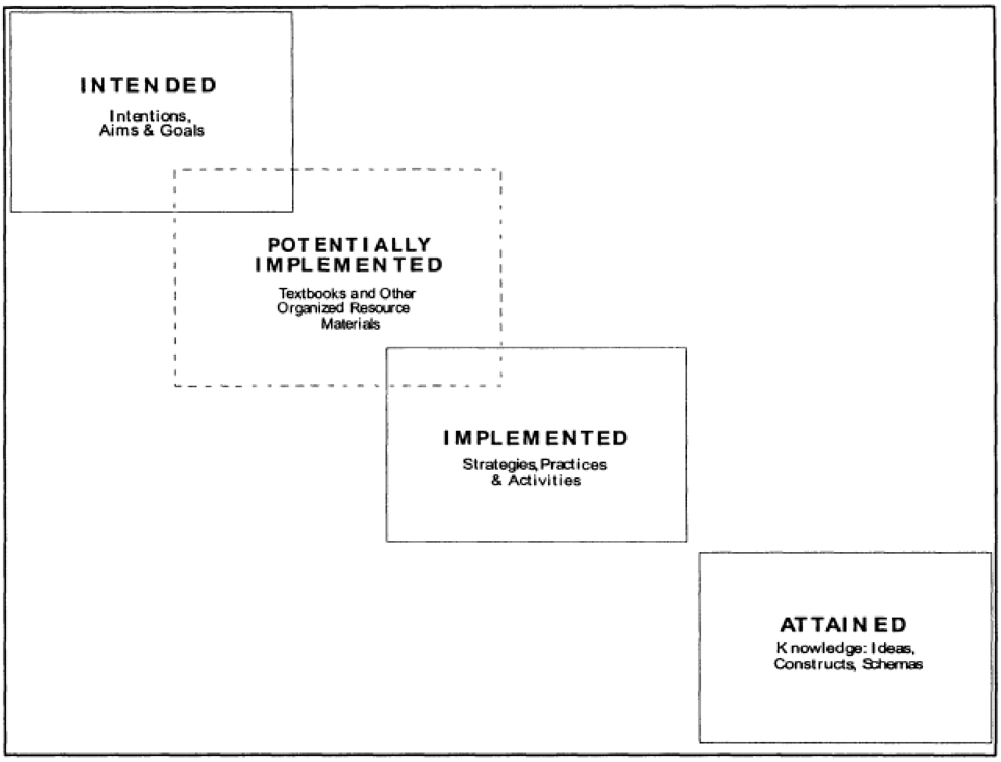
Det varerier fra land til land om lærebøker og lærerveiledninger må godkjennes av det offentlige før de kan slippes ut på markedet. Det varerier like mye i hvor stor grad læreren kan velge om hen vil følge boka eller ikke. Disse omstendighetene vil mest sannsynlig påvirke designet på lærerveiledningene (Buch et al., 2023, s. 13). Før sommeren 2000 måtte alle lærebøker i Norge godkjennes gjennom godkjenningsordningen for lærebøker før de kunne bli utgitt. Formålet med dette var å sikre at læreboka sto i henhold til gjeldene læreplan, og at den ikke kunne virke støtende for *«enkelte folkeslag og kulturer»*. (Forskrift om godkjenning av lærebøker, 1997, §38,§39). Ordningen har vært oppe til politisk debatt og utredninger flere ganger siden 1945, men 13. juni 2000 ble det enstemmig vedtatt at ordningen skulle oppheves. Argumentene Kirke-, utdannings- og forskningskomiteen brukte i år 2000 var at "*ordningen var blitt overflødig som kontrollorgan for å sikre at målene i læreplanen for grunnskolen og de videregående skolene skulle nås."* Fra nå av skulle det være opp til skolene og lærerne å sørge for å legge opp undervisningen uavhengig av læreboka. Det skulle stimuleres til aktiv lærebokkritikk av eksisterende lærebøker, og lærerne skulle oppmuntres til å bruke flere lærestoffkilder. Altså fikk læreren større frihet til å velge lærestoffkilder selv. Det var også et viktig argument at det skulle være forlag, forfattere og fagmiljøer som skulle sørge for kvalitetskontrollen med tanke på innhold, likestilling og språklig kvalitet i lærebøkene. Dermed ble det opp til hver enkelt kommune, skole og lærer å velge gode læreverk til undervisningen.

Vi ønsker å se på hvordan lærerveiledningen kan gi støtte i den daglige undervisningen og om lærerveiledningene hjelper læreren til å undervise etter intensjonen til den nye læreplanen der kjerneelementene skal stå i fokus.

2.7 Tidligere forskning på tekstbøker

Det er gjort mer forskning på tekstbøker enn på lærerveiledninger. Vi omtaler fortsatt tekstbøker som elevbøker. Som vi har nevnt under lærerens nye rolle, mener Smith og Stein (1998, s.344) at oppgavene er sentrale for elevenes læring, og Liljedahl (2021, s. 20) mener oppgavene er viktig for elevenes tenkning. Charalambous et al. (2010, s. 118) trekker frem forskning der elevboka er en potensiell kilde for lærerens læring. Dermed kan blant annet elevboka være en av faktorene som har potensiell innvirkning på elevenes læring, og være en ressurs som har potensiale til å endre hvordan vi underviser og lærer matematikk (Son & Diletti, 2017, s.27).

Den internasjonale undersøkelsen *Trends in International Mathematical and Science Study* (TIMMS) har som mål å undersøke elevers kunnskaper innen matematikk og naturfag på 5. og 9. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2023a). I forbindelse med undersøkelsen ble en internasjonal forskningsgruppe nedsatt. De studerte utdanning med fokus på matematikk og naturfag. De gjorde en omfattende tverrnasjonal studie av lærebøker for å studere, og få en indikator på elevers læringsmuligheter. TIMMS gruppen la til elevbøker som en potensielt implementerte læreplan (*potentially implemented*) i den originale IEA Tripartite Curriculum Modellen (se fig 4), som egentlig består av den tiltenkte (*intended*), implementerte (*implemented*) og oppnådde (*attained*) læreplan. De så sammenheng mellom landenes læreplaner og elevbøker, ettersom elevbøkene er nærmere elevene i undervisningssituasjonen enn den faktiske læreplanen. Intensjonene til læreplanen (og de som skrev den) og den erfarte læreplanen, som er den læreplanen elevene erfarer i klasserommet, trenger ikke alltid være helt like (Valverde et al., 2002, s. 19).



Figur 4 Textbooks and Tripartite modell (Valverde et al, 2002, s. 13)

Johansson (2005, s. 48-49) trekker frem at tidligere forskning på innholdsanalyse av elevbøker er viktig ettersom de kan gi mye informasjon. Blant annet kan man ved å analysere elevbøker finne den underliggende ideen om hva matematikk er, og hvordan ulike matematiske emner kan læres. Ved å sammenlikne elevbøker nasjonalt og internasjonalt, ved å se på likheter og ulikheter, kan man få en forståelse for ulikheter i elevenes læringsmuligheter. Slik kan matematikkutdannere lære av slike studier for å forbedre læreplaner, undervisningsmetoder, instruksjoner og utvikle nye lærebøker. I tillegg kan man se hvordan faget har utviklet seg gjennom tidene (Johansson, 2005).

Flere forskere er enige med Johansson (2005) og antyder at elevbøker kan brukes for å måle ulike læringsmuligheter elever har. Charalambous et al. (2010, s. 117) sammenliknet behandlingen av et matematisk tema i matematikkbøker i Kypros, Irland og Taiwan. De peker på at ved å sammenlikne ulike tekstbøker kan man for eksempel finne ut ulikheter i læringsmulighetene ut fra type oppgaver, hvordan innhold er prioritert og om konseptuell forståelse eller prosedyreferdigheter er vektlagt. Samtidig mener andre forskere at elevbøker har liten innflytelse på læring ettersom det ikke forteller om selve undervisningen

(Charalambous et al., 2010, s. 118). Et av funnene Charalambous et al. (2010, s. 138-139) hadde var hvilken andel kognitive krav oppgavene hadde i de ulike bøker fra de tre landene. Oppgavene i matematikkbøker fra Irland og Kypros hadde størstedel av oppgavene lave kognitive krav, over 85%, mens matematikkbøker fra Taiwan hadde flest oppgaver med høye kognitive krav, omtrent 71 % og 81%.

Forskere over hele verden er enige om at matematikkbøker (og naturfagsbøker) har stor påvirkning på praksisen i klasserommet (Valverde et al., 2002, s. 2). Robitaille og Travers (1992, referert i Fan et al. 2013, s. 635) påsto at spesielt i matematikk spiller elevboka en større rolle enn i andre fag. Et land vi tenker det kan være naturlig å sammenlikne oss med er Sverige. Der påstår Johansson (2005, s. 52) at elever og lærere er usedvanlig avhengig av elevboka. I den sammenheng er det naturlig for oss å tro at lærere i Norge er like avhengig av elevboka. Johansson sier videre at både innhold, forberedelser og organisering av undervisningen er veldig diktert av elevboka.

Son og Diletti (2017, s. 27) støtter ikke den direkte sammenheng mellom innholdet i elevboka, og elevenes prestasjoner, men at elevboka er en av faktorene som har potensiell innvirkning på elevenes læring, sammen med læreplanen og de *curriculum materials* som er tilgjengelig. De hevder at elevboka er en ressurs som har potensiale til å endre hvordan vi underviser og lærer matematikk. De har analysert forskning der fokuset har vært å se på sammenlikning av elevbøker i USA og noen asiatiske land (Son & Diletti, 2017, s. 4). Innholdet i elevboka og hvordan den brukes i klasserommet er ikke nødvendigvis det samme. Son og Diletti (2017, s. 27) fremhever lærerens rolle til å være desto mer viktig ettersom læreren må vite intensjonen og hva som er presentert i elevboka for at elevene skal lære seg matematikk, og på den måten være i stand til å hjelpe dem til å forstå den. Remillard (2005, s. 240) understreker at elevboka kun gir læringsmulighet ettersom læring er avhengig av interaksjon mellom elevbok, elev og lærer. Dette har også likhetstrekk med hvordan tekst henvender seg til læreren, altså hvordan lærere tolker innholdet i selve *curriculum materials*.

2.8 Konseptuelt rammeverk

Her vil vi presentere de konseptuelle rammeverkene vi tok utgangspunkt i for å utvikle et rammeverk for lærerveiledninger. Dette med tanke på å undersøke dem som støtte til læreren til å undervise etter kjerneelementene, gjennom oppgavene.

Dette konseptuelle rammeverk for elevbøker er utviklet av Charalambous et al. (2010, s. 120-22) som er satt sammen av flere rammeverk. I sin internasjonale forskning av analyse av elevbøker i matematikk fant Charalambous et.al. (2010) ulike tilnærmingskategorier. De tilnærmingene vi vil trekke frem er horisontal analyse og vertikal analyse. Horisontal analyse ser på boka som helhet, og analysen fokuserer på generelle karakteristikker av tekstboka. Den vertikale analysen er dybdeanalyse innenfor ett matematisk konsept eller emne. Den horisontale analyse er blitt kritisert for å overse læringsmuligheter elevbøker gir, ettersom ved kun å se på overflaten ikke nødvendigvis gir informasjon om hvordan innholdet faktisk blir behandlet. Vertikal analyse kan si noe om hvordan elevboka presenterer forholdet for selve læringen som skal skje, men sier ikke noe om hvordan et emne er relatert til andre emner (Charalambous et.al.,2010, s. 120-122).

HORIZONTAL ANALYSIS OF THE TEXTBOOK

Background Information	**Overall Structure**
• Title • Number of books • Pages (Number and Density) • Profile of authors and advisory committee • Publisher and year of publication • Accompanying materials (e.g., teachers' guides, resource materials)	• Number of units/lessons and average number of pages per unit/lesson • Structure of units/lessons • Topics covered • Sequencing of topics

VERTICAL ANALYSIS OF THE TEXTBOOK

Communicated to Students	**Required of Students**	**Connections**
Mathematical Content • Topic-specific construct, structure etc. (e.g. part-whole, ratio, operator, quotient, measure fraction constructs) • Definitions, rules, conventions • Illustrations-representations (irrelevant, relevant to the context but not to the mathematics, supporting the mathematics) *Mathematical Practices* • Worked examples • Modeling thinking *Attitudes* • Equity • View of mathematics	• Potential Cognitive Demands (memorization, procedures with connections, procedures without connections, doing mathematics) • Type of Response (answer only, answer and mathematical sentence, explanation, justification)	• Connecting within and between strands • Classroom instruction - textbook connections • Connecting to situations outside of school

Key: Dimension: Uppercase letters; Categories: bold; Sub-categories: italicized; Criteria: bulleted points.

Figur 5 Rammeverket til Charalambous et al. (2010, s. 123)

Rammeverket Charalambous et al. (2010, s. 123 - 124) utviklet, består av to dimensjoner for analyse; horisontal og vertikal. Horisontal analyse har to underkategorier, *Background Information (*bakgrunnsinformasjon) og *Overall Structure* (generell struktur). Den horisontale analyse ser på boka som helhet, og analysen fokuserer på generelle karakteristikker av tekstboka, som fysisk utseende og organisering av eksempelvis innhold. En slik analyse vil gi en enkel beskrivelse av ulike elevbøker uten å gå i dybden på det matematiske innholdet. Det er den vertikale analysen som gir dybdeanalyse innenfor ett matematisk konsept eller emne (Charalambous et al. 2010, s. 122). Rammeverket til deres vertikale analyse har tre kategorier, *Communicated to students, Required of students* og *connections*. Den første underkategorien peker på hvordan læreboka formidler det matematiske innholdet til elevene. *Required of students*, refererer til de krav oppgavene har til elevene, som oppgavenes kognitive krav og svartype. C*onnections* er hvordan matematikken er forbundet med andre matematiske emner, sammenheng mellom klasserominstruksjon og lærebok, og hvordan matematikken er koblet til situasjoner utenfor skolen (Charalambous et al., 2010, s. 122). Her mener de det er en styrke å ha et rammeverk som inneholder begge dimensjoner, men at det kan være risikabelt å ha mange kriterier uten en underliggende struktur.

2.8.1 Task analysing guide

Smith og Stein (1998, s. 348) har utviklet et rammeverk for å analysere kognitive krav i matematikkoppgaver. Ideen de hadde var at ulike typer oppgaver krever ulik tenkning av elevene. En oppgavetype som krever at elevene skal fremkalle noe de har memorert fra før, er annerledes enn oppgavetyper som krever at elevene må tenke og på den måten stimuleres til å konstruere matematiske sammenhenger (Stein & Smith, 2011, s. 9). Rammeverket er utviklet ut fra hvilke krav til tenking som kreves av elevene. Rammeverket består av fire kategorier, 1) *memorization*, , 2) *procedures without connections*, 3) *procedures with connection* og 4) *doing mathematics*. Videre vil vi bruke oversatte begrep om de ulike kategoriene, memorering, prosedyre uten sammenheng, prosedyre med sammenheng og gjøre matematikk. Disse fire kategoriene er inndelt i to nivåer ut fra hvilke krav de stiller til tenkning hos elevene kalt *lower - level demands* og *higher-level demands*. Vi bruker her oversettelsene lavt kognitivt nivå og høyt kognitivt nivå.

Memorering er definert som lavest kognitivt krevende av disse nivåene og antas å være rutinepreget og krever minst av elevenes tenking. Vi refererer ofte til slike oppgaver som å reprodusere fakta, formler eller definisjoner, eller å øve på tidligere lærte fakta.

Prosedyre uten sammenheng er også lavt kognitivt krevende. De følger som oftest en algoritme eller prosedyre, og oppgaven gir ingen forståelse for matematiske sammenhenger. Fokus er rett svar og ikke å utvikle matematisk forståelse. Prosedyre med sammenheng er kategorisert som høyt kognitivt krevende. Disse oppgavene er utviklet for at elevene skal oppnå en dypere forståelse av matematiske konsepter og ideer gjennom prosedyre.

Ut i fra rammeverket er Gjøre matematikk oppgaver mest kognitivt krevende for elevene. De krever kompleks og ikke-algoritmisk tenkning, og har ingen tydelig løsningsmetode (Smith & Stein, 1998, s. 348; Charalambous et al., 2010, s. 129). I tabellen under er Smith og Steins (1998, s. 348) rammeverk. Til høyre i kolonnen står vår oversettelse av beskrivelsene av oppgavetypene på de ulike nivå. De ulike nivå er vist i kolonnen til venstre der vi viser at vi bruker forkortelsene LM, LPUS, LPMS og LGM for de respektive nivå.

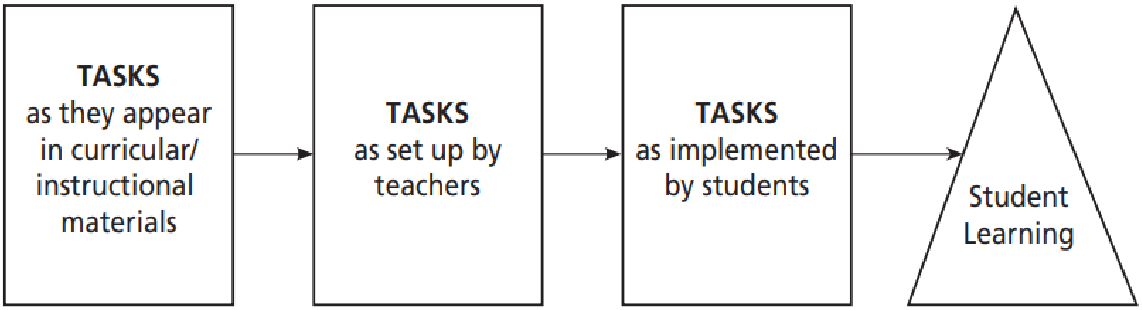
Lave kognitive krav Memorering (LM)	• reproduksjon av tidligere lært fakta, regler, formler eller definisjoner, eller automatisert fakta, regler, formler eller definisjonen. • kan ikke bruke prosedyre/strategi ettersom prosedyre/strategi ikke eksisterer eller tidsrammen er for kort for å få gjennomført oppgaven. • Er ikke-ambisiøs. Oppgavene er reproduksjon av tidligere lærte oppgaver og fremgangsmåten er tydelig og gitt direkte. • Har ingen tilknytning til konseptene eller mening som ligger til grunn for fakta, regler, formler eller definisjoner som skal læres eller reproduseres (Smith og Stein, 1998).
Lave kognitive krav Prosedyre uten sammenheng (LPMS)	• Algoritmisk. Fremgangsmåten er tydelig eller åpenbar fra tidligere instruksjoner, erfaring, eller via plassering av oppgaven. • Krever begrenset kognitive krav for å gjøre oppgaven. Hva som kreves eller skal gjøres for å løse oppgaven kommer tydelig frem. • Har ingen sammenheng med til begrepene/konseptet eller mening som ligger til grunn for prosedyren • Har fokus på rett besvarelse i stedet for å utvikle matematisk forståelse • Krever ingen forklaring eller forklaringen fokuserer kun på å beskrive brukt prosedyre (Smith og Stein, 1998)

Høyt kognitivt krav Prosedyre med sammenheng (HPMS)	• Gjør elevene oppmerksomme på bruk av prosedyrer for å utvikle dypere forståelse av matematiske begrep og ideer. • Foreslår eksplisitt eller implisitt brede fremgangsmåter/prosedyrer å følge som har sammenheng med konseptuelle ideer i motsetning til smale algoritmer som ikke linker fremgangsmåten til underliggende matematiske konsepter. • Oppgavene er representert på flere måter, eks visuelle diagrammer, konkreter, symboler og kontekster. Å lage forbindelse mellom representasjoner bidrar til å utvikle forståelse. • Krever en viss grad av kognitiv innsats. Generelle prosedyrer kan følges, men ikke tankeløst. Elevene må engasjere seg med konseptuelle ideer som ligger til grunn for prosedyrene for å kunne fullføre oppgaven, som utvikler forståelse (Smith & Stein, 1998)
Høye kognitive krav Gjøre matematikk (HGM)	• Krever kompleks og ikke-algoritmisk tenkning, der løsningsmetode ikke er innøvd, eksplisitt antydet av oppgaven, instruksjonene eller gjennomarbeidet eksempel. • Krever at elevene utforsker og forstår matematiske konsepter, prosesser eller forhold. • Krever egenkontroll eller selvregulering av egne kognitive prosesser • Krever at elevene søker relevant kunnskap og erfaringer og gjør hensiktsmessige bruk av de i arbeidet med oppgaven • Krever at elevene analyserer oppgaven og aktivt undersøker oppgavens begrensninger som kan begrense løsningsstrategier og løsninger • Krever betydelig kognitiv innsats og kan innebære et visst nivå av angst for eleven på bakgrunn av karakteren til oppgavens løsningsprosess. (Smith & Stein, 1998, s. 348)

Figur 6 Vår oversettelse og forenkling av Smith og Steins (1998, s. 348) task analysis guide

Smith og Stein (1998, s. 344) mener også at en kognitivt krevende oppgave ikke nødvendigvis er kognitivt krevende for alle elever. For å avgjøre om en oppgave er kognitivt krevende for spesifikke elever, er det en del kriterier som må ligge til grunn. Læreren må blant annet ta i betraktning elevenes alder, forkunnskaper og erfaringer for å avgjøre om oppgaven er kognitivt krevende for dem. En oppgave som er kognitivt krevende for en 2.trinnselev trenger ikke være det for en elev på 6. trinn, ettersom en elev på 6. trinn har flere løsningsverktøy enn andreklassingen (Smith & Stein, 1998, s. 344-345).

Som nevnt tidligere har oppgaven stor betydning for hva elevene lærer, men det er også av stor betydning hvordan oppgaven blir presentert. De må presenteres på en slik måte at de engasjerer elevenes tenkning på et høyere kognitivt nivå (Smith & Stein, 1998, s.344). Intensjon til oppgaven blir påvirket av hvordan læreren og elevene behandler dem i klasserommet. Stein og Smith (2011, s.11) sier at oppgaven har mange faser før den påvirker elevenes læring.



Figur 7 Mathematical Task Framework (Stein & Smith, 2011, s. 11)

I figuren over er oppgavens faser illustrert., i *Mathematical task framework* av Stein og Smith (2011, s 11). Ideen er at oppgaven endrer seg etter hvert som den går fra en fase til en annen. Intensjon til oppgaven slik den står i boka blir ikke nødvendigvis det overført til elevens læring. Fase en er slik oppgaven står i boka. Fase to er hvordan oppgaven blir presentert for elevene. Den tredje fasen er hvordan elevene tar i bruk oppgaven, og siste fase er hva elevene faktisk lærer gjennom oppgaven. De tre første fasene har påvirkning på den fjerde fasen (Stein & Smith, 2011, s. 11).

3 Metode

I dette kapittelet vil vi først redegjøre for valg av tilnærming og metode ved å beskrive de metodene vi har valgt, og begrunne valgene våre. Det neste vi vil gjøre er å belyse vårt utvalg av lærebøker med tilhørende lærerveiledninger. Deretter vil vi redegjøre for hvordan vi har kommet fram til de ulike kodeordene i rammeverket vårt og presentere rammeverket. Til slutt vil vi se på forskningsetikk og kvaliteten på arbeidet.

3.1 Valg av tilnærming og metode

I dette delkapittelet vil vi beskrive og begrunne hvilken metodisk tilnærming vi har valgt. Valg av metode er avhengig av problemstillingen. Vår problemstilling er å undersøke hvordan lærerveiledningen hjelper læreren i å undervise etter kjerneelementene i LK20. For å finne ut av dette har vi valgt den metoden Gleiss og Sæther (2021, s. 118) kaller tekstanalyse, fordi tekstanalyse kan brukes til blant annet å analysere læreplaner, lærebøker, andre faglige læringsressurser og offentlige dokumenter. Vi anser lærerveiledninger som andre faglige læringsressurser. Det finnes flere former for tekstanalyse. Vi valgte innholdsanalyse fordi vi skal se på innhold i lærerveiledninger og ikke språk**.** Ved å velge innholdsanalyse kan vi velge å kombinere verktøy fra ulike metoder, og tilpasse dem til analysestrategien fordi innholdsanalyse ikke har egne begrep for verktøy i analysen (Gleiss & Sæther, 2021, s. 126-137). I arbeidet vårt med å utvikle rammeverket oppdaget vi at vi også måtte analysere oppgaver i elevbøker. Da ble vi litt usikre på om vi måtte endre metoden vår fra innholdsanalyse og til oppgaveanalyse. Siden hovedtyngden av vårt arbeid er utviklingen av rammeverket for å analysere innholdet i lærerveiledningene, holder vi fast ved at vi har gjennomført en innholdsanalyse.
Vi tok først utgangspunkt i et rammeverk utviklet for elevbokanalyse av Charalambous et al. (2010), og videreutviklet dette til å passe også for lærerveiledningsanalyse. I arbeidet med videreutviklingen av rammeverket, som består av både en vertikal og en horisontal analyse, ble det etter hvert klart for oss at vi også måtte se på oppgavene i elevbøkene for å kunne svare på i hvor stor grad lærerveiledningene hjelper læreren med å undervise etter kjerneelementene i LK20. Først måtte vi analysere oppgavene for kognitive krav, fordi dette har innvirkning på to av kjerneelementene. For å få til dette valgte vi å ta utgangspunkt i

rammeverket *Task analysis guide* utarbeidet av Smith og Stein (1998, s. 348). Hvordan vi gjorde det vil vi komme nærmere tilbake til.

Hsieh og Shannon (2005, s. 1281-1283) beskriver tre typer kvalitative innholdsanalyser c*onventional content analysis, directed content analysis* og *summative content analysis*, der tilnærmingen til kodingen er den største forskjellen. Vi har valgt å bruke Fauskanger og Mosvolds (2014, s. 138) oversettelse av begrepene som gir oss konvensjonell innholdsanalyse, teoridrevet innholdsanalyse og summativ innholdsanalyse. Teoridrevet innholdsanalyse har som mål å validere eller utvikle et konseptuelt rammeverk eller teori. Funnene fra en slik type innholdsanalyse er å finne støttende, eller ikke støttende bevis for en teori (Fauskanger & Mosvold, 2014, s.138). Vi mener vi har teoridrevet innholdsanalyse fordi vi skal utvikle et konseptuelt rammeverk ut fra teori.

Innen forskning er det vanlig å skille mellom kvalitative og kvantitative metoder. Gleiss og Sæther (2021, s. 197) beskriver at en kvalitativ tilnærming egner seg for å gå i dybden på et mindre utvalg av tekster. Vi har analysert utvalgte kapitler i tre ulike lærerveiledninger for å se hvordan de støtter læreren i å undervise etter kjerneelementene. Når vi kun undersøker tre lærerveiledninger, anser vi dette for å gå i dybden av teksten. Fordi det er et mindre utvalg. Resultatene våre vil ikke være generaliserbare, men forhåpentligvis vil de gi oss en mer nyansert innsikt av kunnskap, refleksjon og tolkning av i hvor stor grad læreverkene hjelper læreren til å undervise etter LK20. En styrke ved en kvalitativ tilnærming er fleksibilitet og åpenhet ved at forskeren kan undersøke interessante elementer som eventuelt kommer frem i prosessen. Det kan være mer åpne forskningsspørsmål, og det meste av arbeidet gjøres etter datainnsamling (Gleiss & Sæther, 2021, s. 30). I vårt tilfelle var det en styrke å ha en kvalitativ tilnærming fordi vi under arbeidet måtte endre på, og tilføre forskningsspørsmål.

I datainnsamlingen telte vi antall ord. Da ble vi i tvil om vi også hadde en kvantitativ tilnærming i vår innholdsanalyse. Dersom man både har en kvalitativ og kvantitativ tilnærming, og kombinerer disse kalles det *mixed methods* (Gleiss & Sæther, 2021, s. 29 -33). Kvantitative metoder derimot har ofte til hensikt å tallfeste, måle, sammenlikne og generalisere. Da er det store mengder data, og forskeren har et større utvalg. Kvantitativ tilnærming er ofte spørreundersøkelser. Gleiss og Sæther (2021, s. 32) påpeker at mange metoder for datainnsamling, kan brukes både kvalitativt og kvantitativt. Forskjellen mellom bruken av dem er hovedsakelig graden av forhåndsstrukturering av datamaterialet. Det vil si, om forskeren på forhånd har laget kategorier som hen skal bruke til å analysere og strukturere datamaterialet. Vi mener at vi ikke har *mixed methods* fordi vi ikke har et stort nok utvalg for å kalle studien kvantitativ. Som vi nevnte over, var hoveddelen av arbeidet vårt utviklingen av det konseptuelle rammeverket. Vi har da i hovedsak en teoridrevet innholdsanalyse med kvalitativ tilnærming selv om vi teller antall ord. Dette fordi i en kvantitativ tilnærming vil det ikke være tilstrekkelig å kalle det en kvalitativ metode (Gleiss & Sæther, 2001, s. 29-33).

Vi valgte å utvikle et eget rammeverk for å kunne gjennomføre datainnsamlingen og svare på problemstillingen vår. Problemstillingen gav oss kategoriene som var kjerneelementene i LK20. Når kategoriene allerede er etablert på forhånd, kalles analysemetoden deduktiv (Gleiss & Sæther, 2021, s 171). Når kategoriene er etablerte, må man ha koder for å få kjennskap til dataene, får å kunne forenkle å kunne si noe om datamaterialet. For å kunne utarbeide kodeordene til rammeverket vårt, måtte vi skaffe oss en dypere forståelse for kjerneelementene gjennom teori. Vi tok utgangspunkt i teori som vi kjente til fra før. På bakgrunn av denne teorien kunne vi finne kodeord som gav oss mulighet til å finne det vi ønsket å måle.

Når vi har utviklet et rammeverk skal vi kode lærerveiledningene. Cohen et al. (2018, s. 668) påpeker at dataanalyse og behandling av data er sentralt i innholdsanalyse. Utfordringen i kvalitativ dataanalyse er å få datamengdene håndterbar og forståelig. Koding er et viktig element i innholdsanalyse. Teksten brytes ned i mindre enheter, i vårt tilfelle, basert på forhåndsbestemte kategorier, kjerneelementene. Kodene kan velges på forhånd ut fra teori, tas fra forskerspørsmålene, eller baserer seg ut fra datamaterialet (Cohen et al., 2018, s. 668). Gleiss og Sæther (2021, s 174) kaller koding basert på det forskeren legger merke til ut fra datamaterialet for empirinær koding, og koding som tar utgangspunkt fra teori, begrep eller fra forskningslitteratur for tematisk koding. Empirinær koding er induktiv, mens den teoribaserte tematiske kodingen som oftest er deduktiv, men kan også være induktiv. Vi har en teoribasert tematisk koding fordi vi har tatt utgangspunkt i Udirs definisjon på kjerneelementer, søkt etter teori som støtter og utdyper forklaring bak Udirs definisjoner for å finne essensen i kjerneelementene. Svakheten er at vi kan ha valgt teori som ikke er vektlagt hos andre forskere. Vi kan ha tolket teoriene feil eller misforstått meningen under oversettelsen på utenlandske artikler, som gir følgefeil i forhold til vårt rammeverk. Styrken med teoridrevet innholdsanalyse er at eksisterende teori kan støttes opp og utvides. Svakheten kan være at når forskeren bruker kjent teori i møte med dataen, kan de være tilbøyelig til å tolke dataen støttende opp mot teorien, altså vil det oppstå bias (Hsieh & Shannon, 2005, s.

1283) og at andre funn kan bli oversett. Det at vi tok utgangspunkt i teori vi kjente til fra før, kan dette også være en svakhet i vårt rammeverk.

3.3 Utvalg

Her vil vi gjøre rede for utvalget vi har tatt i forhold til vår innholdsanalyse.

LK20 ble innført høsten 2020 og alle matematikklærere skulle lære og undervise etter de nye kjerneelementene som ble innført med fagfornyelsen. Derfor ønsker vi å undersøke om læreverkene støtter læreren i dette undervisningsarbeidet. For å avgrense oppgaven har vi valgt å kun se på tre lærerveiledninger. Den nye læreplanen ble innført skoleåret 2020-21 og ettersom vi ønsker å se på i hvor stor grad lærerveiledningene støtter læreren til å undervise etter kjerneelement var det nødvendig at lærerveiledningene vi valgte er utarbeidet etter LK20.

I vår studie valgte vi å ta et ikke-sannsynlighetsutvalg og enhetene er ikke tilfeldig valgt. I tillegg har vi tatt et bekvemmelighetsutvalg fordi forskningen vår skal være relevant for oss. Skolen vår deltar i et prosjekt med å prøve ut et læreverk fra Barentsforlaget, slik at vi har kjennskap til verket. Samtidig har vi allerede kjennskap til Cappelen Damm gjennom digitale ressurser gjennom arbeid. Det har gjort at vi har blitt nysgjerrige på lærerveiledningen til forlaget. Vi har begge to mange års erfaring fra læreryrket og har begge brukt Multi fra Gyldendal fra 1. -7. trinn. Dette betyr at vi kan ha gjort oss opp noen meninger om læreverkene, ubevisst og bevisst. Selv om vi gjør vårt ytterste for å behandle utvalgene likt kan vi bli påvirket av ubevisste eller bevisste «holdninger». Vi har valgt å analysere bøker fra 4. trinn ettersom vi begge har erfaring med å undervise i matematikk på dette trinnet, i tillegg fant vi ikke andre skrevne masteroppgaver som har analysert matematikkbøker fra dette trinnet. Det at vi har både kvalitativ tilnærming og et bekvemmelighetsutvalg, betyr at vi ikke kan generalisere ut fra det valget vi har gjort (Gleiss & Sæther, 2021, s. 39-41).

Først skulle vi analysere både 4A og 4B lærerveiledningene fra forlagene, og startet analysen med bøker fra Gyldendal og Cappelen Damm. Barentsforlagets bøker var under revidering. Det viste seg at kun 4A var klar høsten 2023, mens 4B ikke kommer før vinter 2024. Da valgte vi å kun konsentrere oss om 4A bøkene, fordi vi ønsker at det skulle være mest mulig likhet mellom utvalgene våre. Vi ønsket å analysere kapitler med like emner, derfor har vi kun analysert kapitlene multiplikasjon og divisjon. Ettersom prosjektet vårt utvidet seg til oppgaveanalyse måtte vi også kode oppgaver. To av lærerveiledningene inneholdt oppgavene, men vi måtte tilføre en elevbok i analyseprosessen.

De bøker vi skal analysere i vårt prosjekt er som følger:

- Matematikk 4A fra Cappelen Damm Lærerveiledning
- Multi 4A Lærerveiledning fra Gyldendal
- Matematikk 4A Lærerveiledning fra Barentsforlaget
- Matematikk 4A Grunnbok fra Barentsforlaget

Videre i vår oppgaven vil vi bruke Cappelen Damm for lærerveiledning fra Cappelen Damm, Gyldendal for lærerveiledningen fra Gyldendal og Barentsforlaget for lærerveiledningen fra Barentsforlaget. Oppgavene vil vi omtale som oppgaver fra de respektive forlagene.

3.2 Forskningsetikk

Med tanke på forskningsetikk omtaler Gleiss og Sæther (2021, s. 141) lærebøker og læreplaner som offentlige dokumenter. I utgangspunktet trenger man ikke samtykke til å bruke dem, men må være forsiktige med å ikke sette forfatterne av læreverket i et dårlig lys. Vi ønsket å bruke illustrasjoner og deler av tekst i oppgaven vår og tok kontakt med forlagene. Vi sendte mailforespørsel til alle tre forlag. Fra Cappelen Damm og Gyldendal fikk vi ikke tillatelse til å bruke illustrasjoner eller oppgavetekst til å offentliggjøre på grunn av opphavsrett og kompensasjon til forfattere. Barentsforlaget ga oss imidlertid tillatelse til å publisere tekst og illustrasjoner både fra grunnbok og lærerveiledning.

3.3 Forskningskvalitet

Reliabilitet handler i grunn om to ting, hvordan datamaterialet er blitt påvirket under innsamling og på grunn av måten vi har samlet det inn på. Reliabilitet handler også om noen hadde fått likt resultat om de hadde gjort det samme som oss (Gleiss & Sæther, 2021, s. 202).

I et konstruktivistisk vitenskapssyn brukes ofte begrepene refleksivitet og troverdighet for å se på kvaliteten på masterprosjektet, framfor begrepene validitet og reliabilitet.
Som Gleiss og Sæther (2021, s. 204) og Cohen et al. (2018, s. 270) sier, så er refleksivitet at en er gjennomgående kritisk, og har en spørrende holdning til eget forskningsarbeid. Det betyr for eksempel at vi forsøker å forstå samspillet mellom alle faktorene som inngår i forskningsprosessen og vår egen rolle. Det vil vi gjøre ved å begrunne valgene vi tar så godt vi kan for å skape tydelighet for leseren. Valgene skal beskrives, begrunnes og reflekteres gjennom hele forskningsprosessen (Gleiss & Sæther, 2021, s.194). Vi skal prøve å være mest mulig transparent i arbeidet, som da betyr at vi må være tydelige på de valgene vi tar, og begrunne hvorfor. Det er for at leseren kan følge de stegene vi har tatt. Målet med å være transparent er å overbevise leseren om at valgene er gode og gjennomtenkte (Gleiss & Sæther, 2021, s. 204). Leseren skal ha tillitt til at de svarene vi har kommet fram til både er gode og relevante.

Posisjonalitet er viktig for refleksiviteten. Det handler om hvordan vår identitet og væremåte kan påvirke forskningen. Når vi har valgt tekstanalyse betyr ikke det at vi slipper å tenke på posisjonalitet. Vi må alltid tenke over vår subjektivitet, ta metablikk, ta i betraktning vår subjektivitet, holdning, og forutinntatthet og være transparente i analysen og valgene vi tar. På den måten kan lesere vurdere valgene, slik at de har tro på prosjektet vårt. Vi har et sosialkonstruktivistisk perspektiv og vi mener vi ikke klarer å fjerne bias helt fordi vi leser og tolker materialet på bakgrunn av identitet og erfaring (Gleiss & Sæther, 2021, s. 140, 192, 204). Dette er noe vi merket godt ettersom vi er to som forsker sammen, og har ulik forståelse og tolkning av tekster, og det har ført til mange oppklarende drøftinger.
For å sikre validiteten, altså troverdigheten, er det om å gjøre og se om vi klarer å svare på problemstillingen vår. Det skal være sammenheng mellom problemstilling, datamaterialet og konklusjoner. I tillegg skal vi vise refleksjon over metodevalgene våre, og vår posisjonalitet.

Vi har blant annet valgt å triangulere. Å triangulere betyr at vi skal kode samme materialet hver for oss, se om vi har kodet likt, og diskutere ulike perspektiver opp mot hverandre for å skape troverdighet (Gleiss & Sæther, 2021, s. 203). Rent praktisk vil det for eksempel bety at vi vil prøvekode for å se om rammeverket med tilhørende koder er brukbare. I tillegg til å prøvekode ble alt vi ikke var sikre på diskutert i fellesskap og slik at vi ble enige om kategorisering.

3.4 Utvikling av rammeverket

Her vil vi redegjøre for prosessen med å utvikle rammeverket vårt, og begrunne de valg vi har gjort underveis. Det skal vi bruke til å si noe om i hvor stor grad lærerveiledningene hjelper læreren med å undervise etter kjerneelementer, gjennom oppgavene. Valgene begrunner vi for at prosessen vår skal være transparent, og slik at lesere kan forstå og vurdere de valg vi har gjort ut i fra våre begrunnelser. Vi vil imidlertid prøve etter beste evne å være så objektive som mulig når vi koder datamaterialet, slik at hvis noen gjør samme analyse av samme bøker, vil de få tilnærmet likt resultat. Dette for at dere som lesere skal ha tro på prosjektet vårt. Ettersom vi ønsket å analysere lærerveiledninger opp mot kjerneelementene ble oppgaven vår å utvikle et konseptuelt rammeverk. Vi startet med å søke på ulike søkemotorer med søkeordet lærerveiledningsanalyse, for å se om det var utarbeidet analyseverktøy for lærerveiledninger. Vi fikk svært få resultater. Dette kan tyde på at det er gjort lite forskning på området (Buch et al.,2023, s. 12). Vi begynte derfor å undersøke mastere som omhandlet tekstanalyse av matematikkbøker og arbeidet baklengs ut fra disse. Ved at vi undersøker kildene som andre hadde brukt, fant vi fram til artikler som også omhandlet lærerveiledningsanalyse. Gleiss og Sæther (2021, s. 56) sier at all forskning bygger på hverandre når ny forskning bruker begrep og redskaper som andre forskere har utviklet fra før. Vi fant et rammeverk som vi syntes hadde en oversiktlig struktur, og det ble at vi tok utgangspunkt i rammeverket som Charalambous et al. (2010, s. 123) hadde utviklet i sin forskning da de analyserte matematikkbøker. Rammeverket de utviklet består av en horisontal og en vertikal analyse. Den horisontale analysen kan gi en generell karakteristikk av boka, mens den vertikale analysen går i dybden på et matematisk konsept eller emne. Den vertikale analysen gir oss mer dybdeforståelse ut i fra selve innholdet i lærerveiledningene og kan gi oss svaret på problemstillingen vår. Å kombinere disse to analysene komplimenterer hverandre slik at vi kan få et mer helhetlig bilde av lærerveiledningen.

3.4.1 Horisontal analyse

Den horisontale analysen kan være med på å gi et helhetlig bilde og et sammenlikningsgrunnlag, ved å se på hva som er likt og hva som er ulikt mellom lærerveiledningene, og dermed se hva som er vektlagt.

Tidligere har vi presentert Charalambous et al.(2010) horisontale analyse, som består av bakgrunnsinformasjon og generell struktur. Vi vil kalle generell struktur for innholdsstruktur fordi vi ser mer på fordelingen av innholdet i lærerveiledningen. Vi vil nå utfra tabellen forklare hva vi har vektlagt.

Horisontalt rammeverk for lærerveiledning	
Bakgrunnsinformasjon	**Innholdsstruktur**
• Tittel • Forfattere • Forlaget • Årstall • Størrelse på boka • Sider, antall og tetthet	• Innhold i lærerveiledningen • Antall sider informasjonsdel /sideprioritering før oppgaveveiledning • Layout av sidene • Elevbokens oppbygging • Mengde tekst til oppgavene • Antall oppgaver

Figur 8 Vårt rammeverk for horisontal analyse av lærerveiledninger

I tabellen ser vi at av bakgrunnsinformasjon har vi valgt å ta hensyn til tittel, forfatter, forlag, årstall, størrelse på boka, antall sider og tetthet. Vi forstår tetthet som mengde tekst på hver side i lærerveiledningen.

Til å finne de elementene den generelle strukturen skulle inneholde, arbeidet vi induktivt. Vi oppdaget at lærerveiledningene var veldig ulike og ønsket å trekke frem det vi syntes var interessant. Det vi kom fram til var antall sider i innledningsdelen, og innholdet i lærerveiledningen før den direkteveiledningen til oppgavene. Det har vi valgt fordi det kan si noe om lærerveiledningens oppbygning og hvordan den kan brukes av lærere. Layout har vi valgt fordi det kan gi oss viktig informasjon i forhold til hvordan lærerveiledningen gir informasjon til læreren. Elevbokens oppbygging har vi valgt fordi lærerveiledningene forklarer hvordan elevbøkene skal brukes og hvilke oppgavetyper den inneholder. Mengde tekst til oppgavene har vi valgt for å belyse potensiell veiledning lærerne får til de spesifikke oppgavene. Antall oppgaver har vi valgt fordi vi i problemstillingen vil se i hvilken grad lærerveiledningen hjelper læreren å undervise etter de ulike kjerneelement gjennom oppgavene.

3.4.2 Vertikal analyse

Den vertikale analysen vil være hoveddelen av vår oppgave, der vi skal analysere et matematisk konsept, altså bruk av kjerneelementene i lærerveiledninger ut fra rammeverket vi har utviklet.

Kategorier i den vertikal analyse var gitt ferdig av kjerneelementene i LK20. Ettersom vi ønsket å finne ut i hvilken grad lærerveiledninger kan støtte læreren i å undervise etter kjerneelementene, tok vi utgangspunkt i Udirs definisjoner. Begrepene der var utgangspunktet for å lete etter teori. Vi synes det var utfordrende å finne og velge ut relevant teori, ettersom utvalget var stort. Det gjorde at vi valgte ut teorier med forfattere vi hadde kjennskap til, eller som ble henvist til i artikler vi fant. Dette refererer Gleiss og Sæther (2021, s. 57-62) til som å spore referanser fremover og bakover, og finne teorier som er deltagende i den samme akademiske samtalen. Det vil si at forskere refererer til hverandre, eller har deltatt på de samme forskningskonferansene. I teorien vi leste prøvde vi å finne likheter og forskjeller, for å gi tyngde til valg av kodeord. Det vi opplevde som en utfordring var at artiklene stort sett var på engelsk, og at det var en del fagbegreper vi ikke finner gode norske oversettelser av. Det kan hende at hverken vår oversettelse av begreper, eller vår forståelse for innholdet, er helt dekkende. Det kan også være at vi har valgt teorier som kan være kritisert av andre forskere hvis vi bare har valgt forskningslitteratur som deltar i samme akademiske samtale (Gleiss & Sæther, 2021, s. 67). Dette kan være en svakhet i forskningen vår. Gleiss og Sæther (2021, s. 178) påpeker at det er fare for subjektive fortolkninger i kodearbeidet og at forskere vil kode samme tekst på ulik måte. Det å være to som forsker sammen følte vi som en styrke ved at vi begge kunne lese samme teori, diskutere teorien og diskutere oss frem til en felles forståelse for hva teorien egentlig sa. I tillegg at når forskere skal samarbeide om kode og analyse, er det viktig at datamaterialet blir kodet så likt som mulig.
Teorien brukte vi til å se hvordan vi skulle få frem essensen i kjerneelementene, ved å finne kodeord som kan bety det samme og oppnå det samme. Vi fant mange ord som kunne være sidestilte og få frem samme mening. Vi prøvde å finne flere teorier som støttet opp om de samme betydningene for å få de rette nyansene av kodeordene. Disse ordene ble kodeord brukt i rammeverket. Eksempler på slike ord er hvordan og forklar. Vi mener at i klasserommet vil læreren oppnå samme respons fra elevene enten ved å be elevene forklare hva de har gjort, eller ved å spørre hvordan. Begge deler vil føre frem til at elevene for eksempel greier ut om hva de har gjort.

Gleiss og Sæther (2021, s. 178) påpeker at kodearbeid bør være strukturert og deduktiv. Vi tok utgangspunkt i teorien og laget kodeordene. Gikk til kodearbeidet, og fant ut at vi også måtte ha en induktiv tilnærming for å justere/operasjonalisere ordene slik at vi klarte å finne meningen bak begrepene vi ønsket å bruke. Cohen et al. (2018, s. 670) belyser denne delen av prosessen og sier at første kodeforsøk ofte fører til at nye koder må lages, for eksempel på bakgrunn av at kodene ikke genererer det de skal, eller at kodeordene kan være for avhengig eller påvirket av andre kodeord. Etter å ha funnet noen kodeord, prøvekodet vi i ulike bøker. Vi fant raskt ut at bøkene brukte ulike ord for samme ting. For eksempel «Hva hvis … ?» spørsmål ble mye brukt i Cappelen Damm, mens i Barentforlaget sin bok brukte de «Spør om …». Ut fra teorien hadde vi definert ordet samtal, mens når vi så i teksten vi analyserte, kunne det stå fortell. Det samme så vi med ordet begrunn og hvorfor. Slik justerte vi ord underveis. Dette gjorde vi fordi ved å sidestille ord får vi frem samme mening bak ordene. Det vil si at vi måtte undersøke hvordan teksten sto i bøkene, analysere om de ordne eller setningene kunne ha samme betydning. Å arbeide ut i fra teksten, kalles deduktivt (Gleiss & Sæther, 2021, s. 171). Slik måtte vi gå frem og tilbake mellom teori og empiri mange ganger for å justere, tilføye eller ta vekk kodeord, eller ha med hele setninger. En arbeidsmåte som kombinerer induktiv og deduktiv arbeidsmåte kalles abduktiv (Gleiss & Sæther, 2021, s. 171). Resten av kodearbeidet arbeidet vi med abduktiv tilnærming. En svakhet med rammeverket og kodeordene kan være at de kodeord vi valgte ut ikke er brukt på den måten vi hadde tiltenkt ut i fra rammeverket i alle tilfeller. Vi tror da vi vil få en like stor feilmargin i alle bøker, ettersom vi har kodet all tekst likt i de tre lærerveiledningene. I tillegg har vi sidestilt kodeord som har samme rotform. Det vil si at ord som tanke, tenke, tenkemåte har vi kodet likt. Det har vi gjort fordi at bøkene kan ha ulik skrivestil, og at vi ønsket et mest mulig rettferdig resultat.
En annen svakhet ved oppgaven vår er at de kjerneelementene vi har tatt utgangspunkt i er ti omfangsrike begreper. Det vil si at det ble mye teori å holde styr på. Ved å prøve å sammenlikne tekster, finne essensen i teoriene og viktige momenter, kan vi ha oversett viktige elementer. Det kan også hende at andre ville tatt helt andre valg enn vi har gjort.

Ved å analysere hovedessensen i kjerneelementene ble det tydelig for oss at kjerneelementene i tillegg er tett knyttet sammen, og at mange av de har elementer av hverandre i seg. Det gjorde at det ble utfordrende å skille de helt fra hverandre. Et eksempel er at kjerneelementet modellering og anvendelse er tett forbundet med kjerneelementet utforskning og problemløsning. Vi har definert at det er kontekstavhengighet som skiller disse to. I utgangspunktet ønsket vi også å ha med elementet å arbeide med problemløsningsoppgaver og modellering i syklus. Det fant vi ikke i noen lærerveiledninger, slik at vi valgte å ta det bort. I tillegg betyr det at flere av kodeordene blir behandlet innenfor ulike kjerneelement.

Mens vi arbeidet oss inn i teorien som omhandlet utforsking og problemløsning, ble det tydelig for oss at de kognitive nivåene i oppgavene er essensielle i arbeidet med kjerneelementene. Derfor ble forskningen vår utvidet til også å være analyse av oppgavene i grunnboka, som en del av rammeverket. I tillegg så vi at det ble unaturlig å ikke ha med tekst i elevboka som støtter opp lærerens veiledning. I Cappelen Damm er det illustrasjoner av ei jente som stiller hjelpespørsmål eks s. 49 « Hvordan vil dere dele opp 24 · 6 i et rutenett?» som står ved siden av en oppgave.

Figur 9 Eksempel på hjelpespørsmål i elevbok.

Hos Barentsforlaget står slike spørsmål enten i tillegg til en oppgave, eller som en del av oppgaven.

64 a) Uten å løse likningene, plasser dem slik at løsningene kommer i stigende rekkefølge.

$x \cdot 2 = 808$ | $k \cdot 1 = 808$

$y \cdot 8 = 808$ | $z \cdot 4 = 808$

Begrunn svaret ditt.

Figur 10 Oppgave 64 i elevboka, Barentsforlaget. (Blank et al. 2023, s. 34).

På bildet over ser man at det står Begrunn svaret ditt i elevboka.

64 *To og to, gjerne med en felles introduksjon.*

a) *Man kan starte med å diskutere i fellesskap likheter og ulikheter ved likningene. Deretter kan elevene to og to prøve å plassere likningene slik at løsningene kommer i stigende rekkefølge.*

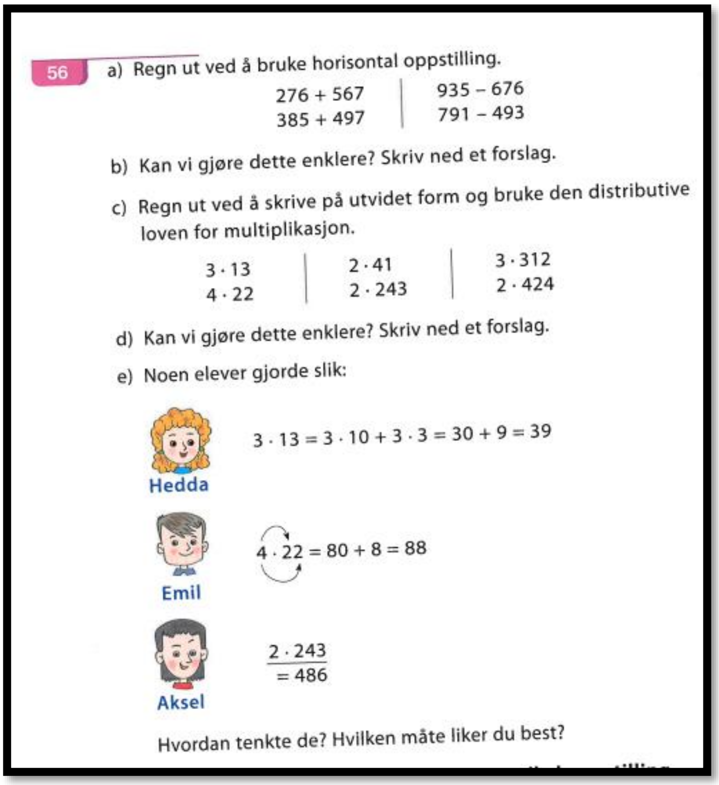
$y \cdot 8 = 808$ $z \cdot 4 = 808$ $x \cdot 2 = 808$ $k \cdot 1 = 808$

Begrunnelse:
Siden verdien til produktene skal være lik, vil det måtte være slik at jo større den kjente faktoren på venstre side er, jo mindre må den ukjente faktoren være.

Figur 11 Lærerveiledningen til oppgave 64a, Barentsforlaget. (Melhus et al. 2023, s. 48).

I lærerveiledningen i bildet over står det at elevene skal arbeide to og to og hva begrunnelsen er for dette.

I bildet under er et til eksempel der det står i oppgave 56 e «Hvordan tenkte de?» «Hvilken måte liker du best?»



56 a) Regn ut ved å bruke horisontal oppstilling.

$276 + 567$ | $935 - 676$
$385 + 497$ | $791 - 493$

b) Kan vi gjøre dette enklere? Skriv ned et forslag.

c) Regn ut ved å skrive på utvidet form og bruke den distributive loven for multiplikasjon.

$3 \cdot 13$ | $2 \cdot 41$ | $3 \cdot 312$
$4 \cdot 22$ | $2 \cdot 243$ | $2 \cdot 424$

d) Kan vi gjøre dette enklere? Skriv ned et forslag.

e) Noen elever gjorde slik:

Hedda $3 \cdot 13 = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 3 = 30 + 9 = 39$

Emil $4 \cdot 22 = 80 + 8 = 88$

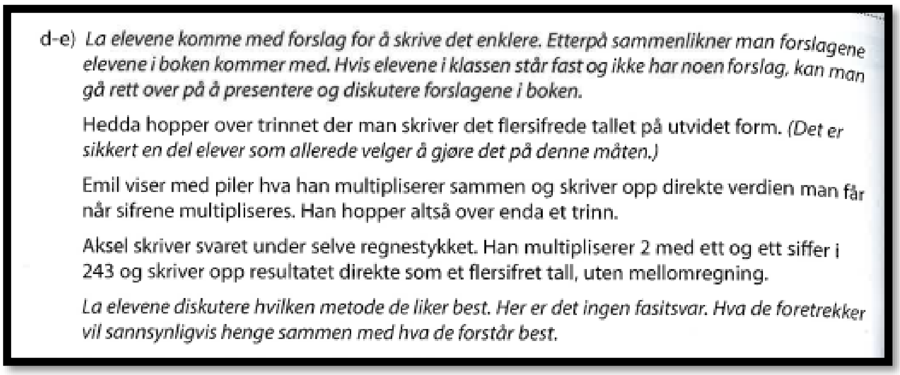
Aksel $\dfrac{2 \cdot 243}{= 486}$

Hvordan tenkte de? Hvilken måte liker du best?

Figur 12 Oppgave 56 i elevboka. Barentsforlaget (Blank et al. 2023, s. 30).

Ettersom elevboka har så mye tekst var det unaturlig å ikke ta det med i analysen.

Under ser vi tilhørende veiledning til den samme oppgaven i lærerveiledningen.



d-e) *La elevene komme med forslag for å skrive det enklere. Etterpå sammenlikner man forslagene elevene i boken kommer med. Hvis elevene i klassen står fast og ikke har noen forslag, kan man gå rett over på å presentere og diskutere forslagene i boken.*

Hedda hopper over trinnet der man skriver det flersifrede tallet på utvidet form. *(Det er sikkert en del elever som allerede velger å gjøre det på denne måten.)*

Emil viser med piler hva han multipliserer sammen og skriver opp direkte verdien man får når sifrene multipliseres. Han hopper altså over enda et trinn.

Aksel skriver svaret under selve regnestykket. Han multipliserer 2 med ett og ett siffer i 243 og skriver opp resultatet direkte som et flersifret tall, uten mellomregning.

La elevene diskutere hvilken metode de liker best. Her er det ingen fasitsvar. Hva de foretrekker vil sannsynligvis henge sammen med hva de forstår best.

Figur 13 Lærerveiledningen tilhørende oppgave 56 i elevboka. Barentsforlaget (Melhus et al. 2023, s. 44)

I bildet over ser vi nederst at læreren skal la elevene diskutere hvilken metode de liker best ut i fra spørsmålet i elevboka.

Vi har sammenfattet rammeverket til den vertikale analysen i tabellen under.

Vertikalt rammeverk for kjerneelementer				
Utforsking og problemløsning	Modellering og anvendelse	Resonnering og argumentasjon	Representasjon og kommunikasjon	Abstraksjon og generalisering
Elevbok: Oppgaveanalyse Kodeord: - **samme kodeord som i lærerveiledningen**	Elevbok: Oppgaveanalyse Kontekst til oppgaven Kodeord: **- samme kodeord som i lærerveiledningen**	Elevbok: Kodeord: **- samme kodeord som i lærerveiledningen**	Elevbok Antall hjelpespørsmål Kodeord: **- samme kodeord som i lærerveiledningen**	Elevbok Kodeord: **- samme kodeord som i lærerveiledningen**
Lærerveiledning: Antall hjelpespørsmål **Kodeord:** Forklar, forslag, begrunn, hvorfor, hvordan, felles, klassesamtale, samtale, snakk om, refleksjon, argumentasjon, Strategier, løsningsstrategier, sammenheng, utforsking, problemløsning, samarbeid	Lærerveiledningen: **Kodeord:** Lag modell Tolke modell Vurder	Lærerveiledning: **Kodeord:** Samarbeid Læringspar To og to begrunn, forklar, diskuter, bevis, hvorfor, hvordan, vurder, tankerekke, tenke, argumentasjon, resonnering, reflektere	Lærerveiledning: Antall ganger oppmuntre til bruk av ulike representasjoner: verbal, visuell, konkret, kontekst Antall hjelpespørsmål **Kodeord:** Lag modell Omgjør modell kommuniser, samtale, snakk om, fortell, begrunn, forklar, diskuter, bevis, hvorfor, hvordan, vurder, tankerekke, tenke, argumentasjon, resonnering, reflektere	Lærerveiledning: **Kodeord:** definisjon generalisering, lov, regel, algoritme, likt/ulikt, tanke, tankerekke, mønster/ sammenheng, metode, startegi, strategideling, abstraksjon «Er det alltid slik?»

Figur 14 Vårt vertikale rammeverk for lærerveiledningsanalyse.

I tabellen er det kjerneelementene som utgjør kategoriene fordelt i hver kolonne. Så følger en forklaring hva hver kategori inneholder. Eks i første kategori skal man analysere kognitive krav i elevbok, deretter skal man samle data i form av kodeord fra elevbok og lærerveiledning. Siden problemstillingen er i hvor stor grad hjelper lærerveiledningene med å undervise etter de ulike kjerneelementene gjennom oppgavene, må vi rangere hjelpen læreren får mot de ulike kjerneelementene. Vi vil bruke rammeverket og se på hyppigheten til kodeordene, slik at vi får et sammenlikningsgrunnlag. Vi har valgt å lage oss en rangeringstabell med kategoriene «i liten grad», «i noen grad» og «i høy grad», og bruke denne til å konkludere i hvor stor grad lærerveiledningene hjelper læreren å undervise etter kjerneelementene i LK20 gjennom oppgavene.

I liten grad	I noen grad	I høy grad

Figur 15 Graderingsoversikt

Figuren viser kategoriene vi vil rangere lærerveiledningene ut fra.

3.4.2.1 Oppgaveanalyse

Til analysen av oppgavene valgte vi å ta utgangspunkt i det eksisterende rammeverket *Task Analysis Guide* av Smith og Stein (1998, s. 348). Som tidligere nevnt, når vi skal bruke eksisterende teori er det en viss fare for at vi ikke har samme forståelse som det i utgangspunktet var tiltenkt. Vi prøvde å kode 106 oppgaver i Matematikk Cappelen Damm og 108 oppgaver fra læreverket Gyldendal hver for oss. Vi sammenliknet vår forståelse av kodingen og fant ut at vi hadde en del ulik forståelse, spesielt mellom kategoriene LPUS og HPMS. Vi oppdaget da at analyseredskapet vårt ikke var tilfredsstillende. Vi diskuterte analyseredskapet vårt på nytt, og fant ut at vi måtte forenkle det slik at vi fikk bedre forståelse for den. Tekstoppgaver synes vi var vanskelige å kode, men vi tok utgangspunkt i å analysere ut fra kompleksiteten i oppgavene. Høye siffer eller flere steg i løsningsprosessen gjorde at vi kodet oppgavene til kognitivt krevende. Vi så om det var "kodeord" i tekstoppgaven, slik som «legge til», «trekke fra», «høyere enn», «lavere enn» som gjør det enklere å forstå hvordan oppgavene skulle løses. Dette førte til at vi kodet oppgavene til lavt kognitivt krevende.

Vi valgte å oversette, tolke og forenkle rammeverket etter beste evne for å gjøre det mer brukervennlig til eget bruk. Våre tolkninger av Smith og Steins (1998, s. 348) rammeverk er vist i tabellen under, med våre oversettelser og forenklinger.

Lavt kognitivt nivå	Tekst i tekst-oppgaver: «legge til ..», «trekke fra..»	Enklest	(LM) Memorering *-Telle* *-Navngi* *-Drilloppgaver*
			(LPUS) Drill, instrumentell innlæring *-Instrumentell innlæring* *-Øve på algoritme* *-Krever ikke forklaring eller begrunnelse* *- Tekstoppgaver med oppskrift*
Høyt kognitivt nivå	Tekst-oppgaver: Flere steg		(HPMS) Arbeide opp mot forståelse og generalisering Omgjøring av representasjoner *-Bygger opp mot algoritme og mot generalisering, basert på forståelse* *-Oppgaver med ukjent ledd* *-Oppgaver med meget høye tall* *-Tekstoppgaver uten oppskrift* *-Tekstoppgaver med flere steg*
		Mest krevende	(HGM) Problemløsningsoppgaver - syklus Modelleringsoppgaver - syklus *-Problemløsningsoppgaver uten gitt løsningsstrategi* *-Krever at elevene vurderer prosessen,* *-Ikke algoritmisk tenkning* *-Krever utforsking og forståelse av matematiske konsepter, prosesser eller sammenhenger* *-Krever at elevene analyserer oppgaven og oppgavens grenser*

Figur 16 Vår forenkling av Smith og Steins (1998, s. 348) rammeverk for å analysere oppgavenes kognitive nivå.

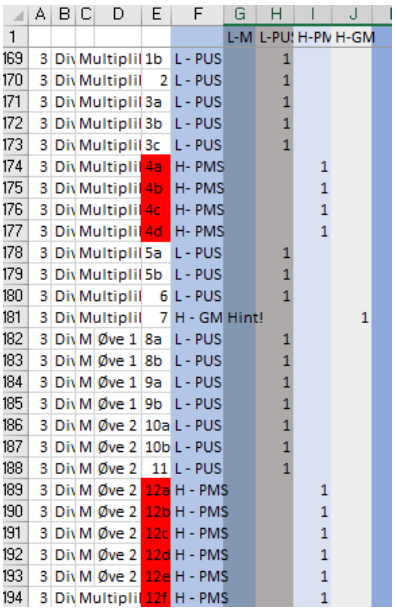
I tabellen ser vi til høyre hvordan vi har oversatt og de ulike gradene av kognitivt nivå. Pilen indikerer vanskegraden i oppgavene for elevene. Til venstre for pilen har vi skrevet hvordan vi har tolket vanskegraden av tekstoppgaver. Til venstre ser vi at vi har skilt mellom lavt kognitive nivå og høyt kognitivt nivå. Dette fordi i vår oppgave var det viktigst å skille mellom høyt og lavt kognitivt nivå.

Et av kriteriene til Smith og Stein (1998, s 344-345) er at man må kategorisere oppgaver ut i fra elevenes alder, kunnskaper og erfaringer. Vi valgte å ta utgangspunkt i kompetansemålene fra 3.trinn og bruke erfaringen vår. Vi måtte også lage oss en oppskrift for hva utgangspunktet for kodingen skulle være. Hva måtte vi gjøre først? Hva må vi ta utgangspunkt i?
Vi valgte å ta hensyn til disse kriteriene:

- Elevenes forkunnskaper.
- Gjennomgått stoff i boka. /lært kunnskap/hva har de lært så langt
- Kompleksiteten i oppgavene (Charalambous et al.) Hva er vanskelig for elevene.

Vi valgte å lage et excelark der vi førte inn koderesultatene. Figuren under viser et utsnitt av oppgaveanalysen vår.

I kolonne A skrev vi kapittel nummer, i kolonne B står navn på kapitlet. Hvilket delkapittel står i kolonne C, oppgavetype er i kolonne D og oppgavenummer i kolonne E. Vi skrev hvilket kognitivt nivå i kolonne F. Når vi skulle summere for å telle antall, navnga vi kolonne G, H , I , J de ulike kategoriseringsnavnene.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1							L-M	L-PU:	H-PN	H-GM
169	3	Di\	Multiplil		1b	L - PUS		1		
170	3	Di\	Multiplil		2	L - PUS		1		
171	3	Di\	Multiplil		3a	L - PUS		1		
172	3	Di\	Multiplil		3b	L - PUS		1		
173	3	Di\	Multiplil		3c	L - PUS		1		
174	3	Di\	Multiplil		4a	H- PMS			1	
175	3	Di\	Multiplil		4b	H- PMS			1	
176	3	Di\	Multiplil		4c	H- PMS			1	
177	3	Di\	Multiplil		4d	H- PMS			1	
178	3	Di\	Multiplil		5a	L - PUS		1		
179	3	Di\	Multiplil		5b	L - PUS		1		
180	3	Di\	Multiplil		6	L - PUS		1		
181	3	Di\	Multiplil		7	H - GM	Hint!			1
182	3	Di\	M	Øve 1	8a	L - PUS		1		
183	3	Di\	M	Øve 1	8b	L - PUS		1		
184	3	Di\	M	Øve 1	9a	L - PUS		1		
185	3	Di\	M	Øve 1	9b	L - PUS		1		
186	3	Di\	M	Øve 2	10a	L - PUS		1		
187	3	Di\	M	Øve 2	10b	L - PUS		1		
188	3	Di\	M	Øve 2	11	L - PUS		1		
189	3	Di\	M	Øve 2	12a	H - PMS			1	
190	3	Di\	M	Øve 2	12b	H - PMS			1	
191	3	Di\	M	Øve 2	12c	H - PMS			1	
192	3	Di\	M	Øve 2	12d	H - PMS			1	
193	3	Di\	M	Øve 2	12e	H - PMS			1	
194	3	Di\	Multiplil		12f	H - PMS			1	

Figur 17Utsnitt av excelark benyttet under kodingen.

3.5 Datainnsamling

Når vi hadde utviklet rammeverket vårt laget vi et excelark. Hvert forlag fikk sitt eget ark. Vi hadde kodeordene i øverste rad slik at hver kolonne var for et kodeord. Ettersom vi har problemstillingen «i hvor stor grad hjelper lærereveledningene læreren med å undervise etter de ulike kjerneelementene, gjennom oppgavene», ville vi se om hvilke veiledningstekst hver oppgave hadde. Hver oppgave står for en rad. Vi markerte cellen med siffer ut i fra antall ganger kodeordene ble brukt til oppgavenes tilhørende tekst. Dette fordi vi ønsket å se på hvilken støtte oppgaveteksten gir læreren i å undervise etter kjerneelementene.

Excelarket under viser et lite utsnitt av kodeordene i øverste rad og oppgavenummer i kolonnen til venstre. Når vi var usikre på om vi hadde kodet rett, merket vi cellen med et spørsmålstegn, slik at vi kunne diskutere og komme frem til en felles forståelse.

1		Lærer	Likt ulikt	sammenheng	Felles	Forklare	L	Forslag	Samarbeid i	samar	spørsmål	Hjelpe	Forutse	Hvorfor	Hvordan
686	97d									Felles					
687	97e							1		Felles					
688	98a				1				1	Felles					
689	98b1			1						Felles	1		1		
690	98b2			1?						Felles					
691	98b3									Felles					
692	98c									Felles					
693	98d 1									Felles			1		1
694	98d 2									Felles					
695	98d 3									Felles					
696	98d 4									Felles					
697	98e 1									Felles					
698	98e 2									Felles					
699	98e 3									Felles					
700	98e 4									Felles					
701	99a				1				1	Felles	1				
702	99b1									Felles/to og to					

Figur 18 Utsnitt av excelark fra vertikal analyse.

I tabellen over ser vi at kolonnene har ulike farger, for at vi skulle ha bedre oversikt når vi kodet. Til venstre i tabellen ser vi at oppgavene er nummererte. Cappelen Damm hadde kun nummererte oppgaver. Når Cappelen Damm hadde flere deloppgaver fikk de oppgavene betegnelsen eks. 3a, 3b, 3c osv. Gyldendal og Barentsforlaget hadde nummererte oppgaver og betegnelse med bokstaver på deloppgaver, eks a, b, c osv. Når de i tillegg hadde mange deloppgaver under der igjen, for eksempel oppgave 94 a, nummererte vi de med ekstra siffer i tillegg.

94 a) Regn ut.

$162 \cdot 3 : 9 - 48$	$648 : (5 + 4)$
$784 : 7 \cdot 5 + 371$	$168 : (7 + 1)$
$171 : 9 \cdot 7 - 29$	$936 : (6 + 3)$

b) Se på uttrykkene i hver kolonne. Hva er likt? Hva er ulikt?

Figur 19 Oppgave 94 i elevboka, Barentsforlaget (Blank et al. 2023, s. 47).

Her ser vi at oppgave 94 har deloppgave a og b. I tillegg har oppgave a seks regnestykker. Her nummererte vi oppgavene 94a1, 94a2, 94a3, 94a4, 94a5, og 94a6.

For å illustrere et eksempel fra Cappelen Damm kan vi se i figur 20. Her har oppgaven ikke a eller b, slik at hvis dette var oppgave 6 ville vi navngitt denne som 6a og 6b.

Regn ut:

$3 \cdot 4 =$

$3 \cdot 6 =$

$3 \cdot 8 =$

Figur 20. Vår illustrasjon. Eks. på oppgave fra Cappelen Damm.

4 Analyse og funn

I dette kapitlet vil vi gi eksempler på hvordan vi har gjennomført analysearbeidet og hva funnene våre ble. Først vil vi se på den horisontale analysen før vi går videre til den vertikale analysen.

4.1 Analyse og funn fra den horisontal analysen

Først vil vi se på bakgrunnsinformasjon før vi ser på innholdsstruktur. Den horisontale analysen vil gi oss et generelt bilde av bøkene. Her har vi sammenliknet de tre lærerveiledningene ut i fra elementene i bakgrunnsinformasjon og fremstilt de i tabellen under.

Tabell 6 Funn fra vår horisontale analyse av lærerveiledninger. Bakgrunnsinformasjon.

Forlag	Cappelen Damm	Gyldendal	Barentsforlaget
Tittel	Matematikk 4A Lærerveiledning fra Cappelen Damm	Multi 4A Lærerens bok	Matematikk Lærerveiledning 4A
Forfattere	Dahl og Nohr	Alseth et al.	Melhus et al.
År	2022	2021	2023
Størrelse	A4	A4	A4
Antall sider	184	128	146

Elementene i bakgrunnsinformasjonen er i kolonnen til venstre i tabellen. Det vi vil trekke frem er at Cappelen Damm har et større omfang av sider totalt i boka. De har 56 sider mer enn Gyldendal og 38 flere enn Barentsforlaget. Dette kan tyde på at Cappelen Damm har mer innhold enn de to andre lærerveiledningene.

Den generelle strukturen av horisontal analyse inneholder flere funn. For å strukturere disse vil vi framstille de i ulike tabeller og figurer. Først har vi sammenliknet de tre lærerveiledningene ut i fra innholdet i innledningen. Cappelen Damm har et større antall sider i innledningen sin. Det vi har definert som innledning er delen av lærerveiledningen før den direkte veiledningen mot oppgavene i elevbøkene starter. De to andre lærerveiledningene har kun 6 sider. Det gir en differanse på 17 sider.

Tabell 7 Funn fra horisontal analyse. Innhold i lærerveiledningen.

Cappelen Damm	Gyldendal	Barentsforlaget
Antall sider - 23	Antall sider - 6	Antall sider - 6
Matematikkdidaktiske prinsipper	Dybdelæring	Innledning
Bli kjent med grunnboka	Læreverket Multi	Grunnbøkene
Problemløsing	Kjerneelementer i matematikk	Lærerens forberedelse og arbeid i klasserommet
Oppbygging av matematikkverket	Elementer i Multi	Lekser og samarbeid med hjemmet
Kjennetegn på god matematikkundervisning	Årsplan og mål	Observasjon, prøver og kartlegging
Multiplikasjon og divisjon		Forslag til halvårsplaner
Eksempler på modeller vi bruker på 4. trinn		
Regnestrategier		
Forslag til årsplan matematikk 4. trinn		

I tabellen over har vi fremstilt overskriftene i innledningene i de ulike lærerveiledningene i kronologisk rekkefølge. I tabellen kan vi se at lærerveiledningene har mye ulikt pedagogisk innhold. Det vi synes er interessant, er at alle verkene har innhold vi har prioritert i oppgaven vår på ulike måter, og alle lærerveiledninger har forslag til årsplaner.

Ut fra innholdet kan vi lese at Gyldendal vektlegger dybdelæring og kjerneelement. De har forklart sammenhengen mellom de ulike kjerneelementene og hvordan boka legger opp til at elvene skal arbeide med dem. I tillegg trekker de frem dybdelæring. Dybdelæring forbinder vi med matematisk kunnskap og kompetanse. I forordet står det at Gyldendals læreverk bygger på moderne tilnærminger i forhold til læring og undervisning, der de blant annet trekker fram utforsking, problemløsning, samarbeid og kommunikasjon (Alseth et al. 2021).

Barentsforlaget nevner også dypere forståelse i sammenheng med at elevene trenger å arbeide med ulike oppgaver. I Barentsforlaget står det om lærerens arbeid. Lærerveiledningen trekker fram viktigheten av at læreren må planlegge timene godt, og ha god kontroll på målet med oppgaven, og hvordan denne henger sammen med det elevene allerede har lært. De trekker også fram at det er lærerens jobb å aktivisere elevene, og at læring skjer gjennom kommunikasjon og samarbeid (Melhus et al. 2023, s. 4). Dette kan vi se i sammenheng med flere av Smith og Steins fem praksiser som vi presentert i delkapitlet «Lærerens nye rolle». Barentsforlaget sier at deres læreverk er bygget på Zankov og Vygotskys teorier om læring, utvikling og undervisning (Melhus et al. 2023, s.3).

Ut fra overskriftene i Cappelen Damm kjenner vi igjen problemløsning og modeller fra vårt prosjekt. Det som skiller Cappelen Damm fra de andre lærerveiledningene er at de presenterer mer generell informasjon som er relevant for lærerens rolle i klasserommet, som vi kan se av tabellen. I tillegg nevner de dybdeforståelse, klassesamtaler, utforsking og representasjoner. De nevner også matematikkdidaktiske prinsipper som at elevene skal utforske for å lære, at de over tid skal bygge dybdeforståelse for begreper og sammenhenger, at elevene skal utvikle hensiktsmessige regnestrategier og at de skal utvikle forståelse gjennom ulike representasjoner. Cappelen Damm nevner også Bruners undervisningsteori, som går fra det konkrete og til det abstrakte via det visuelle (Dahl & Nohr, 2022, s.VI-VII).

Det som er likt for alle lærerveiledningene er at de trekker fram dybdelæring eller dypere forståelse. Dette mener vi henger godt sammen med bakgrunnen for kjerneelementene.

Vi ønsket å sammenlikne antall oppgaver i de ulike verkene ettersom det kan gi oss et sammenlikningsgrunnlag. Vi velger å se de to kapitlene sammen ettersom vi ikke differensierer mellom de ulike temaene. I tabellen under viser vi oppgavenummer slik forlagene selv definerer de, medregnet tester på slutten av kapitlene.

Tabell 8. Funn i horisontal analyse. Antall oppgaver i elevbøkene og antall oppgaver når vi har analysert deloppgavene.

	Cappelen Damm	**Gyldendal**	**Barentsforlaget**
Totalt antall oppgaver	107	158	119
Vårs definisjon av antall deloppgaver	239	488	868

Utfra tabellen ser vi at slik forlagene selv definerer oppgaver, har Gyldendal flest. Hele 51 flere enn Cappelen Damm, og 39 flere enn Barentsforlaget. Senere skal vi analysere kognitive krav i oppgavene, og trenger å vite antall oppgaver til hvert verk for å kunne sammenlikne dem. Som tidligere nevnt har vi kodet oppgavene og nummerert alle deloppgaver. Da fikk vi et annet resultat. Barentsforlaget har da 868 oppgaver. Det kan tyde på at oppgavene i Barentsforlaget er mer omfattende og krever mer enn bare ett svar. Cappelen Damm har i utgangspunktet ikke merket noen deloppgaver, og når det ikke er så stor differanse mellom deres tolkning av oppgaver og vår tolkning av deloppgaver, kan det tyde på at oppgavene ikke er så komplekse.

Cappelen Damm og Gyldendal har flere ulike oppgavetyper lærerveiledningene har en forklaring på hvordan oppgavetypene er strukturert i elevbøkene, og forklarer også hvordan de har tenkt at de ulike oppgavetypene skal brukes.

Cappelen Damm og Gyldendal har begge store bilder i starten av kapitlene. Gyldendal har veiledning til samtalen med forslag til spørsmål læreren kan stille elevene, eks «Hvor er dette?» «Hvor mange mennesker er på bildet?» I Gyldendal står svar ferdig i teksten i klamme bak hvert spørsmål. Cappelen Damm har en historie til sitt samtalebilde, i tillegg til spørsmål læreren kan stille elevene. Barentsforlaget har ikke samme oppbygning. De starter kapitlet med en vanlig oppgave.

Cappelen Damm har en fast struktur gjennom begge kapitlene, som vist i tabellen. En utforskeoppgave (Vi tenker) som skal samtales om, etterfulgt av løsningsforslag rett etter (Vi lærer). De oppgavene som følger skal løses på den måten vist i eksempelet. Hvert delkapittel starter på samme måte.

Gyldendal har noe lik oppbygning. Når det er nytt stoff starter de med en oppgave de har definert som utforsk (U), og med en forklaring (F) under. Deretter følger oppgaver med lik struktur. Inn i mellom kommer en aktivitet (A) eller en utforskoppgave (U), eller et spill.

Barentsforlaget har innholdet strukturert etter røde og blå oppgaver. Røde oppgaver er nytt stoff. Etter hver røde oppgave er det 3 eller 4 blå oppgaver, som er kategoriserte som repetisjon, og er oppgaver læreren kan velge ut i fra hva elevene trenger å øve mer på. Oppgavene er uavhengig av hverandre og kan også være om andre matematiske tema.

I alle bøkene ender kapitlet med en vurderingssituasjon. Cappelen har en stjernelogg elevene kan vurdere seg selv med, og et spill. Barentsforlaget og Gyldendal har to sider med oppgaver, Test deg selv og Kan du dette?

Hvordan oppgavene er plassert i elevbøker kan ha noe å si for oppgavens kognitive krav. Det vil vi komme tilbake til senere.

Tabell 9. Funn i horisontal analyse. Elevbokens oppbygning/oppgavetyper.

Cappelen Damm	Gyldendal	Barentsforlaget
Samtalebilde	Samtalebilde	Oppgaver
..	…	Rød
Vi tenker	U	Blå
Vi lærer	Oppgaver	Blå
?	U	Blå
Oppgaver	Oppgaver	Rød
Øve 1	A	Blå
Øve 2	F	Blå
…	Oppgaver	Blå
Problem 1	Spill	Rød
Sant eller usant?	U	Blå
Min stjernelogg	F	Blå
Spill	Oppgaver	Blå
	..	…
	Kan du dette?	Test deg selv

Tabellen illustrerer hvordan de ulike lærerveiledningene forklarer strukturen av oppgavene i elevbøkene.

Vi la merke til at alle lærerveiledningene hadde ulik layout, og vi ønsket å se nærmere på om det hadde å si for læreren og læringen. Ettersom vi ikke fikk tillatelse fra Cappelen Damm og Gyldendal til å bruke illustrasjoner eller tekst på grunn av opphavsrett og kompensasjon, skal vi prøve å illustrere disse lærerveiledningene ved hjelp av tegning.

Enten generell faglitteratur eller annen pedagogisk litteratur Ikke kodet i vertikal analyse Kodet i horisontal analyse Multiplikasjon er viktig fordi,….	Bla bla bla ….. … …	Kodet i horisontal analyse Matematisk samtale Bla bla bla…. … …	Flere aktiviteter: (Ikke kodet) Hva mangler? Terningsspill Bingo
(Veiledning rettet mot oppgavene) Tenke Eleven kan … komme med forslag … om hvordan …. Lære Elevene kan gjerne… sammenheng mellom .. klosser .. Samtal om…	(Kopi av elevboka med fasit) Vi tenker Vi lærer	(Kopi av elevboka med fasit) ? 3 4 5	(Veiledning rettet mot elevene) ? Oppgaven forklarer begrepet … og diskutere med elevene … 3 og 4 Elevene skal …. Samtale om … 5 Elevene skal komme frem til …tegne eller konkreter…

Figur 21 Funn horisontal analyse. Illustrasjons av Cappelen Damms layout.

Denne figuren skal illustrere en dobbeltside i Cappelen Damm. Grønn farge illustrerer området som er analysert i horisontal analyse, i tillegg til innledningen i lærerveiledningen. Gul farge illustrerer det som er kodet i vertikal analyse. Sidetallet i lærerveiledningen følger sidetallene i elevboka. Det er forminsket bilde av oppgavesidene i elevboka nederst i midten og dekker ca. en fjerdedel av en side i lærerveiledningen. Bildet fungerer også som fasit, der de har «svart» på oppgavene med grønn farge. Nederst ved siden av bildet av elevboka er en kort tekst med veiledning til tilhørende oppgave på sidene. Øverst på begge sidene, over det som hører direkte til oppgavene i elevboka, er faginnhold til læreren. Dette faginnholdet varierer fra relevant fagstoff vedrørende temaet i elevboka, forslag til aktiviteter som kan gjennomføres uavhengig av lærerbok og annen faglitteratur. For eksempel står det en tekst om klasseromskultur som fremmer læring på side 80, helt tatt ut av kontekst, men likevel informasjon en lærer kan ha nytte av.

Under har vi forsøkt å illustrere Gyldendals layout. Dette er et tosidig oppslag.

<table>
<tr><td>Mål og innhold
(Veiledning rettet mot oppgavene)
Elevene har jobbet med rutenett. De skal utforske...
.. høre på hvordan elevene ....
-Hvordan fant dere ut...?
-Husker dere hva en tabell er?</td><td colspan="2">(Kopi av Elevboka)
U
Utforskings oppg.

Forklaring med illustrasjoner
F

(Oppgaver)
30</td><td colspan="2">(Kopi av Elevboka)
Samme type oppgaver
31

32

33

Spill</td><td>Egne notater</td></tr>
<tr><td>**F**
Forklaringer viser .... Det er viktig å huske på..... I oppgaven er ...</td><td>30
Hvor mye veier Leo?
Denne oppg skal elevene forklare hvordan...</td><td>31- 32- 33
Disse oppgavene er ...
mange har ikke sett...
... og diskuter hvordan.....</td><td>....</td><td>Forenkle:
La elevene bruke tallinje og klosser

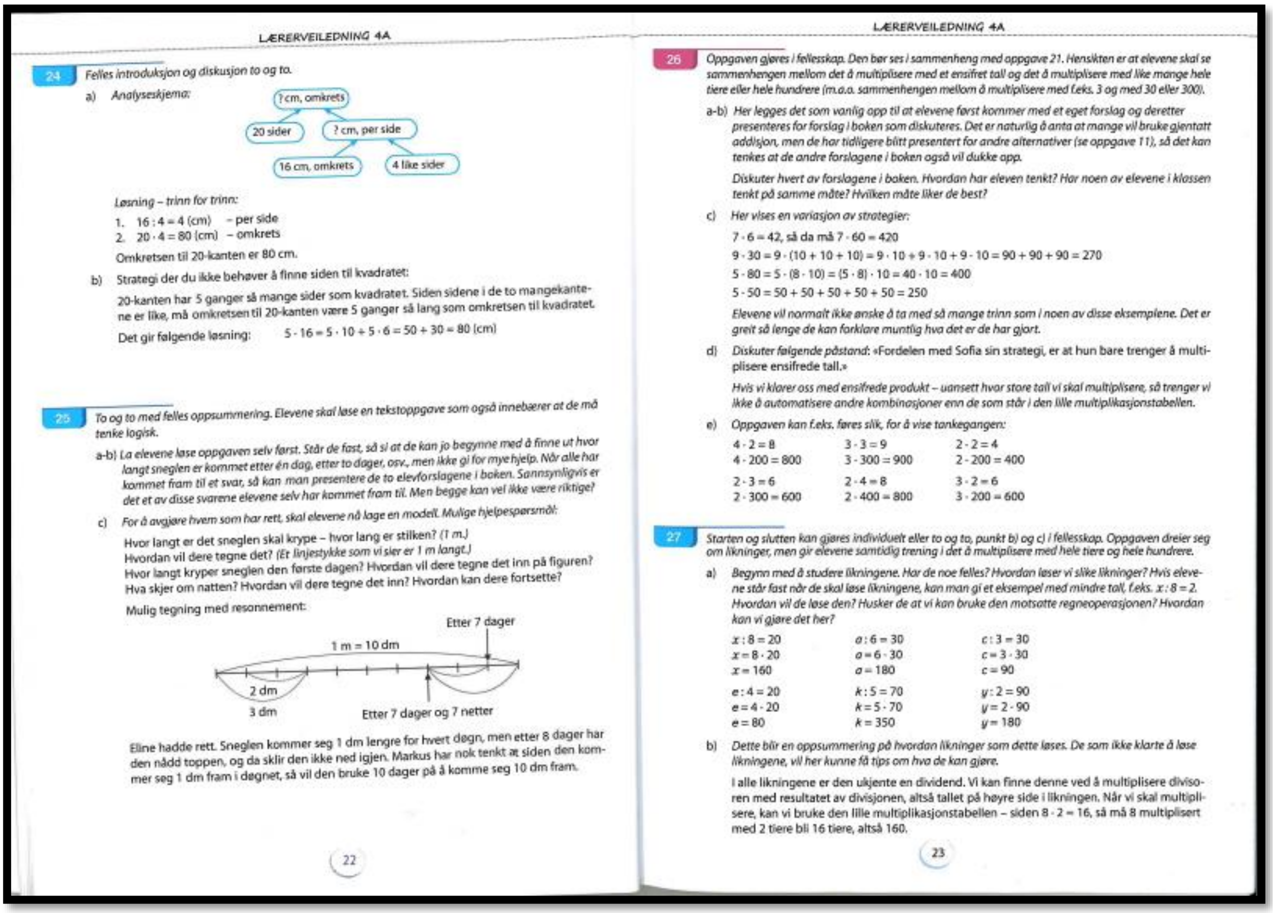
Mer utfordrende:
Gi oppgave fra kopi ...</td><td>IKKE KODET
Flere aktiviteter:</td></tr>
</table>

Figur 22 Funn horisontal analyse. Illustrasjon av Gyldendals layout.

Sidetallet i lærerveiledningen følger sidetallene i elevboka. Øverst i midten av oppslaget er et forminsket bilde av elevboka. Ved siden av og under bildet er det tre kolonner som inneholder veiledning til oppgavene i elevboka. Oppbygningen er lik gjennom hele boka, men mengde informasjon til oppgavene varierer. Noen steder i lærerveiledningen er det plass til lærerens egne notater. Hver dobbeltside i lærerveiledningen har også tips til forenkling og mer utfordring. Gul uthevingsfarge er for å illustrere hvordan vi har kodet teksten i vertikal analyse. Gyldendal viser løsningsstrategier ved blokkmodell, men boka fungerer ikke som en fasit. Gyldendal forklarer ofte hvordan elevene kan løse oppgavene som for eksempel «Elevene kan …», «Elevene skal …» , «Elevene løser ..». Vi ser at både Cappelen Damm og

Gyldendal har flere oppgaver som har samme instruksjon i lærerveiledningen, slik at for eksempel oppgave 30, 31 og 32 kan ha samme veiledning til læreren. For eksempel: «Gjør disse oppgavene. De likner på oppgavene på forrige side». Det kan tyde på at oppgavene følger samme løsningsmetode.

I figuren under er et bilde av to sider i Barentsforlagets lærerveiledning.



LÆRERVEILEDNING 4A

24 *Felles introduksjon og diskusjon to og to.*

a) *Analyseskjema:*

Løsning – trinn for trinn:

1. 16 : 4 = 4 (cm) – per side
2. 20 · 4 = 80 (cm) – omkrets

Omkretsen til 20-kanten er 80 cm.

b) Strategi der du ikke behøver å finne siden til kvadratet:

20-kanten har 5 ganger så mange sider som kvadratet. Siden sidene i de to mangekantene er like, må omkretsen til 20-kanten være 5 ganger så lang som omkretsen til kvadratet.

Det gir følgende løsning: 5 · 16 = 5 · 10 + 5 · 6 = 50 + 30 = 80 (cm)

25 *To og to med felles oppsummering. Elevene skal løse en tekstoppgave som også innebærer at de må tenke logisk.*

a-b) *La elevene løse oppgaven selv først. Står de fast, så si at de kan jo begynne med å finne ut hvor langt sneglen er kommet etter én dag, etter to dager, osv., men ikke gi for mye hjelp. Når alle har kommet fram til et svar, så kan man presentere de to elevforslagene i boken. Sannsynligvis er det et av disse svarene elevene selv har kommet fram til. Men begge kan vel ikke være riktige?*

c) *For å avgjøre hvem som har rett, skal elevene nå lage en modell. Mulige hjelpespørsmål:*

Hvor langt er det sneglen skal krype – hvor lang er stilken? *(1 m.)*
Hvordan vil dere tegne det? *(Et linjestykke som vi sier er 1 m langt.)*
Hvor langt kryper sneglen den første dagen? Hvordan vil dere tegne det inn på figuren?
Hva skjer om natten? Hvordan vil dere tegne det inn? Hvordan kan dere fortsette?

Mulig tegning med resonnement:

Eline hadde rett. Sneglen kommer seg 1 dm lengre for hvert døgn, men etter 8 dager har den nådd toppen, og da sklir den ikke ned igjen. Markus har nok tenkt at siden den kommer seg 1 dm fram i døgnet, så vil den bruke 10 dager på å komme seg 10 dm fram.

22

LÆRERVEILEDNING 4A

26 *Oppgaven gjøres i fellesskap. Den bør ses i sammenheng med oppgave 21. Hensikten er at elevene skal se sammenhengen mellom det å multiplisere med et ensifret tall og det å multiplisere med like mange hele tiere eller hele hundrere (m.a.o. sammenhengen mellom å multiplisere med f.eks. 3 og med 30 eller 300).*

a-b) *Her legges det som vanlig opp til at elevene først kommer med et eget forslag og deretter presenteres for forslag i boken som diskuteres. Det er naturlig å anta at mange vil bruke gjentatt addisjon, men de har tidligere blitt presentert for andre alternativer (se oppgave 11), så det kan tenkes at de andre forslagene i boken også vil dukke opp.*

Diskuter hvert av forslagene i boken. Hvordan har eleven tenkt? Har noen av elevene i klassen tenkt på samme måte? Hvilken måte liker de best?

c) *Her vises en variasjon av strategier:*

7 · 6 = 42, så da må 7 · 60 = 420
9 · 30 = 9 · (10 + 10 + 10) = 9 · 10 + 9 · 10 + 9 · 10 = 90 + 90 + 90 = 270
5 · 80 = 5 · (8 · 10) = (5 · 8) · 10 = 40 · 10 = 400
5 · 50 = 50 + 50 + 50 + 50 + 50 = 250

Elevene vil normalt ikke ønske å ta med så mange trinn som i noen av disse eksemplene. Det er greit så lenge de kan forklare muntlig hva det er de har gjort.

d) *Diskuter følgende påstand:* «Fordelen med Sofia sin strategi, er at hun bare trenger å multiplisere ensifrede tall.»

Hvis vi klarer oss med ensifrede produkt – uansett hvor store tall vi skal multiplisere, så trenger vi ikke å automatisere andre kombinasjoner enn de som står i den lille multiplikasjonstabellen.

e) *Oppgaven kan f.eks. føres slik, for å vise tankegangen:*

4 · 2 = 8	3 · 3 = 9	2 · 2 = 4
4 · 200 = 800	3 · 300 = 900	2 · 200 = 400
2 · 3 = 6	2 · 4 = 8	3 · 2 = 6
2 · 300 = 600	2 · 400 = 800	3 · 200 = 600

27 *Starten og slutten kan gjøres individuelt eller to og to, punkt b) og c) i fellesskap. Oppgaven dreier seg om likninger, men gir elevene samtidig trening i det å multiplisere med hele tiere og hele hundrere.*

a) *Begynn med å studere likningene. Har de noe felles? Hvordan løser vi slike likninger? Hvis elevene står fast når de skal løse likningene, kan man gi et eksempel med mindre tall, f.eks. $x : 8 = 2$. Hvordan vil de løse den? Husker de at vi kan bruke den motsatte regneoperasjonen? Hvordan kan vi gjøre det her?*

$x : 8 = 20$	$a : 6 = 30$	$c : 3 = 30$
$x = 8 \cdot 20$	$a = 6 \cdot 30$	$c = 3 \cdot 30$
$x = 160$	$a = 180$	$c = 90$
$e : 4 = 20$	$k : 5 = 70$	$y : 2 = 90$
$e = 4 \cdot 20$	$k = 5 \cdot 70$	$y = 2 \cdot 90$
$e = 80$	$k = 350$	$y = 180$

b) *Dette blir en oppsummering på hvordan likninger som dette løses. De som ikke klarte å løse likningene, vil her kunne få tips om hva de kan gjøre.*

I alle likningene er den ukjente en dividend. Vi kan finne denne ved å multiplisere divisoren med resultatet av divisjonen, altså tallet på høyre side i likningen. Når vi skal multiplisere, kan vi bruke den lille multiplikasjonstabellen – siden 8 · 2 = 16, så må 8 multiplisert med 2 tiere bli 16 tiere, altså 160.

23

Figur 23 Funn horisontal analyse. Bilde av Barentsforlagets layout. Lærerveiledning. (Melhus et al. 2023, s. 22-23.)

Bildet viser veiledning til oppgave 24, 25, 26 og 27. Barentsforlaget skiller seg ut ved at de ikke har bilde av elevboka. Istedenfor har de en fyldig veiledning. Oppgavene i elevboka er ikke presentert. For å få oversikt over oppgavene trenger man elevboka. Vi legger merke til at noen oppgaver er merket blå og en er merket rød. Barentsforlaget informerer i innledningen at røde oppgaver er nytt stoff, og blå oppgaver er repetisjon, eller andre oppgaver læreren kan velge ut. Intensjonen er at i hver økt skal man gjøre en rød oppgave, og læreren tar et utvalg av de blå oppgavene ut i fra hva læreren mener elevene trenger å lære mer av. Det som videre skiller seg ut er at det er utfyllende tekst til hver enkelt oppgave i boka. Gjerne med flere ulike løsningsstrategier som er grundig forklart. Lærerveiledningen fungerer da også som en fasit slik Cappelen Damms gjør. Både Gyldendal og Barentsforlaget bruker representasjoner i løsningsforslagene sine. Barentsforlaget har også forslag og fasitsvar på hvordan elevene kan svare på spørsmål, slik Gyldendal også har av og til. Svarene i Barentsforlaget er mer utfyllende og forklarer ofte den matematiske sammenhengen til læreren.

4.2 Analyse og funn fra den vertikale analysen

I denne delen ser vi først på de kognitive kravene i oppgaver og hvordan vi har kategorisert dem. Deretter skal vi se på kodeord i forbindelse med kjerneelementene. Kodeordene vi fant i teorien for å utvikle vårt rammeverk, anser vi som en del av våre funn. Derfor vil vi vise hvordan vi har brukt dem i analysen.

4.2.1 Analyse av kognitive krav

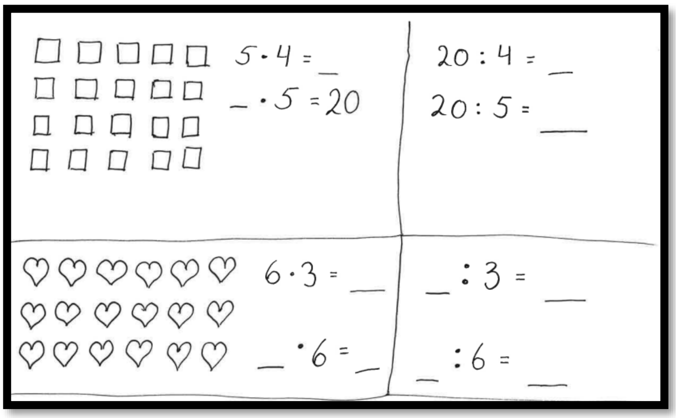
Oppgaveanalysen går ut på at vi kategoriserer nivå på den kognitive tenkningen. Ettersom vi ikke fikk tillatelse til å bruke bilder fra alle læreverk, er det kun bilder fra Barentsforlaget vi vil bruke, i tillegg til noen oppgaver vi lager selv som er tilnærmet lik oppgavene fra Gyldendal og Cappelen Damm.

Vi analyserte alle oppgavene i kapitlene om multiplikasjon og divisjon ved hjelp av vår tilpassede versjon av Smith og Steins (1998, s. 348) rammeverk *Task analysis guide.* Rammeverket har fire kategorier for kognitive krav. De to første kategoriene klassifiseres som lavt kognitivt krevende oppgaver, memorering (LM) og prosedyre uten sammenheng (LPUS). De to siste kategoriene klassifiseres som høye kognitive krav, og er prosedyre med sammenheng (HPMS), og gjøre matematikk (HGM). Det er en forutsetning at oppgavene er høyt kognitivt krevende for at de skal være utforskende og problemløsende, eller modellering. Under ser vi et eksempel på en oppgave som vi tolker som LM, oppgave med lave kognitive krav, og blir kategorisert som en memoreringsoppgave. Det er fordi det er reproduksjon av tidligere lærte fakta. Fremgangsmåten er tydelig gitt. Vi mener også at dette er repetisjon fra 3. trinn der multiplikasjon var hovedtema i kompetansemålene.

2·4=	2·7=
4·4=	4·7=
8·4=	8·7=

Figur 24 Forenklet illustrasjon av hvordan oppgaver kan se ut i Cappelen Damm.

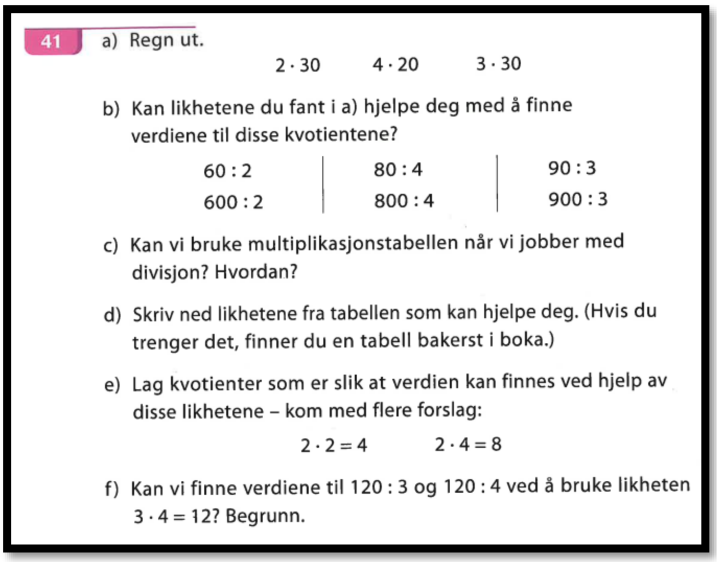
Figuren illustrerer en tilnærmet lik oppgave fra Cappelen Damm som ble kodet til LM.



Under er et eksempel på en oppgave som vi tolker som lavt kognitivt krevende, LPUS. Det er fordi **hva** som må til for å løse oppgaven kommer tydelig frem. Den første oppgaven er allerede delvis fylt ut på forhånd som gjør at oppgaven ikke stiller så høye krav. Dette minner om instrumentell innlæring (Skemp, 2006, s. 92).

Figur 25 Illustrasjon av oppgavetype fra Cappelen Damm kodet til LPUS.

Under er et eksempel på en oppgave som vi tolker som høyt kognitivt krevende. Oppgaven har høye kognitive krav og blir kategorisert som prosedyre med sammenheng (HPMS). Fordi oppgaven gjør elevene oppmerksomme på den matematiske sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon.



41 a) Regn ut.

2 · 30   4 · 20   3 · 30

b) Kan likhetene du fant i a) hjelpe deg med å finne verdiene til disse kvotientene?

60 : 2	80 : 4	90 : 3
600 : 2	800 : 4	900 : 3

c) Kan vi bruke multiplikasjonstabellen når vi jobber med divisjon? Hvordan?

d) Skriv ned likhetene fra tabellen som kan hjelpe deg. (Hvis du trenger det, finner du en tabell bakerst i boka.)

e) Lag kvotienter som er slik at verdien kan finnes ved hjelp av disse likhetene – kom med flere forslag:

2 · 2 = 4   2 · 4 = 8

f) Kan vi finne verdiene til 120 : 3 og 120 : 4 ved å bruke likheten 3 · 4 = 12? Begrunn.

Figur 26 Bilde fra oppgave 41 i elevboka til Barentsforlaget (Blank et al. 2023, s 24).

Det som skiller denne oppgaven fra de andre vi har presentert er at det foreligger en oppskrift på hvordan løse noen av dem på samme side. Tre av oppgavene er ferdig løst for elevene, hvis de bare titter ned på siden.

56 a) Regn ut ved å bruke horisontal oppstilling.

$276 + 567$	$935 - 676$
$385 + 497$	$791 - 493$

b) Kan vi gjøre dette enklere? Skriv ned et forslag.

c) Regn ut ved å skrive på utvidet form og bruke den distributive loven for multiplikasjon.

$3 \cdot 13$	$2 \cdot 41$	$3 \cdot 312$
$4 \cdot 22$	$2 \cdot 243$	$2 \cdot 424$

d) Kan vi gjøre dette enklere? Skriv ned et forslag.

e) Noen elever gjorde slik:


Hedda

$3 \cdot 13 = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 3 = 30 + 9 = 39$


Emil

$4 \cdot 22 = 80 + 8 = 88$


Aksel

$$\frac{2 \cdot 243}{= 486}$$

Hvordan tenkte de? Hvilken måte liker du best?

f) La oss kalle oppstillingen til Aksel for **vertikal oppstilling**, siden han skriver svaret under regnestykket.
Regn ut ved å bruke vertikal oppstilling.

Figur 27 Elevboka, oppgave 56. Barentsforlaget (Blank et al. 2023, s 30.)

63 a) Sett inn passende regnetegn og parenteser slik at likhetene blir sanne.

4 ... 4 ... 4 ... 4 = 0	4 ... 4 ... 4 ... 4 = 3	4 ... 4 ... 4 ... 4 = 6
4 ... 4 ... 4 ... 4 = 1	4 ... 4 ... 4 ... 4 = 4	4 ... 4 ... 4 ... 4 = 7
4 ... 4 ... 4 ... 4 = 2	4 ... 4 ... 4 ... 4 = 5	4 ... 4 ... 4 ... 4 = 9

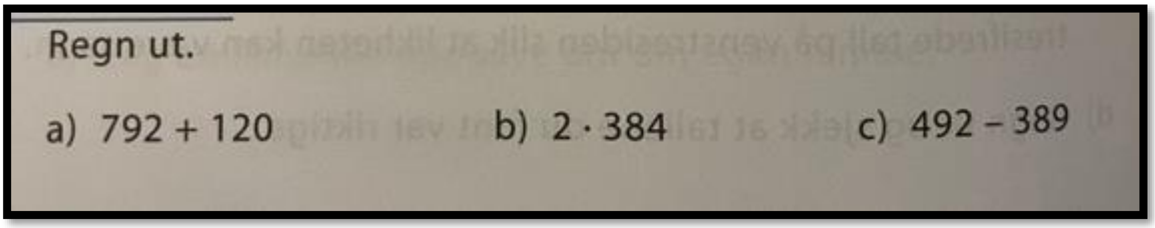
b) Lag noen egne uttrykk med 4 firere, regnetegn og parenteser. Finn verdiene.

c) Bruk det du fant b) til å lage likheter som de i a).
Gi oppgavene til en medelev.

Figur 28 Oppgave 63 fra elevboka. Barentsforlaget (Blank et al. 2023, s.34).

Dette er et eksempel på en oppgave som vi tolker som høyt kognitivt krevende, ettersom oppgaven er en problemløsningsoppgave uten gitt løsningsstrategi. Oppgaven krever også at elevene utforsker og forstår matematiske konsepter.

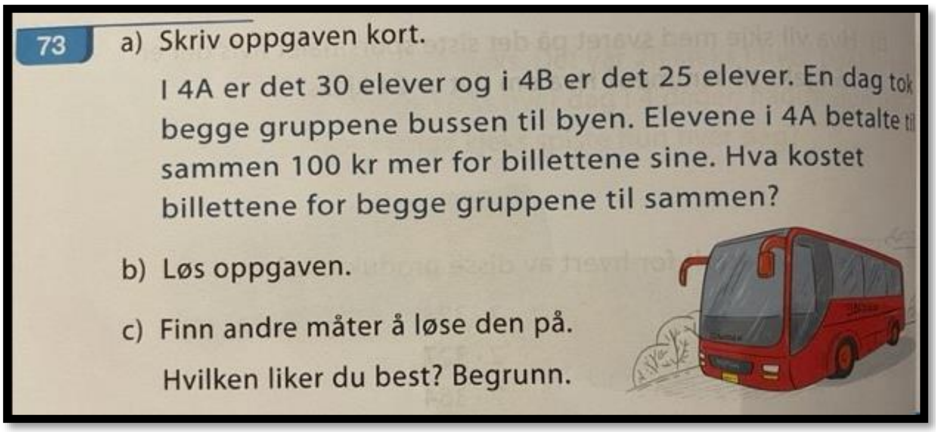
Vi syntes koding av oppgavene var utfordrende. Spesielt memorering og prosedyre uten sammenheng. Vi møtte ofte oppgaver vi var i tvil om. Denne oppgaven fra Barentsforlaget har høye tall og det er mange på 4. trinn som synes de er vanskelige. Samtidig er det rutineoppgaver hvis du kan algoritmen, eller bruker andre regnestrategier for å løse oppgaven. Denne oppgaven er i utgangspunktet ikke en problemløsningsoppgave, men hvis elevene ikke er vante med å regne med høye tall, kan det fort bli problemløsningsoppgave. I slike tilfeller diskuterte vi og ble enige om at dette var en LPUS fordi vi bladde tilbake i boka og så på hva elevene har arbeidet med tidligere. Ut i fra forhenværende oppgaver skal elevene som følger Barentsforlagets bøker ha lært strategier for å løse oppgavene.


Regn ut.

a) 792 + 120 b) 2 · 384 c) 492 – 389

Figur 29 Oppgavetype fra Barentsforlaget (Blank et al. 2023, s. 50) kodet til LPUS.

Denne oppgaven kategoriserte vi til å ha høyt kognitivt nivå fordi den krever to steg for å finne løsning. Elevene må tolke oppgaven først for så å løse den. Altså, oppgaven ble kodet til høye kognitive krav - gjøre matematikk (HGM).


73 a) Skriv oppgaven kort.

I 4A er det 30 elever og i 4B er det 25 elever. En dag tok begge gruppene bussen til byen. Elevene i 4A betalte til sammen 100 kr mer for billettene sine. Hva kostet billettene for begge gruppene til sammen?

b) Løs oppgaven.

c) Finn andre måter å løse den på.

Hvilken liker du best? Begrunn.

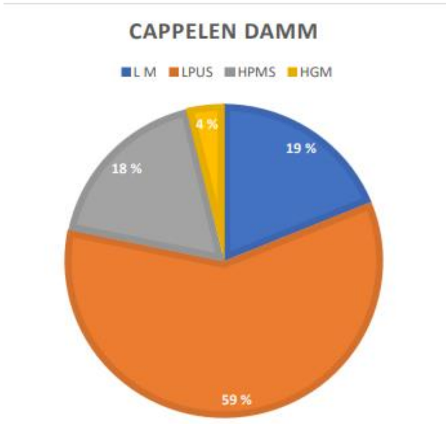
Figur 30. Oppgave 73 i elevbok. Barentsforlaget. (Blank et al., 2023, s. 38)

4.2.2 Funn av kognitive krav

Diagrammene under viser fordelingen av kognitive krav i prosent for de tre ulike læreverkene.

Cappelen Damm

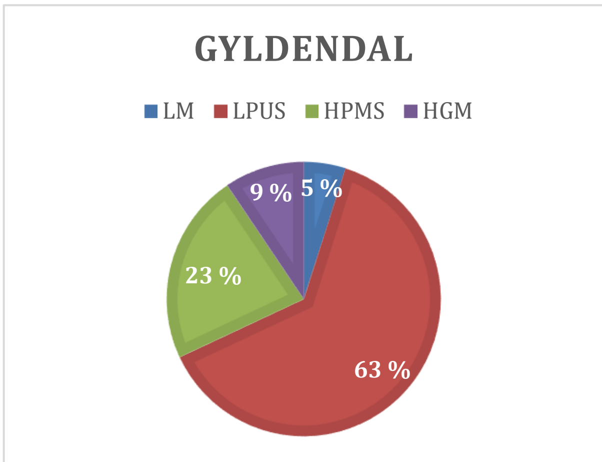
Her ser vi at oppgaver som er kognitivt krevende (HPMS og HGM) til sammen utgjør 22 % av oppgavene. Ut fra dette er det få oppgaver som legger til rette for kjerneelementene utforsking og problemløsning, modellering og anvendelse.



Figur 31 Funn vertikal analyse. Oppgavenes kognitive krav i Cappelen Damm.

Gyldendal

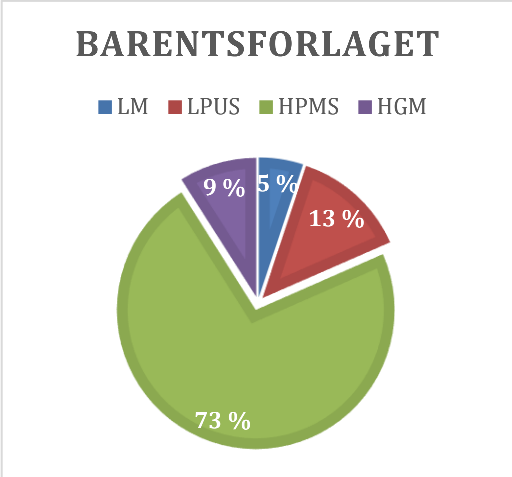
Her ser vi at oppgavene som er kognitivt krevende til sammen utgjør 32 % av oppgavene. Gyldendal har til sammen 10 % flere oppgaver som er kognitivt krevende enn Cappelen Damm.



Figur 32 Funn vertikal analyse. Oppgavenes kognitive krav i Gyldendal.

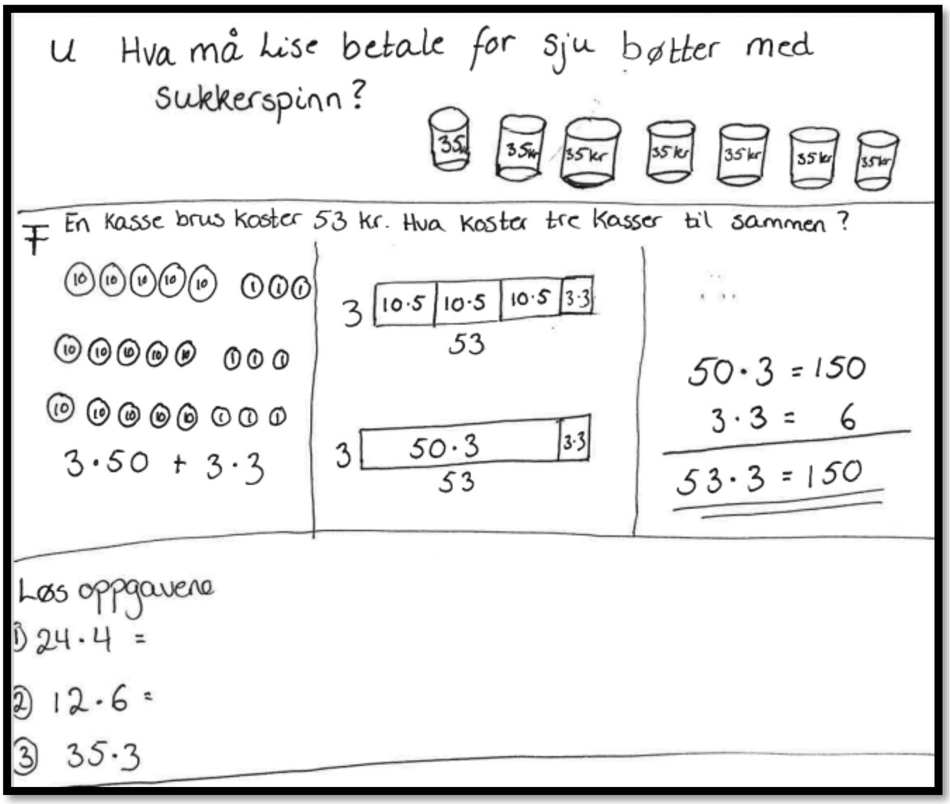
Barentsforlaget

I Barentsforlaget er hele 82 % av oppgavene kognitivt krevende. Dette er en vesentlig forskjell fra de to andre bøkene. Det kan også ha med Barentsforlagets oppbygning og strukturering av innhold i forhold til de andre. Dette kan ha sammenheng med ulik struktureringen av innholdet i bøkene.



Figur 33 Funn vertikal analyse. Oppgavenes kognitive krav i Barentsforlaget.

Et av kriteriene i vår tolkning av Smith og Steins (1998, s. 348) rammeverk er at hvis det er en oppskrift, et eksempel, eller mange like oppgavetyper i umiddelbar nærhet av hverandre, ødelegges vanskegraden. Dette fører til at en del oppgaver som i utgangspunktet var kognitivt krevende, ble kodet som oppgaver med lave kognitive krav fordi elevenes mulighet til å tenke på et høyere nivå ble redusert.



Figur 34 Illustrert oppgave der strukturering av oppgaven er ødeleggende for oppgavens kognitive krav.

Figuren viser et eksempel på hvordan en utforskende oppgave, som egentlig kunne vært kognitivt krevende for elevene, blir «ødelagt» av at det står en forklaring med hvordan man kan tenke rett under. Det gir elevene en oppskrift de kan følge, og krav til tenkning senkes. Oversikt over antall oppgaver i hver kategori for kognitive krav i elevbøkene.

Tabell 10 Funn vertikal analyse. Oversikt over oppgavenes kognitive krav.

		Cappelen Damm	Gyldendal	Barentsforlaget
Lave **kognitive krav**	LM	45 (19 %)	24 (5 %)	44 (5 %)
	LPUS	142 (59%)	295 (63 %)	116 (13%)
Høye **kognitive krav**	HPMS	43 (18 %)	124 (23 %)	630 (73%)
	HGM	9 (4 %)	45 (9 %)	78 (9%)
	Totalt	239 (100 %)	488 (100%)	868 (100%)

Tabellen over viser en oversikt over antall oppgaver i hver av kategoriene for kognitive krav i de tre ulike grunnbøkene. Oppgavene i kategoriene LM og LPUS har lave kognitive krav, og er dermed ikke aktuelle å se på for å si noe om antall oppgaver som er utforskende og problemløsende, eller modellering. Legg merke til at for Cappelen Damm og Gyldendal er kun henholdsvis 22 % og 32 % av oppgavene kognitivt krevende, mens for Barentsforlaget er 82 % av oppgavene kognitivt krevende. Dette kan ha sammenheng med oppbygningen av bøkene til Cappelen Damm og Gyldendal. De hadde begge flere oppgaver som i seg selv var kognitivt krevende, men nivået blir ødelagt fordi det står en oppskrift på hvordan løse oppgaven, eller en forklaring rett under eller over, slik vi beskrev tidligere. Lester (2013, s. 3) skriver at et problem er definert som en oppgave der den som skal løse oppgaven ikke umiddelbart vet hvilken framgangsmåte hen skal bruke. Når forklaringen står ved siden av får elevene en oppskrift som de kan følge. Ifølge Skemp (2006, s. 92) vil det å presentere en oppskrift eller framgangsmåte som elevene skal bruke på liknende oppgaver, gi instrumentell forståelse. Det igjen vil ikke føre til varig kunnskap eller dybdeforståelse, slik som LK20 prøver å implementere gjennom kjerneelementene. Samtidig kan flere påfølgende oppgaver som følger samme framgangsmåte sees på som øving av en ferdighet, eller det Hiebert og Lefevre (1986, s. 6) kaller prosedyrekunnskap. De hevder at en må inneha både prosedyrekunnskap og konseptuellkunnskap for å oppnå dybdeforståelse. Som nevnt i den horisontale analysen kan det være at Cappelen Damm kommer dårligere ut, fordi de har valgt å ha et eget kapittel som heter Problemløsning. Det er nærliggende for oss å tro at dette kapitlet har problemløsningsoppgaver, selv om vi ikke har analysert kapitlet. Når kun 22 % og 32 % av oppgavene i henholdsvis Cappelen Damm og Gyldendal er kognitivt krevende vil vi si at de har en lav andel kognitivt krevende oppgaver, og dermed få oppgaver som er reelle utforskings-og-problemløsningsoppgaver. I Barentsforlaget derimot, er 82 % av oppgavene kognitivt krevende. Vi vil da si at de har en høy andel av kognitivt krevende oppgaver, som er reelle utforskings- og problemløsningsoppgaver. Dette kan ligne på de resultatene Charalambous et al. (2010, s. 138-139) kom fram til da han undersøkte lærebøker fra Irland, Kypros og Taiwan. Irland og Kypros, som er vestlige land, hadde lav forekomst av oppgaver med høye kognitive krav. Barentsforlagets bok, som er oversatt fra et russisk læreverk har en høy forekomst av kognitivt krevende oppgaver, som også likner på resultatene til Charalambous et al. (2010). Der de fant at boken fra Taiwan, som er et østlig land, hadde høy forekomst av kognitivt krevende oppgaver. Vi vet ut fra resultatene av TIMMS undersøkelsene at mange av de Asiatiske landene og Russland gjør det bedre i matematikk enn Norge og Vesten (Mullis et al., 2019, s. 1). Charalambous et al. (2010, s. 138-139) fant også ut at de kypriotiske og irske elevbøkene hadde under 20 % kognitivt krevende oppgaver. Her ser vi at selv om Gyldendal og Cappelen Damm hadde færre kognitivt krevende oppgaver enn Barentsforlaget, har de likevel en større prosentandel sammenliknet med Irland og Kypros.

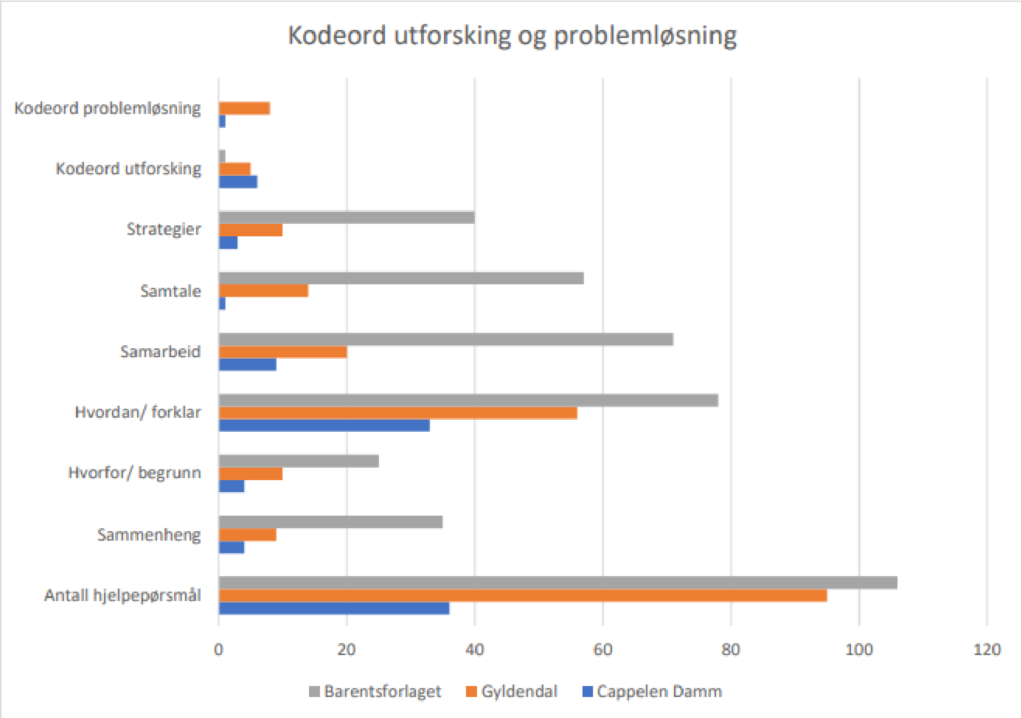
Cappelen Damm kan komme dårligere ut fordi de har kapittelet Problemløsning for seg. Videre kommer det også klart fram av halvårsplanen til Cappelen Damm at de i multiplikasjon og divisjonskapittelet ikke har valgt å sette fokus på problemløsning. De har delt kjerneelementet utforsking og problemløsning i to, og skriver at de kun fokuserer på utforsking, representasjoner og kommunikasjon i multiplikasjon og divisjonskapitlene.
Den tradisjonelle oppbygningen av matematikklærebøker i Norge følger spiralprinsippet. Ut fra innholdsfortegnelsen i Cappelen Damm og Gyldendal kan det se ut til at de følger dette. Erfaringsmessig kommer de samme temaene igjen og igjen hvert år, og gjerne på samme tid av året. Det vil si at det er ganske store spiraler, og potensielt lang tid mellom hver gang elevene arbeider med et tema. Barentsforlaget har en annen strukturell oppbygning. De følger også spiralprinsippet, men har mye mindre spiraler. Som nevnt i den horisontale analysen er ikke nødvendigvis oppgavene organisert etter hverandre etter det samme matematiske temaet. Oppgavene er definert som røde eller blå. Røde oppgaver er nytt stoff, og hver time skal alltid ha en rød oppgave. Røde oppgaver bygger på hverandre for å bygge den matematiske forståelsen. I innledningen forklarer de dette som den røde tråden (Melhus et al., 2023, s 4). Etter hver røde oppgave er det plassert 3-4 blå oppgaver. Disse er ment som repetisjon av andre emner eller andre typer oppgaver, eller kan være oppgaver innen samme emne, men

sjelden med samme løsningsmetode. Det kan føre til at elevene jevnt og trutt får arbeide med alle temaer i løpet av en kort periode, og ikke slik tradisjonelle norske læreverk er organiserte, der for eksempel geometri er i desember hvert år. Da går det kortere tid mellom hver gang elevene møter på et tema. En slik oppbygning av innhold i et læreverk kan føre til at elevene ikke har en forklaring, eller en lik oppgave i umiddelbar nærhet som de kan følge framgangsmåten til, når de løser oppgaver. Det kan igjen føre til at elevene bygger nye kunnskaper på bakgrunn av det de allerede kan. De oppnår dybdekunnskap, eller konseptuell kunnskap, som Hiebert og Lefevre (1986, s.23) beskriver. En slik strukturell oppbygning kan være en medvirkende årsak til at færre oppgaver får sitt kognitive nivå ødelagt av forklaringer eller eksempeloppgaver.

Vi legger også merke til at Barentsforlaget har 73 % av oppgaven sine i kategorien prosedyre med sammenheng. Dette henger sammen med bokas pedagogiske prinsipper, som er bygget på Vygotskys teorier om læring, undervisning og den proksimale utviklingssonen (Melhus et al., 2023. s. 3). Legg også merke til at Barentsforlaget har betydelig flere deloppgaver enn de to andre bøkene. Fra de opprinnelige 119 oppgaver nummererte vi alle deloppgaver, som vi har nevnt tidligere, slik at det til slutt ble 868 oppgaver i oppgaveanalysen. Dette kan tyde på at Barentsforlaget krever mer i hver oppgave, går mer i dybden i hver enkelt oppgave, og at de går dypere inn i det matematiske temaet.

4.2.3 Funn om utforsking og problemløsning

Vi vil nå presentere hyppigheten av kodeordene våre for kjerneelementet utforsking og problemløsning i de kognitivt krevende oppgavene for alle tre grunnbøkene og lærerveiledningene.



Figur 35 Funn vertikal analyse. Søylediagram som viser antall kodeord brukt i denne kategorien.

I tabellen over har vi framstilt forekomsten av kodeordene for utforsking og problemløsning i oppgavene og i tilhørende tekst i lærerveiledningene. Fordi det ikke nytter bare å gi en utforsknings og problemløsningsoppgave til elevene og be dem løse oppgaven, (Liljedahl, 2021, s. 1-3 Læreren må også vite hva hen skal gjøre med oppgaven, for at det skal være reell utforsking og problemløsning. Vi ønsket å se etter hjelp til læreren for å undervise etter kjerneelementene, og det ble etter hvert klart for oss at vi må se på det lærerveiledningen sier i sammenheng med oppgavene, fordi de utfyller hverandre. For å bestemme i hvor stor grad lærerveiledningen hjelper læreren til å undervise utforskende og problemløsende, må vi også se på hyppigheten av kodeordene våre i de kognitivt krevende oppgavene med tilhørende tekst i lærerveiledningene. Som vi skrev i kapitlet om lærerens nye rolle, sier Liljedahl (2021, s. 1-3) at det ikke er nok å bare gi elevene problemløsningsoppgaver og be dem om å løse dem. I forskningen hans ble elevene utålmodige, fikk ikke til og ga opp. Læreren må også vite hvilke spørsmål hen kan stille for å få fram elevenes tenkning eller for å få elevene videre dersom de står fast. Det er også svært viktig at læreren ikke begynner å forenkle oppgaven (Smith & Stein, 2018, s. 89-90). Mange av kodeordene våre for utforsking og problemløsning er spørreord å stille elevene i klasserommet. I tillegg har vi telt antall hjelpespørsmål i lærerveiledningen til hver oppgave læreren kan bruke direkte på elevene. Det er viktig å gjøre disse kodeordene, eller hjelpespørsmålene tilgjengelig for lærerne, fordi utforsking og problemløsning krever at elevene er aktivt deltakende i egen læringsprosess, slik Skovmose (2001, s. 131) beskriver det i sitt undersøkelseslandskap. Eller læreplanene som forteller at i utforsking og problemløsning skal elevene diskutere seg fram til en felles forståelse, og utvikle en metode for å løse et problem. Skal elevene klare dette må læreren ha verktøyene for å få elevene aktivt med, elevene må tenke, og ikke minst må læreren ha verktøyene for å få fram elevenes tenkning.

Funnene våre viser at Barentsforlaget har høyest forekomst av de fleste kodeordene. Dette kan henge sammen med at Barentsforlaget har flest oppgaver, og mye tekst til hver oppgave i både grunnboka og lærerveiledningen, og dermed også flest ord. Altså kan det være naturlig at de har et større antall kodeord. Vi legger merke til at kodeordene utforsking og problemløsning er lite brukt. Dette kan ha sammenheng med at Barentsforlagets bok sier at den er revidert etter at LK20 kom for å passe til den nye læreplanen, men de nevner ikke kjerneelement som begrep noen steder.
Barentsforlaget har også flest hjelpespørsmål som læreren kan bruke i undervisningen, og all hjelp til læreren er knyttet til oppgaver. De har svært lite generell informasjon til læreren. Dette gjør at lærerveiledningen er meget konkret i hvordan den hjelper læreren. Vi ser også at Cappelen Damm har lavest hyppighet på kodeordene. Dette kan henge sammen med at vi har kodet oppgavene med tilhørende tekst i lærerveiledningen, og ikke all den generelle informasjonen som står rundt omkring i lærerveiledningen. Dette fordi vi ønsker å finne konkret hjelp til læreren. Fordi, som vi nevnte i teorien er det en balansegang i hvor mye informasjon en lærerveiledning kan inneholde. De fleste lærere har dårlig tid til å lese og sette seg inn i lærerveiledninger med mye generell informasjon, uavhengig av hvor nyttig informasjonen måtte være (Davis & Krajcik, 2005, s. 9).

Cappelen Damm og Gyldendal er likest når det kommer til bruk av ordet «utforsking». Dette kan ha sammenheng med at både Cappelen Damm og Gyldendal har merket oppgaver med ordet utforsking, eller en U. Det har ikke Barentsforlaget gjort. Bare ut fra oppgaveanalysen og krav om utforskende og problemløsende undervisning, vil ikke Cappelen Damm og Gyldendal klare å støtte læreren i å velge oppgaver for å undervise etter kjerneelementet. I lærerens nye rolle er det å velge oppgaver en av de viktigste grepene læreren gjør. Dette fordi oppgaven legger premisser for det som skjer i klasserommet (Smith & Stein, 2018, s. 17). Det blir svært vanskelig for læreren å gjøre oppgavene i disse bøkene kognitivt krevende. Hvis det hadde stått i lærerveiledningene noe så enkelt som at læreren kan skjule fremgangsmåten eller forklaringen som står rett før, eller rett etter de kognitivt krevende oppgavene, så ville både

Cappelen Damm og Gyldendal fått en høyere andel oppgaver med høye kognitive krav. Oppgaven er utgangspunktet for elevenes læring. Liljedahl (2021, s. 5) sier at hvis elevene skal lærere må de ha noe å tenke på, og da må oppgaven fordre til tenking.
Hvis et læreverk har mange oppgaver med høye kognitive krav er det viktig å ha en lærerveiledning som er støttende for læreren (Stylianides, 2008, s. 211). Ut i fra oppgaveanalysen har Barentsforlaget 82% kognitivt krevende oppgaver. I den horisontale analysen så vi eksempel på hvordan lærerveiledningen til Barentsforlaget så ut. Det var tettskrevne tekster og mange ulike løsningsforslag på de fleste oppgavene. Vi tolker dette til at den gir god støtte til læreren. Dette er til stor hjelp og det er i samsvar med hva Davis og Krajcik (2005, s. 4) fant i sin forskning. Nyutdannede eller uerfarne lærere støtter seg mer til lærerveiledninger (Ahl et al., 2015, s. 6). De kan oppleve at Barentsforlaget sin lærerveiledning gir god hjelp med tanke på å undervise utforskende og problemløsende.

At Barentsforlaget har flere løsningsforslag til de aller fleste oppgavene sine, hjelper læreren i planleggingsarbeidet. Dette er svært viktig i forhold til Smith og Steins 5 praksiser (1998, s. 9-16) der læreren skal forutse elevenes tenkning, og velge ulike løsningsstrategier for å lede den matematiske samtalen i klasserommet mot det matematiske målet læreren har valgt. Funnene våre viser at 22 % av oppgavene til Cappelen Damm var kognitivt krevende, og 32 % av oppgavene til Gyldendal var kognitivt krevende. Ut fra dette konkluderer vi med at Cappelen Damm og Gyldendal har en lav prosentandel oppgaver som er kognitivt krevende, og ivaretar dermed kjerneelementet utforsking og problemløsning i liten grad. I Barentsforlaget var 82 % av oppgavene kognitivt krevende. De ivaretar kjerneelementet utforsking og problemløsning i stor grad. Når vi tar hensyn til antall oppgaver som er kognitivt krevende, antall ganger læreren får hjelp fra lærerveiledningen i form av hjelpespørsmål og funn av antall kodeord, kan det se ut som at Barentsforlaget gir mest hjelp til læreren for å undervise utforskende og problemløsende.

4.2.4 Funn om modellering og anvendelse

Her vil vi presentere antall kognitivt krevende oppgaver som er modelleringsoppgaver. Som nærmere beskrevet i metodekapitlet valgte vi å ikke kode for anvendelse, da vi legger til grunn at eleven får brukt (anvendt) sine matematikkunnskaper i alle matematikktimene på skolen.

Tabell 11 Funn vertikal analyse. Antall oppgaver i de ulike kategorier.

	Cappelen Damm	Gyldendal	Barentsforlaget
Antall oppgaver totalt	239	488	868
Kognitiv krevende	52	156	705
Kontekst /Modellering	16	82	118

I teorikapitlet vårt etablerte vi at modelleringsoppgaver må være kognitivt krevende (Niss & Jensen, 2002, s. 52; Blum, 2015, s. 79), og at oppgaven må ha en kontekst (Blum & Ferri, 2009, s. 45; Blum, 2015, s. 73) for at de skal kategoriseres som modelleringsoppgaver.
Vi har allerede funnet ut at det er få kognitivt krevende oppgaver i Cappelen Damm og Gyldendal ut fra det totale antallet oppgaver. Barentsforlaget har mange kognitivt krevende oppgaver, men prosentvis utgjør modelleringsoppgaver kun ca. 13,5% av oppgavene. For Gyldendal utgjør de ca. 16,8 %, og for Cappelen Damm ca. 6,7 % .
Igjen kan dette ha sammenheng med den strukturelle oppbygningen av bøkene. Det siste kapitlet i 4B boka til Cappelen Damm heter «10 Matematikk i praktiske situasjoner». Det er kun i tilknytning til dette kapitlet at årsplanen i lærerveiledningen nevner at de har fokus på kjerneelementet modellering og anvendelse. Som vi nevnte under kjerneelementet utforsking og problemløsning, har de også et eget kapitel som heter problemløsing. At oppgavene er problemløsende har vi satt som en forutsetning for at oppgaven kan være modellering. Dette kan være en svakhet med undersøkelsen vår, og kanskje burde vi ha kodet hele boka, for å få fram hvor mye modellering og problemløsning Cappelen Damm faktisk har. Særlig med tanke på spiralprinsippet da vi ser av årsplanen, som står i innledningen av boka, at de har vektlagt ulike kjerneelement til ulike tema. Vår tolkning av å gjøre det slik er ikke forenlig med tanken om at kjerneelementene burde arbeides med jevnt og trutt hele året, og at de naturlig henger sammen. Kjerneelementene skal gjennomsyre all undervisning (Hagelia, 2021). Vi ser likhetstrekk mellom kjerneelementene og Kilpatrick et al. (2001, s. 133) fem komponenter for å oppnå matematisk kompetanse. De sier videre sier at det er viktig å utvikle alle komponentene, at en ikke kun kan fokusere på en eller to.

Barentsforlaget har 705 kognitivt krevende oppgaver, men bare 118 modelleringsoppgaver. Dette utgjør kun ca. 13,5% av alle oppgavene i kapitlet. Dette viser at Barentsforlaget ikke har like stort fokus på modellering. De har en overvekt av oppgaver som faller inn under kategorien prosedyre med sammenheng. De sier selv i lærerveiledningen at de har et stort fokus på at elevene skal se sammenheng i matematikken, altså den røde tråden (Melhus et al., 2023, s. 4). Vi tolker det slik at de er opptatte av at elevene skal lære seg prosedyrer med sammenheng, og forstå hvordan og hvorfor en prosedyre virker.

Gyldendal har få kognitivt krevende oppgaver, men når vi ser på forholdet mellom de kognitivt krevende oppgaver og modelleringsoppgaver, ser vi at over halvparten av de kognitivt krevende oppgavene er modelleringsoppgaver. Dette kan tyde på at Gyldendal har fokus på modellering. Selv om over halvparten av de kognitivt krevende oppgavene har kontekst, utgjør dette kun ca. 16, 5% av det totale antallet oppgaver. Det er ikke en stor prosentandel, til tross for at de selv i forordet påpeker at de er opptatte av at matematikken skal ha en forankring i elevens hverdag, for å gjøre lærestoffet interessant (Alseth et al., 2021).

Tabellen under viser hyppigheten til kodeordene våre for modellering.

Tabell 12. Funn vertikal analyse. Kodeord i kategorien modellering.

Kodeord	Cappelen Damm	Gyldendal	Barentsforlaget
Lage modell	0	0	4
Vurder/ tolke modell	1	7	2

Kodeordene våre for modellering forekommer svært sjeldent i alle læreverkene. Gyldendal har høyest frekvens, og de har ett kodeord sju ganger. Barentsforlaget har treff på begge kodeordene, til sammen seks ganger, mens Cappelen Damm har treff på ett kodeord en gang. Dette kan tyde på flere ting. På den ene siden kan det tyde på at vi ikke har klart å finne gode kodeord for modellering. Først hadde vi tenkt å se på modellering som sykluser, men det fant vi ikke i bøkene. Modellering er en kognitiv krevende prosess med flere steg som involverer flere kompetanser (Blum, 2015, s. 78). Dermed måtte vi forenkle, og se på modellering som problemløsningsoppgaver med kontekst, og kodeordene «lage modell» og vurdere-/ eller tolke modell. At det ikke var sykluser kan kanskje forklares ved at vi er på et 4.trinnsnivå, og at det er ganske komplekst å arbeide i sykluser. Kanskje elevene ikke er helt klare for det ennå? Hvis dette er tilfelle, tenker vi at det å vurdere og tolke allerede eksisterende modeller er en fin start, men det skulle gjerne vært flere slike oppgaver i læreverkene.

Kjerneelementet modellering og anvendelse hadde vi definert som kognitivt krevende oppgaver med kontekst. Dermed undersøkte vi kun de oppgavene som allerede var etablerte som kognitivt krevende for kontekst. Cappelen Damm hadde i utgangspunktet få kognitivt krevende oppgaver, kun 25 stykker. Av disse 25 var 16 av dem modelleringsoppgaver. Gyldendal hadde litt høyere andel kognitivt krevende oppgaver, 156 stykker. Av disse var 82 stykk modelleringsoppgaver. Ser vi på forholdet mellom antall kognitivt krevende oppgaver og antall modelleringsoppgaver, har Cappelen Damm og Gyldendal over halvparten av sine kognitivt krevende oppgaver som modelleringsoppgaver. Dessverre må vi ta hensyn til det lave antallet kognitivt krevende oppgaver, og konkludere med at Cappelen Damm og Gyldendal ivaretar kjerneelementet modellering og anvendelse i liten grad. Barentsforlaget hadde svært mange kognitivt krevende oppgaver, 705 stykker. Av disse er 118 modelleringsoppgaver. Det er et større antall modelleringsoppgaver enn hva Cappelen Damm og Gyldendal har til sammen, og det er bra. Likevel vil vi si at dersom vi her også ser på forholdet mellom antall kognitivt krevende oppgaver, og antall modelleringsoppgaver, er det ingen av forlagene som ivaretar kjerneelementet modellering og anvendelse på en god måte. Ut fra våre funn mener vi at ingen av lærerveiledningene er særlig støttende med tanke på å undervise etter kjerneelementet modellering og anvendelse. Dette kan vi si fordi vi allerede har etablert at oppgavene er et viktig utgangspunkt for læring, og dermed undervisning. Hvis oppgavene ikke fyller krav til modellering, vil vi påstå at det da er vanskelig for læreren å undervise etter dette kjerneelementet.

4.2.5 Funn om resonnering og argumentasjon

Her vil vi først presentere en tabell som viser hvor mange ganger de ulike kodeordene er brukt i grunnbok og lærerveiledning. Her har vi ikke tatt hensyn til om oppgavene er kognitivt krevende eller ikke, ettersom argumentasjon og resonnering kan gjøres uavhengig av oppgavetype.

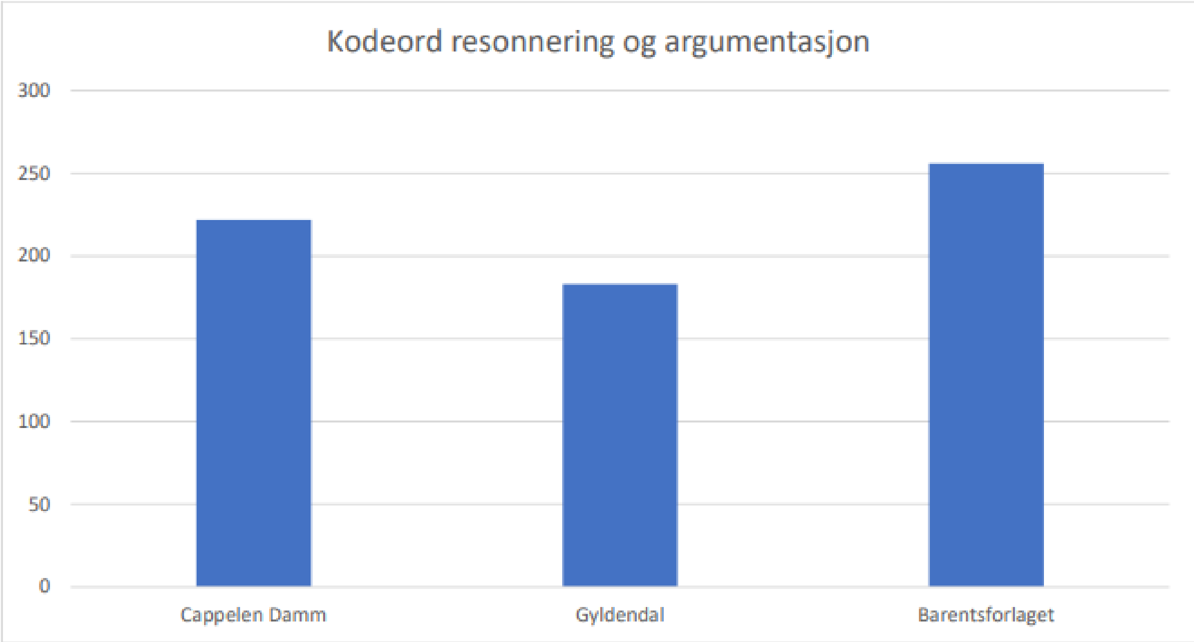
Udir definerer resonnering som en del av argumentasjon. Derfor har vi i tabellen valgt å ta med en rad der vi summerer antall ganger de ulike kodeordene er brukt.

Tabell 13. Funn i vertikal analyse. Kodeord brukt i kategorien argumentasjon og resonnering.

	Cappelen Damm	**Gyldendal**	**Barentsforlaget**
Begrunn	1	2	30
Forklar	27	13	59
Diskuter	12	21	50
Bevis	1	0	1
Hvorfor	14	14	17
Hvordan	105	96	58
Vurder	0	9	9
Tankerekke	49	25	23
Reflektere	4	0	1
Resonnere	**3**	**2**	**6**
Argumentere	**6**	**1**	**2**
Samarbeid	27	37	94

Vi hadde mange kodeord for resonnering og argumentasjon, fordi det ut i fra teorien er mange måter å definere dette på. Det er også flere begreper vi kan sidestille fordi de får fram den samme responsen i klasserommet. Det som er interessant for oss å få fram er ikke bare antall ganger hvert kodeord blir brukt i de ulike bøkene. Like viktig å få fram i hvor stor grad læreren får hjelp til å undervise etter kjerneelementet ved å bruke noen av kodeordene vi har funnet, likestilt med argumentasjon og resonnering.

Det vi først legger merke til er at kodeordene argumentasjon og resonnering forekommer svært sjelden i alle bøkene. Det kan være fordi ordene vanligvis ikke brukes i klasserommet, fordi de ikke blir konkrete nok hverken for lærere eller elever. Det kan hende at elevene på 4.trinn er usikre på hva læreren vil dersom hen ber elevene om å argumentere eller resonnere. Derfor er det viktig at læreren får hjelp av lærerveiledningen til å bruke andre begreper som får fram resonnering og argumentasjon hos elevene. For eksempel kan det være at en elev blir usikker dersom hen blir bedt om å argumentere for metoden sin, men hvis læreren spør eleven «hvorfor virker metoden din» vil eleven automatisk, gjennom å fortelle hvorfor metoden virker, argumentere nettopp for dette.



Figur 36 Funn i vertikal analyse. Antall kodeord illustrert i et søylediagram.

Som vi ser av tabellen er antall ganger kodeordene for resonnering og argumentasjon brukt ganske likt mellom de tre læreverkene. Legg merke til at Cappelen Damm og Gyldendal som har mange færre oppgaver, og mindre tekstmengde i lærerveiledningene, har nesten lik hyppighet av kodeordene som Barentsforlaget. Slik vi har beskrevet i metoden har vi kodet resonnering og argumentasjon uavhengig av de kognitivt krevende oppgavene. Ut fra teorien kan elevene øve på å resonere og argumentere også på oppgaver som ikke er kognitivt krevende (Drageset, 2016, s. 129). Som vi ser av funnene våre hadde alle tre læreverkene høy forekomst av kodeord for resonnering og argumentasjon, som «forklar» og «hvordan». Vi tror dette kan ha sammenheng med at resonnering og argumentasjon er «lett» for læreren å få til i klasserommet, bare læreren blir bevisst på hvilke ord hen kan ta i bruk får å få elevene til å resonnere og argumentere. Ut i fra funnene våre mener vi at resonnering og argumentasjon på dette nivået krever mindre av læreren å få til. Drageset (2016, s. 129) hevder at ved å spørre elevene «hvorfor», trener læreren eleven i å argumentere. Videre skriver han at på mellomtrinnsnivå er det ofte er snakk om uformell argumentasjon. Dette brukes som trening for å senere kunne ta i bruk den formelle argumentasjonen. «Hvorfor» er bare ett av kodeordene vi fant som vi mener læreren kan bruke på elevene for å få dem til å resonnere og argumentere. Det er svært viktig at lærerne blir klare over hvilke konkrete- enkle grep de kan gjøre for å undervise etter kjerneelementene.

Det var lett å finne kodeord til resonering og argumentasjon fordi det ut fra teorien er mange måter å definere dette på. Fordi Udir definerer resonnering som en del av argumentasjon, valgte vi å telle alle kodeordene uten å skille mellom hva som var resonnering og argumentasjon. Hvis vi i kodearbeidet har sidestilt ord som ikke oppnår det samme, kan det være en svakhet ved prosjektet. Kommunikasjon med lav kvalitet har vi tolket som ord som ikke får elevene til å gå dypere i forklaringene sine, at de kun forklarer overfladisk. Elevene kan da si «jeg gjorde sånn, sånn og sånn», uten å si noe om hvorfor. Samtidig kan det være en styrke for prosjektet at vi ikke har skilt mellom kodeord for resonner og argumenter fordi vi er på et småskolenivå, og elevene her vil i ulik grad være i stand til å sette ord på hvordan de har gjort og tenkt. Da er det viktig at vi har flere ord, som ber om ulike dybder av begrunnelsen sin, slik at alle elevene kan øve på sitt nivå. Vi tenker også at det kan være en styrke for prosjektet at vi ikke har skilt mellom resonnering og argumentasjon, og tatt hensyn til lærerveiledningsteksten til alle oppgavene, fordi vi får et ærlig bilde på hvor mye lærerveiledningen faktisk hjelper læreren til å undervise etter kjerneelementet.

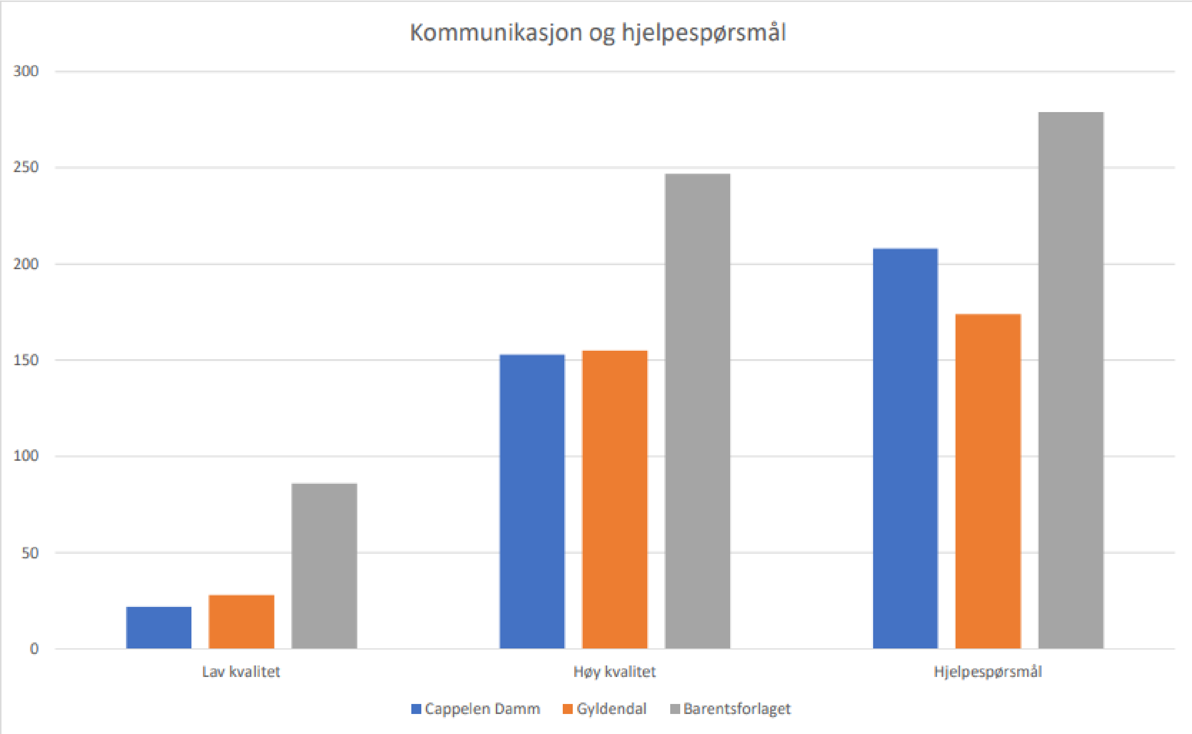
Utenom å telle hvor mange ganger det står kodeordet «bevis» i lærerveiledningen, var det svært vanskelig å kode for bevis når vi hadde valgt dokumentanalyse som metode, og ikke en observasjon i klasserommet. Vi tror dette, i sammenheng med forventet nivå på 4.trinn, er grunnen til at ordet «bevis» forekommer svært sjeldent hos alle tre læreverkene.

Her viser funnene våre at hyppigheten av forekomsten av kodeordene våre var ganske like for alle tre læreverkene. Men, fordi Barentsforlaget har så mye tekst i både lærerveiledningen og i opp gavene, hadde vi forventet en høyere hyppighet av kodeordene. Likevel er det Barentsforlaget som har desidert høyest forekomst av kodeordene for samarbeid. Dersom vi ser på hyppighet av kodeord i forhold til hvor mange oppgaver det er i de ulike læreverkene er det Cappelen Damm som har høyest forekomst av kjerneelementet resonering og argumentasjon, med Gyldendal ikke langt etter.
Ut fra funnene våre var det veldig jevnt med bruk av kodeord for argumentasjon og resonnering. I og med at det er ulikt med oppgaver i bøkene er vi overrasket over at Cappelen Damm hadde så mange treff på kodeordene. Vi vil trekke slutningen om at dersom læreren er flink til å få elevene til å forklare hvorfor det de gjør er matematisk riktig, øver læreren elevene i å resonnere og argumentere.

4.2.6 Funn om representasjon og kommunikasjon

Kjerneelementet representasjon og kommunikasjon har mange likhetstrekk med kjerneelementet argumentasjon og resonnering. Udir skriver at kommunikasjon i matematikk handler om at elevene bruker matematisk språk i samtaler, argumentasjoner og resonnement. Ut i fra dette vil vi påstå at dette kjerneelementet også rommer argumentasjon og resonnement.
Å omgjøre mellom representasjoner er viktig både for å oppnå relasjonell forståelse og få en god matematiske forståelse (Wæge & Nosrati, 2018, s. 99; Kilpatrick et al., 2001, s. 119). Ut fra kodingen er det Cappelen Damm som oppmuntret elevene til å lage eller omgjøre modeller flest ganger. Selv om de totalt kun har 239 oppgaver, oppmuntret lærerveiledningen læreren til å påpeke omgjøring nærmere 70 ganger. Det kan ha sammenheng med et av funnene i den horisontale analysen. I innledningen på lærerveiledningen blir Bruners *undervisningsteori om prosessen fra det konkrete via det abstrakte* (Dahl & Nohr, 2022, s. VII) forklart godt, og det forklares at fagstoffet i matematikkverket bygger på denne undervisningsmodellen. I tillegg følger en god forklaring og illustrasjon om omgjøring av representasjoner.

Derfor vil de inneholde de samme kodeordene, i tillegg til ordene samtale, snakk om og fortell som fører til kommunikasjon, men ikke nødvendigvis argumentasjon og generalisering. Dette kan ha sammenheng med det Wæge (2019, s. 18) skriver om høy og lav kvalitet på samtaler. I tillegg har vi valgt å ta med hjelpespørsmålene også under kommunikasjon, fordi de hjelper læreren til å få elevene til å snakke.

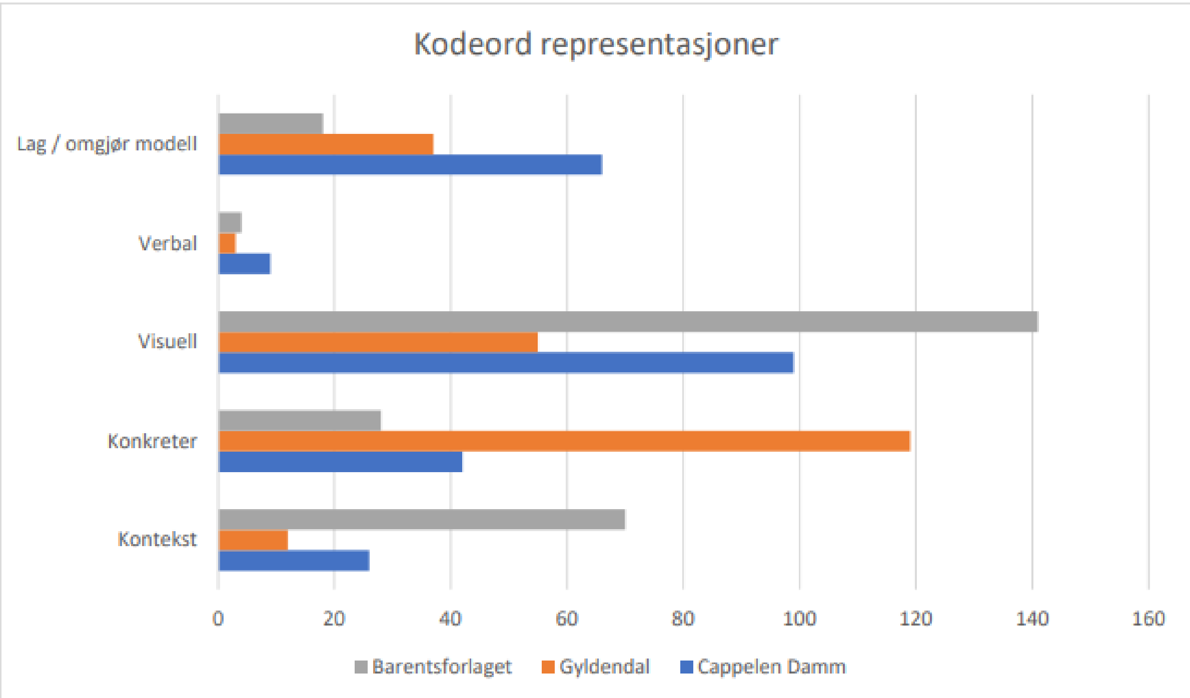


Figur 37 Funn vertikal analyse. Antall kodeord i kategorien som omhandler kommunikasjon.

Funn fra analysen vår viser også at lærerveiledningen til Cappelen Damm oppmuntrer til bruk av representasjoner i større grad enn Gyldendal både når det er kontekst, visuelle og verbale representasjoner. Gyldendal viste omtrent tre ganger så mye bruk av konkreter som Cappelen Damm. Det kan sees i sammenheng med at Gyldendal har en lik struktur på hver eneste dobbeltside i lærerveiledningen, der tips til læreren om å forenkle eller å gi større utfordringer står. Lærerveiledningen til Gyldendal oppmuntrer læreren til å gi elevene konkreter som klosser, penger eller base- 10. Cappelen Damm har også tips til læreren om forenkling, men ikke like hyppig som Gyldendal. Tradisjonelt sett er det ofte konkreter på småtrinnet, dette for å gjøre matematikken mer praktisk for elevene. Derfor er det ikke unormalt at Gyldendal har fokus på det i sin forenkling av oppgavene.

Et annet funn som vi synes er interessant er at Barentsforlaget ikke oppmuntrer til omgjøring av representasjoner oftere. I lærerveiledningens innledning står det at de har et stort fokus på den røde tråden i matematikkundervisningen, og at læreren skal hjelpe elevene til å se sammenheng i lærestoffet (Melhus et al., 2023, s.4). Hiebert og Lefevre (1986, s. 23) påpeker også at ny kunnskap kobles til eksisterende kunnskap, og fører til dybdeforståelse. Derfor tolker vi det slik at omgjøring mellom ulike representasjoner er viktig å fokusere på.

Her legger vi merke til at alle forlagene har mer kommunikasjon av høy kvalitet enn lav. Som vi skrev i teorien bestemmes kvaliteten av den matematiske samtalen ut fra om samtalen leder elevene til å forstå et matematisk læringsmål, en matematisk strategi eller konsepter (Wæge, 2019, s. 18-19). Forskning har vært opptatt av at diskusjon og samtaler er viktig for å forståelsen (Wæge, 2019, s. 18). Vi tolker diskusjon og samtaler som del av kommunikasjon. I alle tre læreverkene er antall kodeord for argumentasjon og resonnering brukt omtrent like mange ganger. Det kan tyde på at det er økt bevissthet rundt hvordan en kvalitetsmessig samtale burde foregå i et klasserom, og at det er et større fokus på hvordan læreren kan styre samtalen. I kapittelet om «Lærerens nye rolle» har Smith og Stein (2018) utviklet 5 praksiser, og Kazemi og Hintz (2019, s. 33-34), har målrettet samtale, i tillegg samtaletrekk for å øve læreren til å få frem det elevene tenker på, gjennom samtale. I innledningen til Barentsforlaget står det at læreren har mange ulike oppgaver, blant annet skape klasseromskultur for samarbeid, fordi elevene lærer gjennom kommunikasjon og samarbeid (Melhus et al. s. 4). Cappelen Damm har, mye annet fagstoff i tillegg til den direkte veiledningen til oppgavene. På side 80 er det et innlegg om klassekultur som fremmer læring for at matematiske samtaler skal kunne gjennomføres. Det har likhetstrekk med det Barentsforlaget nevner, bare at Cappelen Damm kommer med noen flere konkrete tips til læreren om dette.



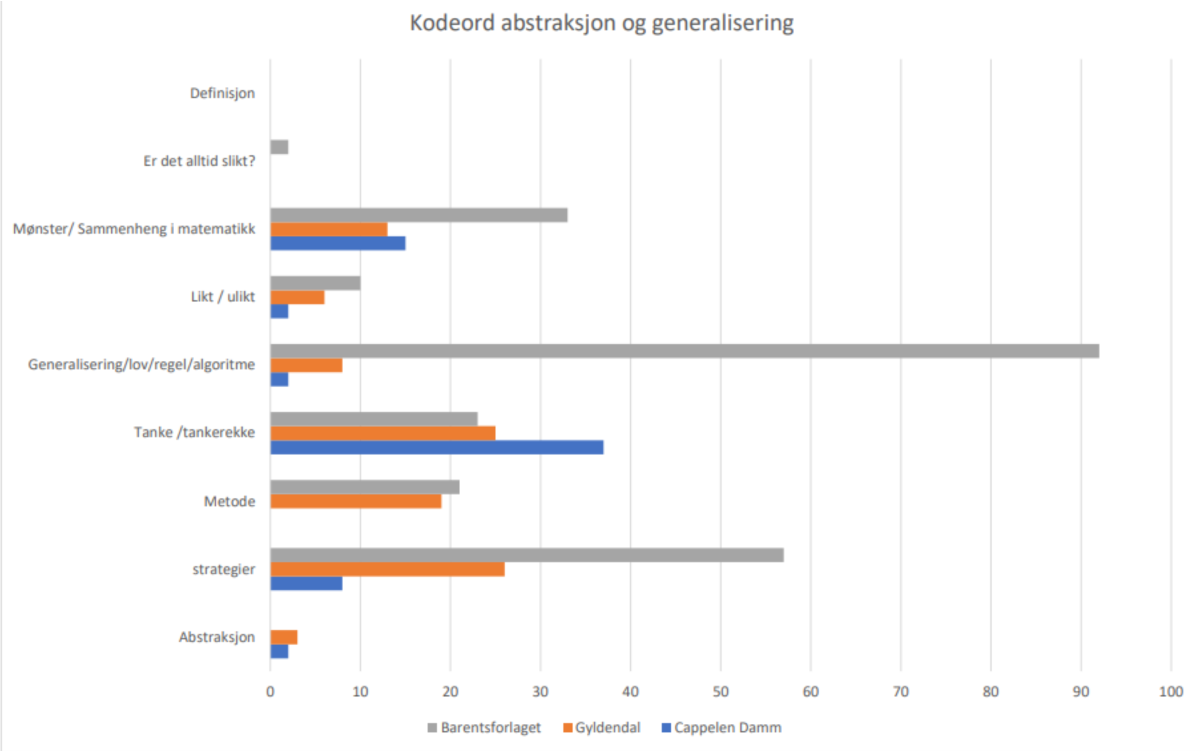
Figur 38 Funn vertikal analyse. Antall kodeord som omhandler representasjoner.

Tabellen over viser hyppigheten for de ulike representasjonsformene i læreverkene.

Det vi legger merke til er at forlagene vektlegger ulike representasjonsformer. Cappelen Damm skiller seg merkbart ut ved at de flest ganger oppmuntrer til å lage eller omgjøre mellom representasjoner. I grunnboka bruker Cappelen Damm begrepet lag modell, eller omgjør mellom modeller framfor representasjoner. Dette henger sannsynlig sammen med at elevene ikke er vante til å bruke ordet representasjon. Å omgjøre mellom representasjoner bidrar til dypere forståelse. Dette kan tyde på at Cappelen Damm er opptatt av dybdeforståelse.
Her ser vi at alle tre læreverkene har høyere hyppighet på kodeordene for kommunikasjon med høy kvalitet, enn for kommunikasjonen med lav kvalitet. Som vi beskrev i teorikapitlet, er matematisk samtale med høy kvalitet viktig for elevenes læring (Wæge, 2019, s. 18).Vi ser også at alle tre læreverkene har høy forekomst av hjelpespørsmål som læreren kan stille til elevene i undervisningen. Det er bra med konkrete tips læreren kan ta med seg direkte ut i klasserommet. Ut fra funnene våre vil vi si at alle tre læreverkene ivaretar kjerneelementet representasjon og kommunikasjon i stor grad.
Når det kommer til representasjoner har vi telt antall ganger lærerveiledningen oppmuntrer elevene til å bruke ulike representasjoner. Dermed ser vi ikke på antall ganger i forhold til antall oppgaver. Vi har valgt å se bort fra verbale representasjoner, da det var vanskelig å måle disse i en dokumentanalyse. Ut fra de andre kodeordene for representasjoner ser vi at læreverkene har vektlagt litt ulike representasjoner. Gyldendal oppmuntrer flest ganger til bruk av konkrete representasjoner. Cappelen Dam oppmuntrer flest ganger til at elevene skal lage en modell, eller omgjør fra en modell til en annen, og Barentsforlaget har desidert flest i oppmuntringer til visuelle representasjoner. Ut fra dette vil vi si at alle har elementer av kjerneelementet representasjoner, og ivaretar det i noen grad.

4.2.7 Funn om abstraksjon og generalisering

Kjerneelementet abstraksjon og generalisering har mange likhetstrekk med kjerneelementet utforsking og problemløsning, slik Udir har definert de. Derfor er noen kodeord brukt begge plasser. De kodeordene som kun er benyttet i abstraksjon og generalisering er «Er det alltid slik?», Likt/ulikt, generalisering og abstraksjon.



Figur 39. Funn vertikal analyse. Antall kodeord som omhandler kategorien abstraksjon og generalisering.

Her legger vi merke til at Barentsforlaget skiller seg ut ved at de har et stort fokus på generalisering, i tillegg til strategier, mønster og sammenhenger i matematikk. Barentsforlaget har også desidert flest oppgaver, og har mye tekst til hver oppgave både i grunnboka og i lærerveiledningen. Dermed kan det være naturlig at de har et større antall kodeord. Samtidig kan vi også se, som tidligere nevnt, at Cappelen Damm har stort fokus på tankerekker.

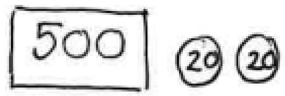
Under kodingen la vi merke til at det er stor forskjell på hvordan læreverkene bruker det matematiske språket i oppgavene og lærerveiledningene, som vi har prøv å vise med eksemplene under. Dette kan tyde på at det matematiske språket i oppgavene og lærerveiledningen kan være med å legge føringer på bruk av et matematisk språk i klasserommet.

Under har vi figurer til hvert læreverk for å illustrere forskjeller og likheter i det matematiske språket. Først ut er Cappelen Damm

Barna deler pengene likt mellom seg.

Hvor mange kroner får de hver?

Tegn pengene i skjema



Per	Kari	Ola	Åse

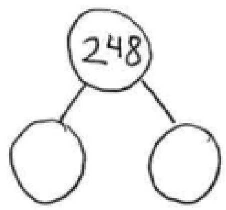
Figur 40. Illustrasjon på det matematiske språket anvendt i elevboka fra Cappelen Damm.

Dette er et typisk eksempel på hvordan språket er i Cappelen Damm. Språket er kort, konsist, og det er gjerne en tilhørende modell/illustrasjon som kan være til hjelp for elevene.

Under er et typisk eksempel på hvordan språket er i Gyldendal. Språket er kort, konsist, og gjerne med en støttende figur.

«Del opp tallene og regne ut»

248: 8 =



Figur Illustrasjon på det matematiske språket anvendt i elevboka fra Gyldendal.

Under har vi limt inn en oppgave fra Barentsforlaget bok. Språket her er mer avansert enn i de to andre bøkene. Barentsforlaget bruker de matematisk korrekte begrepene, slik som dividend, uttrykk og sum.

95 a) Skriv dividenden i hvert uttrykk som en sum av tall som er greie å dele.

45 : 3	78 : 6	46 : 2	84 : 4
69 : 3	36 : 2	75 : 5	91 : 7

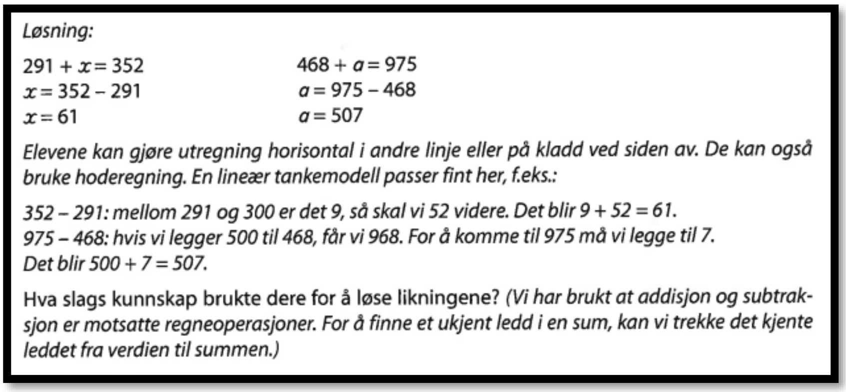
Figur 41 Eksempel på det matematiske språket anvendt i elevboka fra Barentsforlaget. (Blank et al., 2023, s. 47).

I lærerveiledningens innledning nevnes det at læreren kan forenkle språket og si ting på en annen måte, men i det tilfelle må læreren passe på å ikke forenkle oppgaven (Melhus et al. 2023, s. 4).
Ut fra tabellen med hyppigheten av kodeordene for abstraksjon og generalisering, og ut fra kompleksiteten til matematikkspråket ser det ut til at Barentsforlaget hjelper læreren i stor grad med å undervise etter kjerneelementet abstraksjon og generalisering. Cappelen Damm har størst fokus på tanker og tankerekker. Gyldendal har relativt stort fokus på der, tanke/tankerekker og mønster og sammenhenger i matematikk. Som vi så av resultatene har Barentsforlaget høyest forekomst av kodeordene generalisering, regel, lov, algoritme, mønster/ sammenhenger i matematikken, likt/ulikt, og strategier. Vi konkluderer med at Barentsforlaget ivaretar kjerneelementet abstraksjon og generalisering på en god måte.

4.3 Interessante funn

Her vil vi presentere andre interessante funn fra analysearbeidet.

Vi oppdaget under kodingen at lærerveiledningene av og til hadde forslag på hvordan elevene kom til å tenke, noe vi syntes var interessant. Dette hadde vi lært om på lærerspesialiststudiet vårt. Det er et steg i Smith og Steins (2018, s. 9-10) 5 praksiser. Det brukes av læreren for å forutse hvilke strategier elevene kommer til å bruke for å løse en oppgave. Det er et viktig pedagogisk redskap lærere kan bruke i planleggingsarbeidet når de skal lede elevene mot et bestemt matematisk mål, eller idé (Smith & Stein, 2018, s. 41). Det kan minne om det Ball og Cohen (1996, s. 7-8) nevner at lærerveiledninger kan ha konkrete illustrasjoner av elevenes forståelse. Det kan være til hjelp for lærerne for å se på hva elevene har fått til. I arbeide med koding av data ble vi oppmerksomme på at alle lærerveiledningene hadde eksempler på å forutsi elevsvar. Det vi forstår med å forutsi elevsvar er at man på forhånd har tenkt på ulike måter elvene kan komme til å svare på en oppgave. Vi bestemte oss for å telle antall ganger det forekom i hver bok nettopp fordi det er det et steg i Smith og Steins (2018, s. 9-14) 5 praksiser. Et tilnærmet lik eksempel fra Cappelen Damm kan være at det står elevene kan tenke på ulike måter når de løser oppgaven og kommer så med to forslag på ulike måter elevene kan tenke for å løse oppgaven. Et tilnærmet likt eksempel fra Gyldendal kan være «Det kan hende elevene har noen faktakunnskaper som løser noen av oppgavene. Hvis ikke kan de bruke strategien én mer, én mindre». I bildet under ser vi at Barentsforlaget forklarer hvilke strategier elevene kan bruke og har ofte et utregnet eksempel også.


Løsning:

$291 + x = 352$
$x = 352 - 291$
$x = 61$

$468 + a = 975$
$a = 975 - 468$
$a = 507$

Elevene kan gjøre utregning horisontal i andre linje eller på kladd ved siden av. De kan også bruke hoderegning. En lineær tankemodell passer fint her, f.eks.:

352 – 291: mellom 291 og 300 er det 9, så skal vi 52 videre. Det blir 9 + 52 = 61.
975 – 468: hvis vi legger 500 til 468, får vi 968. For å komme til 975 må vi legge til 7.
Det blir 500 + 7 = 507.

Hva slags kunnskap brukte dere for å løse likningene? *(Vi har brukt at addisjon og subtraksjon er motsatte regneoperasjoner. For å finne et ukjent ledd i en sum, kan vi trekke det kjente leddet fra verdien til summen.)*

Figur 42. Forutsi elevenes tenkning. Oppgave 55, Barentsforlaget (Melhus et al., 2023, s 43).

Å forutse elevenes tenkning er av erfaring av og til vanskelig, og ofte uvant for lærere hvis de aldri har gjort det før. Når lærerveiledningene inneholder slike tips er det stor hjelp til læreren. Det at Barentsforlaget hadde forutsett elevenes tenkning 84 ganger viser at de er bevisste på lærerens nye rolle.

Tabell 14 Andre funn. Antall ganger forutse elevsvar.

Cappelen Damm	Gyldendal	Barentsforlaget
19	11	84

I den horisontale analysen var det et interessant funn at lærerveiledningene var veldig ulike da vi startet å analysere de. Det kan komme av at to av lærerveiledningene informerte om at de var basert på ulike teoretiske undervisningsmodeller. Barentsforlaget skriver at bøkene er utviklet på bakgrunn av undervisningsmodellen utviklet av Zankov, som tar utgangspunkt i Vygotskys teorier om læring, utvikling og undervisning (Melhus et al., 2023, s. 3). Cappelen Damm skriver at de blant annet er inspirert av Singaporemodellen (Dahl & Nohr, 2022, s. III). I forordet står det at Gyldendal bygger på moderne tilnærminger til læring og undervisning i matematikk (Alseth, 2021). Det står ingen dypere forklaring på dette utsagnet, men i innledningen forklarer de om dybdelæring og kjerneelementene, som er begreper som ligger innen «moderne tilnærming til læring og undervisning». Ulike pedagogiske tilnærminger gjør at de som har laget læreverkene sannsynligvis har ulike innfallsvinkler til elevenes læring. Det kan sees i sammenheng med at lærere er ulike og krever ulik hjelp og støtte fra lærerveiledninger, og at hver enkelt lærer underviser hvordan de tror fungerer best. I og med at det ikke er et nasjonalt godkjenningsorden på lærebøker kan skoler og kommuner velge det de synes passer best. Det kan sees i sammenheng slik Remillards (1999) studie viste at to erfarne lærere valgte å stole på egne erfaringer og ideer enn et nytt læreverk, og om man er villig til å prøve ny forskningsbaserte undervisningsmetoder.

I og med at de tre lærerveiledningene er inspirerte og utviklet av ulike teorier og modeller. Det kan tyde på at de har vektlagt ulike ting, noe som vi la merke til når vi arbeidet med datainnsamlingen og analysen. Lærerveiledninger kan være ulikt oppbygd basert på kultur og tradisjoner. Barentsforlagets lærerveiledning har en annen oppbygning og henvender seg til læreren ulikt enn de andre to. I Cappelen Damm er tilnærmingen til læreren tilnærmet lik disse eksemplene «*Elvene kan …, Vis gjerne hvordan … Timen kan starte …, I denne oppgaven legges det opp til…»*. Gyldendal henvender seg på en litt annen måte, tilnærmet lik *«Elevene deler …, elevene skal … La elevene bruke … Utfordring i denne oppgaven er …Disse oppgavene er mer …».*

1 *Punkt a) gjøres i fellesskap, resten individuelt. I denne oppgaven settes den distributive loven for multiplikasjon over addisjon opp. Vanligvis sier vi kun «den distributive loven», men så lenge elevene kun opererer med hele tall vil det være naturlig å skille mellom en distributiv lov for multiplikasjon og en for divisjon. Seinere, når tallmengden man jobber i utvides og tallene som inngår ikke lenger trenger å være hele tall, kan begge lovene samles i én lov.*

a) *Begynn med å kikke på uttrykkene i hver linje. Hva er felles? Hva er forskjellig?*

I den første linjen multipliseres det med 3 på begge sidene, men på venstre side er det summen $3 + 5$ man multipliserer med og på høyre side er det tallene 3 og 5 hver for seg. Det er addisjon på begge sider. På venstre side adderes det inni parentesen. På høyre side er det produktene $3 \cdot 3$ og $3 \cdot 5$ som adderes. *(Elevene vil sikkert trekke fram regnetegnene + og ·.)*

Tilsvarende er det for den andre linjen.

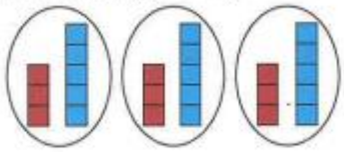
b) Verdiene til uttrykkene: $3 \cdot (3 + 5) = 3 \cdot 8 = 24$ $\quad 2 \cdot (4 + 2) = 2 \cdot 6 = 12$

$3 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 9 + 15 = 24$ $\quad 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 8 + 4 = 12$

Sammenlikner vi uttrykkene på ny, ser vi at de har samme verdi. Vi kan derfor erstatte prikkene med likhetstegn.

La gjerne elevene lage liknende uttrykk selv og sammenlikne verdiene. Raske elever kan oppfordres til å inkludere produkt der parentesen står først, for eksempel sammenlikne $(3 + 5) \cdot 3$ med $3 \cdot 3 + 5 \cdot 3$.

Etter at elevene har regnet på disse eksemplene, kan man undersøke saken mer generelt – er resultatet tilfeldig, eller kan vi forklare at det alltid må være slik? La elevene forklare hva som skjer ved bruk av konkreter, for eksempel legoklosser. En måte å forklare resultatet på, er å lage 3 like mengder med 3 røde og 5 blå klosser satt sammen i tårn (ringene er tegnet inn for å synliggjøre de tre mengdene).



Hvordan kan vi forklare at antall klosser til sammen i disse tre mengdene er det samme som 3 røde treertårn og 3 blå femmertårn? Få elevene selv til å forklare. Vil det alltid være sik? Her gjelder det å innse at konkretiseringen kan overføres til et hvilket som helst eksempel – at forklaringen er ***generaliserbar****.*

c) Be elevene formulere en regel og deretter sammenlikne med regelen i boka. Konkluder med at **når vi skal gange et tall med en sum, så vil vi få samme svar som hvis vi ganger**

Figur 43 Bilde av lærerveiledningen i Barentsforlaget. (Melhus et al. 2023, s. 9).

Som vi ser på bildet har Barentsforlaget mye tekst og er veldig veiledende og styrende for læreren. Læreren får mye informasjon, og det er tydelige instrukser på hva læreren kan si, svaralternativer på oppgavene og forslag til elevsvar. Barentsforlaget lærerveiledning er det ikke valgfritt om læreren skal lese teksten som hører til oppgaven. Læreren har alle muligheter til å følge intensjonen til oppgaven med så mye tydelig informasjon.

5 Drøfting

Her vil vi drøfte funnene vi har gjort i analysen og se de i en større sammenheng.

Som tidligere nevnt ut i fra de horisontale funnene har Cappelen Damm desidert flest sider i innledningen, hele 17 sider mer enn de andre lærerveiledningene. Cappelen Damm har mest annen faglitteratur som er plassert i disse sidene. I tillegg har layouten til lærerveiledningen viet god plass til enda mer faglitteratur, som ikke går direkte på tilhørende tekst til oppgavene. Cappelen Damm har en tradisjonell oppbygning av innholdet i kapitlene, og lite tilhørende tekst til oppgavene. Cappelen Damm har mye informasjon til læreren som vi ikke har knyttet til den vertikale analysen. Det vil si at i Cappelen Damm må læreren undersøke fagstoffet selv. Ved å se på informasjonen som Cappelen Damm har er det mye fagstoff som er relevant for læreren for å få til en god undervisning. Hvis læreren ønsker kan hen lese seg opp, å få tips om mange gode pedagogiske grep i tillegg til annen faglig informasjon. Artiklene i boka er lettleste og fremstår konkrete. Utfordringen ligger i at det ikke er noen nærmere forklaring til hvordan læreren skal bruke denne informasjonen. Lærerens nye rolle innebærer at hen skal undervise gjennom kjerneelementene for å skape dybdeforståelse hos elevene. Å ha mye informasjon i lærerveiledningen gir lærere mulighet til å oppdatere seg på det som er nytt på forskningsfronten, og i forhold til kjerneelementene. Det ser vi tydelig i Cappelen Damm. De refererer ofte til kjerneelementene og forklarer hva nyere forskning sier om hvordan undervisningen bør være. Lærerveiledningen ble utgitt i 2022, etter at LK20 var innført. Utfordringen ligger i hvordan dette gjøres i praksis, og hvordan læreren skal få omgjort den generelle informasjonen til det som skjer i timene gjennom oppgavene mot elevene. I en hektisk lærerhverdag problematiserer Davis og Krajcik (2005, s. 9) at lærere ikke har tid til å lese utvidede lærerveiledninger. I den forbindelse vil det ikke hjelpe læreren å ha ekstra informasjon spredt i boka hvis man ikke klarer å nyttiggjøre seg av den. Som nevnt tidligere fant vi på side 80 et innlegg om klasseromskultur som fremmer læring, på slutten av divisjonskapitlet. Der er en fin forklaring om matematiske samtaler, og forklaring om hvordan elevene bør lytte til hverandre slik at de kan dele matematiske ideer. Smith og Stein (2018) , og Kazemi og Hintz (2019) belyser samtaler som viktige pedagogiske praksiser, men her burde informasjonen være plassert tidligere i boka, og knyttet direkte til oppgavene slik at læreren slipper å lete for å finne informasjonen. Cappelen Damm er en lærerveiledning som har mye nyttig informasjon, men krever at læreren selv leter og kan nyttiggjøre seg av den informasjonen som er der, og gjøre den om til den daglige undervisningen. Slik Stein og

Smith, 2011, s. 11) sier er det ikke alltid intensjonen til oppgaven i boka blir gjennomført, slik forfatteren bak oppgaven hadde tenkt. Dette kan påvirke elevenes læringsutbytte. Stein og Smith (2011, s. 11) forklarer dette som oppgavenes faser, fra bok og til elev. Det er der lærerens rolle spiller en viktig brikke. Læreren må ha forståelse for intensjonen til oppgavene for å være i stand til å forstå hvordan elevene kan hjelpes (Son & Diletti, 2017, s. 27). Informasjonen til selve oppgavene er på en slik måte at læreren kan velge. Det kan for eksempel stå «elevene kan tegne…», eller «elevene skal …». Det kan også stå at elevene skal forklare hvordan de har tenkt, enten til en medelev eller i oppsummeringen. En slik veiledning krever at læreren forstår den matematiske sammenhengen i de ulike oppgavene. Slik vi kan lese ut av den tilhørende oppgaveteksten i lærerveiledningen er det ingen direkte støtte til læreren med å finne den matematiske sammenhengen. Son og Diletti (2017, s.27) fremhever at læreren må vite intensjonen til oppgavene i boka for at elevene skal lære seg matematikken, og da kunne lære elevene denne sammenhengen. Slik vi ser det hjelper ikke lærerveiledningen Cappelen Damm læreren å se sammenhenger i matematikken, - så fremt læreren ikke har denne kunnskapen selv. Det finnes ulike redskaper for å få dette til i praksis, men det som kanskje ligger læreren nærmest, nærmere enn elevboka, er lærerveiledningen. For å kunne undervise etter kjerneelementene slik at elevene oppnår dybdelæring trenger elevene tid til å fordype seg i lærestoffet. De må ha noe å tenke på (Liljedahl, 2021, s. 19) og de må få støtte hos læreren. Ved å utarbeide et rammeverk der vi leter etter kodeord i den tilhørende teksten til oppgaver har vi forsøkt å se om lærerveiledningene hjelper til med å omforme pedagogikken i lærerveiledningene gjennom undervisningen til læring hos elevene. Det finnes mange ulike syn på hva lærerveiledninger skal inneholde, og om de kun er for elevenes læring eller om de også kan være til støtte for lærerens læring (Davis & Krajcik, 2017, s. 3). I forhold til Cappelen Damm kan lærerveiledningen være til støtte for lærerens læring hvis læreren klarer å omgjøre teorien til praksis. For å se på den mer reelle hjelpen læreren får i klasserommet i gjennomføringen av undervisningen, som Remillard (2005, s. 225) nevner som *construction aera*, vil vi kun se på den tilhørende teksten til oppgavene i lærerveiledningen, og ikke annen faglitteratur. Cappelen Damm har minst tilhørende oppgavetekst av de tre lærerveiledningene. I funnene fra den vertikale analysen var kun 22 % av oppgavene til Cappelen Damm på et høyt kognitivt krevende nivå. Hvis vi tar utgangspunkt i Liljedahl (2021, s. 19) som påpeker viktigheten med at elevene må ha noe å tenke på, har ikke Cappelen Damm et godt utgangspunkt. Det kognitive nivået til oppgavene kan fortelle hvilket krav de stiller til elevenes tenkning (Smith & Stein, 1998, s. 348). Ved at Cappelen Damm ut i fra kodeordene har et stort fokus på tankerekke/tenkning viser det at de er opptatte av å få frem elevenes tenkning, men mangler oppgaver som er verdt å tenke på. Det som også var positivt er at de er opptatte av å omgjøre mellom representasjoner, noe som skal føre til dybdelæring (Kilpatrick et al. , 2001, s. 117). Cappelen Damm har størst andel kodeord som omhandler argumentasjon og resonnering. Men, hva er det faglige nivået på tenkningen hvis 78% av oppgaven har lave kognitive krav? Vi er enige om at man kan argumentere og resonnere uavhengig av kognitive krav i oppgaver, men det vi vil problematisere er det Ball og Bass (2003, s. 29) sier. Det må være en matematisk argumentasjon, der man bruker et felles matematisk språk. Matematisk argumentasjon og resonnering skal gjøres forståelig, og det krever kollektive prosesser og normer, i tillegg til at argumenteringen og resonnering må ha bakgrunn og røtter i faget. På resten av kodeordene var Cappelen Damm stort sett på laveste nivå.

Ut fra den horisontale analysen og informasjonen om innholdsstrukturen ser vi at Gyldendal er opptatt av dybdelæring og kjerneelementene. Det gav oss forventninger til resten av boka. De sier i innledningen at de vektlegger ulike oppgavetyper, som utforsking til å utvikle forståelse og automatisering av faktakunnskaper for å styrke hukommelsen (Alseth et al., 2021, s. iv). Det har likhetstrekk med Hiebert og Lefevres (1986, s. 9) forståelse for prosedyrekunnskap og dybdelæring. Gyldendal forklarer dermed at de vektlegger dybdeforståelse ved å kombinere begge typer oppgaver. Det kan være en forklaring til hvordan de har plassert innholdet i læreboka, og at de har en god del oppgaver med like løsningsstrategier etterfulgt av hverandre. Men, som fører til at det kognitive kravet til oppgaven reduseres. Gyldendal har et oppsett der det er en forklaring på hver dobbeltside der sentralt stoff skal presenteres for elevene. Denne forklaringen presiserer Gyldendal selv er plassert i forhold til utforskningsoppgavene. Dette kan minne om hvordan beskriver instrumentell innlæring (Skemp, 2006, s. 9), der elevene skal se på det læreren viser eller sier for deretter å herme etter vist strategi. Uten å utforske for å finne frem til en løsningsmåte på egenhånd. Utformingen av Gyldendals plassering av forklaringsrutene gjør at vi lurer på om det er reell utforskning, hvis elevene kun kan kaste et blikk til oppgaven på samme side. Dette kan enkelt ha vært unngått hvis det hadde stått i lærerveiledningen at utforskningsoppgaven for eksempel kunne blitt gitt muntlig, slik Liljedahl (2021, s. 105) beskriver.

Gyldendal ligger i midtsjiktet av antall kodeord på de aller fleste områder. De skiller seg positivt ut ved at de oppmuntrer til bruk av konkreter flest ganger, og har nesten like mange hjelpespørsmål som Barentsforlaget. I tillegg til at det i Gyldendal er 32% av oppgavene som kategoriserer til høye kognitive krav. Ut fra (Charalambous et al. 2010, s. 138-139) er det en større andel kognitivt krevende oppgaver enn nivået fra Irland og Kypros, som har mindre enn 20 %. Det som også var interessant var hvordan Gyldendal har omskrevet kjerneelementene til hvordan de ulike kjerneelement blir brukt i boka (Alseth et al, 2021, s. iv-v). Men, det å ha informasjon som generell fakta og vise konkret hvordan det blir brukt er, som sagt tidligere, ikke like enkelt. Gyldendal har mer tilhørende tekst til oppgavene enn Cappelen Damm, men flere oppgaver deler samme tekst. Teksten er instruerende og forteller hva elevene skal gjøre på hver oppgave. For eksempel kan det stå at «elevene skal …», «elevene løser …», «elevene regner …». Veiledningen til læreren oppleves ikke som veldig støttende, slik vi kan se ut av kodeordene i rammeverket vårt. Som tidligere nevnt har Gyldendal forklarende oppgave ved siden av flere av utforskoppgavene. Fordelen med å ha en slik forklaring direkte i boka er at læreren kan lære av forklaringen sammen med elevene. Davis & Krajcik (2005, s. 4) sier at det er vanskeligere å legge til rette for lærerens læring enn elevens læring, og at ved å ha en god forklaring så får både læreren og eleven samme matematiske forståelsen.

I den horisontale analysen var det plassering av oppgavene i elevboka og mengde tekst i lærerveiledningen som var annerledes i Barentsforlaget enn i de to andre verkene. Barentsforlaget har tydelige og fyldige tilhørende tekster til oppgavene. Ofte er de over en side lang. I Stylianides (2008, s. 211) forskning om bevis var resultatet at lærerveiledningene ikke alltid gir nok støtte til læreren. De foreslo at lærerveiledningene både bør inneholde mer støtte og ulike løsningsforslag. Vi mener at Barentsforlaget gjør akkurat dette. Det er tydelige hva som forventes av læreren, og det er mange ulike løsningsforslag presentert i lærerveiledningen til oppgavene. I tillegg sier Stylianides (2008) at en støttende lærerveiledning er spesielt viktig hvis innholdet er krevende å lære, og hvis læreren har begrenset kunnskap om området. Når 82 % av oppgavene i Barentsforlaget har høye kognitive krav, vil det nok være en fordel med en fyldig lærerveiledning. Hvis læreren ikke hadde hatt en tydelig lærerveiledning til oppgavene er det stor fare for at det høye kognitive kravet til oppgaven ikke ville bestått. Da er det fare for at oppgavens opprinnelige intensjon ikke følges uten en tydelig lærerveiledning (Ball & Cohen, 1996, s 7). Tilhørende tekst i Barentsforlaget henvender seg ofte direkte til læreren, og det er tydelig at både elever og lærere skal lære. For eksempel står det på side 39 i lærerveiledningen inni en parentes etter litt tilleggsinformasjon, at «dette trenger ikke elevene å gjøres oppmerksomme på, men er noe læreren bør vite» (Melhus et al. 2023, s 39). Det kan sees i tråde med det Son og Diletti (2017, s 27) sier at læreren må ha gode kunnskaper om innholdet i boka for å kunne støtte elevene til å forstå matematikken. I følge Hiebert og Lefevre (1986, s. 23) trenger elevene både konseptuell forståelse og prosedyremessig forståelse for å ha matematisk forståelse. Slik vi ser det har Barentsforlaget et stort fokus på både den konseptuelle forståelsen, og prosedyremessig forståelse ettersom de har en overvekt av HPMS oppgaver. Det er satt av lite øveoppgaver i Barentsforlaget og lite individuelt arbeid. Det vi lurer på i den forbindelsen er om elevene får nok tid til å øve på ferdighetene sine med å gjøre oppgavene i boka si. Melhus et al. (2023, s. 4) påpeker at elevene også trenger å øve på kjent stoff, og da bør man finne oppgaver andre steder hvis oppgavene blir for vanskelig. Med tanke på at kjerneelementene i matematikk ikke tar hensyn til øving, så vil ikke denne problemstillingen være avgjørende for vår problemstilling.

6 Avslutning

I dette kapittelet vil vi prøve å svare på problemstillingen vår ut fra det vi har gjort i dette prosjektet. Det har vært en lærerik og krevende prosess. Vi vil også se på mulighet for veien videre, og hvilken betydning vårt prosjekt kan ha for vår profesjon.

Vi startet prosjektet med å diskutere kjerneelement og undervisning. I den forbindelse ble vi nysgjerrige på hvordan vi best kunne undervise utfra de ulike kjerneelement og hvilken hjelp og støtte vi kunne få fra de ulike ressursene vi hadde tilgjengelig. Prosjektet utviklet seg til å bli meget omfattende da vi først måtte sette oss nøye inn i teorien som kjerneelementene er bygget på, for å finne kodeord vi kunne bruke for å lete etter kjerneelementene i lærerveiledningene. Deretter måtte vi sette dette sammen til et eget rammeverk basert på Charalambous et al. (2010) , og Smith og Stein (1998) *task analysis guide*. Vi utviklet da vårt eget rammeverk for analyse av lærerveiledninger med tanke på kjerneelementene. I arbeidet med å finne kodeord til kjerneelementet utforsking og problemløsning ble det klart for oss at vi også måtte analysere oppgavene i elevbøkene med tanke på kognitive krav. Dette fordi vi mener at for å kunne undervise utforskende og problemløsende er elevenes læring avhengig av at oppgavene er kognitivt krevende. Da vi hadde utviklet rammeverket ferdig, analyserte vi først oppgavene i tre grunnbøker i utvalgte kapitler, før vi kodet lærerveiledningene. Funnene har vi illustrert i tabeller og diagrammer, og drøftet videre.

6.1 Konklusjon

I dette prosjektet har vi underøket i hvor stor grad tre lærerveiledninger, med tilhørende oppgaver hjelper læreren med å undervise etter kjerneelementene i LK20. Vi valgte å se på de fem første kjerneelementene, utforsking og problemløsning, modellering og anvendelse, resonnering og argumentasjon, representasjon og kommunikasjon, og abstraksjon og generalisering, fordi vi mener at de til sammen utgjør en helhetlig matematisk kompetanse, som er nødvendig for at elevene skal nå målet om dybdelæring i matematikken. Vi ser mange likhetstrekk mellom Kilpatrick et al. (2001) og Niss og Jensen (2002) matematiske kompetanseområder og kjerneelementene. Alle tre lærerveiledningene kunne hatt en tydeligere uttalt sammenheng mellom kjerneelementene som begrep, og hvordan få til å undervise etter dem i praksis. Forskning viser at det er viktig at elevene får mulighet til å utvikle ferdigheter og kunnskaper innenfor alle kjerneelementene (Kilpatrick et al. 2001) og (Niss og Jensen (2002). Funnene viser at alle tre lærerveiledningene og oppgavene legger vekt på bruk av kjerneelementene, men på ulike måter, og i ulik grad. Cappelen Damm har en betraktelig og utfyllende mengde fagstoff i innledningen og ellers fordelt som artikler rundt om i lærerveiledningen. Gyldendal har en kort innledning, og ellers ingen fagartikler spredt rundt i lærerveiledningen, mens Barentsforlaget ikke nevner ordet kjerneelementer noen steder. De har derimot meget utfyllende informasjon til hver oppgave i lærerveiledningen.

Kjerneelementene utforsking og problemløsning er svært avhengige av oppgavene. For at elevene skal få arbeide reelt utforskende og problemløsende er det viktig at oppgavene har høye kognitive krav. Cappelen Damm og Gyldendal har en lav prosentandel kognitivt krevende oppgaver, med henholdsvis 22 prosent og 32 prosent. Barentsforlaget derimot hadde en høy andel av oppgaver som er høyt kognitivt krevende, med hele 82 prosent. Ut fra dette viser funnene våre at Cappelen Damm i liten grad hjelper læreren å undervise etter kjerneelementet utforsking og problemløsning. Gyldendal hjelper læreren å undervise etter kjerneelementet utforsking og problemløsning i noen grad, mens Barentsforlaget hjelper læreren å undervise etter kjerneelementet utforsking og problemløsning i stor grad.

Kjerneelementet modellering og anvendelse er også svært avhengige av oppgavene. Vi valgte å kun kode for modellering, slik vi beskrev i metoden. Teorien hjalp oss å definere modellering til å være problemløsningsoppgaver med kontekst. Funnene våre viser da at Cappelen Damm har 6,7 prosent modelleringsoppgaver, Gyldendal har 16,8 prosent modelleringsoppgaver og Barentsforlaget har 13,5 prosent modelleringsoppgaver. Dette viser at alle lærerveiledningene hjelper læreren å undervise etter kjerneelementet modellering i kun liten grad

Kjerneelementet resonnering og argumentasjon er ikke like avhengig av at oppgavene er kognitivt krevende, da elevene kan resonnere og argumentere uavhengig av oppgavetype. Funnene våre viser at hyppigheten av kodeord for resonnering og argumentasjon var ganske like for de tre lærerveiledningene, men fordi Cappelen Damm har færre oppgaver enn både Gyldendal og Barentsforlaget, og fordi de har lite informasjon i lærerveiledningen til hver oppgave, vil vi si at de har høyest forekomst av resonnering og argumentasjon per oppgave, men Gyldendal er ikke langt bak. Ser vi dette funnet i sammenheng med antall oppgaver med høye kognitive krav er vi redde for at kvaliteten på resonneringen og argumentasjonen, ikke blir like bra som den kunne ha vært dersom Cappelen Damm hadde hatt en høyere prosentandel oppgaver som var kognitivt krevende. Ut fra dette vil vi si at alle tre lærerveiledningene hjelper læreren i noen grad med å undervise etter kjerneelementet resonnering og argumentasjon.

Kjerneelementet representasjon og kommunikasjon har, som vi har fremhevet tidligere, sammenheng og likhetstrekk med kjerneelementet argumentasjon og resonnering. Funn fra analysen viser at det er lærerveiledningen til Cappelen Damm som oppmuntrer oftest til bruk av kontekstuelle, visuelle og verbale representasjoner. Lærerveiledningen til Gyldendal viser oppmuntring til cirka tre ganger så mye bruk av konkreter som Cappelen Damm.

Kjerneelementet abstraksjon og generalisering har mange likhetstrekk med kjerneelementet utforsking og problemløsning. Funnene våre viser at Cappelen Damm har høyest frekvens på tankerekker. Barentsforlaget har høyeste frekvens på ordene generalisering, lov, regel, algoritme, strategier, mønster og sammenhenger. Gyldendals frekvens på kodeordene varierer mellom å ligge mellom Cappelen Damm og Barentsforlaget, og noen ganger lavest. Dette viser oss at alle tre lærerveiledningene hjelper læreren til å undervise etter kjerneelementet representasjon og kommunikasjon, men fordi Barentsforlaget har et høyere fokus på generalisering, og ikke minst har et mer matematisk riktig språk vil vi si at Barentsforlaget hjelper læreren i stor grad med å undervise etter kjerneelementet abstraksjon og generalisering. Cappelen Damm og Gyldendal hjelper læreren i noen grad å undervise etter kjerneelementet abstraksjon og generalisering.

Funnene fra den horisontale analysen viser at Cappelen Damm har mye bra og nyttig informasjon i lærerveiledningen, men dessverre ikke i direkte tilknyttet til oppgavene. Dette fører til at det blir opp til læreren å omsette teorien til praksis på egenhånd, hvis læreren finner tid til det. Dersom læreren sitter med kunnskapen på hvordan oversette teorien til praksis, ved at hen for eksempel er lærerspesialist i matematikk, er informasjonen god nok. Dessverre er de fleste lærere ikke lærerspesialister, og i en hektisk hverdag er det ikke sikkert læreren får tid til å selv lage undervisningsopplegg der læreren også blar seg fram og tilbake i Cappelen Damms lærerveiledning for å finne akkurat det rette å øve på der og da. Cappelen Damm hjelper læreren i noen grad med å undervise etter kjerneelementene.

Gyldendal gir uttrykk for at de er opptatt av dybdelæring og kjerneelementer, men plasseringen av oppgavene med mange like oppgaver etter hverandre, og rett etter et eksempels eller en forklaring på løsningsmetoden som elevene kan kopiere minner om instrumentell innlæring. Det er positivt at Gyldendal har omskrevet kjerneelementene til hvordan de skal bli brukt i lærerveiledningen og elevboka, men veiledningene til hver enkelt oppgave oppleves ikke som særlig støttende for læreren til å undervise etter kjerneelementene. Gyldendal hjelper læreren i noen grad med å undervise etter kjerneelementene.

Barenstforlaget nevner ikke begrepet kjerneelement noen ganger. Likevel er det de som har mest utfyllende og konkrete veiledning til læreren for hvordan undervise gjennom kjerneelementene. Utfordringen med Barentsforlaget kan være at siden hele 82 prosent av oppgavene er kognitivt krevende, kan det være at læreren og elevene ikke rekker å gjøre en rød og tre til fire blå oppgaver hver time, og dermed blir det liten tid til at elevene får tid til mengdetrening. Likevel vil vi si at Barentsforlaget hjelper læreren i høy grad med å undervise etter kjerneelementene i LK20.

Å undervise etter kjerneelementene er en krevende oppgave. Vi har selv tatt utdanningen lærerspesialist i matematikk rett etter innføring av LK20 og kjerneelementene. Kjerneelementene er utviklet og basert på nyere forskning. På vårt studie fikk vi kunnskap i å undervise etter kjerneelementene. Vi fikk øve på å planlegge, undervise og evaluere undervisning med «eksperthjelp» fra UiT og Matematikksenteret. Vi vet at det er utfordrende og derfor ønsker vi at lærerveiledninger kan bidra til å støtte lærerne så godt de kan i dette arbeidet.

6.2 Veien videre

Prosjektet utviklet seg til å bli meget omfattende da vi først måtte sette oss nøye inn i teorien kjerneelementene er bygget på, for så å finne kodeord vi kunne bruke for å lete etter kjerneelementene i lærerveiledningene. Deretter måtte vi sette dette sammen til et eget rammeverk basert på Charalambous et al. (2010), og Smith og Stein (1998) *task analysis guide*. Vi utviklet da vårt eget rammeverk for analyse av lærerveiledninger med tanke på kjerneelementene. I arbeidet med å finne kodeord til kjerneelementet utforsking og problemløsning ble det klart for oss at vi også måtte analysere oppgavene i elevbøkene med tanke på kognitive krav. Dette fordi vi mener at for å kunne undervise utforskende og problemløsende er elevenes læring avhengig av at oppgavene er kognitivt krevende. Da vi hadde utviklet rammeverket ferdig, analyserte vi først oppgavene i tre grunnbøker i utvalgte kapitler, før vi kodet lærerveiledningene. Gjennom dette arbeidet har vi virkelig fått gått inn i ulike lærerveiledninger og sett på detaljer om hvordan de hjelper lærerne å undervise etter kjerneelementene. Da vi begge er erfarne lærere har vi vært med på noen runder av vurdering av hvilke læreverk skolen «vår» skal kjøpe inn, når det har vært tid for å skifte ut de vi har hatt. Aldri har vi hatt kunnskapen, eller tiden som er nødvendig for å undersøke lærerveiledningene like nøye. Dette er kunnskaper vi kommer til å ta med oss videre inn i arbeidet når tiden kommer for at skolen vår skal ta en endelig avgjørelse på hvilke læreverk som eventuelt skal kjøpes inn.

Referanseliste

Alseth, B., Arnås, A., Røsseland, M. & Nordberg, G. (2021). *Multi 4A, Lærerens bok* (3. utg.) Gyldendal

Andersen, A. H. P., Fiskum, T. A., & Rosenlund, M. R. (2018). Hva menes med undrende, utforskende og aktiviserende undervisning? *Den engasjerte eleven: undrende, utforskende og aktiviserende undervisning i skolen*, 17-30.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). *Conceptualizing inquiry-based education in mathematics*. *ZDM*, *45*(6), 797-810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 27-44.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1996). Reform by the Book: What Is—or Might Be—the Role of Curriculum Materials in Teacher Learning and Instructional Reform? *Educational researcher*, 25(9), 6-14. https://doi.org/10.3102/0013189X025009006

Blank, N., Melhus, K. & Tveit, C. (2023). *Matematikk Grunnbok 4A*. (2. utg.) Barentsforlaget.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education: Intellectual and attitudinal challenges*,

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, *1*(1), 45-58.

Boaler, J., Munson, J., & Williams, C. (2017). What is mathematical beauty? *Teaching through big ideas and connections.* In.

Brekke, G., Grønmo, L. S. & Rosèn, B. (2000). Kartlegging av matematikkforståelse: *Veiledning til algebra*, F, H, og J. Nasjonalt Læremiddelsenter.

Buch, B., Gissel, S. T., Oksbjerg, M., Kjeldsen, K., & Albrechtsen, T. R. S. (2023). A systematic review of research on teachers' guides. *Learning Tech*(12), 12-40. https://doi.org/10.7146/lt.v7i12.132330

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Charalambous, C., Delaney, S Hsu, H. Mesa, V: (2010). *A comparative analysis of the addition and subtaction of fractions in textbooks from three countries, mathematical thinking and learning*, 12:2, 117-151, DOI: 10.1080/109860903460070

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (Eighth edition. ed.). Routledge.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(4), 375-402.

Dahl, H. H. & Nohr, M. (2022). *Matematikk 4A fra Cappelen Damm*, Lærerveiledning, Cappelen Damm.

Davis, E. A., & Krajcik, J. S. (2005). Designing Educative Curriculum Materials to Promote Teacher Learning. *Educational researcher*, *34*(3), 3-14. https://doi.org/10.3102/0013189X034003003

Devlin, K. (1996). Mathematics: *The science of patterns*: The search for order in life, mind and the universe. Macmillan.

Drageset, O. G. (2016). Korleis leie ein matematisk samtale. *Tangenten (trykt utg.)*, *25*(1).

Drake, C., Land, T. J., & Tyminski, A. M. (2014). Using Educative Curriculum Materials to Support the Development of Prospective Teachers' Knowledge. *Educational researcher*, 43(3), 154-162. https://doi.org/10.3102/0013189X14528039

Fan, L. (2013). *Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks*. ZDM, 45, 765-777.

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). *Textbook research in mathematics education: development status and directions*. ZDM, 45, 633-646.

Fauskanger, J., & Mosvold, R. (2014). Innholdsanalysens muligheter i utdanningsforskning. *Norsk pedagogisk tidsskrift*, *98*(2), 127-139.

Forskrift om godkjenning av lærebøker. (1999). *Forskrift for godkjenning av lærebøker for grunnskole og videregående skole. (LOV-FOR-1984-01-13-3520). Lovdata.* https://lovdata.no/dokument/SFO/forskrift/1984-01-13-3520/KAPITTEL_1#%C2%A71

Gleiss, M. S., & Sæther, E. (2021). *Forskningsmetode for lærerstudenter : å utvikle ny kunnskap i forskning og praksis* (1. utgave. ed.). Cappelen Damm akademisk.

Hagelia, M. (2021). Kjerneelementene – det virkelige nye i fagfornyelsen. *Bedre skole*, 2021 (2) publisitert på utdanningsforskning.no. Hentet (06.11.23) fra https://utdanningsforskning.no/artikler/2021/kjerneelementene--det-virkelig-nye-i-fagfornyelsen/

Hemmi, K., Krzywacki, H., & Liljekvist, Y. (2019). Challenging traditional classroom practices: Swedish teachers' interplay with Finnish curriculum materials. *Journal of curriculum studies*, 51(3), 342-361. https://doi.org/10.1080/00220272.2018.1479449

Hiebert, J. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. ERIC.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A., & Wearne, D. (1996). Problem Solving as a Basis for Reform in Curriculum and Instruction: The Case of Mathematics. *Educational researcher*, *25*(4), 12-21. https://doi.org/10.3102/0013189X025004012

Hsieh, H. F., & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative health research*, 15(9), 1277-1288.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational studies in mathematics*, *96*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Jensen, A.-M., & Wæge, K. (2010). *Undersøkende matematikkundervisning i videregående skole: kommunikasjon-motivasjon-forståelse*. Matematikksenteret.

Johansson, M. (2005). The mathematics Textbook: From Artefact to instrument. Nordic *Studies in Mathematics Education* No 3-4. https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/06/10_34_043064_johansson.pdf

Kazemi, E. & Hintz, A. (2019). *Målrettet samtale : hvordan strukturere og lede gode,* matematiske diskusjoner (1. utgave. ed.). Cappelen Damm akademisk.

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B., Mathematics Learning Study, C., National Research Council Center for Education, D. o. b., & social sciences, e. (2001). *Adding it up : helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Kunnskapsdepartementet. (2018). Meld. St. 132-18. *Fornyer innholdet i skolen.* Oslo. Kunnskapsdepartementet. Hentet fra: https://www.regjeringen.no/no/dokumentarkiv/regjeringen-solberg/aktuelt-regjeringen-solberg/kd/pressemeldinger/2018/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Kjerneelementer.* (MAT01-05). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nob

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.-10. matematikk.* (MAT01-05). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer

Lester, F. K. (2013). Thoughts About Research On Mathematical Problem- Solving Instruction. *The Mathematics Enthusiast*, *10* (1-2), 245-278. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1267

Li, X. Ding, M. C, M. M. & Capraro, R. M. (2008). Sources of Differences in Children's Understanding of Mathematical Equality: Comparative Analysis of Teacher Guides and Student Texts in China and the United States. *Cognition and instruction*, 26:2, 195-217. DOI: 10.1080/07370000801980845

Liljedahl, P. (2021). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12 : 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin.

Lithner, J. (2008). A Research Framework for Creative and Imitative Reasoning. *Educational studies in mathematics*, *67*(3), 255-276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics : teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2011). *Å lære algebraisk tenkning*. Caspar forl.

Melhus, K., Tveit, C. & Blank, N. (2023). *Matematikk Lærerveiledning 4A*. (2.utg.) Barentsforlaget.

Mullins, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. L. & Fishbein, B. (2019). *Highlights TIMMS 2019 International Results in Mathematics and Science*. IEA. TIMMS & PIRLS International Study Center. Lynch School of Education. Boston College. Hentet fra: https://timss2019.org/reports/

Niss, M., & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring : ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (Vol. nr 18 - 2002). Undervisningsministeriet.

Nosrati, M., & Wæge, K. (2015). *Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk*. Matematikksenteret. https://books.google.no/books?id=3PsQswEACAAJ

Remillard, J. T. (1999). Curriculum materials in mathematics education reform: A framework for examining teachers' curriculum development. *Curriculum Inquiry*, *29*(3), 315-342.

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of educational research*, *75*(2), 211-246.

Remillard, J., Van Steenbrugge, H., Bergqvist, t. (2014). A cross-cultural analysis of the voice of curriculum materials. In: Keith Jones and Christian Bokhove and Geoffrey Howson and Lianghou Fan (ed), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development* (ICMT-2014) (pp.395-400). Southampton: University of Southhampton

Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics teaching in the middle school*, *12*(2), 88-95. https://doi.org/10.5951/MTMS.12.2.0088

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 33*, 123-132.

Smith, M. S, and Stein M. K.: (1998). *Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. Mathematics Teaching in the Middle School 3* (February 1998): 344–50. http://mathedseminar.pbworks.com/w/file/fetch/92864991/Smith%20and%20Stein%20-%201998%20-%20Selecting%20and%20Creating%20Mathematical%20Tasks%20From%20Re.pdf

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2018). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions* (2nd ed.). National Council of Teachers of Mathematics.

Son, J.-W., & Diletti, J. (2017). What Can We Learn from Textbook Analysis? In (pp. 3-32). Cham: *Springer International Publishing*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-51187-0_1

Sriraman, B., & Umland, K. (2014). Argumentation in Mathematics Education. In (pp. 46-48). Dordrecht: *Springer* Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_11

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics teaching in the middle school*, *3*, 268-275.

Stein, S. K. & Smith, M. S.: (2011). Mathematical task as a framework for reflection: From research to practice, *Designing and enacting rich instructional experiences*

Stylianides, G. J. (2008). Investigating the guidance offered to teachers in curriculum materials: The case of proof in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *6*, 191-215.

Utdanningsdirektoratet. (2019b, 18. november). *Hva er kjerneelementer?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/

Utdanningsdirektoratet. (2021a, 24. juni). *Kunnskapsløftet 2020 – hvorfor har vi fått nye læreplaner?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/hvorfor-nye-lareplaner/

Utdanningsdirektoratet. (2021b, 22. september). *Slik ble læreplanene utviklet.* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/slik-ble-lareplanene-utviklet/

Utdanningsdirektoratet. (2023a, 10. mars). *Den internasjonale studien TIMMS* https://www.udir.no/tall-og-forskning/internasjonale-studier/timss/#a157828

Utdanningsdirektoratet. (2023b, 9. juni). *Kva er nytt i matematikk?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagspesifikk-stotte/nytt-i-fagene/hva-er-nytt-i-matematikk/

Valverde, G. A. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Springer Science & Business Media.

van Bommel, J., Liljekvist, Y., & Nylund, C. O. (2010). The KOM Project and Adding It Up–Through the Lens of a Learning Situation. *Mathematics and Mathematics Education: Cultural and Social Dimensions*, 281.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., Bay-Williams, J. M., Wray, J., & Brown, E. T. (2020). *Elementary and middle school mathematics : teaching developmentally* (Tenth edition.; Global edition. ed.). Pearson.

Wæge, K. (2019). *Samtaler i matematikk.* I E. Klaveness, L. Karlsen & K. Kverndokken (Red.), 101, 19-36.

Wæge, K., & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk*. Universitetsforl.