UiT Norges arktiske universitet

Fakultet for naturvitenskap og teknologi

Institutt for matematikk og statistikk

Strukturforståelse av abc-formelen

Designforskning av undervisningsopplegg med videregåendeelever i temaet løsning av andregradslikninger

Leni Anita Berg Nilsen

Masteroppgave i matematikkdidaktikk ved lektorutdanninga trinn 8-13, MAT-3907, august 2024

Forord

Et halvt tiår som lektorstudent er med dette omsider over. Studietiden har vært både krevende, lærerik, krevende, artig, krevende og givende. Jeg har flere jeg ønsker å takke for at det hele har kommet i mål.

Først ønsker jeg å rette en takk til mine to medstudenter, Heidi og Elida. Gruppepress om å møte på grupperom har bidratt til at innleveringer ble levert i tide, og felles forvirring har skapt lærerike og nyttige diskusjoner som ofte har endt i kunnskap.

Videre vil jeg takke min veileder Jan Nyquist Roksvold. Takk for mye god hjelp underveis i masterskrivingen og nyttige innspill. Og ikke minst takk for at du har delt ditt engasjerende syn på matematikken med meg.

Familien min har også fortjent en takk eller fire. Takk til mamma for søndagsmiddag flere ganger i uken ved behov, for motivasjon og for korrekturlesing. Takk til pappa for å dyrke lærerspiren og hverdagsmatematikk. Takk til storebror Rolf for at du har vært privat øvingslærer, tilgjengelig 24/7. Takk til lillebror Tor for gode, oppmuntrende klemmer.

Til slutt sender jeg også en takk til Leo, Lyra, Loffen, Mai-San og Bella, og ikke minst en takk til min kjæreste Marius, for en nødvendig og tilstrekkelig mengde distraksjon og avkobling.

Leni Anita Berg Nilsen
Tromsø, august 2024

Sammendrag

Denne kvalitative studien handler om å undersøke hvorvidt et undervisningsopplegg som vektlegger sammenhengen mellom geometri og algebra i løsning av andregradslikninger, bidrar til at elevene sitter igjen med strukturforståelse av løsningsmetoden, *abc-formelen.* Hensikten med oppgaven var å planlegge og gjennomføre et annerledes undervisningsdesign innenfor temaet *andregradslikninger* i en videregåendeklasse, der geometriske figurer ble brukt som hjelpemiddel i de algebraiske forklaringene av likningsløsning. Med dette formålet i fokus utformet jeg følgende problemstilling:

Hvordan kan en undervisning som har til mål å legge til rette for at elevene sitter igjen med strukturforståelse av abc-formelen, se ut?

Svaret på problemstillingen undersøkte jeg ved hjelp av designforskning. Over en periode på tre undervisningsøkter forsøkte jeg å trekke tydelige linjer mellom de geometriske forklaringene på løsningsmetodene elvene på videregående skole lærer for å løse andregradslikninger, *abc-formelen* og *fullstendig kvadraters metode.*

Ved hjelp av oppgavebesvarelser fra elevene underveis i undervisningen og fra en prøve noen uker etter undervisningen, har jeg gjort meg opp en mening angående hvorvidt undervisningen lyktes i å gi elevene strukturforståelse eller ikke.

Det viste seg at elevene i liten grad oppnådde denne typen forståelse etter de kriterier som var satt. Årsakene til dette var trolig flere, men de største hindrene på veien så ut til å være forkunnskapene til elevene, og de sosiomatematiske normene som allerede var etablert i klasserommet.

Innholdsfortegnelse

Liste over figurer

1 Innledning

I denne masteroppgaven vil jeg undersøke sammenhengen mellom et endret undervisningsfokus og forståelsen i ettertid hos en videregåendeklasse innen temaet *andregradslikninger*. Jeg vil i dette kapitlet starte med å legge frem bakgrunn og motivasjon for studien, før jeg videre presenterer problemstillingen jeg skal undersøke. Til slutt i kapitlet vil jeg kort forklare viktige begreper fra problemstillingen, i tillegg til å presentere oppgavens oppbygning og struktur.

1.1 Bakgrunn og motivasjon

Den internasjonale studien TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) måler kompetansen til elever i flere fag, herunder matematikk (Tønnesen, 2016). Denne studien har over tid vist at norske elever er av de som skårer dårligst innen emnet algebra sammenlignet med elever i andre land (Olsen & Björnsson, 2019, s. 37). Tønnesen (2016) skriver at disse svake algebrakunnskapene har flere årsaker, blant annet at emnet vektlegges for lite, og introduseres for sent i den norske skolen. Samtidig avdekker undersøkelsen at norske lærere er for dårlige til å trekke sammenhenger og oppsummere undervisningen slik at elevene får et helhetlig bilde av matematikken (Tønnesen, 2016).

For noen år siden ble læreplanene fornyet, og med denne endringen har forventningene til hva elevene skal lære også endret seg. I de nye læreplanene trekkes begrepet dybdelæring frem, og fokuset er endret til at man skal gå mer i dybden på færre konsepter, enn å kun å være borti overflaten på mange (Udir, 2021). Sett sammen med resultatene fra TIMSS-undersøkelsen de siste årene, ser jeg derfor på det som svært relevant å forsøke å finne en undervisningsmetode i algebra der elevene får muligheten til å se sammenhengene mellom regler og formler, og at de kan tilegne seg en forståelse der konseptene gir mening.

Matematikk slik den ofte presenteres i læreverk, er delt inn i kapitler etter tema, som «statistikk», «algebra» og «geometri». Sammenhengene og fellestrekkene på tvers av temaene kommer ikke nødvendigvis veldig godt frem. Selv har jeg først i etterkant av skoleårene mine blitt bevisst på de interessante sammenhengene mellom blant annet geometri og algebra, og finner mye hjelp i det å kunne visualisere algebraen. Sammen med læreplanmålene og resultatene fra TIMSS-undersøkelsen, tenker jeg også at det vil være relevant å trekke inn som fokusområde i en undervisningssituasjon, som hjelpemiddel for elevene.

I løpet av studietiden er matematisk forståelse, og de ulike typene forståelse, begreper som har fanget min oppmerksomhet. Det har fått meg til å reflektere ekstra over både egen skolegang og undervisningsopplegg i praksisperiodene. Jeg har funnet ut at selv satt jeg i stor grad igjen med en regelbasert forståelse i matematikk etter 13 års skolegang. Pugge, huske og reprodusere formler og fremgangsmåter var min foretrukne arbeidsmetode i faget, særlig innenfor likningsløsning og algebra. Når matematikkunnskapene mine etter hver har blitt utvidet gjennom studiet ser jeg imidlertid nå stor verdi i det å kunne se sammenhengene mellom de matematiske konseptene. Dette har for min del bidratt til en helt annen type mestring, begeistring og glede i faget. Å se matematikken slik jeg ser den nå ville jeg ikke vært foruten, og håper at når jeg går inn i læreryrket vil jeg få mulighet til å legge til rette for at mine elever skal kunne oppleve en lignende mestring og glede i matematikkfaget. Derfor synes jeg et prosjekt knyttet opp mot akkurat disse temaene er ekstra interessant.

Forståelse og algebra i matematikkfaget er slik både dagsaktuelt og noe som engasjerer meg personlig. Dette har bidratt til at jeg ønsket å utforske nettopp matematisk forståelse hos elevene. Sammen danner det min motivasjon for denne masteroppgaven.

1.2 Problemstilling[1]

Med en hovedidé om å undersøke algebra knyttet opp mot økt forståelse, valgte jeg å se på en del av skolematematikken som jeg husker som mest regelbasert, nemlig løsning av andregradslikninger. Dette ønsker jeg å undersøke ved hjelp av designforskning. Bakker (2019) skriver at designforskning er en forskningsmetode som fokuserer på hvordan noe *kan være,* fremfor å undersøke hvordan noe *er*. Med utgangspunkt i dette har jeg formulert følgende problemstilling; **Hvordan kan en undervisning som har til mål å legge til rette for at elevene sitter igjen med strukturforståelse av abc-formelen, se ut?**

For å kunne svare på denne problemstillingen er det flere aspekter som må konkretiseres og operasjonaliseres. Det vil være essensielt å svare på hva det innebærer å ha strukturforståelse av abc-formelen og hvordan man kan avdekke om en elev har slik strukturforståelse. Dette vil jeg forsøke å avklare i teoridelen og analysen i oppgaven. Jeg vil benytte meg av teori for å legge opp en undervisning som har til hensikt å gi elevene strukturforståelse, før jeg til slutt vil

[1] Deler av teksten i dette kapitlet er identisk med tekst fra eksamen i emnet PFF-3101

evaluere hvorvidt undervisningen endte med at elevene tilegnet seg strukturforståelse gjennom opplegget.

1.3 Begrepsavklaring

Strukturforståelse defineres i korte trekk som det å ha kunnskap til å vite ikke bare hvordan, men også hvorfor man kan bruke regler og anvende prinsipper i matematikken (Mellin-Olsen & Hoel, 1984, s. 32). I annen, både norsk og internasjonal litteratur brukes også begrepet relasjonell forståelse synonymt (Mellin-Olsen & Hoel, 1984, s. 30-32). Dette begrepet skal jeg gå videre inn på i teoridelen.

Andregradsformelen, eller abc-formelen, er den løsningsformelen som i stor grad brukes til å løse andregradslikninger på videregåendenivå. I denne oppgaven har jeg valgt å benytte meg av begrepet abc-formelen. Formelen tar utgangspunkt i en andregradslikning på formen;

$$ax^2 + bx + c = 0$$

og forteller oss at løsningen på likningen er gitt ved;

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.4 Oppgavens oppbygning

Jeg vil starte denne oppgaven med å presentere teorigrunnlaget. Her vil jeg først ta for meg læreplanen og det matematiske grunnlaget som er viktig i den aktuelle undervisningen. Deretter vil jeg legge frem didaktiske og pedagogiske teorier som er bakgrunn for undervisningsplanen, i tillegg til at de vil være med på å besvare problemstillingen gjennom drøfting av resulter. Jeg vil så presentere metodene som er brukt i datainnsamlingen og analysen, og gå i detalj på undervisningsopplegget jeg har gjennomført. Videre skal vi se på forskningsetikken bak de gjennomførte aktivitetene. Etter at teori og metode er lagt frem, vil jeg presentere funnene jeg fikk fra undervisningen, etterfulgt av analyse og drøfting. Avslutningsvis vil jeg forsøke å sammenfatte teori, funn, analyse og drøfting til svar på problemstillingen. Dette knyttes til tidligere forskning, med diskusjon om erfaring fra undervisningsopplegget som ble prøvd ut i arbeidet.

2 Teori

I dette kapitlet vil jeg legge frem teori som ligger til grunn for å kunne besvare problemstillingen, herunder både undervisningsoppleggets forankring i læreplanen og matematisk og didaktisk teori. Sammen med resultatene fra undervisningsøktene og datainnsamlingen vil dette til slutt forme svar også på selve problemstillingen. Jeg vil starte med å legge frem matematikken som undervisningsøktene denne oppgaven tar utgangspunkt i, deriblant andregradslikninger og hvordan de løses på videregåendenivå. Deretter vil jeg kort se på forankringen for undervisningsopplegget i læreplanen, før jeg går inn på hvordan to læreverk presenterer det relevante fagstoffet. Videre vil jeg forsøke å definere forståelsesbegrepet, og se på didaktisk og pedagogisk teori som var relevant i planleggingen av undervisningsopplegget, særlig knyttet til undervisning av bevis, undersøkende undervisning og undervisning som lar elevene selv komme frem til matematikken. Jeg legger så frem teorier som er vesentlige for å til slutt kunne svare på problemstillingen min. Her vil jeg både trekke inn teori om visuelle bevis, og introdusere begrepene *kunnskapspakker* og *sosiomatematisk norm*.

2.1 Andregradslikninger

I matematikken første året på videregående går likninger fra å være kun lineære, til at elevene nå også skal løse og forstå likninger med andregradsledd. I denne delen vil jeg kort gå gjennom andregradslikninger, hva det er, hvorfor det er relevant som videregåendepensum, og løsningsmetodene som oftest brukes i den videregående skolen i dag. Løsningsmetodene som presenteres er også de samme som ble brukt i undervisningstimene.

Det første vi må definere er hva en andregradslikning er, og da må vi starte med forklaringen på hva et polynom er. Et polynom er definert på formen

$$a_n x^n + a_{n-1} x n - 1 + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

der $n \in$ N og $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in R$ (Irving, 2013, s. 2).

For et polynom med $n = 2$ bruker vi som regel navnet *andregradspolynom.* Dersom dette polynomet inngår i en likning, har vi en andregradslikning,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Likninger på denne formen møter elevene for første gang i løpet av videregående, og de brukes i både matematikkfagene og de øvrige realfagene. Det å kunne løse denne type likning er derfor en viktig del av pensum, og det har vært en viktig del av matematikken i lang, lang tid.

For over 3000 år siden kom Babylonerne med matematiske oppdagelser som vi i stor grad fortsatt bruker i dag. De skrev matematikken ned på leirtavler, og dette bidraget er noe av den eldste bevarte matematiske teksten som finnes (Irving, 2013, s. 34). Mange av problemene de løste kan reduseres til andregradslikninger, og dette la et grunnlag for metoder vi benytter oss av i dag. I skriftene på tavlene fra denne tiden finner vi nemlig igjen en løsningsmetode som ligner veldig på det vi i dag kjenner som abc-formelen. Formuleringene på tavlene forklarte at dersom vi har en likning på formen $x^2 + bx + c = 0$ legges det frem at vi finner løsningen, x, ved å dele b på 2, for så videre opphøye det i andre. Dette legges sammen med $-c$, før man til slutt tar kvadratroten av det hele, og trekker fra $\frac{b}{2}$ til slutt. Dette kan oppsummeres til

$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

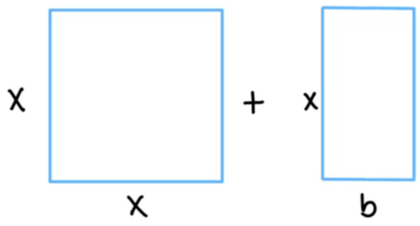
(Irving, 2013, s. 34-36). Dette ligger tett opp mot løsningsmetoden, abc-formelen, som vi skal komme tilbake til senere i kapitlet.

Andregradslikninger og løsning av disse har altså lenge vært et sentralt matematisk problem, og det er fortsatt relevant i dag. Mange praktiske situasjoner fra dagliglivet kan tilnærmes med andregradsfunksjoner, og ikke minst møter elevene på de med jevne mellomrom i sine videre matematiske- og eventuelt realfaglige liv.

2.1.1 Fullstendig kvadraters metode

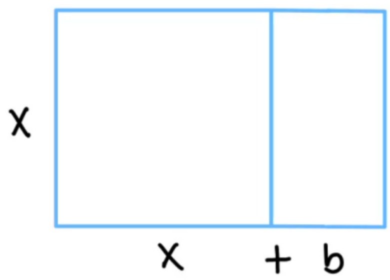
En måte å løse andregradslikninger på, er ved å lage et fullstendig kvadrat. Dette er ofte en av løsningsmetodene av andregradslikninger elevene lærer på videregående.

Fullstendig kvadraters metode er en geometrisk fremgangsmåte for å skrive om et uttrykk på formen $x^2 + bx$. Dette kan fremstilles geometrisk som summen av et kvadrat med areal x^2 og et rektangel med areal bx, som vist under:



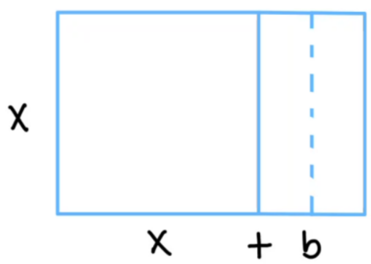
Figur 1: Fullstendig kvadrat – start

Dersom vi legger sammen de to figurene kan vi få ett rektangel med sidelengder x og $x + b$. Arealet av den sammensatte figuren vil da være $x \cdot (x + b)$.



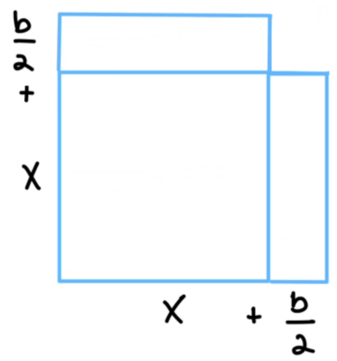
Figur 2: Fullstendig kvadrat – faktorisert

Metoden går videre ut på å omforme dette rektanglet til et kvadrat så langt det lar seg gjøre. Det gjør man ved å dele rektanglet med areal bx i to som figuren under viser;



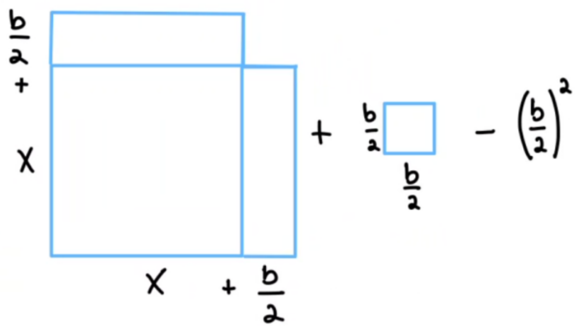
Figur 3: Fullstendig kvadrat – halvere-steg

For så å flytte halvparten av rektangelet til oversiden av kvadratet.



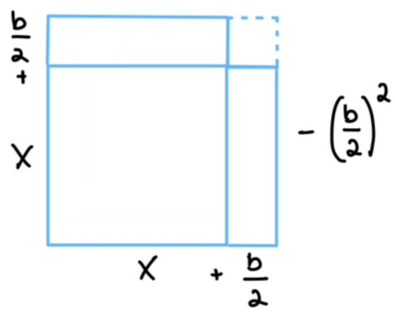
Figur 4: Fullstendig kvadrat – halvere og flytte

Fra Figur 4 ser man da at det eneste som mangler for å lage et kvadrat er å legge til det lille kvadratet oppe i høyre hjørne. Sidelengdene til kvadratet som mangler er $\frac{b}{2}$, så arealet vi ønsker å legge til for å lage et kvadrat er $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. For å ikke endre på uttrykket trekker man fra det samme arealet.



Figur 5: Fullstendig kvadrat – kvadrere og addere

Da ender vi til slutt opp med et uttrykk på formen $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$ som vist under, i Figur 6.



Figur 6: Fullstendig kvadrat – ferdig

Årsaken til at dette er gunstig og relevant når det er snakk om løsning av andregradslikninger kan forklares geometrisk gjennom egenskapene til rektangler og kvadrater. Dersom vi har en likning på formen $x^2 + bx = c$ har vi et rektangel på venstre side, slik som i Figur 2. På høyre side av likhetstegnet kan vi se for oss at tallet c, representerer et mål på arealet til figuren på venstre side. Den ene sidelengden til rektanglet er x, som vi ønsker å finne, men så lenge figuren er et rektangel finnes det mange ulike sidelengder som gir samme areal. *Får vi derimot omformet uttrykket til et kvadrat, vet vi at det kun vil være én bestemt sidelengde som vil kunne tilsvare et bestemt areal på høyresiden av likhetstegnet*. Dette er hele grunnidéen bak hvorfor vi ønsker å omforme rektanglet til et kvadrat i utgangspunktet.

Denne grunnideen legges sjelden frem. Metoden med fullstendig kvadrat er mye brukt, men forklaringen på hvorfor vi vil ha noe på kvadratform, blir sjelden gått i dybden på, til tross for at den matematisk sett er veldig enkel. I min undervisning vil jeg derfor rette mye fokus mot denne bakgrunnsideen, og prøve å vise elevene at matematikken ikke er tilfeldig, men har et logisk opphav.

2.1.2 Abc-formelen

Abc-formelen den løsningsmetoden som oftest benyttes i undervisningen når andregradslikninger skal løses for hånd (Matematikk.org, u.å). Tekstene fra tavlene til Babylonerne som fremstiller en generell løsning på andregradslikninger, baserer seg på ideen om fullstendig kvadrat. Utledningen som læreverkene fokuserer på tar utgangspunkt i akkurat de samme konseptene når de introduserer abc-formelen. I dette delkapitlet vil jeg kort gå gjennom hvordan man utleder formelen steg for steg. Det er også disse stegene elevene vil møte i undervisningen i mitt forsøksopplegg, men da med hovedvekt på geometrien fremfor algebraen.

For å utlede denne formelen så starter man med en generell andregradslikning på formen $ax^2 + bx + c = 0$ der a, b, c er konstanter, og forutsatt at $a \neq 0$, for at det skal være nettopp en annengradslikning. I første steg kan vi derfor dele på a for å få annengradsleddet uten koeffisient.

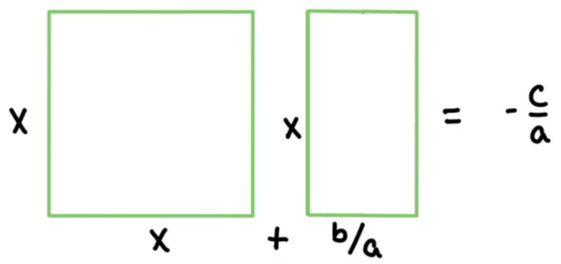
$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

En trekker så fra leddet som ikke involverer x på begge sider av likningen.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Hvis vi nå ser kun på venstre side av likningen , har vi en tilsvarende situasjon som i Figur 1, men med litt andre sidelengder.

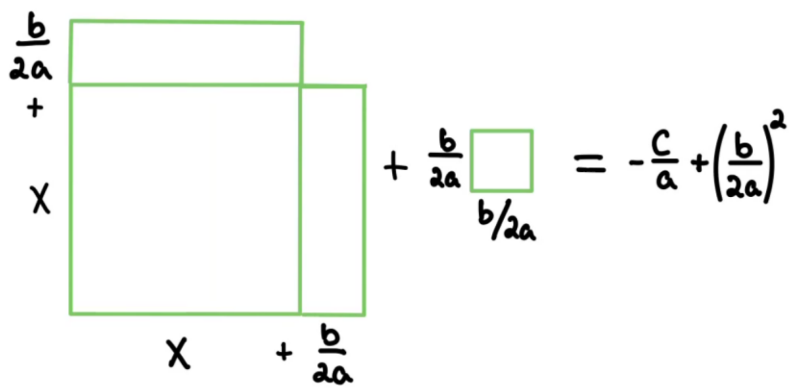


Figur 7: Utlede abc-formelen – start på rektangelform

Neste steg i utledningen er å lage fullstendig kvadrat på venstresiden av likhetstegnet. Når vi da skal dele rektanglet i to og legger den ene delen over kvadratet, ser vi at vi mangler et lite kvadrat i høyre hjørne med areal $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Derfor legges det til på begge sider.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Dette kan vi geometrisk se på slik:



Figur 8: Utlede abc-formelen – metoden med fullstendig kvadrat

Da har vi et fullstendig kvadrat på venstresiden av likningen, med sidelengder $x + \frac{b}{2a}$, og kan gjøre uttrykket for arealet om til $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Da får vi følgende likning;

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Herfra tar vi kvadratroten på begge sidene av likhetstegnet for å finne et uttrykk for sidelengden til kvadratet, og bruker det videre for å finne et uttrykk for x;

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}}$$

Deretter forenkler vi uttrykket under kvadratroten ved å sette de to leddene på felles nevner.

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{-4ac+b^2}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Videre trekker vi fra $\frac{b}{2a}$ på begge sider for å finne et uttrykk for x alene;

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Denne utledningen baserer seg altså på stegene i løsningsmetoden vist i delkapitlet over, Fullstendig kvadraters metode.

2.2 Læreplan 1T

For å undersøke problemstillingen min har jeg gjennomført et undervisningsopplegg i en klasse med videregåendeelever på første trinn. Elevene tok faget *teoretisk matematikk, 1T*. Læreplanen og kompetansemålene for et fag legger gitte føringer for det overordnede, faglige innholdet et skoleår skal dekke. Derfor var det viktig å ha oversikt over de aktuelle kompetansemålene fra læreplanen i dette faget, og legge disse til grunn i planleggingen av undervisningstimene.

Planen for undervisningen vil jeg gå nærmere inn på senere, men i korte trekk var hensikten med undervisningen å arbeide mot en geometrisk forståelse av de løsningsmetodene for andregradslikninger som elevene vanligvis får presentert. I læreplanen for 1T-matematikk finner vi et kompetansemål nært knyttet til dette, formulert ved at etter undervisningen skal elevene kunne

> «**utforske strategier** [min utheving] for å løse ligninger, ligningssystemer og ulikheter og argumentere for tenkemåtene sine»
>
> (Kunnskapsdepartementet, 2019)

Å legge opp undervisning for å jobbe med ulike strategier for å løse andregradslikninger vil altså ha godt hold i læreplanen. Videre vil en del av undervisningen involvere å arbeide med utledningen og beviset for abc-formelen, for å nettopp ikke bare få presentert, men også utforsket løsningsstrategien og se hvorfor den fungerer. Her er det også relevant å trekke inn et annet kompetansemål fra faget, hvor det står at elevene skal kunne

> «lese og **forstå matematiske bevis og utforske og utvikle bevis** [min utheving] i relevante matematiske emner» (Kunnskapsdepartementet, 2019)

Kompetansemålet over vil være relevant innenfor flere av emnene i løpet av faget. Det er et av de mer generelle kompetansemålene, men som er viktig å trekke inn i undervisningen der det passer for å tilrettelegge for at elevene tilegner seg den kompetansen de skal. Kompetansemålene over var de to jeg anså som mest relevante i planleggingen av mitt undervisningsopplegg av andregradslikninger.

Videre i den generelle delen av læreplanen for faget står det at 1T-matematikken er et fag der elevene skal «tilegne seg verktøy for å kunne forstå matematiske sammenhenger» og «forberede elevene på en utdanning og et arbeidsliv som stiller krav om matematisk forståelse, gjennom teoretisk bruk av matematikk» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det kommer altså tydelig frem ved flere anledninger i læreplanen, at forståelse er viktig i faget. Likevel legges det ikke frem noen videre utdypning på hva som menes med begrepet forståelse. Derfor vil jeg senere i teoridelen definere begrepet forståelse, og hvilke to ulike typer matematisk forståelse vi kan finne igjen hos elevene, da dette er relevant i tolkningen og bruken av læreplanmålene.

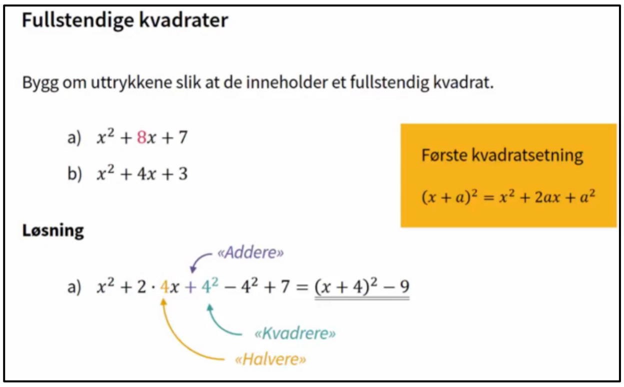
2.3 Andregradslikninger i læreverk

Med læreplanen som utgangspunkt utformes det ulike læreverk som skolene benytter seg av i undervisningen. I klassen der jeg gjennomførte mitt undervisningsopplegg brukte de en kombinasjon av en digital læringsplattform med videoer og oppgaver, i tillegg til en bok med teori og oppgaver. I dette delkapitlet vil jeg derfor kort legge frem hvordan løsning av andregradslikninger legges frem i de to ulike, aktuelle læreverkene.

2.3.1 Campus Inkrement

Den ene læringsplattformen klassen var vant med å bruke var Campus Inkrement. Det er Norges største plattform for omvendt undervisning, som går ut på at elevene ser videoer der fagstoffet presenteres i forkant av timene, også diskuteres fagstoffet i timene (Campus Inkrement, (u.å.)).

Det var tre videoer som omhandlet de samme temaene som de aktuelle undervisningstimene gjorde, *Fullstendige kvadrater* (Thue, (u.å.)-a), *Metoden med fullstendige kvadrater* (Thue, (u.å.)-b) og *Andregradsformelen* (Thue, (u.å.)-c). I løpet av disse videoene gjennomgås fremgangsmåtene for å lage fullstendig kvadrat, løse likninger med fullstendig kvadrat og til slutt introduseres og utledes abc-formelen. Tilnærmingen til fagstoffet er i all hovedsak algebraisk, og metodene gjennomgås uten forankring i de geometriske figurene algebraen stammer fra. I Figur 9 nedenfor er et utklipp fra videoen om fullstendige kvadrater (Thue, (u.å.)-a). Her legges det frem at for å lage et fullstendig kvadrat må vi se på b-leddet og «halvere – kvadrere – addere». Dette er det samme som vi gjør i Figur 3, Figur 4 og Figur 5, men uten den visuelle fremstillingen.



Figur 9: Læreverkfremstilling – fullstendig kvadrat fra Campus Inkrement (Thue, (u.å.)-a)

Videre i videoene fra Campus Inkrement vises det en gjennomgang av hvordan man løser likninger med å lage fullstendig kvadrat, før abc-formelen utledes og presenteres til slutt. I denne videoen gjennomgår Thue ((u.å.)-c) hvordan man utleder abc-formelen algebraisk, fortsatt uten å knytte det til geometrien bak. Etter å ha gjennomført utlendingen av abc-formelen (eller andregradsformelen som han kaller den i videoen), så sier Thue ((u.å.)-c) følgende;

> «…Hvis du nå ikke skjønte noen verdens ting av det her, så skal du ikke fortvile. Dette her er veldig vanskelig, og **du kommer aldri til å bli spurt i det her**. **Ingen kommer til å forlange at du skal kunne klare å gjøre denne utledningen** jeg gjorde nå, men det er en ting du skal kunne, og det er den nederste linja. Den nederste linja kaller vi for

andregradsformelen. Den **må du pugge, du må kunne den utenat** når som helst, midt på natta i drømmene dine så kommer jeg til å komme og forlange at du skal kunne si andregradsformelen og da skal du si; $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Det skal du kunne når som helst og ikke minst på eksamen og på heldagsprøver. Og du må kunne bruke den. Så start nå med å pugge den, slik at du kan den utenat…» [mine uthevninger]

(Thue, (u.å.)-c)

Her sies det altså at utledningen er irrelevant, og at det viktigste å sitte igjen med etter å ha sett denne videoen er å huske formelen.

2.3.2 Aschehoug 1T

I tillegg til videoene på Campus Inkrement nevnt ovenfor, jobbet elevene i klassen jeg underviste, med fagstoff og oppgaver fra læreboken i 1T-matematikk fra forlaget Aschehoug (Borge et al., 2020).

I gjennomgangen av det aktuelle fagstoffet i denne boka er fremstillingen i hovedsak også kun geometrisk, både når det kommer til å løse andregradslikninger, men også metoden med fullstendig kvadrat. Figur 10 viser et utklipp av «regelen» for hvordan man lager fullstendig kvadrat, presentert i boka til elevene (Borge et al., 2020, s. 69).

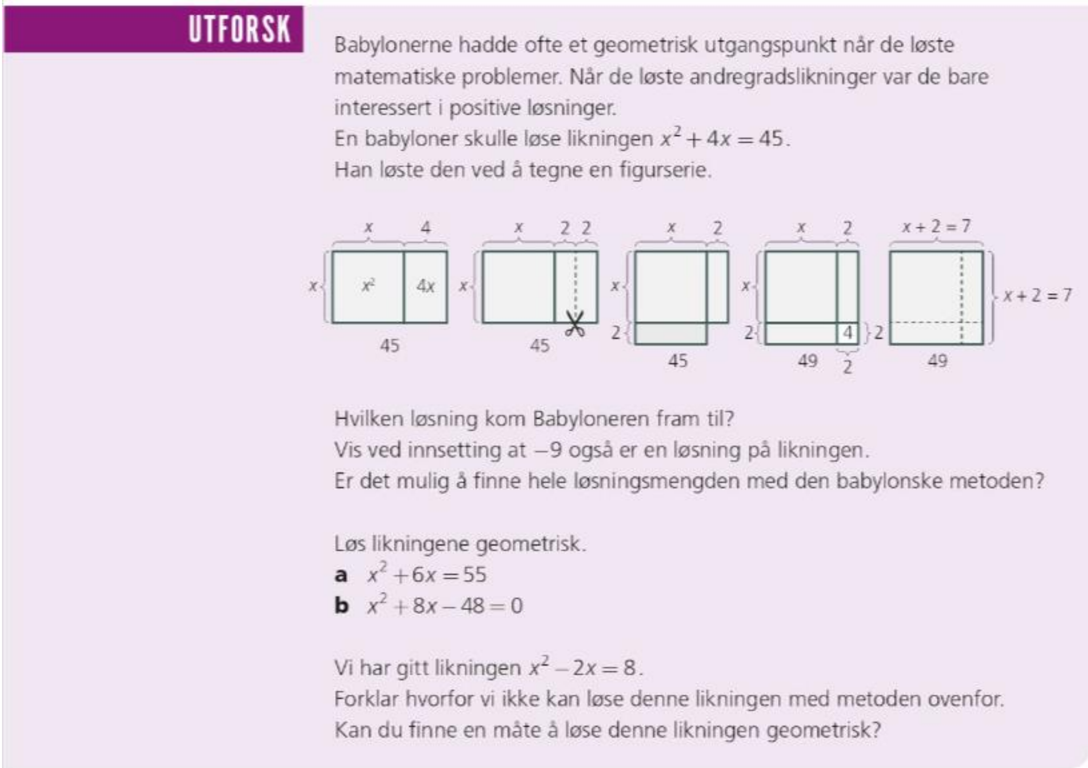
Fullstendig kvadrat-metoden

Vi kan skrive om uttrykket $x^2 + bx$ til et uttrykk som inneholder et fullstendig kvadrat ved å legge til $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, og deretter trekke fra $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

$$x^2 + bx = \underbrace{x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2}_{\text{Fullstendig kvadrat}} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Figur 10: Læreverkfremstilling – fullstendig kvadrat fra Aschehoug (Borge et al., 2020, s. 69)

Senere etableres andregradslikninger som noe vi kan løse ved hjelp av kvadratrøtter, men uten å knytte det opp mot kvadratet som geometrisk figur. I en «utforsk-oppgave» vises metoden med fullstendig kvadrat, og hvordan Babylonerne løste likninger ved hjelp av denne (Borge et al., 2020, s. 115), men disse oppgavene vektlegges ofte i varierende grad i undervisningen.



UTFORSK

Babylonerne hadde ofte et geometrisk utgangspunkt når de løste matematiske problemer. Når de løste andregradslikninger var de bare interessert i positive løsninger.
En babyloner skulle løse likningen $x^2 + 4x = 45$.
Han løste den ved å tegne en figurserie.

Hvilken løsning kom Babyloneren fram til?
Vis ved innsetting at -9 også er en løsning på likningen.
Er det mulig å finne hele løsningsmengden med den babylonske metoden?

Løs likningene geometrisk.
a $x^2 + 6x = 55$
b $x^2 + 8x - 48 = 0$

Vi har gitt likningen $x^2 - 2x = 8$.
Forklar hvorfor vi ikke kan løse denne likningen med metoden ovenfor.
Kan du finne en måte å løse denne likningen geometrisk?

Figur 11: Læreverkfremstilling – geometrisk sammenheng fra Aschehoug sin lærebok (Borge et al., 2020, s. 115)

I figuren over er et utklipp fra den aktuelle siden, som gir et bilde på hvor stor plass geometrien får i denne læreboka når det kommer til løsning av andregradslikninger.

2.4 Forståelse[2]

For å kunne prøve å finne et svar på problemstillingen; Hvordan kan en undervisning, der målet er å legge til rette for at elevene sitter igjen med strukturforståelse av abc-formelen, se ut?, vil det være sentralt å definere hva som menes med forståelse, da spesifikt strukturforståelse. Herunder må vi avgjøre hva som skiller denne typen forståelse fra annen forståelse. Jeg har valgt å ta utgangspunkt i Mellin-Olsen (1981, s. 351-352) sin oppdeling av begrepet, nemlig ved å skille mellom instrumentell og relasjonell forståelse. Disse begrepene er mye brukt i internasjonal forskning, men i min oppgave har jeg valgt å bruke den norske versjonen han kom med av begrepene, nemlig regelforståelse og strukturforståelse (Mellin-Olsen & Hoel, 1984, s. 30-32). Årsaken til at jeg har valgt de norske begrepene er at de er veldig beskrivende for nettopp det jeg skal se på, hvorvidt elevene forstår regelen, eller strukturene som bygger den opp.

[2] Deler av teksten i dette kapitlet er identisk med tekst fra eksamen i emnet PFF-3101

Regelforståelse blir beskrevet som kunnskap om hvordan matematikken anvendes i praksis, og regler og prinsipper som gjenskapes for å komme til svaret. På den andre siden vil strukturforståelse gå ut på at man har kunnskap om hvorfor nettopp den aktuelle regelen kan benyttes, og opphavet den har (Mellin-Olsen & Hoel, 1984, s. 32). Skemp (2006, s. 2) skriver også videre om dette. Han mener at regelforståelse egentlig ikke kan kalles forståelse, da det bare handler om å reprodusere en oppskrift, uten å knytte det til forklaringen av hvorfor oppskriften er som den er og hvorfor den virker. En elev med strukturforståelse kan derimot på papiret gjøre akkurat den samme utregningen, men vite hvorfor nettopp dette vil være måten å gjøre det på også (Skemp, 2006, s. 2). Hovedskillet mellom de to typene forståelse går altså på hvorvidt man kan forklare hvorfor matematikken er slik den er. Ved strukturforståelse er man bedre rustet til å kunne anvende kjent kunnskap i nye situasjoner, og en kjenner de matematiske sammenhengene som gjør at man har kunnskap om både hva, hvordan og hvorfor – man har et matematisk overblikk.

Når det kommer til å løse andregradslikninger er dette viktig. Som nevnt vil jeg se på den strukturelle forståelsen hos elever som introduseres for andregradslikninger for første gang i sitt matematiske liv. Dette vil dermed legge grunnlaget for mye av matematikken de senere vil være avhengige av å kunne anvende. Andregradslikninger er sentralt både i senere matematikkfag, men også i de andre realfagene. Derfor vil det å tilegne seg forståelse av hvorfor vil løser likningene som vi gjør, kunne bidra til at veien videre også blir mer forståelig. Det å ha strukturforståelse av abc-formelen kan slik innebære at man ikke bare vet hvordan man bruker den til å løse andregradslikninger, men at man også forstår hvorfor den gir oss svarene. Dersom strukturforståelsen er på plass er man ifølge Mellin-Olsen (1981, s. 351-352) bedre rustet i møte med oppgaver som skiller seg fra den eksakte oppskriften man har sett før, og dette vil være en viktig matematisk egenskap å ha.

2.5 Bevis[3]

Planen for undervisningsopplegget jeg vil gjennomføre er at elevene skal utnytte sine geometrikunnskaper for å forstå både hvordan man løser andregradslikninger ved å lage fullstendig kvadrat, men også etter hvert hvordan abc-formelen bevises og utledes. Som presentert over, så bygger beviset av formelen på metoden med å lage fullstendig kvadrat. Dette

[3] Deler av teksten i dette kapitlet er identisk med tekst fra eksamen i emnet PFF-3101

ble gjort algebraisk i læreverkene nevnt ovenfor, men fokuset i undervisningstimene i dette masterprosjektet vil være at man også kan gjøre det visuelt ved å se på geometrien.

Visuelle bevis har lenge vært en del av matematikken. Grabiner (2012) gjennomgår bevisets historie fra visuelle til mer algebraiske bevis, og trekker frem hvordan bevisene opprinnelig startet som et svar på spørsmålet "vis meg". Hun skriver at bevis generelt bidrar til å forklare, overbevise, systematisere og gi mening til matematikken (Grabiner, 2012, s. 164). Videre trekkes det frem at bevis som er visuelle, psykologisk sett, er mer overbevisende enn andre typer bevis. En visuell fremstilling av matematikken bidrar ofte til forståelse, fordi man *ser* hvordan konseptene henger sammen på en mer konkret måte enn ved logistiske, algebraiske bevis (Grabiner, 2012, s. 153-154).

Det å inkludere en visuell fremstilling av metoden med fullstendig kvadrat for å løse likninger, i tillegg til å anvende den visuelle geometrien når man ser på utledningen og beviset av abc-formelen, vil kunne bidra til at elevene tilegner seg kunnskap om opphavet til formelen. Dersom de gjør det vil de i større grad kunne se sammenhengen mellom algebraen og geometrien, og også veien fra andregradslikning til abc-formelen. Dette vil være viktig på veien mot strukturforståelse.

2.6 Oppdage og anvende matematikken[4]

I planleggingen av mitt undervisningsopplegg har jeg valgt å benytte meg av flere matematikkdidaktiske teorier, blant annet det Freudenthal (1973) nevner om verdien av at elevene selv oppdager matematikken. Freudenthal (1973, s. 140-143) skriver om viktigheten av å la elevene trekke de matematiske sammenhengene og oppdage matematiske konsepter på egenhånd. Han trekker frem at prosedyrer, regler og strategier er viktige i faget, men at de ikke burde introduseres for tidlig. Meningen er at elevene skal være i stand til å se og forstå veien frem til disse reglene eller strategiene, for da vil det være mulig for dem å konstruere konseptene på egenhånd. Det vektlegges altså en undervisning der det er rom for at elevene aktivt undersøker og utforsker matematiske konsepter, fremfor en mer passiv tilnærming hvor regler presenteres og pugges. I undervisning av løsningsmetoder for andregradslikninger vil derfor et

[4] Deler av teksten i dette kapitlet er identisk med tekst fra eksamen i emnet PFF-3101

opplegg som legger til rette for at elevene selv utforsker veien til en generell løsning være gunstig ifølge prinsippene til Freudenthal (1973, s. 140-143).

Et av de viktigste aspektene ved matematikken er dens anvendelse. Matematikken i seg selv er ingenting uten koblingene til den virkelige verden, og verden gir heller ikke mening uten koblingene til matematikken. Deler av forståelsen i matematikk ligger altså i det å se hvor det kan brukes (Freudenthal, 1973, s. 132-134). Når det kommer til andregradslikninger for videregåendeelever, handler dette mye om å se hvor mye i dagliglivet som kan representeres som andregradslikninger. Bevegelser i parabelform, og store deler av fysikkundervisningen vil kreve at en kunnskapspakke inneholder temaet andregradslikninger, og hvordan en kan løse disse. Det å knytte fagstoffet opp mot en relevans i elevenes liv vil også gjøre den mer meningsfull og i større grad kunne skape motivasjon hos elevene for å faktisk ville forstå fremfor å reprodusere.

Matematikkundervisning som følger prinsippene til Freudenthal (1973) lar elevene selv konstruere sin nye kunnskap, ved å benytte seg av den kunnskapen de allerede har. Det vil være vanskelig å lære matematikken alene, uten å se den i sammenheng med tidligere lært matematikk og andre fagfelt hvor matematikken er en viktig byggestein. Disse ideene har vært viktige i planleggingen av undervisningstimene til mitt masterprosjekt.

2.7 Undersøkende matematikkundervisning[5]

I løpet av undervisningsopplegget ble elevene ved flere anledninger satt til å jobbe utforskende. De fikk en oppgave knyttet til den geometriske forklaringen bak fullstendig kvadrat, og senere fikk de i oppgave å benytte seg av det de hadde lært så langt til å forsøke å utlede abc-formelen selv. De ble gitt en oppgave der de skulle løse en generell andregradslikning, $ax^2 + bx + c = 0$, ved å bruke det de tidligere har lært, og uten å ha fått presentert hvordan løsningen ser ut. Denne delen av undervisningen var det vi kan kalle for undersøkende.

Blomhøj (2016, s. 156-158) skriver om undersøkende undervisning, og hva som må være på plass for å gjøre det mulig for elevene å ha et faglig utbytte av opplegget. Undersøkende matematikkundervisning kan deles inn i tre hovedfaser; iscenesettelse, elevenes selvstendige arbeid og refleksjon. Fasen med iscenesettelse går ut på å sette rammene for oppgaven, både i

[5] Deler av teksten i dette kapitlet er identisk med tekst fra eksamen i emnet PFF-3101

tilgjengelige ressurser, tid og omfang. Neste fase er der elevene utforsker. Her må de få tid til å diskutere, undre, prøve og feile. Den siste fasen går ut på å trekke sammen det elevene har funnet ut av i en felles faglig refleksjon (Blomhøj, 2016, s. 156-158).

Undersøkende opplegg baserer seg gjerne på at elevene skal finne ut av noe nytt, gjennom å bruke det de allerede kan. Dette støttes også opp av teorien fra Freudenthal (1973), som skriver at elevene selv må oppdage de matematiske konseptene for å forstå de. Dermed vil et undersøkende undervisningsinnslag kunne være med på å tilrettelegge for at elevene skal kunne oppnå strukturforståelse.

2.8 Kunnskapspakker[6]

Matematikk er et komplekst fag, der mye henger sammen, og er uforståelig alene. Derfor vil det være av stor betydning hvorvidt elevene har lært det de skal i tidligere matematikktimer. Det å se på elevenes forståelse og strukturforståelse innen abc-formelen, vil derfor også måtte ses i tilknytning til det de har lært eller ikke tidligere, og konsepter de må kjenne til for å nå kunne lære seg dette nye fagstoffet. Ma (1999, s. 14-15) refererer til begrepet "knowledge package", eller *kunnskapspakker* som vi kan oversette det til, som de prosedyrene og konseptene man må kjenne til for å forstå nye matematiske sammenhenger. Matematiske konsepter er ikke enkeltstående, men kommer i sammensatte pakker. For å undervise i nye matematiske konsepter, må man kjenne til de ideene konseptene bygger på, for å skape sammenheng for elevene (Ma, 1999, s. 14-15). Dersom man trekker inn mange nye konsepter på samme tid, blir det vanskelig for elevene å henge med. Den matematiske grunnmuren må altså være bygd før de kan begynne å innrede rommene i huset med nye matematiske konsepter.

Det at nye ideer må ha en sammenheng med kjente ideer, finner vi igjen i konstruktivistisk læringsteori. Når elevene skal sette seg inn i nytt fagstoff, bygger de videre på prinsipper de allerede kjenner til, for å skape mening. Ny informasjon vil tolkes og bearbeides med utgangspunkt i det de har lært og forstått tidligere (Skaalvik & Skaalvik, 2018, s. 57). For å oppnå strukturforståelse i matematikk er dette også svært viktig, da en stor del av forståelsen er å se sammenhenger, og knytte nye ideer til kjent kunnskap. Derfor er det viktig at undervisningen tar utgangspunkt i ideer elevene kjenner til fra før, for så å utdype disse til nye relasjoner, fremfor å presentere matematikkfaget som en liste med enkeltstående regler som

[6] Deler av teksten i dette kapitlet er identisk med tekst fra eksamen i emnet PFF-3101

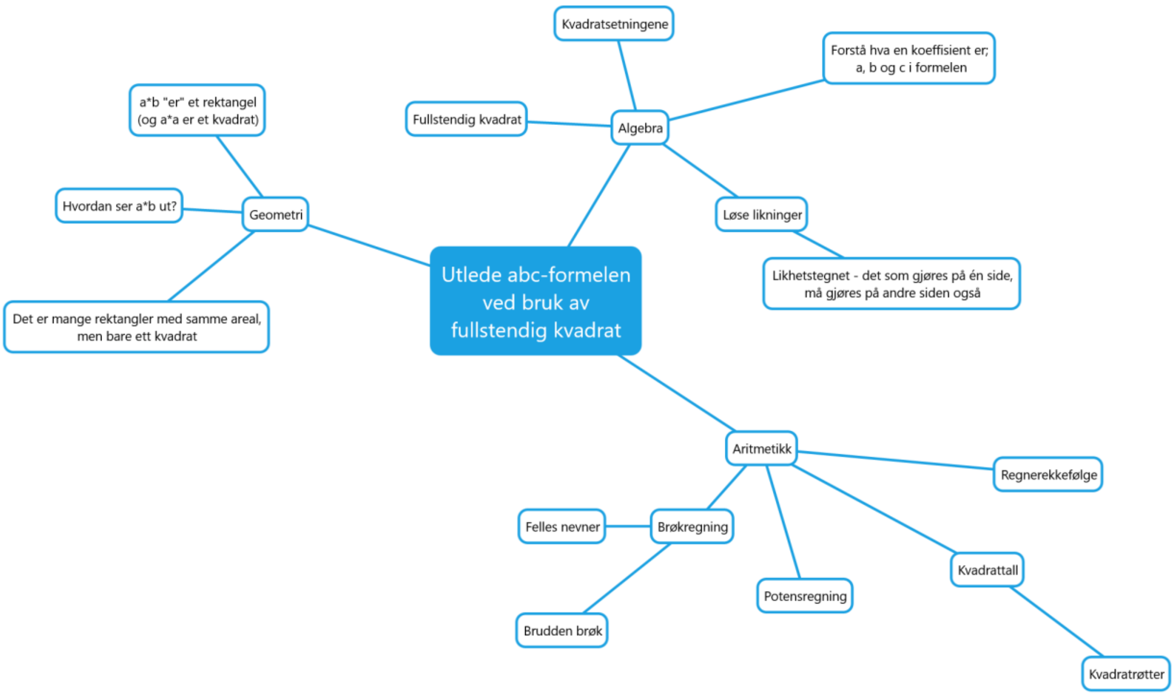
skal memoreres. Dette kommer også frem i Freudenthal (1973) teori om å oppdage og anvende matematikken på egenhånd.

Undervisning som bygger på kjente konsepter hos elevene, for så å utvide og bygge videre på disse, vil være gunstig. Dette gjelder også når man skal trekke inn utledninger og bevis i undervisningen. Ifølge Dreyfus et al. (2012) og Grabiner (2012) er visuelle bevis enklere for elevene å forstå. I tillegg skriver Dreyfus et al. (2012) at bevis og utledninger som kun tar utgangspunkt i matematiske konsepter elevene er kjent med fra før og er trygge i, vil ha høyere suksess i klasserommet når det kommer til elevenes forståelse.

2.8.1 Kunnskapspakker knyttet til å løse andregradslikninger

Når elevene skal lære å løse andregradslikninger vil det være mange ideer satt sammen til den *kunnskapspakken* som kreves for å forstå dette – og kanskje enda flere for å oppnå strukturforståelse og ikke bare regelforståelse. Metoden med fullstendig kvadrat krever både mye aritmetikk og algebra, samtidig som geometrien kanskje kan komme inn som et visuelt hjelpemiddel dersom elevene er trygge på dette fra før. Selv om det vil kunne oppleves krevende for elevene, og kanskje til og med meningsløst å skulle finne ut av abc-formelen fremfor å bare kunne benytte seg av den i oppgaveløsning, så peker altså tidligere forskning på at strukturforståelse er viktig for å mestre matematikkfaget.

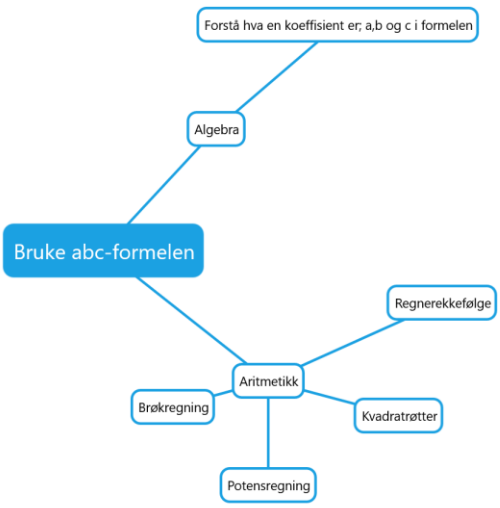
I figuren på neste side har jeg laget et tankekart over de viktigste matematiske konseptene jeg tenker elevene må mestre for å henge med på utledningen av abc-formelen.



Figur 12: Kunnskapspakke – grunnlaget for utlede abc-formelen

Det er mye matematikk elevene må kjenne til og kunne anvende før de har grunnlaget til å forstå hvor denne formelen kommer fra og *hvorfor* vi kan bruke den.

Til sammenlikning kan vi sette opp et liknende tankekart med kunnskapspakken som kreves for å kun anvende abc-formelen, uten ytterligere refleksjoner over hvor den kommer fra eller hvorfor den fungerer.



Figur 13: Kunnskapspakke – grunnlaget for å bruke abc-formelen

Fra denne figuren ser vi at kunnskapspakken som kreves for å løse en andregradslikning ved bruk av abc-formelen er langt mindre komplisert enn den for å utlede formelen, og stiller færre krav til elevenes forkunnskaper.

2.9 Sosiomatematisk norm

I prosessen av å legge opp til en undervisning som har som mål å legge til rette for strukturforståelse hos elevene, blir også begrepet sosiomatematisk norm, som Yackel og Cobb (1996) introduserer, relevant. De sosiomatematiske normene handler om hva som er matematisk elegant, matematisk ulikt og hva som er en matematisk løsning, sett fra allmenheten i, for eksempel, et klasserom (Yackel & Cobb, 1996, s. 461). De sosiomatematiske normene som er etablert i et klasserom vil derfor være med på å påvirke hvordan elevene både løser oppgaver i timene, og hva de anser som det viktigste å ta med seg fra undervisningsøktene. Yackel og Cobb (1996) nevner at elevenes oppfatning av hva som teller som en akseptabel løsning, forklaring og argumentasjon endres og utvikles over tid, og særlig i møte med undersøkelsesbasert undervisning. Trekker vi dette sammen med det Mellin-Olsen (1981) skriver om ulike typer forståelse, vil vi nok kunne se at i ulike klasser vil det være variasjoner blant hvorvidt det er regelforståelsen og de regelbaserte løsningene som er normen, eller om det i større grad er det å forstå og argumentere for strukturene og bakgrunnen til matematikken som er vektlagt i det elevene legger frem som en gyldig, akseptabel løsning.

I forkant av undervisningsøktene mine var det derfor allerede etablert sosiomatematiske normer blant elevene i klasserommet, og sammen med læreren. Elevenes og lærerens syn på hva som er en akseptabel matematisk løsningsmetode og løsning var allerede til stede, og med et undervisningsopplegg der hensikten er å gjøre endringer, vil disse etablerte normene spille inn.

3 Metode

I dette kapitlet vil jeg presentere metodene jeg har valgt for å undersøke min problemstilling. Jeg vil først legge frem den kvalitative hovedteorien jeg har benyttet meg av. Jeg vil også kort presentere selve opplegget jeg gjennomførte sammen med klassen, og datainnsamlingen som ble gjort underveis, før jeg går gjennom analysemetoden jeg benyttet meg av. Til slutt vil jeg drøfte oppgavens validitet og reliabilitet, før jeg avslutter med de forskningsetiske hensynene som ligger til grunn for prosjektet.

3.1 Kvalitativ metode[7]

For å undersøke problemstillingen min gjennomførte jeg en studie som i hovedsak er kvalitativ. Kvalitative studier er godt egnet til å forske på deltakernes perspektiv (Postholm, 2020, s. 17), så da jeg ønsket å se på elevforståelse innenfor løsning av andregradslikninger, ville det være gunstig å fokusere på elevenes fremgangsmåter og resultater. Målet med kvalitativ forskning er ikke å undersøke noe som kan generaliseres til å gjelde i alle liknende tilfeller. Målet er heller å gå i dybden på ett bestemt område, samtidig som forskningsprosessen gjøres så transparent som mulig, slik at det da er opp til leseren å avgjøre om resultatene kan overføres til en aktuell situasjon (Postholm, 2020, s. 37-39). Dette vil også være tilfellet i min studie. Jeg gjennomførte et undervisningsopplegg i en matematikklasse på videregående skole, samlet inn resultater fra oppgaver i- og etter- undervisningen, og analyserte disse i ettertid. Her var hensikten å vurdere hvorvidt elevene klarte å vise forståelse for det vi hadde vært gjennom, hvordan forståelsen kom til uttrykk, og om det var mulig å skille på de ulike typene forståelse.

3.1.1 Designforskning

Metoden i et forskningsprosjekt handler om hvordan man velger å samle inn data til forskningen, og hvordan man i ettertid velger å analysere den (Bakker, 2019, s. 7). Den kvalitative metoden jeg har valgt å bruke i mitt masterprosjekt er designforskning. Det er en metode brukt i forskning på undervisning, og **hensikten er å prøve å finne ut av hvordan noe kan- eller burde- være, fremfor å se på hvordan det er i dag** (Bakker, 2019, s. 3). I mitt undervisningsopplegg ønsket jeg å se på hvorvidt det å benytte seg av elevenes kunnskap i geometri, herunder greinene tilhørende *Geometri* fra Figur 12: Kunnskapspakke – grunnlaget for utlede abc-formelen, i tillegg til å bruke tid på metodene for utledningen av abc-formelen,

[7] Noe av teksten i dette delkapitlet er identisk med tekst fra eksamen i emnet PFF-3101

ville bidra til at de i større grad så matematiske sammenhenger og oppnådde noe som er nærmere strukturforståelse enn regelforståelse. Jeg ønsket altså å undersøke følgene av endringen av et undervisningsdesign, og derfor falt valget naturlig på designforskning. I designforskning er målet å arbeide mot et undervisningsdesign som løser et problem med undervisningssituasjonen slik den er i dag. Designet utformes, utvikles og revideres basert på tidligere forskning. Det er altså en refleksiv, syklisk prosess, hvor man utvikler og endrer opplegg underveis for å få innsyn i hva som fungerer og hvordan og hvorfor det gjør det, samtidig som man forsøker å finne variasjoner som kan fungere enda bedre (Bakker, 2019, s. 15). I tråd med dette brukte jeg mye tid på å planlegge undervisningstimene i forkant, og reflektere over hva som kunne vært gjort annerledes i forberedelse til neste time, i etterkant. Den sykliske delen av prosessen ble noe begrenset grunnet omfanget som naturlig begrenses av en masteroppgave. Det hele ble kun gjennomført én gang, og derfor vektla jeg å skrive logg i etterkant av timene, for å kunne reflektere over mulige forbedringer underveis.

Selv om designforskning ser på nye måter å undervise på, behøver ikke målet å være å finne den ene beste måten å undervise på, men heller å få et innblikk i hvorvidt et «fokusskifte» i undervisningen vil ha innvirkning på hva elevene sitter igjen med av matematisk kompetanse i ettertid. Det å se på en endring i undervisningsmetode og konsekvensene det fører med seg er det som er essensen i designforskning. I min oppgave er hovedpoenget å se på om det å inkludere geometriske forklaringer når elevene jobbet med andregradslikninger, fremfor å kun se på algebraen, medførte at elevene i større grad forsto *hvorfor* og ikke bare *hvordan*. En gjennomføring av et slikt undervisningsopplegg gir respons på om det er fordelaktig å legge fokus over på det visuelle og geometrien, og det å la elevene undersøke selv for å komme frem til abc-formelen. I etterkant av opplegget sitter man igjen med en mening angående hva som fungerte bra, og hva som kunne vært gjort annerledes – for å nettopp kunne forbedre et undervisningsopplegg eller -design.

Dette har jeg forsøkt å gjøre gjennom mitt forskningsprosjekt. Jeg har gjort endringer i undervisningen elevene vanligvis følger for å se på om dette har noen konsekvenser når det kommer til elevenes strukturforståelse innenfor et matematisk emne. Gjennom å se på elevbesvarelser i etterkant av opplegget har jeg erfart og gjort meg opp noen meninger angående hvorvidt denne måten, eller dette undervisningsdesignet er hensiktsmessig når det kommer til undervisning av det aktuelle emnet.

3.2 Utvalg

Hele prosjektet med undervisningsopplegg og oppgaver underveis og i etterkant ble gjennomført i en videregåendeklasse som har faget matematikk 1T, altså teoretisk matematikk, første året på videregående. I klassen var det 24 elever, og 18 var til stede under utledningsoppgaven, og 15 under prøven i etterkant av opplegget. Valget falt på nettopp dette klassetrinnet fordi i dette faget lærer elevene for første gang å løse andregradslikninger, og det er dermed også her elevene møter abc-formelen. Samtidig er 1T et fag som legger grunnlaget for videre matematikkfag hvor andregradslikninger og løsning av disse vil være sentralt. I læreplanen for faget står det at i løpet av året skal elevene kunne løse andregradslikninger i tillegg til at de skal kunne lese, forstå og skrive egne bevis (Kunnskapsdepartementet, 2019). Med bakgrunn i dette vurderte jeg at en gjennomføring av et undervisningsopplegg på dette klassetrinnet var velegnet til å belyse problemstillingen min, angående hvordan vektlegging på geometriske fremstillinger og forklaringer vil kunne bidra til å gi elevene strukturforståelse fremfor regelforståelse av abc-formelen.

Masterprosjektet ble gjennomført som en del av 5.årspraksisen på studiet, jeg var derfor inne i en klasse jeg ikke hadde så god kjennskap til fra før. Jeg hadde vært innom klassen som vikar tidligere, og derfor kjente jeg litt til elevene, og de litt til meg. Jeg var i tillegg innom klassen i forkant av undervisningsopplegget for å forklare hva jeg skulle gjøre, og hva som skulle samles inn. Da jeg senere gikk i gang med undervisningen og datainnsamlingen, hadde jeg derfor en liten relasjon til elevene, som jeg tror var en fordel for den muntlige deltagelsen i timene. Underveis i timene satt elevene gruppevis på mellom fire til seks elever per gruppe. De var godt vant med å diskutere i disse gruppene, og det var derfor noe jeg benyttet meg av i planleggingen av undervisningen.

3.3 Undervisningsopplegget

For å undersøke hvorvidt et fokus på geometri i forklaringene vil kunne styrke elevenes strukturforståelse av andregradslikninger, gjennomførte jeg et undervisningsopplegg over tre økter i klassen. De første to øktene handlet om metoden med fullstendig kvadrat for å løse likninger, og i den siste timen ble elevene presentert for andregradsformelen. Undervisningsøktene tok utgangspunkt i undervisningsmateriell på den digitale læringsplattformen, Campus Inkrement, som elevene fulgte fra før. Elevene så en video om det aktuelle undervisningstemaet i forkant av timene, i tillegg til å løse noen oppgaver innen emnet. Til mine undervisningstimer fortsatte elevene med slik videolekse i forkant, også jobbet vi videre, med både utdypninger av forklaringene i videoen, men også andre forklaringer, i timene. Dette var noe som var ønsket fra mattelæreren til klassen, så jeg valgte derfor å fortsette å gi videoene i lekse til elevene. Videre valgte jeg å se på det som en mulighet for elevene å få forklaringer fra ulike vinklinger, som slik kunne bidra til å øke deres forståelse, og dermed ble videoene et positivt supplement i prosjektet.

Senere i oppgaven vil jeg gå i detalj og forklare hvordan de aktuelle undervisningstimene ble gjennomført, og refleksjoner og endringer som ble gjort underveis. I kvalitative studier og designforskning er det viktig at prosessen fremstilles så åpent og transparent som mulig, slik at overføringsverdien til liknende situasjoner kan vurderes av leseren i ettertid. En del av prosessen i designforskningen er også å utvikle og revidere undervisningsdesignet underveis (Bakker, 2019). Jeg vil derfor her legge frem hvordan jeg la opp de tre undervisningsøktene jeg hadde med klassen, og begrunne valgene jeg tok basert på teori i et eget kapittel.

3.4 Datainnsamling

Forståelse er et fenomen det vil være vanskelig å måle direkte hos en elev. Jeg har likevel valgt ut noen innsamlingsmetoder jeg tenker kan være hensiktsmessige for å svare på problemstillingen, og for å kunne diskutere hvorvidt det er strukturforståelse til stede hos elevene eller ikke etter de aktuelle undervisningstimene.

Jeg har valgt å vektlegge skriftlige besvarelser fra elevene i klassen som grunnlag for å svare på problemstillingen. Dette valgte jeg å gjøre for å gi elevene en «lik» svararena, sammenliknet med for eksempel et intervju, der spørsmål og oppfølgingsspørsmål kunne virke ledende. Ved å se på elevbesvarelser som ikke er knyttet opp mot navn vil også min analyse av besvarelsene være mer objektiv og mindre preget av relasjonen til den enkelte elev.

En annen grunn til at jeg kun valgte å bruke skriftlige elevbesvarelser som datamateriale, er at det flere steder i læreplanen står at elevene skal forstå diverse konsepter, som for eksempel ulike bevis. Samtidig er det hvert år sensorer rundt om i landet som skal bedømme hvorvidt denne forståelsen er til stede hos den enkelte elev, basert på skriftlige oppgavebesvarelser. Derfor tenkte jeg det ville være både relevant, og også lærerikt å se på om man klarer å klassifisere om det er forståelse tilstede hos elevene basert på kun dette, og samtidig hvorvidt man klarer å skille mellom regelforståelse og strukturforståelse. I tillegg til oppgavebesvarelsene, skrev jeg også logg med tanker og refleksjoner etter hver undervisningsøkt, og disse brukte jeg til forbedring og forberedelse av de senere undervisningstimene og til analysen.

3.4.1 Utledning og oppgaver fra prøve

Undervisningsopplegget elevene fulgte gikk ut på at de først introduseres til det å lage fullstendige kvadrat. Timen etter dette ble brukt for å løse andregradslikninger ved bruk av den metoden, før det så i den tredje timen ble oppsummert til abc-formelen. Mot slutten av den andre undervisningsøkten fikk elevene i oppgave å løse likningen $ax^2 + bx + c = 0$. Ved å bruke metoden med fullstendig kvadrat vil de da kunne komme et godt stykke på vei mot å utlede abc-formelen på egenhånd. Besvarelsene fra denne oppgaven samlet jeg inn til analyse.

En stund etter undervisningsøktene hadde elevene en kapitteltest innunder temaet likninger. Til kapitteltesten hadde jeg valgt ut enkelte oppgaver for å se på i ettertid. Disse oppgavene oppfordret og la til rette for at elevene skulle benytte seg av ulike løsningsmetoder. Hensikten her var å se på hvilke løsningsmetoder elevene valgte å benytte seg av etter undervisningstimene. En av oppgavevene var at de skulle løse én andregradslikning på formen $ax^2 + bx + c = 0$ på to ulike måter. Hensikten da var å få elevene til å tenke på flere måter enn kun sin foretrukne løsningsmetode, som trolig for de fleste som løser andregradslikninger manuelt, er ved hjelp av abc-formelen. På den samme prøven var det også oppgaver med andregradslikninger som manglet enten b- eller c- leddet. Disse kan løses både med- og uten- å bruke abc-formelen, og det jeg da ønsket å se på var om elevene handlet på automatikk og likevel valgte å bruke abc-formelen for å komme frem til svaret, da det vil kunne være et tegn på regelforståelse. Besvarelsene ble i etterkant av prøven samlet inn analysert. Elevbesvarelsene har blitt analysert og brukt for å diskutere om elevene satt igjen med noe mer enn bare abc-formelen som løsningsmetode etter undervisningen, og hvordan de eventuelt løste andregradslikninger på andre måter i tillegg. Dette vil gi en indikasjon på hvorvidt elevene reproduserer en fremgangsmåte de har pugget og husker, eller om de har et større matematisk overblikk. Dersom elevene stadig velger abc-formelen vil dette være et tegn på regelforståelse, da det kan bety at de husker en oppskrift på en fremgangsmåte fremfor å forstå matematikken og de andre mulige løsningene.

3.5 Analysemetode

Analyseprosessen i kvalitativ forskning er sjelden en lineær prosess, men heller en dynamisk prosess. I designforskning vil denne prosessen starte allerede i første undervisningsøkt, og strekke seg til lenge etter at selve undervisningen og datainnsamlingen er avsluttet (Postholm, 2020, s. 86-87). Det er også tilfellet i mitt prosjekt. I kvalitative forskningsprosjekter finnes det flere ulike fremgangsmåter for å analysere datamaterialet og forskjellige måter å sammenfatte datamaterialet til konkrete funn. I min oppgave har jeg valgt å følge stegene i analysemetoden innholdsanalyse (content analysis), beskrevet av Elo og Kyngäs (2008) som jeg går nærmere inn i videre.

3.5.1 Innholdsanalyse

Innholdsanalyse er en analysemetode som kan benyttes for å analysere skriftlig innsamlet datamateriale, enten deduktivt og induktivt , eller som en kombinasjon av dem begge (Elo & Kyngäs, 2008). I arbeidet her vil jeg analysere skriftlige elevbesvarelser på oppgaver både fra matematikkundervisningen, og fra prøver i etterkant av undervisningsopplegget. Den induktive tilnærmingen til datamaterialet har man dersom man ikke har tilstrekkelig informasjon eller kunnskap om fenomenet man ønsker å undersøke, man går fra noe spesifikt til noe generelt (Elo & Kyngäs, 2008). På den andre siden har vi den deduktive tilnærmingen – den er fullstendig basert på tidligere, allerede kjent kunnskap, og her beveger man seg fra det generelle til det spesifikke (Elo & Kyngäs, 2008). I mange tilfeller vil det være naturlig å kombinere begge disse fremgangsmåtene i analysen av et datamateriale.

Elo og Kyngäs (2008) deler innholdsanalysen inn i tre steg, forberedelsesfasen, organiseringsfasen og rapporteringsfasen (preparation, organizing og reporting). Forberedelsesfasen handler i hovedsak om å bli kjent med innholdet i materialet, og starte å se for seg hvor analysen vil kunne gå videre. I denne fasen danner man seg noen kategorier, man tenker at materialet vil passe innunder, gjerne basert på tidligere forskning, dersom man velger en deduktiv tilnærming. Hvis man derimot ikke har disse forhåndsplanlagte kategoriene, og man analyserer induktivt, vil disse kategoriene bli til underveis (Elo & Kyngäs, 2008).

I den induktive organiseringsfasen leser man over materialet og noterer ned stikkord og kategorier underveis, i det som kalles den åpne delen av kodingsfasen (Elo & Kyngäs, 2008). I den deduktive organiseringsfasen handler organiseringssteget om å danne en matrise over de ulike kategoriene man har tenkt at datamaterialet skal passe innunder. Her kan man også blande sammen den induktive og deduktive fremgangsmåten, ved at noen av kategoriene finnes på forhånd i matrisen, mens andre blir til underveis (Elo & Kyngäs, 2008).

Det siste steget i innholdsanalysen handler om å sammenfatte og rapportere kategoriene og hvilke funn de ender med å representere. Elo og Kyngäs (2008) nevner at organiseringsfasen kan være både deduktiv og en induktiv. Når jeg senere i oppgaven presenterer min analyse, har jeg valgt å ta utgangspunkt i deres analyseteori, og benytte meg av en blanding mellom deduktiv og induktiv organisering.

3.5.1 Deskriptiv statistikk

For å svare på problemstillingen har jeg sett på elevbesvarelser fra oppgaver i undervisningstimer, i tillegg til oppgaver fra en matematikkprøve elevene hadde i etterkant av undervisningsopplegget. For å kunne vurdere strukturforståelsen i helheten av klassen var det derfor aktuelt å se på mer kvantitative aspekter ved datamaterialet også. Antall elever som har løst oppgaven på den ene eller andre måten er med på å forklare hvor godt eller ikke undervisningsopplegget lyktes i å skape strukturforståelsen jeg var ute etter å se på. I tillegg til å se på innholdet og årsaker til elevenes løsningsmetoder, har jeg også sett på antall elever som har valgt ulike metoder, og satt dette opp i en tabell for å få en samlet oversikt. Det å benytte seg av tabeller for å få oversikt og se helheten i et datasett, og videre trekke ut informasjon derfra, kalles deskriptiv statistikk (Befring, 1969), og dette har jeg valgt som et supplement i analysen i oppgaven.

3.6 Validitet og reliabilitet

Validitet i en kvalitativ studie handler om hvorvidt man faktisk finner ut det man ønsker å finne ut (Bakker, 2019, s. 88-89). Det er viktig at det er en sammenheng mellom problemstillingen, funnene i analysen og til slutt konklusjonene man kommer frem til. Når det kommer til validiteten av en kvalitativ studie, er noe av det viktigste at metoden og analysen kommer godt nok frem til at leseren selv kan avgjøre overføringsverdien til andre situasjoner (Elo & Kyngäs, 2008). For å styrke validiteten i min oppgave har jeg derfor vært nøye med å legge frem og synliggjøre hele prosessen etter beste evne.

Bakker (2019) nevner at reliabiliteten til et forskningsprosjekt i hovedsak baserer seg på om funnene man kommer frem til kun er gyldige i det bestemte prosjektet, eller om man kunne forventet lignende funn dersom det samme opplegget ble gjennomført i en annen, sammenlignbar situasjon. Dette er noe jeg har vært bevisst på i prosessen, særlig siden det hele kun er gjennomført én gang, med én klasse. For å øke både validiteten og reliabiliteten har jeg derfor vektlagt det å være transparent i hele prosessen, fra planlegging av undervisning og undervisning, og til datainnsamling og analyse. Etterpå har jeg brukt tid på å beskrive dette på en detaljert og nøyaktig måte, slik at det er enklere for leseren å avgjøre hvorvidt koblingene jeg har foretatt i oppgaven, kan overføres til andre undervisningssituasjoner. Dette er også viktig i forbindelse med at jeg tar med meg min egen forforståelse inn i prosjektet. Som forsker tar man med seg egne oppfatninger av årsaker og konsekvenser av konsepter, og ved å transparent legge frem hele prosessen, minsker man rommet for feiltolkninger betraktelig.

3.7 Forskningsetikk

I dette delkapitlet vil jeg ta for meg viktige forskningsetiske hensyn jeg har vektlagt underveis i forskningsprosessen. De forskningsetiske aspektene har vært med gjennom alt fra planleggingen, til datainnsamlingen og videre inn i skriveprosessen.

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) utarbeider nasjonale, forskningsetiske retningslinjer. Disse retningslinjene skal sammen forme et sett normer som skal legge til rette for at forskning gjennomføres på en faglig forsvarlig måte (Staksrud et al., 2021). Staksrud et al. (2021) presiserer også viktigheten av at de forskningsetiske retningslinjene tas med i alle valg i forskningsprosessen, hele veien fra idé og planlegging, videre til gjennomføring og til slutt publisering og formidling. Disse retningslinjene har derfor også stått i fokus gjennom mitt masterprosjekt.

De etiske retningslinjene er delt i fem deler (A-E), som går inn på de viktigste forskningsetiske forpliktelsene (Staksrud et al., 2021). Under vil jeg kort gå inn på de viktigste hensynene jeg har tatt stilling til i gjennomføringen av dette masterprosjektet, basert på de fem delene.

A. *Forskerfellesskapet: Alle som bidrar til et forskningsfelt har et felles ansvar for å anerkjenne og respektere andre forskere sine funn (Staksrud et al., 2021).* Viktigheten av dette står sterkt i min oppgave gjennom kreditering av andres arbeid underveis, og nøyaktighet i kildeføringen.
B. *Hensyn til personer: Som forsker har man et stort ansvar med hensyn på personene som deltar i forskningsprosjektet og deres rettigheter. I tillegg skal alles integritet og sikkerhet settes høyt (Staksrud et al., 2021).* Dette er sikret gjennom informasjon til deltakerne, slik at de skulle være i stand til å gi et informert samtykke til å delta. Elevene fikk både skriftlig og muntlig informasjon i forkant av prosjektet. De fikk vite hva det innebar for dem å delta, at alt ble anonymisert underveis, og at de kunne trekke samtykket tilbake dersom de ønsket det. Jeg syntes også det var viktig å presisere overfor elevene at prosjektet var rettet mot å se på undervisningsformen og resultatene av den, fremfor individuelle elevresultater. Hele prosjektet var også søkt inn og godkjent

av Sikt (Kunnskapssektorens tjenesteleverandør), for å sikre at gjennomføringen og datainnsamlingen ivaretok elevenes personvern.

C. *Grupper og institusjoner: Det er viktig å være bevisst og ta hensyn til eventuelle sårbare grupper og ta ekstra hensyn til disse i forskningsprosessen (Staksrud et al., 2021).* Hovedfokuset mitt, var å se på forståelsen til elevene. Det kan virke nært, personlig og kanskje flaut for elevene, at det kommer noen utenfra og skal *måle* deres forståelse i matematikk. Derfor forsøkte jeg å være ekstra bevisst på dette da jeg la frem prosjektet, og få tydelig frem for elevene at formålet med prosjektet ikke var å se på forståelsen til den enkelte elev, men derimot å se på sammenhengen mellom endring i undervisningsform, og prestasjoner i klassen overordnet sett.

D. *Oppdragsgivere, finansører og samarbeidspartnere:* Dette punktet var ikke relevant i mitt masterprosjekt.

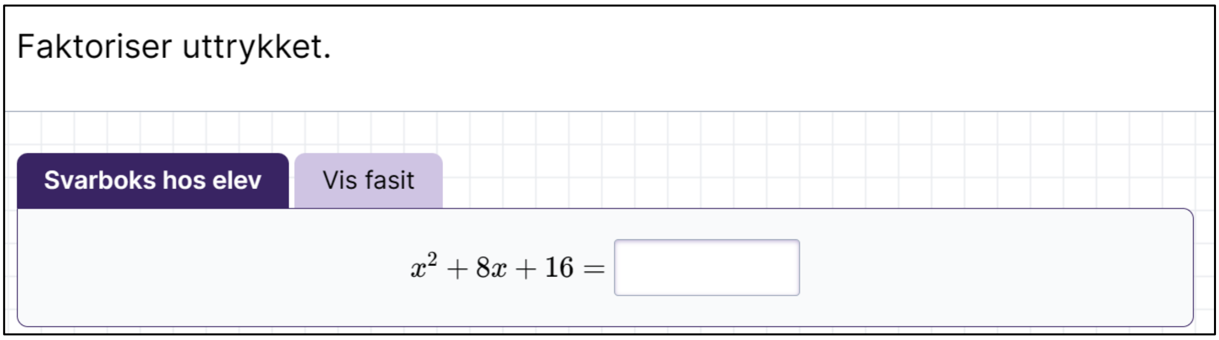
E. *Forskningsformidling: Et av ansvarsområdene til forskere er å formidle den gjennomførte forskningen, ikke bare resultatene, men hele prosessen (Staksrud et al., 2021).* Det er derfor viktig at arbeidsmåtene og funnene presenteres på en transparent og etterprøvbar måte, for å sikre formidling på en god og sikker måte. Dette har jeg gjort gjennom en åpen skriftlig fremstilling av forskningen i denne oppgaven.

4 Undervisningsdesign

Problemstillingen *Hvordan kan en undervisning som har til mål å legge til rette for at elevene sitter igjen med strukturforståelse av abc-formelen, se ut?*, handler i hovedsak om undervisningsopplegget og hvorvidt det fungerte for å hjelpe elevene. Hoveddelen av masterprosjektet mitt er derfor knyttet til selve undervisningen. For å gjøre denne prosessen transparent, og få frem endringene og tilhørende refleksjoner underveis er det viktig å legge frem hvordan undervisningen ble gjennomført. Jeg vil i dette kapitlet derfor presentere de tre undervisningsøktene jeg hadde med klassen. Her vil jeg både gå inn på gjennomføringen av øktene, og refleksjoner og endringer som ble gjort i ettertid, da dette er sentral del av prosessen i designforskning (Bakker, 2019, s. 15).

4.1 Undervisningstime 1 – Fullstendig kvadrat

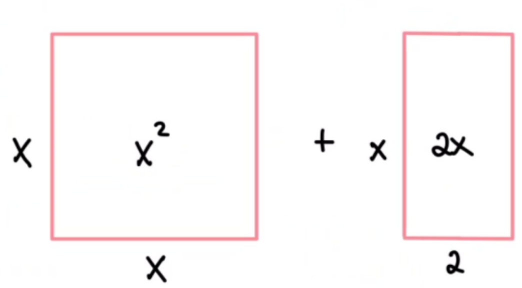
I forkant av den første undervisningstimen hadde elevene sett videoen «Fullstendige kvadrater» (Thue, (u.å.)-a). Vi startet derfor undervisningsøkten med oppgaver inne på Campus Inkrement som var basert på disse videoene.



Figur 14: Undervisningstime 1 - oppgave Campus Inkrement (Thue, (u.å.)-a)

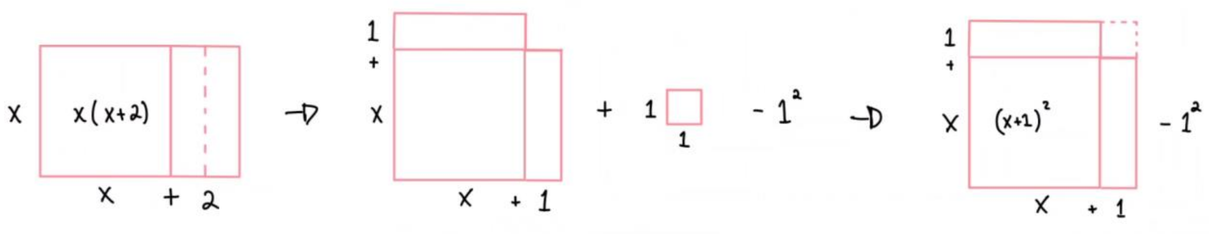
Som nevnt i Kapittel 2.3.1 vektlegges huskeregelen «halvere – kvadrere – addere» som fremgangsmåten for å lage fullstendig kvadrat. Vi startet derfor med tavlegjennomgang av oppgaven over, der elevene fikk beskjed om å forklare hvordan de ville løse den. Derfra gikk jeg videre til å trekke inn geometriske forklaringer av metoden.

Jeg startet med å spørre klassen om hvorfor det heter «fullstendig kvadrat». Her svarte noen at det måtte ha noe med kvadrattall å gjøre, og derfra gikk vi over til geometriske fremstillinger og kvadratet. Da tegnet jeg opp både et kvadrat og et rektangel på tavla, og spurte hvordan vi kunne skrive arealet på disse figurene. Med litt hjelp til å sette navn på sidelengdene kom vi frem til a^2 for kvadratet og ab for rektangelet. For å videre knytte dette opp mot å lage fullstendig kvadrat slik de hadde sett i videoen på forhånd, tegnet jeg et rektangel med sidelengder x og $(x+2)$, som da hadde areal x^2+2x som vist i figuren under.



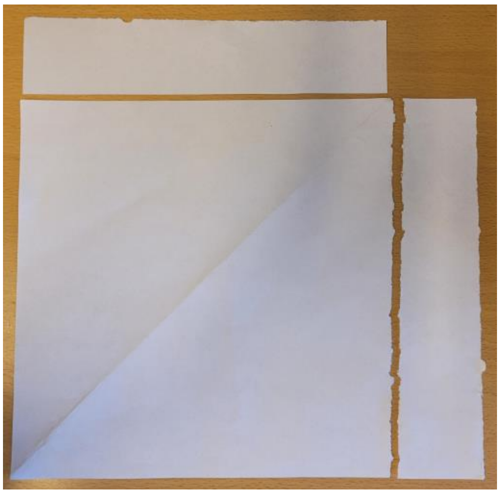
Figur 15: Undervisningsøkt 1 – lage fullstendig kvadrat

Videre gikk vi inn på hvordan dette kunne omformes fra et rektangel til et kvadrat, ved å bruke stegene fra videoen, halvere – kvadrere – addere, bare at nå skulle vi gjøre det med rektanglet på tavla. Her valgte jeg å knytte stegene til det de allerede hadde sett i videoen, for å kunne se det i sammenheng med noe de kunne litt fra før. Dette tegnet jeg opp på tavla, slik som figuren under viser.



Figur 16: Undervisningsøkt 1 - lage fullstendig kvadrat, tavleeksempel

Etter dette fikk elevene en praktisk oppgave. Alle fikk utdelt A4-ark, og oppgaven var at de skulle klippe og pusle dette rektanglet til å være et størst mulig kvadrat så langt det lot seg gjøre, ved å bruke metoden med fullstendig kvadrat. Underveis mens elevene jobbet med dette i grupper, gikk jeg rundt for å veilede slik at gruppene som sto fast, også kom i gang.



Figur 17: Undervisningsøkt 1 – praktisk elevoppgave

Da alle gruppene var kommet i mål med en figur slik den over, oppsummerte vi stegene i felleskap, og jeg gikk gjennom hvorfor vi egentlig ønsket å omforme uttrykk på rektangelform til å være på kvadratform. For å illustrere dette tegnet jeg både et rektangel og et kvadrat på tavla og sa at arealene til de to figurene var 16. Da vi skulle diskutere sidelengdene, ble det ganske fort tydelig at det bare var én mulighet for sidelengder til kvadratet, men mange for rektanglet. Dette er hele poenget med fullstendig kvadrat, og også grunnideen og hovedårsaken til at vi ønsker å blande geometrien og algebraen sammen. For dersom vi får *omformet uttrykket til et kvadrat, vet vi at det kun vil være én bestemt sidelengde som vil kunne tilsvare et bestemt areal*. Dette prinsippet brukte jeg mye tid på å få frem, og vektla at det er det vi tar med oss når vi skal bruke metoden til å løse likninger.

Refleksjoner og endringer

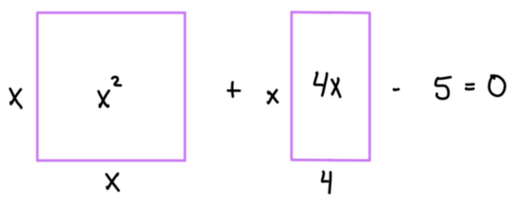
Det var flere didaktiske teorier som lå til grunn for denne undervisnignsøkten. Hovedvekten i økten lå på det visuelle, og det å *se* sammenhengene med geometriske figurer, fremfor å kun få presentert bokstavene fra algebraen. Her stod Grabiner (2012) sin teori angående visuelle bevis sterkt. Ved å la elevene visuelt se konseptet med fullstendig kvadrat, var formålet at det skulle hjelpe elevene å se forbindelsen nettopp mellom algebraen og geometrien når det kom til løsning av likninger.

Sekvensen fra timen der elevene selv skulle lage et fullstendig kvadrat så langt det lot seg gjøre, ved hjelp av et A4-ark, var både støttet opp av Grabiner (2012) sin teori om det visuelle, men også basert på det Blomhøj (2016) og Freudenthal (1973) nevner om hvordan det å oppdage og undersøke konseptene på egenhånd i større grad legger til rette for forståelse hos elevene.

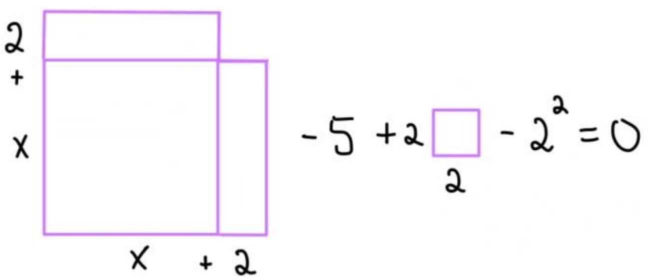
Det jeg erfarte etter denne første undervisningen med elevene var at de samarbeidet godt i de gruppene de satt i, og at det var noe jeg kunne spille videre på i de senere undervisningstimene når det kom til å legge opp til diskusjon og utforskende opplegg videre. Samtidig virket det som at elevene hang med på tavleundervisningen i starten og tegningen av figurer der, siden de deltok aktivt, så dette var noe jeg tok med meg videre i planleggingen av neste time.

4.2 Undervisningstime 2 – Metoden med fullstendige kvadrater

Som forarbeid til den andre undervisningstimen hadde elevene sett videoen «Metoden med fullstendige kvadrater» (Thue, (u.å.)-b). I denne videoen presenteres det hvordan man kan bruke metoden med fullstendig kvadrat til å løse likninger. I timen gjorde vi i stor grad det samme som var gjort i videoen, men fokuset lå på det geometriske. Vi så derfor på hvordan vi kunne bruke det vi hadde lært om fullstendig kvadrat til å løse likningen $x^2 + 4x - 5 = 0$, geometrisk. Dette gjorde vi med en tavlegjennomgang som viste figurene underveis, likt figurene under.

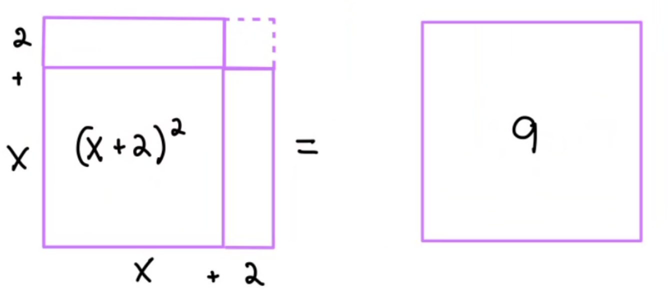


Figur 18: Undervisningsøkt 2 – løse likning geometrisk



Figur 19: Undervisningsøkt 2 – løse likning geometrisk med fullstendig kvadrat

Fra dette ser vi at likningen $x^2 + 4x - 5 = 0$ kan omformes til $(x + 2)^2 = 9$, og den kan vi fremstille geometrisk som to kvadrater slik det er presentert i figuren under.



Figur 20: Undervisningsøkt 2 – løsning geometrisk likning

Fra denne figuren kan man se at $x + 2$ skal være lik sidelengdene til et kvadrat med areal 9, og fra dette vil man kunne finne en løsning for x. Etter tavlegjennomgangen av denne oppgaven jobbet elevene selvstendig med oppgaver, og løste de både geometrisk og algebraisk.

Den siste delen av timen fikk elevene en utfordrende oppgave. Etter å ha jobbet med flere likninger på formen $ax^2 + bx + c = 0$, der alle koeffisientene a, b og c hadde tallverdier, skulle de nå forsøke å løse likningen helt generelt, med å bruke verktøyene og metodene vi hadde brukt mye tid på tidligere i timen. Denne delen av timen var lagt opp til at elevene skulle arbeide utforskende. Mange brukte en del tid på å komme i gang, så jeg ga et starthint på tavla, nemlig at vi deler alle ledd på a for å få likningen på en litt mer kjent form for dem. Formålet med dette var at elevene skulle gjøre seg opp en idé om hvordan man kan lage en generell løsning for andregradslikninger, før de i neste lekse-video ville få abc-formelen presentert.

Refleksjoner og endringer

I denne undervisningsøkten var det også Blomhøj (2016) og Freudenthal (1973) sine poeng fra utforskende undervisningsopplegg sammen med konseptene bak å bygge ny kunnskap på tidligere kunnskap ved å være med i prosessen med å danne den selv, som lå til grunn. Det var også her fokuset lå da elevene selv skulle bruke den kunnskapen de hadde, til å forsøke å utlede abc-formelen selv, da ideen med dette var at det skulle hjelpe dem på veien mot strukturforståelse og forståelse av sammenhengene i matematikken.

I ettertid av denne økten reflekterte jeg, i samtale med min praksislærer, over utfallet av økten, og særlig over oppgaven av utforskende karakter. Av mulige forbedringer vi diskuterte var tid et aspekt, men også arbeidsmåtene elevene var vant med fra før. Fra dette konkluderte jeg med at elevene trengte mer tid til selve utledningsoppgaven, men også kanskje til å i større grad å jobbe selv med geometrien og det visuelle, før de skulle begi seg ut på en algebraisk utledning.

4.3 Undervisningstime 3 - Andregradsformelen

I forkant av den tredje undervisnignsøkten hadde elevene også videolekse. I videoen som heter «Andregradsformelen» (Thue, (u.å.)-c), blir stegene i utledningen av abc-formelen gjennomgått. Altså den samme utledningen elevene selv startet på i timen før. Det vi brukte timen på var å se på den samme utledningen, men her med geometri som forsterkende forklaring. På tavla tegnet jeg derfor opp figurer slik det er vist i Figur 7 og Figur 8.

Videre ble timen brukt til å sammenfatte det vi hadde jobbet med tidligere, og forsøke å få frem at abc-formelen kom fra alt vi hadde jobbet med i de to timene, og at fremgangsmåten ikke var ulik, men kanskje vanskeligere å henge med på når den kun var algebraisk. Resten av tiden jobbet elevene videre med oppgaver.

Refleksjoner og endringer

I planleggingen av den siste timen vektla jeg sterkt å få frem sammenhengen mellom geometrien fra figurene og algebraen på utledningsvideoen elevene så som forberedelsen til timen. Dette var for å igjen fokusere på teorien om at det visuelle, og da særlig visuelle bevis var styrkende for elevenes forståelse, og i dette tilfellet, forståelse av beviset og utledningen av abc-formelen. De avsluttende refleksjonene av opplegget i sin helhet vil jeg komme tilbake til i diskusjonen og sluttordene i denne oppgaven.

5 Analyse og funn[8]

I dette kapitlet vil jeg legge frem resultatene av datainnsamlingen. Analysen av kvalitative studier kan både følge faste oppskrifter, eller være mer åpne. Som nevnt tidligere vil jeg her i oppgaven ta utgangspunkt i teori om innholdsanalyse fra Elo og Kyngäs (2008). Siden analysen baserer seg på mine subjektive tolkninger og resonnementer, er det særlig viktig å være bevisst min forforståelse. Alt fra planleggingen av undervisning til nå analysen av oppgaver påvirkes av min forforståelse og mine erfaringer. Både hvordan jeg fikk fagstoffet presentert da jeg selv gikk på videregående, og praksisperioder i løpet av studiet har vært med på å påvirke hvordan opplegget i denne studien har endt opp med å være. Derfor er det essensielt å gjøre forskningsprosessen og derunder analysen transparent, slik at leseren har mulighet til å vurdere overføringsverdien av funnene. I de neste delkapitlene vil jeg systematisk presentere funnene, og legge frem både de deduktive og induktive aspektene av analyseprosessen av de innsamlede elevbesvarelsene. Underveis vil jeg også trekke frem den deskriptive statistikken av datamaterialet, herunder antall elever som valgte ulike løsningsmetoder, og dette vil være med på å underbygge funnene i den kvalitative analysen.

5.1 Fremgangsmåte og analyseprosessen

I dette delkapitlet forklarer jeg hvordan jeg gikk frem for å analysere de innsamlede elevbesvarelsene. Da undervisningsopplegget var over, og besvarelsene fra utledningen av abc-formelen og oppgavene fra prøvene var samlet inn, var tiden inne for å starte analyseprosessen. For å kunne svare på problemstillingen; *Hvordan kan en undervisning som har til mål å legge til rette for at elevene sitter igjen med strukturforståelse av abc-formelen, se ut?*, var det viktig å finne en måte å kjenne igjen både strukturforståelse, men også regelforståelse fra de ulike besvarelsene elevene hadde levert inn, for å videre bruke dette som argumenter på hvorvidt undervisningen bidro til den ene eller andre typen forståelse. Siden jeg samlet inn både besvarelser av utledning fra den ene undervisningstimen, og løsninger fra en prøve elevene hadde, var fremgangsmåten for analyse litt ulik, og jeg vil derfor også dele dette kapitlet i to deler. Begge analysene vil jeg bygge på teorien om innholdsanalyse fra Elo og Kyngäs (2008).

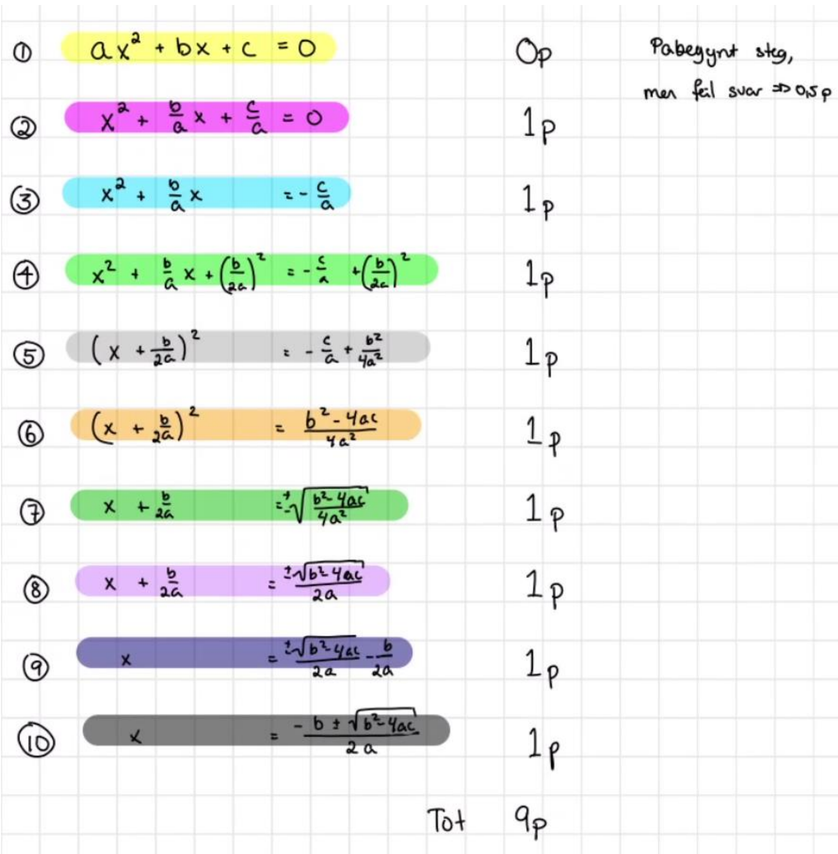
[8] Deler av teksten i dette kapitlet er identisk med tekst fra eksamen i emnet PFF-3101

5.2 Analyse av utledningsoppgaven

I dette delkapitlet vil jeg i korte trekk presentere tankene bak, og stegene i analysen av utledningsoppgavene elevene forsøkte å løse i løpet av den andre undervisningstimen.

Forberedelse

Forberedelsesfasen handler om å bli kjent med datamaterialet. Her hadde jeg på forhånd laget meg et fargekodingsskjema over utledingen av formelen, slik at jeg kunne gå inn i besvarelsene og finne ut hvor langt eller hvor mange steg de hadde klart.

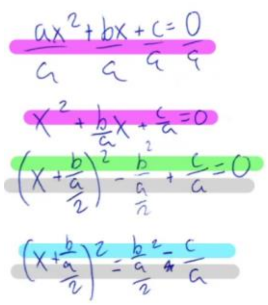


Figur 21: Analyse – stegene i abc-formel-utledningen og poengsystem

Hver farge her er et steg inn i den algebraiske utledningen av abc-formelen, som da følger metoden med fullstendig kvadrat. Samtidig satte jeg opp et poengsystem for å kunne få en overordnet gjennomsnittlig poengsum over klassens prestasjon.

Organisering

Da kategoriene var satt opp i første omgang ut fra hvor langt på vei i utledningen elevene kom, satte jeg meg ned og så på hva som så ut til å være årsaken til at elevene hadde stoppet på det steget de gjorde, og hva som så ut til å være hinderet for å komme videre. Her tok jeg i bruk greiner fra kunnskapstreet i Figur 12, som viste kunnskapspakkene som måtte være på plass hos en elev for at hun/han skulle kunne gjøre en slik utledning selvstendig, og brukte greinene derfra som nye kategorier å sortere datamaterialet inn i.



Figur 22: Analyse – eksempelbesvarelse fra oppgaven med å utlede abc-formelen

Figuren over viser et eksempel på hvordan fargekodingen så ut i en elevbesvarelse. Noen av stegene var en blanding av flere steg fra mitt oppsett over, og dermed falt enkelte linjer innunder flere fargekoder.

Rapportering

Til slutt sammenfattet jeg resultatene i en deskriptiv tabell for å se poengmessig hvor langt elevene kom, og kunne slik danne et gjennomsnitt over hvor langt de var kommet. Dette var fordi elevene i stor grad kom veldig kort på denne oppgaven, og derfor var statistikken en tydelig måte å vise prestasjonene i denne oppgaven. I tillegg gikk jeg nærmere inn på hver besvarelse, for å se på hvilke matematikkunnskaper og kunnskapspakker som så ut å være utfordrende i elevenes fremgang.

5.3 Analyse av oppgavene fra prøve

I dette delkapitlet vil jeg kort legge frem stegene i analysen av oppgavene fra elevenes matteprøve i temaet likninger. Dette var relevant for å vurdere elevenes strukturforståelse.

Forberedelse

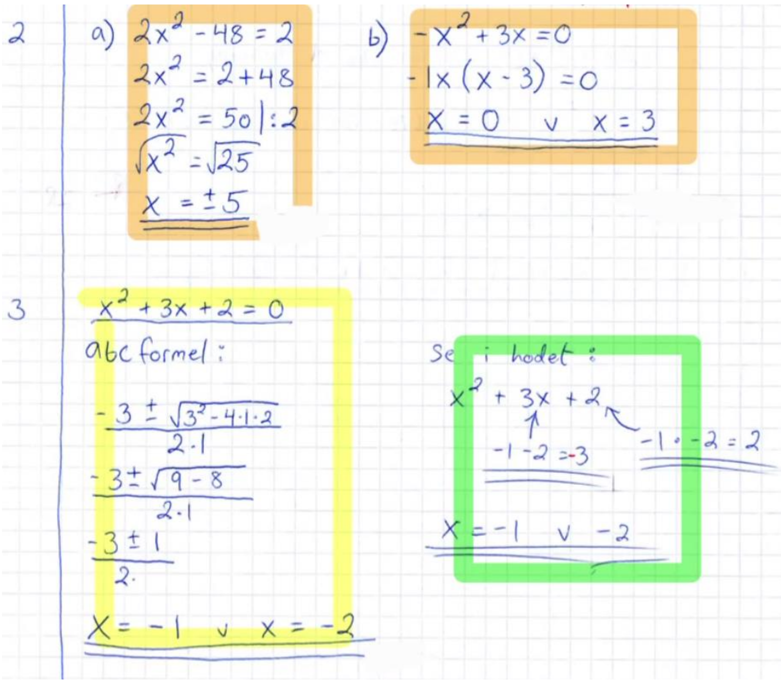
I forberedelsen av analysen av oppgavene laget jeg også ulike fargekoder, men her for hvilke løsningsmetoder elevene hadde benyttet seg av, vist i bildet under. Enkelte av disse lagde jeg på forhånd, mens andre ble til i møte med datamaterialet, da jeg så hvordan elevene hadde valgt å løse oppgavene.

Figur 23: Analyse – ulike løsningsmetoder på prøveoppgaver

Fullstendig kvadrat er metoden vist i kapittel 2.1.1. *Flytt og bytt og* $\sqrt{\square}$ går ut på å omforme likningen til formen $x^2 = c$ der c er et kvadrattall, mens faktorisering og produktregelen kan brukes når likningen er på formen $x(x \pm d) = 0$, for da vet man at enten den ene eller den andre faktoren må være lik 0. Abc-formelen er løsningsmetoden vist i kapittel 2.1.2, mens $+\ og\ \cdot$ *snarvei* er en løsningsmetode elevene lærte på et senere tidspunkt som baserer seg på at man finner de to løsningene $x_1 og x_2$ til likningen $x^2 + bx + c = 0$ ved relasjonen $x_1 + x_2 = -b$ samtidig som $x_1 \cdot x_2 = c$. Den siste fargekoden, Ingen/feil løsning, var dersom elevene enten ikke gjorde oppgaven, eller dersom det var betydelige feil.

Organisering

Da kategoriene var satt opp gjennomgikk jeg besvarelsene og markerte løsningene til elevene slik som vist under. Her vektla jeg i liten grad hvorvidt svarene var helt korrekte, dersom det var fortegnsfeil eller lignende, da det jeg ville fokusere på var hvilken metode de valgte å benytte seg av. På neste side er et eksempel på hvordan en av elevbesvarelsene så ut etter fargekodingen.



Figur 24: Analyse – eksempel fargekoding av en elevs prøvebesvarelse

En slik gjennomgang gjorde jeg med alle besvarelsene, og førte opp dataene i en tabell. Denne ga oversikt over hvilke metoder elevene benyttet seg av som en helhet, samtidig som enkeltbesvarelsene var gode bilder på selve løsningene de kom frem til.

Rapportering

Etter å ha gjennomgått alle elevbesvarelsene oppsummerte jeg løsningsmetodene elevene hadde benyttet seg av, på de ulike oppgavene, i en tabell. Dette gav anledning til å bruke deskriptiv statistikk for å få en helhetsoversikt over materialet, for å senere kunne drøfte årsaker til valgene elvene tok når det kommer til foretrukken løsningsmetode.

5.4 Funn

Etter at alle besvarelsene var gjennomgått etter oppskriften over, var neste steg å sammenfatte dette til funn. Forståelse er fortsatt et vanskelig fenomen å måle, og kanskje ekstra vanskelig kun basert på skriftlige elevbesvarelser. Derfor tok jeg her et steg tilbake og forsøkte å danne meg et overblikk over hva besvarelsene og resultatene fra elevarbeidene tydet på. I det videre oppsummerer og tolker jeg innsamlet data i de følgende fire hovedfunn om elevenes forståelseutbytte av undervisningen.

5.4.1 Funn 1: Svake matematikkunnskaper kom i veien for strukturforståelse av abc-formelen

Den første oppgaven jeg samlet inn fra elevene, var den de brukte de slutten av den andre undervisningsøkten på – der de skulle forsøke å utlede abc-formelen selv, gjennom diskusjon i små grupper. Dette viste seg fort i praksis være en utfordrende oppgave for elevene, og derfor gikk jeg rundt i klasserommet for notere ned hva de strevde med, samtidig som jeg underveis ga dem noen felles ledetråder.

Da jeg startet med å analysere besvarelsene innså jeg at for å komme til et punkt der elevene skulle klare å omforme det de hadde lært om fullstendig kvadrat, fra konkrete tall og figurer, til abstrakte bokstaver, var det mye matematikk som en forutsetning. En av utfordringene flere av elevene møtte på vises i figuren under.

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

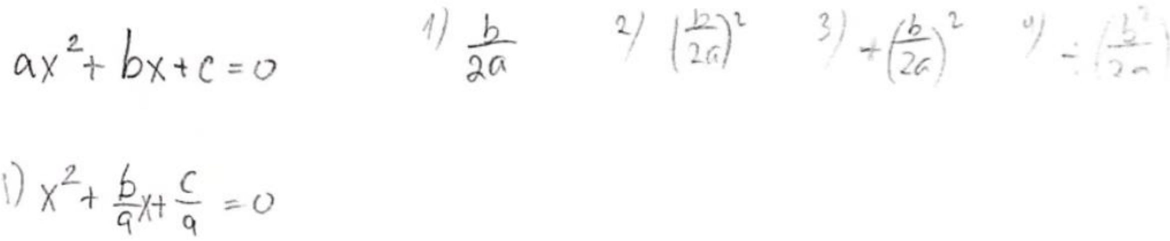
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 - \frac{\frac{b^2}{a}}{2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = \frac{\frac{b^2}{a}}{2} \cancel{4} - \frac{c}{a}$$

Figur 25: Elevbesvarelse - utlede abc-formelen, brudden brøk problematikk

I denne elevbesvarelsen kommer eleven tilsynelatende ganske greit i gang, men problemene hoper seg opp på grunn av brøkregningen. Utledningen blir derfor videre mer komplisert enn nødvendig og årsaken til at eleven ikke har kommet lengre, ser ut til å være regneferdigheter som ikke var tilknyttet metoden med fullstendig kvadrat. Problematikken med at det var grunnleggende matematiske ferdigheter som virket begrensende i oppgaven med å utlede abc-formelen, gjorde det vanskelig å avgjøre og kommentere typen forståelse knyttet til andregradslikninger ut fra disse besvarelsene. Likevel ga utledningene flere interessante resultater, blant annet vist i eksempelet i besvarelsen under.

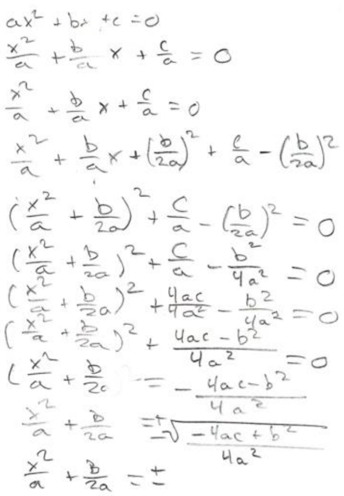


Figur 26: Elevbesvarelse - utlede abc-formelen, regelbasert automatikk – halvere, kvadrere, addere

Besvarelsen bærer her preg av en blanding av struktur- og regelforståelse. Det er tydelig at eleven har fulgt «halvere – kvadrere – addere»-oppskriften for å starte utledningen, som minner om regelforståelse. Samtidig krever en slik løsning en overføring fra det konkrete de er kjent med fra å løse oppgaver med tall, til noe mer abstrakt og generelt når det nå kun er snakk om bokstaver og koeffisienter, og dette aspektet av løsningen strekker seg mer mot å ligne en strukturforståelse hos denne eleven.

Stort sett bar besvarelsene til elevene preg av at oppgaven med å utlede abc-formelen var for vanskelig. De færreste kom noe lengre enn et par steg på veiFigur 25.

Figuren under viser den besvarelsen som inneholdt flest steg, og var nærmest den faktiske abc-formelen.



Figur 27: Elevbesvarelse. Utlede abc-formelen, eleven som kom lengst

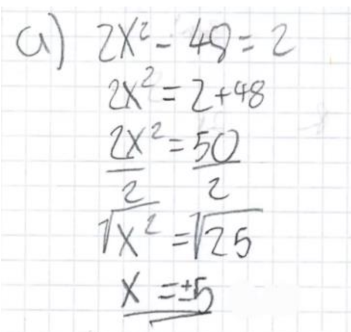
Her har altså eleven i stor grad klart å anvende metoden med fullstendig kvadrat i en ganske ny setting, og samtidig holdt styr på de (fleste) andre matematiske ferdighetene som er en del av kunnskapspakken for å komme i mål med utledningen.

Fra resultatene virket det derfor som at det var elevenes matematikkunnskaper på andre områder enn akkurat det vi hadde jobbet med i timene som var begrensende i deres vei mot strukturforståelse av formelen, når det kommer til det å utlede den. Samlet poengsum ved å klare hele utledningen, slik jeg hadde satt det opp, ville gitt 9 poeng. Gjennomsnittspoengsummen blant de elevene som gjennomførte var 1.89, altså svært lavt. Tabellen over poengene er vedlagt i slutten av oppgaven.

5.4.2 Funn 2: Enkelte elever foretrakk en regelbasert tilnærming gjennom abc-formelen, også i tilfeller der b- og c-leddet manglet

Da elevene en tid i etterkant av undervisningsopplegget skulle ha en prøve innen temaet *likninger*, var to av oppgavene ment til å kunne skille mellom om elevene viste en regelforståelse eller en strukturforståelse i løsningen av oppgavene. Dette var to oppgaver med andregradslikninger, der enten førstegradsleddet eller konstantleddet manglet. Dette gjør at oppgavene både kan løses med abc-formelen, men samtidig relativt enkelt løses utenom også. Formålet her var altså å kartlegge om elevene handlet på automatikk, og startet rett på abc-formelen idet de møtte en andregradslikning, da sistnevnte ville vært en indikasjon på en regelbasert forståelse. Det er også relevant å nevne at prøven var tre uker etter jeg hadde gjennomført mitt undervisningsopplegg med elevene. Fra disse prøvebesvarelsene fikk jeg derfor sett hvilke løsningsmetoder elevene satt igjen med, og valgte å bruke etter at flere uker var gått. Dette minsker sjansen for at løsningene kun besto av direkte reproduksjon av fremgangsmåter fra undervisningsøktene.

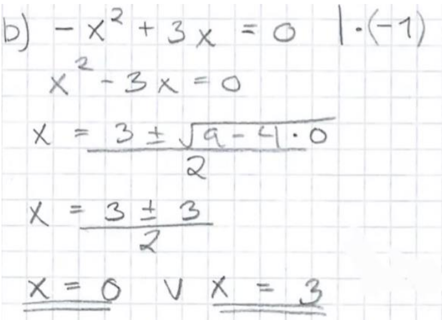
Oppgavene elevene skulle løse var: $2x^2 - 48 = 2$ og $-x^2 + 3x = 0$. Den første oppgaven var det ingen som løste ved hjelp av abc-formelen. Da var det klart for de fleste at de kunne få x alene på den ene siden, for så å ta roten på begge sider, slik som vist fra besvarelsen under.



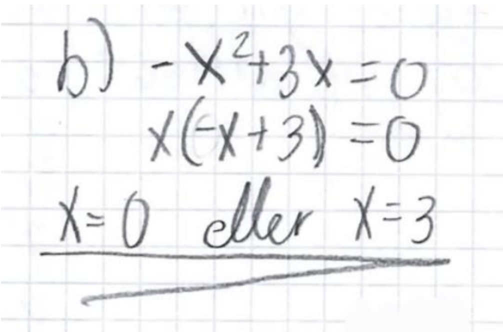
Figur 28: Elevbesvarelse – matematikkprøve, oppgave med andregradslikning uten b-ledd, kvadratrot-løsning

Bruken av denne metoden på denne oppgaven var ganske høy. Blant de 15 besvarelsene som ble samlet inn, var det 13 som valgte å løse den slik Figur 28 viser, men med noe variasjon i hvorvidt de husket å ta med den negative løsningen eller ikke. Hovedfunnet her er likevel at ingen valgte å automatisk følge oppskriften med abc-formelen, og de skjønte at likningen kunne løses annerledes.

På likningen som manglet konstantledd, var det større variasjon i elevenes løsninger. Fem elever valgte å bruke abc-formelen, fem elever brukte det som kalles produktregelen, mens de siste fem elevene svarte ingenting, eller feil. Bildene av elevbesvarelser under illustrerer de to ulike måtene elevene løste oppgaven på.



Figur 29: Elevbesvarelse – matematikkprøve, oppgave med andregradslikning uten c-ledd, løsning ved abc-formelen



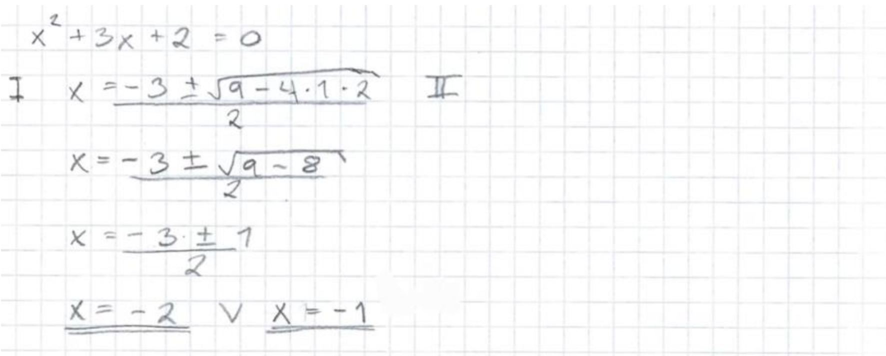
Figur 30: Elevbesvarelse – matematikkprøve, oppgave med andregradslikning uten c-ledd, løsning ved produktregelen

Slik oppgaven er løst i Figur 29 kan være et eksempel på regelforståelse, fordi abc-formelen trolig er brukt som en *oppskrift* som kan følges hver gang man møter en andregradslikning, sammenliknet med den andre løsningen der man tar i bruk faktorisering og produktregelen for å komme frem til resultatet.

Fra disse besvarelsene observerte jeg at på den ene oppgaven var det mange som løste likningen uten hjelp av abc-formelen, mens på den andre foretrakk mange tilsynelatende en regelbasert fremgangsmåte.

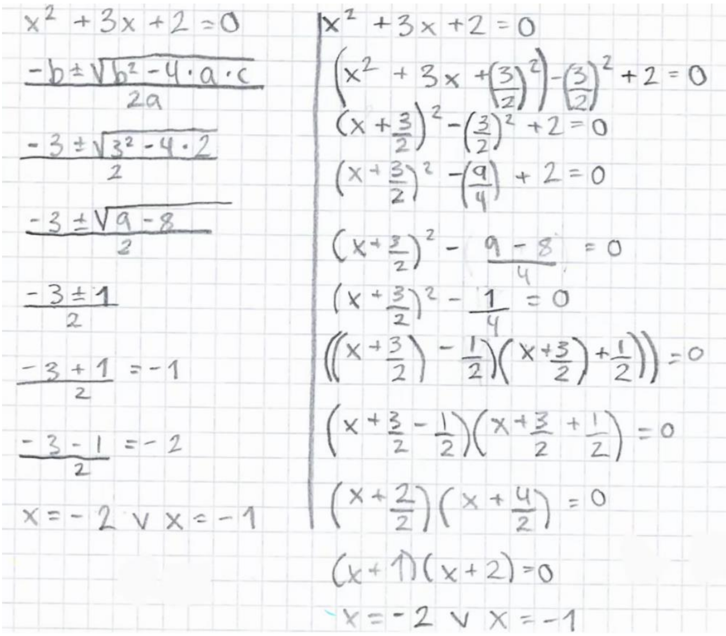
5.4.3 Funn 3: Elevene foretrakk en regelbasert tilnærming gjennom abc-formelen fremfor en geometrisk/visuell løsningsmetode

På prøveoppgaven der de skulle løse likningen, $x^2 + 3x + 2 = 0$, på to ulike måter, valgte **alle** elevene abc-formelen som sin ene metode, og lyktes. Her var hensikten med oppgaven å få elevene til å tenke forbi abc-formelen og finne ut av hvordan de valgte å løse likningen ellers. Dersom de mestret å bruke metoden med fullstendig kvadrat for å løse likningen i tillegg til abc-formelen, vil man kunne anta at det var en form for strukturforståelse. Da elevene skulle løse oppgaven ved hjelp av en alternativ metode, var det langt lavere suksessrate. Seks av 15 elever prøvde seg ikke på en annen metode som illustrert i besvarelsen vist under.



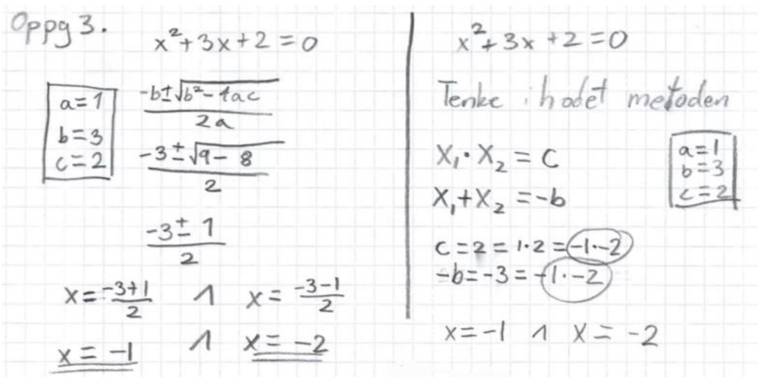
Figur 31: Elevbesvarelse – matematikkprøve, andregradslikning som skal løses med to metoder, kun løst ved hjelp av abc-formelen

Blant de elevene som løste den på en annen måte i tillegg til abc-formelen, var det 3 som brukte metoden med fullstendig kvadrat for å løse likningen, ikke alle kom helt i mål, men det kom tydelig frem at det var metoden de benyttet seg av. En av disse besvarelsene er vist i figuren på neste side.



Figur 32: Elevbesvarelse – matematikkprøve, andregradslikning som skal løses med to metoder, løst ved hjelp av abc-formelen og metoden med fullstendig kvadrat

Blant de resterende elevene var det flere som brukte en metode som var blitt gjennomgått i undervisningen gitt av klassens faste mattelærer, mellom timene jeg hadde med klassen, og tidspunktet de hadde prøven noen uker senere, slik som i elevbesvarelsen i figuren under.



Figur 33: Elevbesvarelse – matematikkprøve, andregradslikning som skal løses med to metoder, løst ved hjelp av abc-formelen og pluss- og gangemetoden

Fra disse besvarelsene kan vi trekke ut flere funn; både at elevene så ut til å sitte igjen med abc-formelen som sin foretrukne løsningsmetode for andregradslikninger. Et interessant tilleggsfunn her er samtidig at alle elevene klarte å løse likningen med abc-formelen som metode. Det ble også tydelig at metoden med fullstendig kvadrat ikke satt så godt hos majoriteten av elevene, da svært få benyttet seg av den, men at elevene virket trygge på abc-formelen som løsningsmetode.

5.4.4 Funn 4: Ingen av elevene brukte geometri eller figurer til hjelp i oppgaveløsning til tross for fokuset på det i undervisningen.

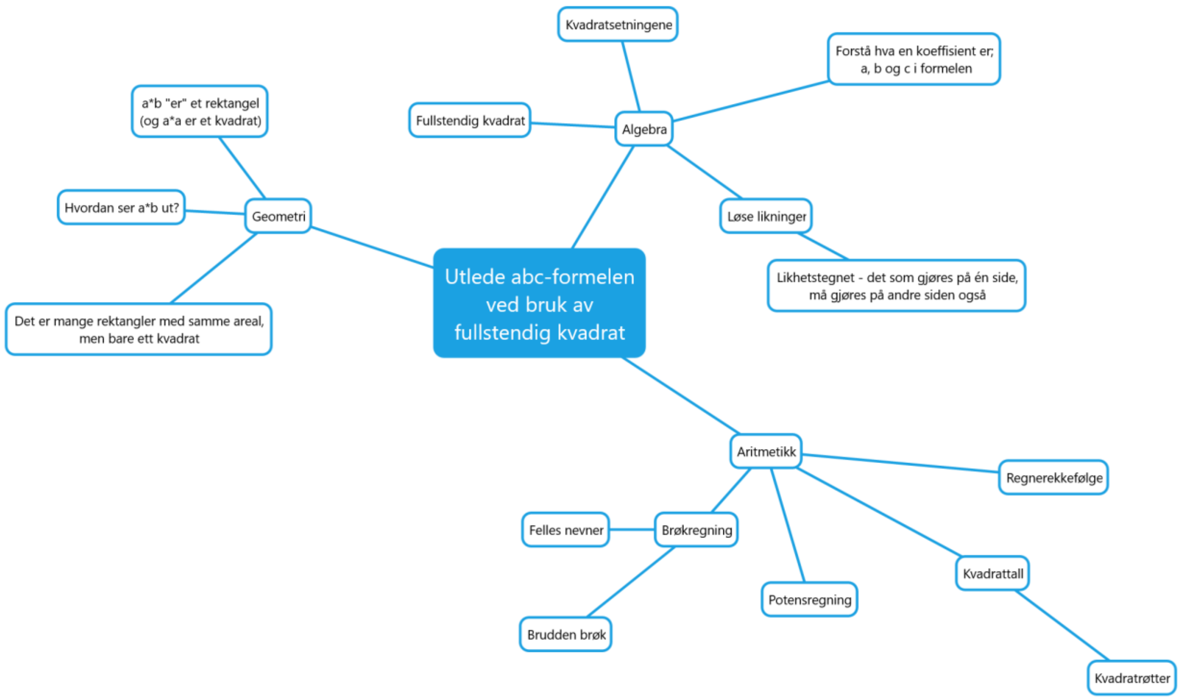
Et funn i etterkant av undervisningsopplegget, *utenfor* selve oppgavebesvarelsene, men som en helhetsobservasjon, var at ingen av elevene benyttet seg av geometri som hjelpemiddel i løsningene eller utledningen. I tavlegjennomgangen samt et av hintene elevene fikk felles da de skulle utlede formelen, var geometrisk fokusert. Alle oppgavene vi løste i fellesskap på tavla ble løst geometrisk for å fremme det visuelle, men da også med algebraen stående under. Likevel var det ingen elever som tegnet figurer som hjelp underveis, hverken under utledningsoppgaven, eller i prøvesammenheng.

6 Diskusjon

I dette kapitlet skal jeg drøfte funnene og analysen fra kapitlet over. Her vil jeg trekke sammenhenger med teorien fra teorikapitlet, og legge frem sammenhenger og årsaker til at resultatene på elevbesvarelsene ble som de ble. Videre vil jeg forsøke å sammenfatte funn og drøfting til svar på og problemstillingen.

6.1 Svake matematikkunnskaper kom i veien for strukturforståelse av abc-formelen

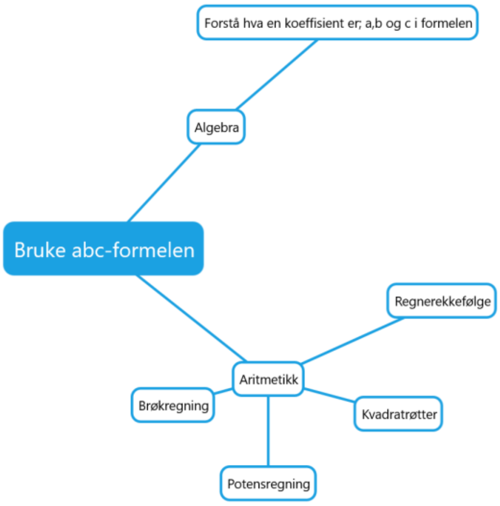
Fra analysen elevbesvarelsene der elevene skulle forsøke å utlede abc-formelen på egenhånd, kom det ganske tydelig frem at det var flere aspekter enn kun metoden med fullstendig kvadrat som hindret dem i å komme videre. Nedenfor har jeg igjen lagt ved et kunnskapspakken over hvilke matematiske konsepter jeg anser som nødvendige for å ha grunnlag og mulighet til å komme i mål med utledningen av abc-formelen ved hjelp av metoden med fullstendig kvadrat.



Figur 34: Kunnskapspakke – diskusjon, grunnlaget for utlede abc-formelen

Dersom forståelse mangler i én eller flere av disse boksene vil det kunne skape trøbbel når elevene selvstendig skal komme frem en generell løsningsformel for andregradslikninger. Fra besvarelsene vist i analysedelen fremgår både at grenen med brøkregning og brudden brøk var et hinder, og løse å likninger knyttet opp mot hva vi faktisk ønsker å finne ut, og hvorfor vi ikke kan dele på x.

Sammenligner vi dette kartet over kunnskapspakker, med et tilsvarende kart med konseptene elevene må mestre for å kunne bruke abc-formelen, ser vi at bildet er noe helt annet. Forventningene og kompleksiteten er langt lavere, og sannsynligheten for at elevene får til dette, vil dermed være langt større.



Figur 35: Kunnskapspakke – diskusjon, grunnlaget for å bruke abc-formelen

Fra figurene over ser man altså at det er langt mer som må være på plass, matematisk sett, hos eleven som skal kunne henge med på utledningen av abc-formelen algebraisk, sammenliknet med kun det å benytte seg av den som en «oppskrift». Kunnskapshull fra tidligere vil derfor i stor grad ha innvirket på suksessraten i forbindelse med utledningsoppgaven.

Maugesten (2011) skriver om et prosjekt for å undersøke forståelse hos studenter på muntlig eksamen. Her trekker hun ved flere anledninger mangelfulle forkunnskaper frem, som årsak til at studentene presterer svakere enn forventet. Dette gjør det også særlig viktig å fokusere på å starte undervisningen på et nivå der alle elevene henger med og har mulighet til å bygge videre på det de allerede kan, slik også Freudenthal (1973) skriver. Til utledningsoppgaven i mitt prosjekt ble det trolig for mange konsepter elevene måtte huske og ha kontroll på fra tidligere, og dette svekket prestasjonene. Den deskriptive statistikken underbygger dette. På utledningsoppgaven presterte elevene i gjennomsnitt med 1.89 av 9 poeng, som tilsvarer 21%. Sammenligner vi det tallet med oppgaven der elevene skulle løse en andregradslikning på to ulike måter, så var uttellingen 100% , når det kom til å løse oppgaven ved hjelp av abc-formelen. Dette viser tydelig at forkunnskaper spiller en viktig rolle, og at matematikk som bygger på færre grunnideer er lettere for elevene å henge med på.

6.2 Enkelte elever foretrakk en regelbasert tilnærming gjennom abc-formelen, også i tilfeller der b- og c-leddet manglet

Det neste funnet jeg gjorde var knyttet til hvorvidt elevene valgte en regelbasert tilnærming, også ved løsning av andregradslikninger der b- eller c-leddet manglet, hvor likningene derfor kunne vært løst lettere på en annen måte. Her så jeg at da b-leddet manglet var det ingen som valgte abc-formelen. Det har trolig en sammenheng med at den type andregradslikning er den første typen elevene møter på, og da introduseres de for løsninger ved bruk av kvadratrot, før abc-formelens automatikk kommer inn. På oppgaven som manglet c-ledd derimot, gikk mange rett til abc-formelen som løsningsmetode. Ved hjelp av definisjonene til Mellin-Olsen og Hoel (1984) kan vi kategorisere denne typen kompetanse som regelforståelse. Samtidig kan også dette henge sammen med det Yackel og Cobb (1996) skriver om sosiomatematiske normer i klasserommet. Hva som er etablert som en akseptabel løsning innad i klassen, og hva som er dannet som normen på hva det er nødvendig å lære seg og ikke, var allerede etablert i denne klassen på tidspunktet undervisningsopplegget mitt fant sted. Derfor kan det også ha påvirket læringsutbyttet til elevene i perioden, fordi de kanskje allerede hadde sine egne rammer for hvilken type forståelse de hadde behov for, og da trolig ikke strukturforståelse.

6.3 Elevene foretrakk en regelbasert tilnærming gjennom abc-formelen fremfor en geometrisk/visuell løsningsmetode

Oppgaven der elevene skulle løse én likning på to ulike måter endte, som vi så ovenfor, i stor grad med at elevene brukte abc-formelen og ga seg etter det. Årsakene til at dette var utfallet henger nok både sammen med funnene over, men sannsynligvis også hvordan læreverkene presenterer fagstoffet. Fra videoen om abc-formelen (Thue, (u.å.)-c), sies det ordrett at

> «…**du kommer aldri til å bli spurt i det her**. **Ingen kommer til å forlange at du skal kunne klare å gjøre denne utledningen** jeg gjorde nå, men det er en ting du skal kunne, og det er den nederste linja. Den nederste linja kaller vi for andregradsformelen. Den **må du pugge, du må kunne den utenat…»** [mine uthevninger]
>
> (Thue, (u.å.)-c)

Dette faller rett innunder det Mellin-Olsen og Hoel (1984) kaller en regelbasert forståelse, ved å nettopp pugge, huske og reprodusere. Forutsetningene elvene får fra læreverkenes side spiller dermed ikke helt på lag med det læreplanen tilsynelatende forventer av dem. Dette til tross for at temaene for alle undervisningsøktene hadde potensiale til å legges opp til å være visuelle, og dermed i større grad vektlegge forklaringer av de matematiske sammenhengene. Likevel ble ikke et eneste kvadrat tegnet i videoene fra Campus Inkrement, selv om det var fullstendig kvadrat som var i søkelyset. På grunn av dette får elevene presentert, fra læreverkenes side, en veldig regelbasert måte å lære å løse andregradslikninger på, gjennom huskeregelen «halvere – kvadrere – addere ». Dette styrker også de regelbaserte, sosiomatematiske normene.

Mann og Enderson (2017) har gjennomført en studie på hvilke løsningsmetoder elever oftest foretrekker, om det er formelbaserte løsningsmetoder, som kan sammenlignes med det jeg kaller regelbasert forståelse i denne oppgaven, eller om de foretrekker andre løsningsmetoder. Studien konkluderte med at både elever som normalt presterte over og under gjennomsnittet, valgte den regelbaserte løsningsmetoden fremfor det de beskriver som konseptuell løsningsmetode. De konseptuelle løsningsmetodene ligger nært det jeg i min oppgave kaller strukturforståelse. Det samme så ut til å være tilfellet hos mine elever. Løsningsmetoden som så ut til å i stor grad være foretrukket hos elvene var abc-formelen, altså en formel- og regelbasert løsningsmetode.

6.4 Ingen av elevene brukte geometri eller figurer til hjelp i oppgaveløsning til tross for fokuset på det i undervisningen

Det siste funnet jeg oppsummerte fra datamaterialet, handler om at til tross for stort fokus og mye tid brukt på geometri, visuelle forklaringer og tegninger på tavla, var det ingen elever som tegnet en eneste figur selv underveis i innsamlingen. Årsaken til dette er trolig sammensatt, og det henger kanskje mellom annet sammen med hvordan de lærte kvadratsetningene en gang i tiden. Kvadratsetningene spiller en stor rolle i fullstendig kvadraters metode, og det kunne vært fordelaktig å legge opp til geometriske forklaringer allerede der, for at det skulle være lettere for elevene å henge med på de geometriske forklaringene senere.

Videre vil de sosiomatematiske normene spille inn også her. Dersom man har etablert at normen er at matematikk i hovedsak handler om tall, bokstaver og regler, vil veien være lengre for eleven for å ta i bruk nye metoder videregåendealder. Det er likevel noe man bør forsøke å få til og arbeide for at elevene skal kunne benytte seg av geometri til hjelp dersom de ønsker. Samtidig erfarte jeg at det var vanskelig å endre i løpet av 3x90 min med undervisning. Det å knytte geometrien sammen med algebraen vil være nyttig å starte med tidlig i matematikkundervisningen, slik at kvadratet kan knyttes sammen med kvadratsetningene, og supplere forklaringene og sammenhengene allerede der. Da kan man få endret de sosiomatematiske normene, og i større grad se sammenhengene mellom de ulike emnene i matematikken. Dette poenget ble også understreket ved av Tønnesen (2016) trekker frem fra

TIMSS-undersøkelsen, som viser at vi starter for sent med algebra i norske skoler, samtidig som vi er for dårlige på å hjelpe elevene med å se de større sammenhengene.

6.5 Oppsummering

Funnene og diskusjonen over skal bidra til å svare på problemstillingen *Hvordan kan en undervisning som har til mål å legge til rette for at elevene sitter igjen med strukturforståelse av abc-formelen, se ut?* Ut fra det vi nå har sett kan man i korte trekk si at elevene i liten grad opparbeidet seg en strukturforståelse av abc-formelen i løpet av undervisningen, i hvert fall ut fra de definisjonene og rammene jeg hadde satt innledningsvis. Dersom vi definerer strukturforståelse av abc-formelen som at elevene skal forstå opphavet til formelen, hvorfor den fungerer og samtidig kunne lykkes med å løse likninger ved hjelp av den, kom ikke elevene helt i mål med det etter at undervisningsopplegget var gjennomført. Dette kom frem i flere deler av besvarelser og analyser, både ved utledningsoppgaven der de aller fleste elevene stod helt fast eller ga opp. Også på matematikkprøven da de skulle løse ulike likninger så det tilsynelatende ut som at flere handlet på automatikk, eller ikke visste hvordan de skulle gå frem uten hjelp fra abc-formelen. Dette er tydelige tegn på regelforståelse slik Mellin-Olsen og Hoel (1984) definerer det.

Samtidig kom det frem at alle elevene som deltok i det minste tilegnet seg en regelforståelse av formelen. Dette så vi fra at etter endt undervisningsopplegg klarte samtlige elever å løse andregradslikningen de fikk utdelt på prøven, på minst én måte, og alle hadde abc-formelen som en av sine metoder. Dette i seg selv var oppsiktsvekkende for min del. Til tross for at jeg ikke kan si at elevene endte med en strukturforståelse av abc-formelen, så hadde alle elevene regelforståelsen på plass godt nok til å løse oppgaven. Så videre kan man kanskje diskutere om denne regelforståelsen i dette tilfellet er *godt nok*?

Underveis i undervisningen ble jeg også bevisst på tanken angående om det er realistisk å forvente at alle elevene skal tilegne seg strukturforståelse innenfor ethvert matematikkemne, eller om det i flere tilfeller er mer realistisk å tenke at de fleste ender opp med en regelforståelse, samtidig som noen har kapasitet og lyst til å lære mer. Dette vil kanskje være mer realistisk ut fra at elevene som individer har ulike interesser og motivasjon for ulike tema og emner.

7 Avslutning

I dette kapitlet vil jeg sammenfatte teori, funn og diskusjon til svar på problemstillingen. Jeg vil også se på mulige forbedringspunkter og drøfte hva som kunne vært gjort annerledes.

7.1 Konklusjon

I lys av funnene over har jeg kommet frem til noen konklusjoner til problemstillingen *Hvordan kan en undervisning som har til mål å legge til rette for at elevene sitter igjen med strukturforståelse av abc-formelen, se ut?* Den første konklusjonen er at slik jeg la det opp ikke var en metode som fungerte optimalt. Det var trolig flere årsaker til akkurat det. Både tidsrammen opplegget skulle passe inn i, og de allerede etablerte sosiomatematiske normene i klasserommet spilte inn. Elevene er kanskje ikke vant med at det de har lært om geometri kan brukes som et visuelt hjelpemiddel for å forstå algebraen. Dermed så det heller ikke ut til å falle dem naturlig i dette tilfellet.

Som nevnt i metodekapitlet handler designforskning om **å prøve å finne ut av hvordan noe kan eller burde være, fremfor å se på hvordan det er i dag** (Bakker, 2019, s. 3). Selv om mitt undervisningsopplegg ikke ga direkte skriftlige resultater som kunne knyttes opp til å være strukturforståelse, tror jeg deler av undervisningen likevel var hensiktsmessig. Det å se at matematikken gir mening i den forstand at man ser hvor formlene har sitt opphav fra, er et viktig poeng mener jeg. Slik læreverkene jeg har sett på introduserer metoden med fullstendig kvadrat og abc-formelen, vektlegges ikke forklaringene på hvorfor man gjør det man gjør. Selv hadde jeg heller ikke reflektert over hvorfor fullstendig kvadrat skulle være akkurat et kvadrat, fordi denne ideen sjelden legges frem. Logikken bak det at dersom vi har noe uttrykt som et areal til et kvadrat sammenlignet med å ha det på rektangelform, er at dersom vi kjenner arealet til et kvadrat kjenner vi også sidelengdene, og dette er ikke tilfellet ved rektangelet. Det å i større grad vektlegge og få frem denne ideen til elevene, mener jeg at vil kunne bidra til en dypere forståelse hos elevene, og være med på å lede dem mot en strukturell forståelse.

Den neste konklusjonen jeg vil trekke frem, er at det kanskje ikke er realistisk å tenke at alle elever skal oppnå strukturforståelse innen alle emnene i matematikkundervisningen. Flere momenter vil spille inn på hvorvidt det er mulig eller ikke. Både fokus fra læreverk og lærerens side, og ikke minst også elevenes egen interesse og motivasjon. Læreplanen i 1T nevner blant annet at elvene skal forstå enkle bevis (Kunnskapsdepartementet, 2019), men begrepet *forståelse* utdypes ikke noe ytterligere. Ut fra dette kan man da tenke at regelforståelse vil være tilstrekkelig. Likevel er det også viktig at elevene kan se de matematiske sammenhengene, og vite at årsaken til at vi gjør ting i matematikken ikke er tilfeldig, men at metodene og reglene vi bruker har et logisk opphav. For å legge til rette for dette vil det være relevant å vektlegge sammenhengen mellom geometri og algebra innenfor likningsløsning, men også gjerne enda tidligere i skoleløpet. Jeg vil derfor presisere at selv om det kanskje ikke er realistisk å forvente strukturforståelse hos alle, vil det likevel være aktuelt å legge frem forklaringene, og tilrettelegge for muligheten. Fra mitt opplegg kom det frem at elevene i liten grad klarte å gjennomføre utledningen av abc-formelen selv, men det å ha sett at den henger sammen med matematikk de allerede kjenner til, vil likevel være med på å bygge forståelsen deres.

7.2 Forbedringspunkter

Forskningen min har flere begrensninger, og dersom jeg skulle gjennomført det hele en gang til, er det flere ting jeg ville gjort annerledes. En av hovedbegrensningene var tid. Rammene undervisningsopplegget skulle passe inn var i knyttet opp mot praksisperioden som la tidsmessige begrensinger når det kom til antall elev-timer jeg kunne bruke, og elev-progresjonen det skulle legges opp til fra time til time. Samtidig var undervisningen elevene var vant til å følge på den digitale læringsplattformen, lagt opp veldig regelbasert, etter min mening. Dette førte til at undervisningen trakk litt to veier, som kanskje også skapte vanskeligheter for opplegget. Dersom jeg hadde hatt flere timer tilgjengelig ville jeg også brukt tid på å repetere de viktigste delene sammen med elevene. Det kunne også vært med på å gi et annet resultat av studien.

En annen mulig forbedring til prosjektet er at jeg kunne hatt tettere elevoppfølging og gjennomført individuelle intervju med elevene. Dette ville i større grad fått frem elevperspektivet og kanskje et annet type mål av forståelse. Intervjuene kunne være direkte knyttet til elevens løsning av oppgavene fra timene og prøvene, og tankene bak løsningsmetodene der. Likevel valgte jeg å se på hva de satte igjen med «på papiret» da det er dette elevene blir målt på når de eventuelt kommer opp i eksamen, og opp mot de læreplanmålene som er gitt. I gjennomføring av prøver og på eksamen er det forståelse eller ikke som skal måles, og det måles ut fra elevenes skriftlige arbeid.

7.3 Avsluttende ord

Gjennomføringen av dette prosjektet har vært både lærerik og interessant. Hypotesen og utfallet jeg så for meg i forkant har i stor grad blitt endret og forkastet, og jeg har lært mye gjennom hele prosessen. Selv om prosjektet ikke endte slik jeg forventet, var det mye nyttig kunnskap og erfaring i de funnene jeg fikk.

I løpet av dette masterprosjektet har jeg lært og reflektert mye, særlig over egen undervisning. Prosjektet har gitt meg relevant og nyttig kunnskap jeg vil ta med meg inn i læreryrket som nyutdannet lærer. Jeg ser frem til å bruke egenskapene og læringen jeg har tatt til meg både i løpet av masteråret, men også utdanningen og praksisperiodene i sin helhet. Jeg håper videre at oppgaven min kan inspirere andre lærere til å fokusere på å visualisere algebraen ved hjelp av geometri, og at det vil kunne styrke elevenes forståelse innen begge emnene.

Referanseliste

Bakker, A. (2019). *Design research in education : a practical guide for early career researchers* (First edition. utg.). Routledge, an imprint of Taylor and Francis.

Befring, E. (1969). *Deskriptiv statistikk og målingsproblemer*. Universitetsforl.

Blomhøj, M. (2016). *Fagdidaktik i matematik*. Frydenlund.

Borge, I. C., Engeseth, J., Haug, H., Heir, O., Moe, H., Norderhaug, T. T. & Vie, S. M. (2020). *Matematikk 1T* (4. utgave, bokmål[utgave]. utg.). Aschehoug undervisning.

Campus Inkrement. ((u.å.)). *Campus Inkrement, Om Campus*. Campus Inkrement. https://campus.inkrement.no/Home/About

Dreyfus, T., Nardi, E. & Leikin, R. (2012). Forms of Proof and Proving in the Classroom. I (s. 191-213) (New ICMI Study Series). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_8

Elo, S. & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *J Adv Nurs*, *62*(1), 107-115. https://doi.org/10.1111/j.1365-2648.2007.04569.x

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel.

Grabiner, J. V. (2012). Why Proof? A Historian's Perspective. I (s. 147-167) (New ICMI Study Series). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_6

Irving, R. S. (2013). *Beyond the quadratic formula*. Mathematical Association of America.

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk fellesfag vg1 teoretisk (matematikk T) (MAT09-01)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat09-01/kompetansemaal-og-vurdering/kv42

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Routledge.

Mann, M. & Enderson, M. C. (2017). Give Me a Formula Not the Concept! Student Preference to Mathematical Problem Solving. *Journal for advancement of marketing education*, *25*, 15-24.

Matematikk.org. (u.å). *Løs en andregradslikning*. Matematikk.org. https://www.matematikk.org/artikkel.html?tid=154273

Maugesten, M. (2011). Muntlig eksamen. En analyse av åtte studenters forståelse på muntlig eksamen i matematikk. *Norsk pedagogisk tidskrift*, *95*(4), 260-272. https://doi.org/10.18261/ISSN1504-2987-2011-04-03

Mellin-Olsen, S. (1981). Instrumentalism as an Educational Concept. *Educational studies in mathematics*, *12*(3), 351-367. https://doi.org/10.1007/BF00311065

Mellin-Olsen, S. & Hoel, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet : en undervisninglære*. NKI-forl.

Olsen, R. V. & Björnsson, J. K. (2019). *Tjue år med TIMSS og PISA i Norge : Trender og nye analyser*. Cappelen Damm akademisk.

Postholm, M. B. (2020). *Kvalitativ metode : en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg. utg.). Universitetsforl.

Skaalvik, E. M. & Skaalvik, S. (2018). *Skolen som læringsarena : selvoppfatning, motivasjon og læring* (3. utg. utg.). Universitetsforl.

Staksrud, E., Kolstad, I., Bang, K. J., Bomann-Larsen, L., Fretheim, K., Granaas, R. C., Harpviken, K. B., Haugen, H. Ø., Jakobsen, K. A., Johnsen, R., Lie, M. H., Lile, H. S., Nevøy, A., Nilsen, T. K., Skilbrei, M.-L. & Enebakk, V. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora*. De nasjonale forskningsetiske komiteene.

Thue, B. O. ((u.å.)-a). *3.3 Fullstendige kvadrater*. Campus Inkrement. https://campus.inkrement.no/Home/CampusMatte_VGS

Thue, B. O. ((u.å.)-b). *3.4 Metoden med fullstendige kvadrater*. Campus Inkrement. https://campus.inkrement.no/EducationTeacher/Subchapter/865230?chapterId=4308526

Thue, B. O. ((u.å.)-c). *3.5 Andregradsformelen*. Campus Inkrement. https://campus.inkrement.no/Home/CampusMatte_VGS

Tønnesen, E. (2016). Algebra-trøbbel er kritisk. *Khrono*. https://www.khrono.no/timss-matemtaikk-naturfag/algebra-trobbel-er-kritisk/148370

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for research in mathematics education*, *27*(4), 458-477. https://doi.org/10.2307/749877

Vedlegg

Vedlegg 1: Deskriptiv statistikk

Statistikk – Tilhørende funn 1

Utlede abc											
Kandidat/steg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Sum
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	1	0	0,5	0	0	0	0	0	0	1,5
5	0	1	0	0,5	0	0	0	0	0	0	1,5
6	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0	1
8	0	1	0,5	0,5	0,5	0	0	0	0	0	2,5
9	0	1	0	0,5	0	0	0	0	0	0	1,5
10	0	1	0	1	0	0,5	0	0	0	0	2,5
11	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	5
12	0	1	0	0,5	0	0,5	1	0	0	0	3
13	0	1	1	0,5	0,5	0	0	0	0	0	3
14	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2
15	0	1	0	1	0,5	0	0	0	0	0	2,5
16	0	1	0	0,5	0,5	0	0	0	0	0	2
17	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
18	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Sum											34
snitt											1,88888889

Statistikk – Tilhørende funn 2

Oppgave/metode	FK	ABC	pulss&gange	Kvadratrot	Produktregel	Feil/ingen svar	sum	%abc	%ingen/feil s
2a) Kvadratrot				12	1	2	15	0,0 %	13,3 %
2b) Produkt		5			5	5	15	33,3 %	33,3 %

Statistikk – Tilhørende funn 3

Oppgave/metode	FK	ABC	pulss&gange	Kvadratrot	Produktregel	Feil/ingen svar	sum	%abc	%ingen/feil s
3 metode 1		14	1				15	93,3 %	0,0 %
3 metode 2	3	1	5			6	15	6,7 %	40,0 %

Vedlegg 2: Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet
"abc-formelen – forståelse og bevis"?

Formålet med prosjektet
Dette er et spørsmål til deg om du vil delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke sammenhengen mellom geometri, bevis og forståelse knyttet til løsning av andregradslikninger og utledning av abc-formelen.
Dataen som samles inn vil benyttes i en masteroppgave. I ettertid vil det forhåpentligvis også skrives en forskningsartikkel som benytter seg av samme data.

Prosjektet er den del av et masterstudium som skal belyse problemstillingen «**Hvordan kan vi som lærere gi elevene en relasjonell forståelse av andregradslikninger?»** Gjennom undervisning, oppgaveanalyse og intervju er målet å avdekke sammenhenger mellom inkludering av bevis i undervisningen, og matematisk, relasjonell forståelse.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får denne forespørselen fordi du tar teoretisk matematikk (1T), første året på videregående. Målgruppen for studien er alle elevene i denne matematikklassen, og utvalget er valgt ut fra tildeling av praksislærer på lektorstudiet jeg går på.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
UiT – Norges Arktiske Universitet, ved IMS – institutt for matematikk og statistikk, sammen med veileder Jan Roksvold og biveileder Hilja Huru er ansvarlige for personopplysningene som behandles i prosjektet.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Hva innebærer det for deg å delta?
- Forskningsprosjektet vil følge undervisningen, og undervisningsøktene vil være like for elevene som ønsker å delta, og de som ikke ønsker å delta.
- Datainnsamlingen vil bestå av innhenting av skriftlige oppgavebesvarelser i etterkant av timene og oppgaver fra matematikkprøver som omhandler andregradslikninger.
- I etterkant vil det kunne bli aktuelt å spørre noen av dere om å delta i intervju om løsningsstrategier på oppgavene. Ved intervjuene tas det lydopptak.
- **Alle besvarelser og intervju anonymiseres**.

Kort om personvern
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler personopplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Du kan lese mer om personvern på neste side.

Med vennlig hilsen

Jan Nyquist Roksvold (veileder)

Leni Nilsen (student)

Utdypende om personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Opplysningene vil

- anonymiseres fortløpende
- oppbevares med adgangsbegrensning på en plattform med flerfaktorautentisering
- kun være tilgjengelig for student, veileder og mattelæreren til klassen
- ikke være gjenkjennbare i publisert materiale

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.
På oppdrag fra Universitetet i Tromsø har personverntjenestene ved Sikt – Kunnskapssektorens tjenesteleverandør, vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- å be om innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende,
- å få slettet personopplysninger om deg,
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Vi vil gi deg en begrunnelse hvis vi mener at du ikke kan identifiseres, eller at rettighetene ikke kan utøves.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?
Prosjektet vil etter planen avsluttes 1.november 2024
Opplysningene vil da anonymiseres ved at personidentifiserbare opplysninger omskrives og fjernes. Alle lydopptak slettes.

Spørsmål
Hvis du har spørsmål eller vil utøve dine rettigheter, ta kontakt med:
Leni Nilsen, leni.a.nilsen@uit.no, tlf: 97584634 (student)
Jan Nyquist Roksvold, jan.n.roksvold@uit.no (veileder)
Vårt personvernombud: Annikken Steinbakk, personvernombud@uit.no

Hvis du har spørsmål knyttet til Sikts vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt på e-post: personverntjenester@sikt.no, eller på telefon: 73 98 40 40.

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «abc-formelen – forståelse og bevis», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ at skriftlige besvarelser med kan samles inn i etterkant av timer og vurderinger.
- ☐ å delta i intervju (ikke alle vil bli spurt om intervju i etterkant, men et lite utvalg).

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

Dato / navn

Vedlegg 3: Meldeskjema Sikt

Sikt

Meldeskjema

Referansenummer
688389

Hvilke personopplysninger skal du behandle?

- Navn
- Stemme på lydopptak

Prosjektinformasjon

Tittel
Bevis og forståelse

Sammendrag
Undersøke hvordan lærere kan tilrettelegge for relasjonell forståelse hos elever i undervisning av abc-formelen. Ønsker å undersøke dette ved å gjennomføre et undervisningopplegg i en VG1-klasse knyttet til abc-formelen. Videre ønsker jeg da å analysere resultatene av oppgaveløsning hos elevene, hvor det også kan bli aktuelt å intervjue noen av dem i etterkant, angående løsningsmetoder og tanker bak de samme oppgavene.

Hva er formålet med behandlingen av personopplysninger?
Samtykkeskjema for deltakerne samles inn og oppbevares. Oppgavebesvarelser vil samles inn og anonymiseres. Lydopptak i forbindelse med oppgavebasert intervju kan bli aktuelt, og de vil anonymiseres.

Dersom personopplysningene skal behandles til flere formål, beskriv hvilke
Veileder og masterstudent vil forbeholde seg muligheten til å skrive en forskningsartikkel på bakgrunn av dataene og masteroppgaven.

Ekstern finansiering
Ikke utfyllt
Type prosjekt
Master

Kontaktinformasjon, student
Leni Anita Berg Nilsen, lni087@uit.no, tlf: 97584634

Behandlingsansvar

Behandlingsansvarlig institusjon
UiT Norges Arktiske Universitet / Fakultet for naturvitenskap og teknologi / Institutt for matematikk og statistikk

Prosjektansvarlig
Jan Nyquist Roksvold, jan.n.roksvold@uit.no, tlf: 77646141

Er behandlingsansvaret delt med flere institusjoner?
Nei

Utvalg 1

Beskriv utvalget
Elevene i en matematikk-klasse på en videregående skole.

Beskriv hvordan du finner frem til eller kontakter utvalget
Skal være i praksis, og praksislærer har sagt ja til å være med på prosjektet, så elevene i denne klassen får spørsmål om å være med. Alle besvarelsene anonymiseres før de tas med i oppgaven.

Aldersgruppe
15 - 16

Hvilke personopplysninger vil bli behandlet om utvalg {{i}}? 1
- Navn
- Stemme på lydopptak

Hvordan innhentes opplysningene om utvalg 1?

Annet

Beskriv

Matematikkoppgaver som skal løses i løpet av matematikktimer. De leveres med navn for lærerens del, som vil benytte de i vurdering, men anonymiseres til alle formål i masteroppgaven. Kan bli aktuelt å intervjue noen av deltakerne i ettertid, da vil det være spørsmål knyttet til samme type matematikkoppgaver de vil få spørsmål om, og hvordan de har valgt å løse disse.

Lovlig grunnlag for å behandle alminnelige personopplysninger

Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Hvem samtykker for barn under 16 år?

Barn

Begrunn hvorfor foreldre ikke samtykker

Elevene i klassen er enten 15 eller 16 år og går i samme klasse. Ingen sensitive opplysninger skal deles. Det som skal samles inn er oppgavebesvarelser, og kanskje lydopptak i forbindelse med intervju om løsningsmetoder av oppgavene. Alt anonymiseres. Etter å ha snakket med dere i chat, har vi kommet frem til at 15-åringene kan samtykke selv i dette prosjektet.

Hvem samtykker for ungdom 16 og 17 år?

Ungdom

Informasjon til utvalg 1

Mottar utvalget informasjon om behandlingen av personopplysningene?

Ja

Hvordan mottar utvalget informasjon om behandlingen?

Skriftlig (papir eller elektronisk)

Informasjonsskriv

Samtykke_Sikt.docx

Tredjepersoner

Innhenter prosjektet informasjon om tredjepersoner?

Nei

Dokumentasjon

Hvordan dokumenteres samtykkene?

- Manuelt (papir)

Hvordan kan samtykket trekkes tilbake?

Ta kontakt via kontaktinfo til meg og veileder er oppgitt i samtykkeskjema, og i tillegg kan elevene ta kontakt med matematikklæreren dersom de ønsker å trekke seg, så vil hun videreformidle det.

Hvordan kan de registrerte få innsyn, rettet eller slettet personopplysninger om seg selv?

Ta kontakt via kontaktinfo til meg og veileder er oppgitt i samtykkeskjema, og i tillegg kan elevene ta kontakt med matematikklæreren dersom de ønsker innsyn, så vil hun videreformidle det.

Totalt antall registrerte i prosjektet

1-99

Tillatelser

Vil noen av de følgende godkjenninger eller tillatelser innhentes?

Ikke utfyllt

Sikkerhetstiltak

Vil personopplysningene lagres atskilt fra øvrige data?

Ja

Hvilke tekniske og fysiske tiltak sikrer personopplysningene?

- Fortløpende anonymisering
- Adgangsbegrensning

- Flerfaktorautentisering

Hvor blir personopplysningene behandlet?

- ?
- Mobile enheter

Hvem har tilgang til personopplysningene?

- Student (studentprosjekt)
- Prosjektansvarlig
- Interne medarbeidere
- Databehandler

Hvilken databehandler har tilgang til personopplysningene?

UiT bruker OneDrive med flerfaktorautentisering

Overføres personopplysninger til et tredjeland?

Nei

Avslutning

Prosjektperiode

09.10.2023 - 01.11.2024

Hva skjer med dataene ved prosjektslutt?

Data anonymiseres (sletter/omskriver personopplysningene)

Hvilke anonymiseringstiltak vil bli foretatt?

- Lyd- eller bildeopptak slettes
- Personidentifiserbare opplysninger fjernes, omskrives eller grovkategoriseres

Vil enkeltpersoner kunne gjenkjennes i publikasjon?

Nei

Tilleggsopplysninger