UiT NORGES ARKTISKE UNIVERSITET

Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Problemløsningsmønstre

En kvalitativ studie av elevers problemløsningsstrategier for numeriske tallrekker og geometriske mønstre

—

Vegar Sivertsen

Mastergradsoppgave i Lærerutdanning 5.-10. trinn. Mai 2016

LRU-3903 Mastergradsoppgave i matematikkdidaktikk

Sammendrag

Denne undersøkelsen har tittelen: Problemløsningsmønstre. Hensikten med oppgaven er å bedre forståelsen av hvilke problemløsningsstrategier som kommer til syne når elever løser oppgaver med tallrekker innenfor algebrafeltet.

Studien tar utgangspunkt i et konstruktivistisk kunnskapssyn, og har et kvalitativt forskningsdesign. Datainnsamlingen fant sted i to 9. klasser ved to skoler. Jeg har tatt i bruk oppgavebasert intervju som metode, og filmet de 10 elevene mens de har løst de ulike oppgavene. Videre transkriberte og kodet jeg datamaterialet, og ut i fra mitt konseptuelle rammeverk har jeg tolket det og sett etter mønster i valg av strategier.

Jeg har presentert de ulike strategiene som kommer frem av elevenes løsninger. Gjennom analysen fant jeg at elevene velger å ta i bruk flere av problemløsningsstrategiene og at strategivalget for de to første oppgavene er likt for nesten alle elevene. For den tredje oppgaven velger elevene ulike strategier for å løse oppgaven. Av strategivalg for oppgavene er det *se etter mønster* som elevene benytter seg flest ganger av, som nok henger mye med at oppgavenes tema er numeriske rekker og geometriske mønstre. Det kommer frem i funnene at noen av elevene benytter enkelte strategier for å sjekke svarene de får. Dette er likevel veldig individuelt da andre elever kun løser oppgaven uten å sjekke svaret de har fått.

Forord

Denne mastergradsoppgaven markerer slutten på en 5-årig lektorutdanning ved Universitetet i Tromsø. Arbeidet med å finne noe interessant å skrive om, innhente data og ikke minst skrive en avhandling, har vært lang og tung, men samtidig en veldig lærerik prosess. Her vil jeg trekke frem de som fortjener en takk.

Først og fremst vil jeg takke elevene som sa seg villige til å være med, uten dere hadde det aldri kunne blitt en oppgave. Jeg vil også takke skolene som tok meg imot, og stor takk til både lærere og rektor som har lagt til rette for at jeg fikk samlet inn det datamaterialet jeg trengte.

Så vil jeg rette en stor takk til min veileder Per Øystein Haavold for god hjelp gjennom hele prosessen og for å ha guidet meg inn på rett vei når jeg til tider har sporet av.

Venner og familie fortjener også en takk. For å ha spurt om hvordan oppgaven har gått, og for å ha prøvd å sette seg inn i det jeg har skrevet oppgave om.

Sist men ikke minst vil jeg takke samboeren min. For å ha stått opp ekstra tidlig og hatt både frokost og kaffe klar. For å ha gitt meg mulighet til å diskutere idéene mine og ikke minst for å ha støttet meg og hatt troen på meg.

Tromsø, mai 2016.

Vegar Sivertsen

Innholdsfortegnelse

Figurliste

Tabelliste

1 Innledning

1.1 Bakgrunnen for prosjektet

Fra egen tid i skole var min forståelse av problemløsningsoppgaver som aktiviteter som ble gjort for vi skulle «ha det litt gøy», eller så ble det brukt som en belønning for god innsats. Når jeg har vært ute i praksis og gjennom arbeid som vikar, har jeg observert at dette er et syn som stadig går igjen for matematikklærere. Gjennom lærerutdannelsen har jeg blitt bevisst problemløsning og hvordan det inngår i en fullstendig matematisk kompetanse, og jeg har blitt bevisst hvordan elever trenger matematikkoppgaver som stimulerer deres kreativitet og interesse for faget. Noe som slo meg var hvordan ulike problemløsningsstrategier kom til syne i løsningen av mine egne oppgaver, uten at jeg selv var klar over dette.

Samtidig har det vært mye oppslag i medier om norske elevers resultater i internasjonale undersøkelser. Resultatene fra PISA[1] 2003 gjorde det nødvendig for regjeringen å gjøre en endring. I 2006 kom kunnskapsløftet som skulle løfte norske elevers prestasjoner i skolen. Reformen innebar styrking av hovedområdet tall og algebra og de grunnleggende ferdighetene var nå tydeliggjort. Norske elever skulle ikke lengre være under gjennomsnittet, de skulle opp og frem sammenliknet med andre land. Resultatet fra PISA i 2012 (Kjærnsli & Olsen, 2013) og TIMSS i 2011 (Grønmo, Onstad, Nilsen, Hole, Aslaksen & Borge, 2012) har vist en forbedring, men at det fortsatt er et stykke å gå.

Singapore, et land som jevnlig scorer høyt på internasjonale undersøkelser (Kjærnsli & Olsen, 2012), har innført det som omtales som *Singapore-modellen*. Landet har hatt fokus på innføring av problemløsningsstrategier, oppskrifter på hvordan et problem skal løses, helt nede i barneskolen (Ng & Lee, 2007). Det menes at det økte fokuset på å lære elevene strategier for å løse problemer har hatt stor innvirkning på de gode resultatene. Problemløsningsstrategier er ikke et nytt begrep i skolen. «How to solve it», skrevet av George Pólya i 1945, satte begrepet for alvor på dagsordenen. Det er mange ulike måter å løse problemer, men ferdigheten er å vite hvilken strategi en skal bruke og når.

[1] PISA: Programme for International Student Assessment.

Jeg ønsker derfor i løpet av denne undersøkelsen å vise hvordan problemløsningsstrategier kommer til syne i løsning av problemer innenfor matematikkfaget, for å vise hvordan strategiene ofte benyttes av elever uten at det nødvendigvis har vært fokus på de ulike strategiene i undervisningen. Problemløsningsstrategier er ikke ensbetydende innenfor algebrafeltet, men resultatene i fra TIMSS 2011 viste at området elevene har størst problemer med er algebra. Derfor er det interessant å se hvordan de ulike strategiene kommer frem når elevene skal løse oppgaver innenfor et tema det er påvist vansker med.

1.2 Forskningsspørsmål

Forskningsspørsmålet mitt er:

> *Hvilke problemløsningsstrategier benytter ungdomsskoleelever seg av for løsning av numeriske rekker og geometriske mønstre?*

2 Teori

Teorigrunnlaget tar først for seg begrepsavklaring. Her defineres viktige begreper for oppgaven, som problem og problemløsning. Deretter modelleres algebraiske aktiviteter, og hvordan aritmetikk og algebra bindes sammen i skolesammenheng. Til slutt presenterer jeg mitt konseptuelle rammeverk, og hvordan det er syntetisert for å kunne svare på problemstillingen.

2.1 Begrepsavklaring

2.1.1 Hva er et problem?

Problemer har hatt en sentral plass i matematikkfaget i skolen helt tilbake til antikken (Schoenfeld, 2007a). Problemer kan oppleves som oppgaver som skal løses i løpet av matematikktimen, men problemer er ikke kun begrenset til matematikkundervisningen. Et problem er alt som forvirrer, skaper en utfordrende situasjon og gjør personer tvilende (Dewey, 1933). Kunnskapssenterets definisjon av problem er: «Et problem er dissonans mellom ønsket tilstand og opplevd tilstand» (Kunnskapssenteret, 2016). Posamentier og Krulik (1998) har denne definisjonen av et problem: «In essence, a problem is a situation that confronts a person, that requires resolution, and for which the path to the solution is not immediately known.» Lesh og Zawojewski (2007) definerer problemer som: «A task, or goal-directed activity, becomes a problem (or problematic) when the ”problem solver” need to develop a more productive way of thinking about the given situation»

Om en situasjon er et problem vil variere fra person til person, avhengig av personenes erfaringer og kunnskap til problemet. I omtale av hvordan elevene overkommer ulike problemer på skolen sier Posamentier og Krulik (1998) at «They tend to tackle problems based on their previous experiences. These experiences can range from recognizing a ‘‘problem’’ as very similar to one previously solved to taking on a homework exercise similar to exercises presented in class that day.» I tillegg til tidligere erfaringer må også personen se en nytteverdi av å løse problemet. Unenge & Wyndhamn (1988) skriver: «För att en uppgift i största allmänhet skall vara ett verkligt problem krävs enligt vår mening att den som möter problemet skav ilja finna en lösning.» Når definisjonene over sammenliknes ser man at det er en viss likhet for at en situasjon skal være et problem: Det er at det må være en utfordring, en kan ikke vite på forhånd hvordan oppgaven skal løses og personen som konfronteres med problemet bør se en verdi av å løse det.

Ser man til litteraturen kan problemer deles inn i to kategorier: problemer, som erdefinert ovenfor, og *rutineproblemer*. Polya (1957) om rutineproblemer: «In general, a problem is a «routine problem» if it can be solved either by substituting special data into a formerly solved general problem, or by following step by step, without any trace of originality, some well-worn conspicious example.» Olafsen & Maugesten (2015) snakker om rutineproblemer som trivielle problemer hvor elevene mekanisk bare skal følge en bestemt fremgangsprosedyre de har blitt vist tidligere. De skiller disse type oppgavene fra *egentlig problemløsning* med å benevne de som ferdighetstrening. «Little imaginative thinking is required of the students. In fact, we do not even consider these as problems; instead, we refer to them as exercises, whose purpose is simply to reinforce a particular method of solution via repeated use.» (Posamentier & Krulik, 1998) Et rutineproblem eksisterer når problemløseren allerede innehar en prosedyre eller en fremgangsmåte for å løse problemet, og ser at denne løsningen er hensiktsmessig (Mayer & Hegarity, 1996).

Elever må få mulighet til å reflektere over deres egne tankeprosesser og dermed bli bevisst på hinder og hvordan disse kan overkommes. Slike refleksjoner kalles *metakognisjon*, og er ikke bare ønsket for matematikkfaget, men også for den generelle, formative utdanningen av unge mennesker (Nosrati & Wæge, 2014). Hewitt (2001) poengterer at: «This kind of awareness is rarely revealed if a student is carrying out a routine task, such as reproducing a process again and again through an exercise, especially if their answers are correct. » (Hewitt, 2001, s. 41).

2.1.2 Et historisk perspektiv på problemløsning

Mønsterplanen fra 1987 introduserte for alvor problemløsing i matematikkundervisningen, der den utgjorde et hovedemne for faget. Der defineres problemløsning som en prosess som består av «å formulere problemet, å analysere problemet og komme fram til en løsningsmetode, å foreta de nødvendige beregninger og å vurdere fremgangsmåte og resultater» (Mønsterplanen, 1987). I L97 er følgende poengtert:

> På alle nivåer skal opplæringen i matematikk gi muligheter til å undersøke og utforske sammenhenger, finne mønstre og løse problemer. (Læreplan, 1997)

LK06 ga læreren mer frihet til å kunne selv velge arbeidsmåter enn L97. Problemløsning står likevel sentralt i den grunnleggende ferdigheten å kunne regne:

> Å kunne rekne i matematikk inneber å bruke symbolspråk, matematiske omgrep, framgangsmåtar og varierte strategiar til problemløysing og utforsking som tek utgangspunkt både i praktiske, daglegdagse situasjonar og i matematiske problem. (Kunnskapsløftet, 2013)

Fra et historisk perspektiv identifiserte Stanic og Kilpatrick (1989) tre syn på bruk av problemløsning i skolematematikken: problemløsning som kontekst, problemløsning som ferdighet og problemløsning som kunst.

Problemløsning som kontekst deler de inn i flere underkategorier: Problemløsning har blitt brukt for å *begrunne læring* av matematikk. For at elever skal se nytteverdien av matematikk er problemene som benyttes hentet i fra virkelighetsnære situasjoner (Stanic & Kilpatrick, 1989). Problemløsning har også blitt benyttet for å *motivere* elevene. Ved å være problemer elever kjenner fra hverdagen har elevenes motivasjonen for spesifikke temaer økt. Det har også blitt brukt som *rekreasjon*: som en belønning eller som et avbrekk fra matematikkundervisningen. *Å lære nye ferdigheter* har også vært et bruksområde for problemløsning. En planlagt sekvens av problemer kan introdusere elever for nye temaer og gi kontekst for å diskutere ferdigheter en trenger for å løse disse. Problemløsning som *øving*. Det er kanskje slik problemløsning ofte blir benyttet i skolen (Schoenfeld, 2007a): Elever blir vist en algoritme eller annen regnemåte, og får oppgaver de skal løse til den er innlært. Når problemløsning brukes som øving er det ikke lenger problemer elevene arbeider med, det er rutineproblemer, eller slik Olafsen og Maugesten (2015) omtaler det som «ferdighetstrening». Når problemløsning brukes som en kontekst for matematikk, er fokuset på å finne interessante og engasjerende oppgaver eller problemer som hjelper elevene se den matematiske idéen (McIntosh & Jarrett, 2000). Problemløsning blir en vei for å oppnå en annen kunnskap.

Problemløsning som ferdighet. De som står får et slikt syn ser på problemløsning som en egen del av matematikkfaget, enn noe som skal gå gjennom hele faget. I et slikt syn blir elevene lært problemløsningsstrategier og får trening på å ta strategiene i bruk. Det benyttes først oppgaver hvor elevene har fått fremgangsmåten og prosedyren for å løse den. Etter nok ferdighetstrening vil elevene ha innlært metoden og fått et nytt verktøy i sin «matematiske verktøykasse» (Schoenfeld, 2007a). Neste steg er at elevene blir introdusert for problemer, hvor ingen fremgangsmåte er beskrevet. Da må de selv ta i bruk de ferdighetene de har lært. Et slikt syn på problemløsning er å finne i M87 hvor det var en egen del av faget, men etter som LK06 har gitt læreren mer frihet til å velge har synet på problemløsning gått fra å bli brukt som en ferdighet til heller å gi matematikkfaget kontekst. Da spesielt som øving (Schoenfeld, 2007a).

Det siste synet er *problemløsning som kunst*. Dette synet, i sterk motsetning til de andre to, ser på problemløsning som selve hjertet i matematikken, om ikke matematikk i seg selv (Schoenfeld, 2007a). Verken aksiomer, teoremer, beviser, teorier, formler eller metoder er grunnen til matematikkens eksistens. Matematikk kunne nok ikke eksistere uten disse ingrediensene, men det matematikk egentlig dreier seg om er problemer og løsninger (Halmos, 1980, s. 519). Matematikeren best kjent for et slikt type syn er Pólya. Han innfører begrepet *moderne heuristikk* som prøver å forstå problemløsningsprosessen, spesielt de mentale operasjonene som er nyttige i en slik prosess (Pólya, 1957). Pólya oppmuntret matematikklærer til å heller introdusere matematikk som noe eksperimentelt og induktivt, enn å gi elevene ferdige regler og fakta.

2.1.3 Problemløsning som en prosess

Pólya skriver om problemløsning som en prosess i hans bok «How to solve it» fra 1945, og hvordan en kan systematisere denne prosessen. Systematiseringen av problemløsningsprosessen er delt inn i fire steg. Disse kaller han for *understanding the problem, devising a plan, carrying out the plan* og *looking back.* Andre forskere har liknende inndeling av problemløsningsprosessen. Mason, Burton & Stacey (2010) deler denne prosessen i 3 faser: *Entry, Attack* og *Review*. Schoenfeld deler denne prosessen i 6 deler: *read, analyze, explore, plan, implement* og *verify* (Schoenfeld, 2007a), som han bruker for å illustrere forskjellen på hvordan elever arbeider med et problem, og en matematiker.

Når en sammenlikner de ulike inndelingene av prosessene ovenfor kan en se tydelige likheter. De ulike innfallsvinklene til problemløsningsprosessen har fellestrekk: en må forstå problemet, lage seg en plan, gjennomføre den tenkte planen og validere svaret en har fått. Disse er stegene er veldig lik de introdusert av Pólya (1957), derfor vil Pólyas 4-stegs modell spille en viktig rolle for å identifisere hvilke strategier elevene tar i bruk i problemløsningsprosessen.

2.2 Algebra

Lee (1997) presenterte spørsmålet «Hva er algebra?» til matematikere, lærere, elever og forskere på matematikkundervisning. Til svar fikk han at algebra er *et tema i skolen, generalisert aritmetikk, et verktøy, et språk, en kultur, en måte å tenke på* og *en aktivitet*. Noe som kom spesielt frem i resultatene var at i alle intervjuene ble algebra sett på som en aktivitet, noe man gjør (Kieran, 2007). Ut i fra idéen om at algebra er en aktivitet, har Kieran laget en modell for å illustrere de ulike typene algebraoppgavene som brukes i skolen. Denne modellen kalles for GTG-modellen og deler algebraaktiviteter i 3 ulike typer: *generational, transformational* og *global/meta-level*.

Generational activity er aktiviteter hvor situasjoner, verdier, mønstre og forhold blir representert med algebraiske symboler, som er selve objektene i algebra (Kieran, 2007). Typiske oppgaver innenfor denne aktiviteten er a) likninger med ukjente eller variabler som representerer en problemsituasjon, b) uttrykk for generaliserte geometriske mønstre eller numeriske følger, og c) uttrykk for styrende regler for numeriske forhold (Kieran, 2007). Mye av begrepsforståelsen for algebraiske objekter oppstår innenfor genererende aktiviteter, derfor inkluderer disse aktivitetene også arbeid med variabler, ukjente og likninger (Kieran, 2007).

Transformational activity er ofte omtalt som de «regel-baserte» aktivitetene (Kieran, 2007). Disse aktivitetene inkluderer, for eksempel faktorisering, utviding, substituering av et uttrykk for et annet, løsning av likninger og ulikheter, forenkling av uttrykk, osv. En stor del av denne typen aktivitet omhandler det å endre den symbolske formen til et uttrykk eller en likning for å vedlikeholde likheten (Kieran, 2007).

Den siste kategorien er aktiviteter innenfor *Global/Meta-Level*. Dette er aktiviteter hvor algebra er brukt som et verktøy, men som ikke er eksklusivt for algebra (Kieran, 2007). Denne typen aktiviteter gir konteksten, meningsfølelsen og motivasjonen til å ta fatt i aktivitetene tidligere beskrevet innenfor generational og transformational (Kieran, 2007). Kieran nevner problemløsning, modellering, arbeid med generaliserbare mønstre, argumentasjon og bevisføring, komme med hypoteser og antakelser, observere forandringer i funksjonelle situasjoner, lete etter forhold eller struktur, som noen eksempler på aktiviteter innenfor denne kategorien (Kieran, 2007).

2.2.1 Fra aritmetikk til algebra - Numeriske rekker og geometriske mønstre

Algebra defineres ofte som *generalisert aritmetikk* (Kieran, 2007; Lee, 1997; Usiskin, 1988), og Vygotskij uttrykker forholdet mellom algebra og aritmetikk slik:

> One may say that the knowledge of the foreign language stands to that of the native one in the same way as knowledge of algebra stands to knowledge of arithmetic, enhancing it and turning it into a concrete application of the general algebraic laws. … algebra liberates the child from the domination of concrete figures and elevates him to the level of generalizations». (Vygotskij, 1934)

For å bygge en bro mellom aritmetikken som elevene har lært tidligere i undervisningsløpet og algebraen som nytt tema, har ofte *tallmønster* blitt tatt i bruk i skolesammenheng. Tallmønster omhandler et visuelt økende mønster (NCTM, 2000). Dette kan være et numerisk, algebraisk eller geometrisk mønster eller sekvens (Grønmo et al., 2012). Siden innlæring av nye matematiske begreper og områder fungerer bra dersom det er morsomt for elevene (Brekke et al, 2000), blir bruk av aktiviteter og oppgaver innenfor den siste kategorien i GTG-modellen[2] naturlig for innføringen av algebra. Tallmønstre har ofte blitt tatt i bruk siden de har gitt elevene konteksten til å forstå de genererende og transformerende idéene. Bruk av tallrekker og mønstre i innlæringen av algebra skaper et behov for et algebraisk språk, og kan dermed være motiverende for elevene (Bergsten et al., 2009). Når en

[2] Global/Meta-Level.

utforsker tallmønster, er fokuset på bruken av induktive resonnementer for å analysere sekvenser for å avdekke den bestemte rekkefølgen til tallene (Friel & Markworth, 2009).

2.3 Tidligere forskning

Posamentier og Krulik (1998) understreker at problemløsere ofte tar i bruk flere strategier for løsing av problemer og at det er sjeldent at kun én strategi tas i bruk. I følge Stipek, Salmon, Givvin og Kazemi (1998) knyttes bruk av flere problemløsningsstrategier opp mot elevenes indre motivasjon for matematikkfaget. Om eleven er mer motivert for faget, vil flere og mer kreative problemløsningsstrategier benyttes (Stipek et al., 1998).

I et studie fra 1988, ser Schoenfeld på hvordan matematikkundervisningen påvirker elevenes syn på matematikkfaget og dermed deres løsningsprosesser. Ved å gi elevene oppgaver og problemer som skal løses i løpet av få minutter sitter elevene med en forståelse av at alle matematikkoppgaver løses i løpet av kort tid. Hvis ikke, har du ikke forstått det matematiske ved det (Schoenfeld, 1988).

Andre studier (Schoenfeld, 2007a; Verschaffel & De Corte, 1997; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007) viser også at metakognisjon ofte er fraværende i elevers oppgaveløsning og at en typisk fremgangsmåte hos elevene er at de kjapt ser over problemet, velger seg en metode eller strategi, og gjennomfører denne. Selv om eleven ikke får til å løse oppgaven eller får galt svar, blir ikke andre metoder vurdert. Samme metode blir benyttet om igjen i et nytt forsøk (Schoenfeld, 2007a).

2.4 Rammeverk

Lage en plan, det andre steget i problemløsningsprosessen (Pólya, 1957), behøver bruk av problemløsningsstrategier (Charles & Lester, 1984). Siden problemer kan bli løst på ulike måter spiller problemløsningsstrategier en stor rolle i problemløsningsprosessen. Det hjelper heller ikke kun å vite om de ulike problemløsningsstrategiene som finnes. En må også vite når og hvordan en skal ta disse strategiene i bruk (Pólya, 1957).

For å kategorisere hvilke strategier elevene benytter seg av, blir det nødvendig å avklare hvilke mulige strategier som er aktuelle for undersøkelsen. Pólya lister i sin bok opp 67 forskjellige tommelfingerregler[3] og hvordan disse kan tas i bruk, dette har vært utgangspunkt for senere forskning. Posamentier og Krulik (1998) har tatt 10 strategier de anser som spesielt godt egnet som verktøy for å løse matematiske problemer. Disse strategiene er *jobbe bakover, se etter mønster, se fra en annen synsvinkel, forenkling, vurdere ekstreme tilfeller, tegn en figur, gjett og sjekk, organisere datamaterialet, gjøre rede for alle muligheter* og *logisk resonnement*. Posamentier og Kruliks strategier ble tatt utgangspunkt i siden dette er strategier som går igjen i andre studier og forskning på problemløsningsstrategier (Charles & Lester, 1984; Lesh & Zawojewski, 2007; Grevholm, Riesbeck & Taflin, 2013; Kongelf, 2011; Persson, 2014).

I tillegg til disse strategiene er det også en dimensjon av oppgavene som omhandler overgangen fra aritmetikken til algebra. Pólya (1957) skriver om å ta problemet fra det spesielle til det generelle som en tommelfingerregel. I min undersøkelse er *generalisering* når elevene gjør nettopp det, tar problemet fra aritmetikken til det algebraiske språket. Dette er likevel en problemløsningsstrategi da den kan bli benyttet tidligere i oppgavene. En mer detaljert beskrivelse av hver strategi og hvordan den kan benyttes til å løse et problem følger under.

2.4.1 Jobbe bakover

Posamentier og Krulik (1998) sier at når det det er et unikt endepunkt og mange måter og komme seg til starten, vil *jobbe bakover* kunne være en god strategi: «When the goal is unique, but there are many possible starting points, a clever problem solver begins to work backwards from the desired conclusion to a point where the given information is reached.» Et eksempel på et matematisk problem hvor *jobbe bakover* er en nyttig strategi er presentert nedenfor (Posamentier & Krulik, 1998, s. 20):

> **Problem 1**
> Summen av to tall er 12, og produktet av de samme to tallene er 4. Finn summen av de to tallenes multiplikative invers.

[3] Omtalt i litteraturen som heuristics.

Mange vil nok begynne å lage seg to likninger: $x + y = 12$ og $xy = 4$, hvor x og y representerer de to ukjente tallene, og substituere. Om det da ikke gjøres regnefeil vil man ende opp med $x = 6 \pm 4\sqrt{2}$ og $y = 6 \pm 4\sqrt{2}$. Videre må en finne ut $\frac{1}{6 \pm 4\sqrt{2}}$ og til slutt summen av disse. Dette vil gi oss svaret på problemet, men en mer effektiv måte vil være å begynne fra slutten: vi ønsker å finne ut $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Hvis vi nå adderer disse får vi $\frac{x+y}{xy}$. Siden $\mathrm{x} + \mathrm{y} = 12$ og $\mathrm{xy} = 4$, får vi $\frac{12}{4} = 3$ som er svaret til problemet.

2.4.2 Se etter mønster

Se etter mønster er en strategi som innebærer enten å finne et mønster eller å utvide mønsteret for å gi svaret på et spørsmål. Mønster i matematikken er noe folk flest vil tenke seg forbeholdt geometri, men en matematiker vil kunne finne mønster i andre områder i tillegg til geometrien (Posamentier & Krulik, 1998). Matematikeren W. W. Sawyer sa en gang at matematikk er leting etter mønstre. Et eksempel på hvordan et problem kan løses med *se etter mønster* under (Posamentier & Krulik, 1998, s. 43):

> **Problem 2**
> Hva står på enerplassen til 8^{19}?

Posamentier og Krulik (1998) sier at mange elever vil angripe dette problemet ved å taste det inn i kalkulatoren. Elevene vil raskt kunne finne ut at de fleste kalkulatorene ikke vil kunne gi de svaret da displayet ikke er stort nok til å vise alle sifrene. Dermed trenger vi en annen måte å angripe problemet på. Her er *se etter mønster* en god strategi:

Vi kan prøve å sette opp tallene i rekkefølge med økende eksponent for å se om vi finner et mønster:

$8^1 = \underline{8}$

$8^2 = 6\underline{4}$

$8^3 = 51\underline{2}$

$8^4 = 4{,}09\underline{6}$

$8^5 = 32{,}76\underline{8}$

$8^6 = 262{,}14\underline{4}$

$8^7 = 2{,}097{,}15\underline{2}$

$8^8 = 16{,}777{,}21\underline{6}$

Når man setter opp tallene slik ser man med en gang et mønster: sifferene gjentar seg for hvert fjerde ledd. Eksponenten vi er ute etter er 19 som gir oss 3 i rest når vi deler med 4, dermed vil sifferet på enerplassen til 8^{19} være det samme som 8^{15}, 8^{11}, 8^{7}, 8^{3}, som vi kan se er 2.

2.4.3 Se fra en annen synsvinkel

Den typiske matematikkundervisningen elevene får i skolen gir de trening på å løse oppgaver på en bestemt, lineær måte. Elevene vil kunne komme frem til et svar, men er ikke nødvendigvis den mest effektive måten å komme frem til det. Om elevene ikke får til å løse oppgaven, vil de ofte prøve å løse oppgaven på nytt med akkurat samme metode (Posamentier & Krulik, 1998). Strategien *se fra en annen synsvinkel* er å tenke på problemet fra et annet perspektiv. Nedenfor er et problem hvor strategien kan bli brukt:

Problem 3

Finn verdien av uttrykket når x = 4:

$(x-10)(x-9)(x-8)\ldots(x-3)(x-2)(x-1).$

Problemet kan løses ved at elevene skriver ut alle de 10 leddene, setter in 4 for x og så multipliserer. Men benytter en seg av *se fra en annen synsvinkel* vil man kunne identifisere at et av leddene er $(x-4)$. På grunn av at denne faktoren vil ha verdien 0 når $x=4$, vil hele uttrykket også ha verdien 0. Dermed er problemet løst ved å på det fra en annen vinkel.

2.4.4 Forenkling

Om vi ikke kan løse et problem slik det står skrevet, kan en metode være å løse et liknende, enklere problem (Pólya, 1957), eller å benytte seg av mer håndterlige tall for det opprinnelige problemet. Selv om ikke svaret vi får ut av denne metoden vil være korrekt for problemet vi vil løse, vil den kunne gi oss en pekepinn på hvordan vi skal gå frem for å løse det opprinnelige problemet (Posamentier & Krulik, 1998). Et problem hvor *forenkling* kan benyttes er presentert under:

Problem 4

Hva er produktet av $0.\overline{333}$ og $0.\overline{666}$?

Mange problemløsere vil nok prøve å taste tallene inn på kalkulatoren, men hvordan taster man inn et uendelig desimaltall? *Forenkler* man oppgaven kan man i stedet benytte seg av desimaltallenes brøkform:

$$0.\overline{333} = \frac{1}{3}, 0.\overline{666} = \frac{2}{3}$$

Nå kan man regne ut $\frac{1}{3} * \frac{2}{3} = \frac{2}{9} = 0.\overline{222}$.

2.4.5 Vurdere ekstreme tilfeller

Vurdere ekstreme tilfeller som strategi er når problemløseren prøver seg med en veldig høy og en veldig lav verdi for variablene, og ser resultatet av disse forsøkene. Vi kan modifisere problemet vi arbeider med, variere det, se etter et utvidet spesielt tilfelle eller et ekstremt tilfelle (Pólya, 1957). Posamentier og Krulik (1998) sier at vi ofte benytter oss av en slik strategi i dagliglivet: «Worst-case scenario» er et begrep mange er kjente med. Et problem hvor en slik strategi kan bli benyttet (Posamentier & Krulik, 1998, s.120):

Problem 5
I en skuff er det 8 blå, 6 grønne og 12 svarte sokker. Uten å se, hva er minste antall sokker du må ta med deg for å være sikker på at du får ett par med svarte sokker?

For å løse et slikt problem kan en tenke seg det mest ekstreme tilfellet, eller «worst-case scenario». Dette vil være at vi tar med oss 8 blå og 6 grønne sokker, før vi tar en eneste svart sokk. Siden vi skal ha 2 svarte sokker og tenker oss at vi kommer til å trekke 8 blå og 6 grønne sokker før vi tar med oss de svarte, må vi ta med oss totalt 16 sokker for å være sikker på at vi får med ett par svarte.

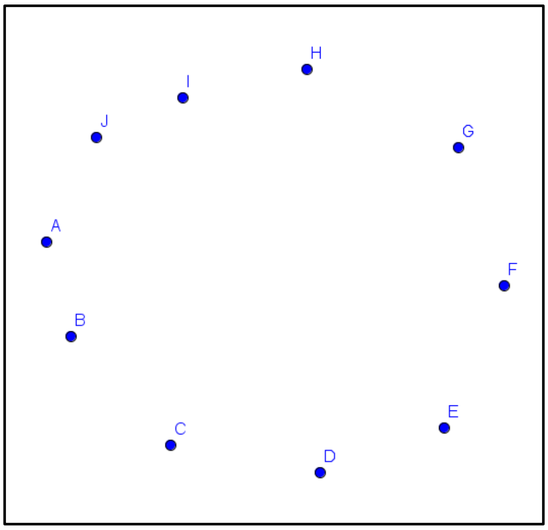
2.4.6 Tegn en figur

Tegn en figur er å tegne figurer eller geometriske former er enten for å få oversikt over et problem, eller for at selve figuren som er tegnet vil gi løsningen (Pólya, 1957). Et problem som løses ved hjelp av denne strategien er presentert nedenfor (Posamentier & Krulik, 1998, s. 11):

Problem 6

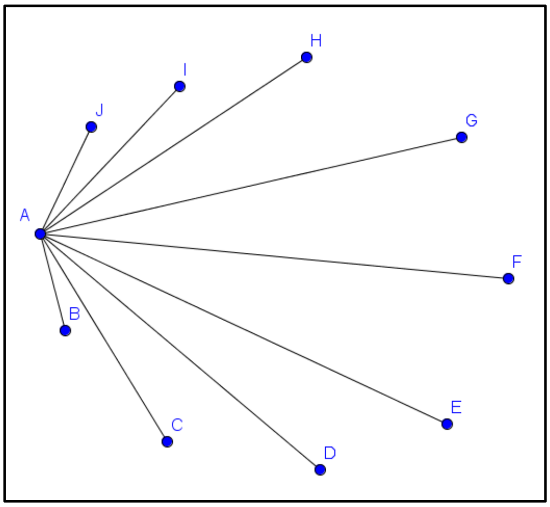
Det er 10 personer i et rom. Alle skal håndhilse på hverandre. Hvor mange håndtrykk blir det?

Om en benytter seg av *tegn en figur* kan man tegne opp et diagram:



Figur 1: Steg 1 - Tegn en figur (Laget i GeoGebra)

Nå kan vi tegne inn linjestykker fra punkt A til de andre 9 punktene. Dette representerer de første 9 håndtrykkene:



Figur 2: Steg 2 - Tegn en figur (Laget i GeoGebra)

Videre fra punkt B vil det nå være 8 mulige håndtrykk (siden A har hilst på alle, inkludert B). På samme måte vil det være 7 mulige håndtrykk fra C (AC og BC er allerede tegnet). Slik vil det fortsette helt ned til I, da J ikke kan hilse på seg selv. Dermed blir det totalt $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ håndtrykk.

2.4.7 Gjett og sjekk

Gjett og sjekk er ofte referert til som en «prøve og feile» -metode, men dette er en veldig enkel oversettelse da selve strategien i seg selv er svært sofistikert (Posamentier & Krulik, 1998). Når en benytter seg av denne strategien, gjør man en gjetning og tester dette opp mot betingelsene til problemet. Hver påfølgende gjetning bygger på informasjon innhentet fra den foregående gjetningen (Pólya, 1957; Posamentier & Krulik, 1998). Et problem som kan løses ved hjelp av *gjett og sjekk* er presentert under:

> **Problem 7**
> To positive heltall har 5 som differanse. Legger man sammen kvadratroten til de to tallene er summen også 5. Hva er tallene?

En tradisjonell fremgangsmåte vil være å sette opp likninger og substituere. Da ender man opp med $4x^2 + 20x = 4x^2 - 80x + 400$, og får til slutt $x = 4, y = 9$. Denne metoden krever åpenbart at problemløseren har kjennskap til likninger og algebraisk manipulasjon. I stedet kan en benytte seg av *gjett og sjekk*. Siden summen av de to kvadratrøttene er 5, må de individuelle kvadratrøttene enten være 4 og 1, eller 3 og 2. Dermed er heltallene enten 16 og 1, eller 9 og 4. Kun 9 og 4 har 5 som differanse og derfor må disse tallene være løsningen på problemet.

2.4.8 Organiser datamaterialet

Organiser datamaterialet er å lage en oversikt over datamaterialet i problemet slik at det blir mer oversiktlig og tydelig (Posamentier & Krulik, 1998). For å gjøre et komplekst problem enklere kan problemløseren omorganisere dataene for å løse problemet på en enklere måte (Posamentier & Krulik, 1998). Et eksempel på et problem som kan løses ved hjelp av denne strategien under:

> **Problem 8**
> Legg sammen:
> $20 - 19 + 18 - 17 + 16 - 15 + 14 - 13 + 12 - 11$

I stedet for å regne ut fra venstre til høyre kan en ta i bruk *organiser datamaterialet* slik:

$$
\begin{aligned}
&20-19+18-17+16-15+14-13+12-11\\
&=(20-19)+(18-17)+(16-15)+(14-13)+(12-11)\\
&=1+1+1+1+1=5.
\end{aligned}
$$

2.4.9 Gjøre rede for alle muligheter

Gjøre rede for alle muligheter er å overveie alle muligheter for å se etter det som passer best. Spesielt i problemer som omhandler sannsynlighet, hjelper det å kunne se alle muligheter innenfor utfallsrommet (Pólya, 1957). Likevel, for at strategien skal være brukende er det helt nødvendig å gjøre rede for *alle* mulighetene. Om problemløseren ikke kan gjøre rede for alle mulighetene på en organisert og oversiktlig måte, gjøres det ofte feil (Posamentier & Krulik, 1998). Et eksempel på et problem hvor strategien kan benyttes er gitt under (Posamentier & Krulik, 1998, s. 190):

Problem 9

Hvis en bruker 4 kronestykker til å kaste kron og mynt, hva er sannsynligheten for at minst 2 kronestykker viser kron?

Naturligvis vil en kunne ta i bruk metoder for sannsynlighetsregning om en vet hvilken formel en må ta i bruk. Likevel er det veldig enkelt å bare skrive opp alle mulighetene og så se når det er 2 av kronestykkene viser kron:

KKKK	**KKKM**	**KKMK**	**KMKK**
MKKK	**KKMM**	**KMKM**	**MKKM**
KMMK	**MKMK**	**MMKK**	KMMM
MKMM	MMKM	MMMK	MMMM

Fet skrift markerer utfall hvor minst 2 av myntene viser kron. Det er 11 tilfeller av dette, dermed er sannsynligheten for at minst 2 av kronestykkene viser kron lik $\frac{11}{16}$.

2.4.10 Logisk resonnement

Logisk resonnement er en strategi som benyttes i flere situasjoner i dagliglivet. Som matematikklærer sier man ofte at elevene må tenke logisk, og man prøver å lære de til å ta i bruk slike logiske tankeprosesser (Posamentier & Krulik, 1998). Uten å bruke tid på algebraiske regneoperasjoner kan problemløser bruke resonnementer til å finne svaret på det de er ute etter. Et eksempel på hvordan denne strategien kan benyttes for å løse et problem er gitt under (Posamentier & Krulik, 1998, s. 230):

Problem 10

Finn alle verdier for *x* som tilfredsstiller likningen:

$$4 - \frac{3}{x} = \sqrt{4 - \frac{3}{x}}$$

Den vanligste måten å angripe oppgaven på er å kvadrere begge sider av likhetstegnet. Dette krever nøyaktig algebraisk manipulasjon. I stedet kan en løse oppgaven på en mye enklere måte: Det finnes bare 2 reelle tall hvor verdien av kvadratroten er den samme ($x = \sqrt{x}$), disse tallene er 0 og 1:

$$4 - \frac{3}{x} = 1,\ 4 - \frac{3}{x} = 0$$

$$x = 1, x = \frac{3}{4}$$

Til slutt er en nødt til å sjekke disse svarene ved å bytte ut verdiene for x i selve problemet.

2.4.11 Generalisering

Generalisering «… is passing from the consideration of one object to the consideration of a set containing that object; or passing from the consideration of a restricted set to that of a more comprehensive set containing the restricted one.» (Pólya, 1957). Når problemløseren tar problemet fra aritmetikken over til et algebraisk språk, benyttes strategien. Den krever at problemløser ikke bare observerer hvordan mønsteret i tallrekken øker, men også kan uttrykke det. En oppgave hvor *generalisering* benyttes er presentert under:

Problem 11

Ole skal plante blomster rundt trærne sine. Han har rekker med ulikt antall trær. Han skal plante de slik:

> Hvor mange blomster trenger Ole hvis han skal plante blomster rundt en rekke på 20 trær?

Det finnes flere måter å løse denne oppgaven på. Problemløser kan for eksempel sette opp dataene i en tabell og sjekke hva ledd nr. 20 blir. Eller tegne opp 20 trær med blomstene rundt. En enklere måte vil være å uttrykke det algebraisk. Ser man til det første leddet ser man at det er 6 blomster rundt. For det andre leddet blir det ikke 6 rundt begge trærne, det blir 6+5 blomster. For neste ledd blir det 6+5+5. Her er mønsteret i tallrekken observert. Problemløser kan dermed generalisere mønsteret: $5n + 1$. Da har man mulighet til å finne verdien for uansett ledd. Setter man inn $n = 20$ får man $5 * 20 - 1 = 100 + 1 = 101$.

3 Metode

I denne undersøkelsen er jeg ute etter å finne ut av hvordan elever går frem når de skal løse generaliseringsoppgaver i algebra. Målet er å avdekke hvilke problemløsningsstrategier de benytter seg av og se om det finnes noen mønster mellom valg av strategi, elver og/eller oppgavene. Jeg kan ikke gå fysisk inn i hodet på elevene og observere de kognitive prosessene som forekommer når de løser oppgavene, men jeg kan se og tolke det elevene sier og gjør.

I dette kapittelet vil jeg presentere mitt teoretiske perspektiv og metodevalget som er oppgavebasert intervju. Videre vil jeg presentere oppgavene jeg har benyttet meg av og hvorfor disse er valgt. Deretter kommer hvordan jeg har analysert datamaterialet. Til slutt presenterer jeg undersøkelsens troverdighet, pålitelighet og generaliserbarhet, før kritikk av metode og etiske problemstillinger tas opp.

3.1 Teoretisk perspektiv

Gray (2004) skiller mellom 3 epistemologiske standpunkt, eller syn på læring og kunnskap: *objectivism, constructivism* og *subjectivism.*[4] På grunn av problemstillingen blir det mest hensiktsmessig å plassere studien innenfor det konstruktivistiske kunnskapssynet. Konstruktivisme er både en teori om hva kunnskap er, og en teori om hvordan læring skjer (Imsen, 2005), og viser til et syn på læring og kunnskap som konstruert i en gjensidig prosess mellom individ og miljø. Kunnskap er ikke noe som fins i seg selv, men derimot som et menneskelig produkt i vårt strev etter å forstå og forklare verden rundt oss (Imsen, 2005). Fordi jeg er ute etter de kognitive strukturer og prosessene som skjer når elevene løser matematiske problemer og å karakterisere disse, er undersøkelsen min innenfor kognitiv læringsteori. Kognitiv psykologi handler om hvordan mennesker tilegner seg kunnskap gjennom konklusjoner basert på tolkningen av deres egne erfaringer og forståelser, i henhold til indre kognitive strukturer og prosesser (Cobb, 2007). Elevene konstruerer fortløpende mer sofistikerte matematiske resonnementer, etter hvert som nye matematiske idéer blir innført.

[4] Med utgangspunkt i Crotty (1998).

Hovedkilden for datamaterialet ligger ikke i selve svaret fra elevene. I stedet er det elevenes fortolkning av oppgaven og løsningsprosessen deres som er interessant.

3.2 Metodevalg

Siden målet med studien var å undersøke hvilke problemløsningsstrategier elever benytter seg av, kunne jeg valgt å benytte meg av både en kvalitativ og en kvantitativ tilnærming. Jeg kunne tatt i bruk en kvantitativ metode og fått flere elevsvar og dermed mer generaliserbare data. Likevel ville en kvantitativ metode ikke gitt meg mulighet til å gå dypere inn på hver elevs valg av strategi og løsninger. Jeg kunne risikere å kun få inn svaret på oppgaven og ikke hvordan elevene kom frem til svaret.

Mange kvalitative studier innenfor skoleforskning omhandler ikke kultur slik som i etnografiske studier. De prøver ikke å forbedre praksisen i klasserommet på lik linje med aksjonsforskning eller case-studier, eller å skape nye teorier ut fra forskningsgrunnlaget. Disse kvalitative studiene passer ikke inn i en etablert kvalitativ tilnærmingsmetode (Merriam, 2014). For å beskrive denne kvalitative metoden har flere begreper blitt brukt, men i denne oppgaven vil jeg omtale dette som *generisk kvalitativ metode*[5]*:*

> In my experience, in applied fields of practice such as education, administration, health, social work, counseling, business, and so on, the most common “type” of qualitative research is a basic, interpretive study. One does a qualitative research study, not a phenomenological, grounded theory, narrative analysis, or critical or ethnographic study. (Merriam, 2014. s. 23)

Forskjellene mellom de ulike retningene innenfor kvalitativ forskning er blant annet hvordan en stiller forskningsspørsmålet og ulike metoder for datainnsamling og analyse. Det som kjennetegner forskningsdesignet i en generisk kvalitativ metode er å forstå hvordan mennesker tolker ut fra sine erfaringer (Merriam, 2014). Dette henger tett sammen med kunnskapssynet mitt siden elevenes fortolkning av oppgavene og matematiske resonnement er datagrunnlaget for oppgaven. Målet med undersøkelsen er å forstå hvordan elever løser problemer som innebærer numeriske rekker og geometriske mønstre. Denne dataen samler jeg

[5] Merriam (2014) bruker begrepet *basic qualitative study*.

inn gjennom *oppgavebaserte intervju*, og i analyseprosessen kategoriserer og identifiserer jeg gjentakende mønstre i svarene fra elevene.

3.3 Oppgavebasert intervju

For å kunne innhente et godt datamateriale valgte jeg oppgavebasert intervju som metode. Det oppgavebaserte intervjuet har utgangspunkt fra Piagets kliniske intervju, som på 60-tallet ble brukt for å få en dypere forståelse av barns kognitive utvikling.

> Structured, task-based interviews for the study of mathematical behaviour involve minimally a subject (the problem solver) and an interviewer (the clinician), interacting in relation to one or more tasks (questions, problems, or activities) introduced to the subject by the clinician in a preplanned way. The latter component justifies the term task-based, so that the subjects' interactions are not merely with the interviewers, but with the tas environments. (Goldin, 2000. s. 519)

Oppgavebaserte intervju brukes for å få innsikt og forståelse om elevers matematiske kunnskap og hvordan de løser matematiske problemer (Maher & Singley, 2014). Et oppgavebasert intervju er designet slik at man ikke bare har en interaksjon med informanten, men også oppgavene; som er spesifikt planlagt for formålet med intervjuet. Oppgavene må derfor være nøye gjennomtenkt på forhånd for å kunne gi det datamaterialet man er ute etter. (Maher & Singley, 2014) Styrken med oppgavebaserte intervju er at man har et strukturert matematisk miljø, som til en viss grad kan bli kontrollert (Goldin, 2000).

Fordi oppgavene er planlagte på forhånd, faller oppgavebaserte intervju ofte i kategorien *strukturerte intervju*. Oppgavene er fastsatt og det er dermed lite rom til å kunne bevege seg noe fra intervjuprosessen. Når en benytter seg av oppgavebaserte intervju vil det også være en mulighet at elevene jobber seg fast, eller ikke vet hvordan de skal løse oppgaven. Da kan en ta i bruk «hint» for de ulike oppgavene, slik at man kan hjelpe elevene videre i løsningsprosessen. Dette utgjør den store skilnaden på om det oppgavebaserte intervjuet er strukturert eller ustrukturert:

> It is this explicit provision for contingencies, together with the attention to the sequence and structures of the task, that distinguishes the "structured" interviews discussed here from "unstructured" interviews, which may be limited to "free"

> problem solving (where no substantial assistance that would facilitate a solution is given by the clinician to the subject) or to the handling of contingencies on an improvisational basis. (Goldin, 2000, s. 519)

Jeg har valgt å ta i bruk et *semi-strukturert intervju*. Oppgavene og det matematiske temaet er fastsatt. Det er også noe spørsmålene i etterkant av intervjuet er, noe som heller mer mot et strukturert intervju. Likevel ville jeg ikke gi elevene noen hint for hvordan oppgavene skulle løses. Undersøkelsens formål er å avdekke hvilke strategier elevene tar i bruk for løsning av problemer med numeriske rekker og geometriske mønstre. Ved å gi elevene hint ville jeg kunne lede elevene inn på problemløsningsstrategier, det ville derfor ikke vært elevenes problemløsningsstrategi jeg avdekket, men i stedet min egen. Jeg treffer da midt i mellom disse på et *semi-strukturert intervju*, hvor jeg kombinerer egenskapene fra ustrukturerte og strukturerte intervju.

3.3.1 Think aloud

Det finnes flere teknikker for oppgavebaserte intervju. En av disse kalles for *think aloud*-metoden. Denne går ut på at informanten snakker høyt alt han tenker om oppgaven. Et viktig moment med denne teknikken for oppgavebaserte intervju er at informanten ikke skal begynne å reflektere over hva han sier men bare gjengi det han eller hun tenker på.

> Unlike the other techniques for gathering verbal data, there are no interruptions or suggestive prompts or questions as the subject is encouraged to give a concurrent account of his thoughts and to avoid interpretation or explanation of what he is doing, he just has to concentrate on the task. This seems harder than it is. For most people speaking out loud their thoughts becomes a routine in a few minutes. Because almost all of the subject’s conscious effort is aimed at solving the problem, there is no room left for reflecting on what he or she is doing. (Someren, Barnard & Sandberg, 1994)

Think aloud er en metode som ikke vil forstyrre informantens tankeprosess i noen stor grad. Om informanten skulle bli stille skal man som forsker kun spørre om å prate mer, eller si «nå ble du litt stille». Det stilles da krav til forskeren om å ikke intervenere om informanten skulle bevege seg inn på feil spor i oppgaveløsningen. Dette var også noe jeg var obs på. Jeg skulle la elevene få lovt til å få feil svar, og da kunne si om svaret var galt eller ikke. Men ikke bryte inn om eleven gjorde noe feil, eller før han så seg ferdig med oppgaven.

3.4 Intervjuguide

I forkant av intervjuene ble det utformet en intervjuguide.[6] Intervjuguiden var delt inn i 4 deler. Den første delen inneholdt litt mer praktisk informasjon før vi satte i gang. Her ble det fortalt om hva som skulle skje i løpet av intervjuet og antall oppgaver. Jeg informerte deretter om hva datamaterialet skulle brukes til, at jeg hadde taushetsplikt og at alt kom til å anonymiseres. Jeg var tydelig på at elevene kunne forlate intervjuet når som helst, om de måtte ønske det og hvor lang tid jeg så for meg at det kom til å ta. Jeg informerte om videoopptak og forhørte meg at dette var greit for elevene. Før elevene satte i gang fikk de lov til å spørre om det var noe som var uklart, eller om de hadde noen spørsmål.

Del 2 var oppgaveløsningen. På forhånd hadde jeg spørsmål til elevene om de skulle bli stille og ikke «tenke høyt». Disse spørsmålene tar utgangspunkt i Schoenfelds egen undervisning. Dette var spørsmål som «Hva gjør du?», «Hvorfor gjør du det?» og «Hvordan kan dette hjelpe deg til å løse oppgaven?». På den måten hadde jeg hele tiden oversikt over hvordan elevene tenkte seg frem til svarene. Jeg var hele tiden tydelig på at jeg ikke ville lede elevene inn på strategier og hadde derfor ingen hjelp for hvordan oppgaven skulle løses. Fordi jeg ikke ville påvirke strategivalg hos elevene var det viktig å hjelpe elevene, uten å lede de inn på noen strategier. Elevene fikk muligheten til å hoppe over oppgaven og komme tilbake til den i senere tid. Spesielt hva, og hvorfor ble mye brukt for at elevene skulle begrunne sine valg, og for at jeg skulle få en forståelse av hvilke strategier de tok i bruk. Valg av tema og oppgaver er begrunnet senere i kapittelet.

Tredje del var en intervju-del. Her stilte jeg noen spørsmål i forhold til oppgavene som elevene løste. Dette var spørsmål rettet mot strategiene. Eksempel kunne være «På oppgave 3 valgte du å bruke *tegn en figur*, hvorfor det?». Oppfølgingsspørsmålet ville vært «Hvordan hjalp dette deg?». Dette ga meg en begrunnelse for de strategiene som elevene valgte og mulighet for avklaring hvis det var noe som ikke var tydelig i elevenes svar. I tillegg hadde jeg noen spørsmål til slutt om elevenes tidligere kunnskap med oppgavene og litt om deres holdninger til matematikkfaget. Dette var spørsmål som ikke direkte ville gi meg svar på

[6] Se vedlegg 1.

problemstillingen, men som ga meg en dypere innsikt av elevene og hvilke forkunnskaper de hadde med generalseringsoppgaver i algebra. Til slutt var det en avsluttende del. Her takket jeg for at elevene hadde tatt seg tid til å være med på intervjuet, og om de hadde noen spørsmål før de gikk tilbake til undervisningen.

3.5 Innhenting av data og pilotintervju

Under intervjuene benyttet jeg meg av videokamera for å ta opp lyd og elevenes resonneringsprosesser. Kameraet var stilt opp over arket, slik at jeg bare roterte videoen når jeg skulle transkribere og analysere datamaterialet. Grunnen til at jeg ikke valgte å filme elevene var først og fremst av problemstillingen min. Å kunne lytte til lyden, se hvordan de kom seg frem til svarene og ha løsningsarket til elevene ville være nok til å kunne hente ut hvilke strategier de benyttet seg av. En annen grunn til at elevene ikke ble filmet var at skolene ikke var universitetsskoler, så jeg så for meg at elevene i liten grad hadde vært med på noe liknende tidligere. Det er store forskjeller på hvor lett mennesker har med å uttrykke tankene sine verbalt. Spesielt for elever i 9. klassetrinn vil hele settingen med et videokamera som tar opp både bilde og lyd, og en person som sitter og følger med på hver minste detalj kunne virke noe avskrekkende. Det vil derfor kunne tenkes at elevene vil kunne ha vansker for å gjennomføre denne metoden og «tenke høyt». Tanken var at når ikke eleven selv var i fokus, skulle intervjusituasjonen bli mer naturlig for eleven, og dermed gi meg best mulig data. Jeg hadde heller ikke behov for å filme selve elevene. Jeg hadde lyd som tok opp den verbale aktiviteten, men på bildet fikk jeg med resonneringsprosessen til elevene. Og på oppgavearkene hadde jeg svarene. I tillegg til videokameraet som tok opp bilde, hadde jeg også en lydopptaker som tok opp lyd. «Without top-quality audio, research videos usually will be useless.» (Roschelle, 2000). Dette var i tilfelle noe skulle skje med videokameraet eller med lyden, så hadde jeg lyd fra lydopptakeren som back-up.

Det første intervjuet fungerte som et pilotintervju. Da fikk jeg se hvordan oppgavene og spørsmålene fungerte i praksis. Selv om jeg ikke hadde noen planlagte hint fikk jeg se at jeg hadde ledet eleven inn mot en strategi, da eleven ikke hadde noen som helst idé om hvordan oppgaven skulle løses. Dette var da noe jeg bet meg veldig merke i for resten av intervjuene slik at jeg var obs på dette og ikke gjentok dette i noen av de andre intervjuene. Siden jeg ledet eleven inn mot denne strategien valget jeg å kutte dette svaret i resultatdelen, da dette ikke nødvendigvis var elevens svar men heller mitt eget. I tillegg oppdaget jeg at elevene trengte mer tid på å løse oppgavene og gjennomføre intervjuet enn det jeg hadde tenkt. Dette var heldigvis enkelt å endre på, slik at jeg informerte de neste elevene at intervjuet kom til ta rundt 50-60 minutter, ikke rundt 40 slik det sto i informasjonsskrivet. Selve oppgavene fungerte bra og jeg mente jeg fikk et godt datamateriale fra pilotintervjuet. Pilotintervjuet ga meg også mulighet til å sjekke kvalitet på lyd og bilde, og dette var noe jeg så meg fornøyd med.

3.6 Valg av informanter

Problemstillingen er avgrenset til elever på ungdomstrinnet. I utgangspunktet hadde jeg lyst til å ha elever i fra 10. klassetrinn med i undersøkelsen, men siden elevene i 10. klasse har en avsluttende eksamen på vårsemesteret så jeg for meg at det kom til å bli vanskelig til å få samtykke fra lærer og elevenes lyst til deltakelse. Resultatene fra TIMSS 2011 viste at algebra var noe de slet med, og siden jeg ville at elevene skulle ha mulighet til å klare å løse oppgavene kunne jeg ikke sikte på et alt for lavt trinn. TIMSS er gjennomført på elever fra 4./5. og 8./9. trinn. Med tanke på oppgavene ble det naturlig å gjennomføre intervjuene på elever fra 9. klassetrinn.

Jeg valgte å gjennomføre intervjuene på skoler i distriktet. Dette fordi rektor var veldig imøtekommende og var veldig motivert for å gjennomføre et slikt prosjekt på skolen, siden dette var noe de ikke hadde vært med på tidligere. Men selv om jeg, rektor og matematikklærer var veldig motiverte for prosjektet, var jeg veldig påpasselig at det skulle være frivillig for elevene å delta på undersøkelsen. Elevene ble spurt om de kunne tenke seg å være med på et slikt prosjekt og responsen var god. Siden elevene var under 18 år fikk de sendt med seg et samtykkeskjema som de og foreldrene måtte skrive under. Av totalt 14 elever hvor rundt 10 hadde sagt seg villige til å delta, var det kun 5 som leverte samtykkeskjemaet. I samspill med veileder kom jeg frem til at det ble et litt tynt datamateriale for oppgaven, derfor ble det nødvendig og ta kontakt med en annen skole. Dette var heldigvis en kort prosess og jeg fikk tak i 5 ekstra elever også i fra 9. klassetrinn. Gjennom samtale med lærerne for de to klassene kom det frem at ingen av klassene hadde hatt noe særlig arbeid med problemløsning og at de var kommet omtrent like langt innenfor samme læreverk, dermed så jeg det ikke nødvendig å gruppere elevene fra de to klassene.

3.7 Valg av tema og oppgaver

Alle oppgavene i oppgavesettet omhandler et tallmønster, enten i form av numeriske rekker eller geometriske mønstre. Bakgrunnen til dette valget var flere. Som nevnt i innledningen viser resultatene i fra TIMSS 2011 at algebra er det temaet innenfor matematikken som norske elever har størst problemer med (Grønmo et al., 2012), og at arbeid med tallmønster er en vanlig måte å knytte aritmetikken til algebra (Bergsten et al., 2009).

Oppgavenes utforming er å først utvide mønsteret til figurene eller finne bestemte ledd, for så å generalisere de. Grunnen til dette er at det er også hvordan oppgavene i fra TIMSS 2011 er utformet:

> 1. Extend well-defined numeric, algebraic, and geometric patterns or sequences using numbers, words, symbols, or diagrams; find missing terms.
> 2. Generalize pattern relationships in a sequence, or between adjacent terms, or between the sequence number of the term and the term, using numbers, words, or algebraic expressions.
>
> (Mullis, Martin, Ruddock, O'Sullivan & Preuschoff, 2009).

Jeg valgte å holde meg til utformelsen av oppgavene i fra TIMSS 2011. Bakgrunnen for dette valget er forklart i flere momenter. Dette er oppgaver som har gjennomgått en kvalitetssikring, som har blitt utviklet av faggrupper av eksperter, som er utprøvd flere ganger og som er tilpasset elevenes alderstrinn (Grønmo & Onstad, 2013). Rammeverket er derfor en god indikasjon på hvordan oppgavene bør se ut, og hva de bør inneholde.

Et av målene med matematikkundervisningen er å knytte aritmetikken elevene har lært tidligere til de algebraiske idéene om generalisering. Dette er noe oppgaver innenfor tallrekker gjør i stor grad. En er først nødt til å enten utvide et mønster og kanskje finne ukjente i sekvensen, men så må en generalisere og finne et algebraisk uttrykk for det. Slike oppgaver innenfor Global/Meta-Level skaper kontekst og motivasjon for elevene (Kieran, 2007). Oppgaver som omhandler tallrekker er noe elevene har funnet motiverende (Brekke et al., 2000; Bergsten et al., 2009).

Selv om oppgavene har lik oppbygging er de likevel forskjellige. Forskjellen blir forklart og begrunnet for hver av oppgavene under.

3.7.1 Oppgave 1

Oppgave 1 er en oppgave som omhandler et numerisk tallmønster, en *tallrekke.*

Oppgave 1

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{?}{?}$$

a) Hva blir neste ledd i mønsteret?

b) Hva blir ledd nr. 100?

c) Hva blir ledd nr. *n*?

Figur 3: Oppgave 1.

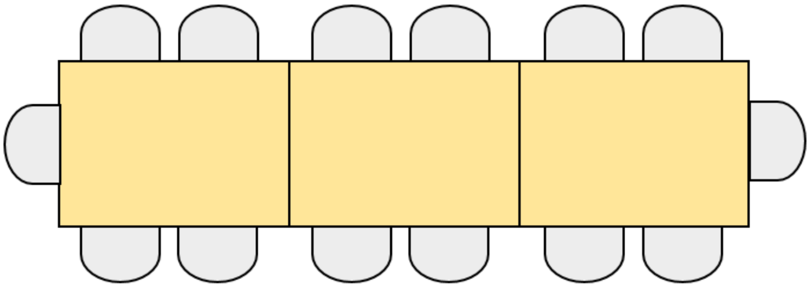
Den er hentet i fra TIMMS 2011. I oppgaven blir elevene bedt om å finne ut: *Hva blir neste ledd, Hva er et bestemt ledd* (i dette tilfellet nr. 100), og *hva er ledd nr. n?*

Oppgaven skiller seg i fra de to neste med at det er den eneste oppgaven som omhandler et numerisk tallmønster. Siden jeg ville ha data fra både geometriske og numeriske tallmønstre, valgte jeg denne oppgaven. Den eneste endringen jeg gjorde på oppgaven var å sette inn en ekstra brøk ($\frac{?}{?}$). Dette for å gjøre det helt tydelig at det var et mønster som økte oppover.

3.7.2 Oppgave 2

Oppgave 2

Et langt bord er satt sammen av småbord. Rundt det lange bordet er det satt opp stoler, slik:



a) Hvor mange stoler blir det plass til om vi har 8 småbord?
b) Hvor mange stoler blir det plass til om vi har 50 småbord?
c) Hvor mange stoler blir det plass til om vi har *n* småbord?

Figur 4: Oppgave 2.

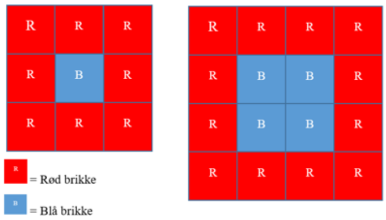
Oppgave 2 er hentet i fra Brekke et al. (2000). Den skiller seg fra oppgave 1 med at tallrekka ikke er gitt i tall, men i stedet en grafisk representasjon, i dette tilfellet stoler rundt bord.

Formålet med oppgave 2a og 2b er å undersøke hvordan elevene bruker mønsteret som utgangspunkt for en strategi. Det ble gjort noen endringer på oppgaven. Opprinnelig spurte oppgaven om hvor mange bord det ble plass til om vi hadde 4 småbord. Dette valgte jeg å endre til 8 bord, slik at det skulle bli litt mer utfordrende men likevel ikke så høyt at noen strategier ikke lenger var hensiktsmessige. Oppgave 2b spurte opprinnelig etter 25 småbord på b, dette ble doblet til 50 for igjen å jobbe med litt høyere tall. Også c ble endret. Oppgaven spurte opprinnelig om «forklar hvordan du kom fram til svaret i b», men dette blir et mer diagnostisk spørsmål for å avdekke hvordan elevene tenker og slike spørsmål stiller jeg selv under intervjuet. Oppgave 2c ble derfor endret for å opprettholde likhet til de andre oppgavene til: «Hvor mange stoler blir det plass til om vi har *n* småbord?».

3.7.3 Oppgave 3

Oppgave 3

De to figurene nedenfor er kvadratiske figurer. De består av røde og blå brikker. Figurene har et rødt «skall» rundt det blå kvadratet i midten.



Figurene kan man sette i en tabell for å få oversikt over hvor mange røde og hvor mange blå brikker det vil være i hver.

a) Gjør ferdig tabellen for 6x6- og 7x7-figurene.

Figur	Antall blå brikker	Antall røde brikker	Totalt antall brikker
3 x 3	1	8	9
4 x 4	4	12	16
5 x 5	9	16	25
6 x 6	16		
7 x 7	25		

Bruk mønstrene i tabellen til å svare på spørsmålene.

1. Hvis man skal ha en figur med **til sammen** 64 brikker. Hvor mange blå brikker og hvor mange røde brikker trenger man i denne figuren?
2. Hvis man skal lage en figur med 49 **blå** brikker. Hvor mange **røde** brikker trenger man?
3. Hvor mange **blå** brikker trenger man i en figur med 44 **røde** brikker?

Noen ganger trenger man en generell formel for figurene slik at man kan sette i en verdi for n og få hvilket som helst ledd i figurrekken og dermed vite hvor mange brikker som trengs.

b) Gjør ferdig tabellen nedenfor for figur n x n.

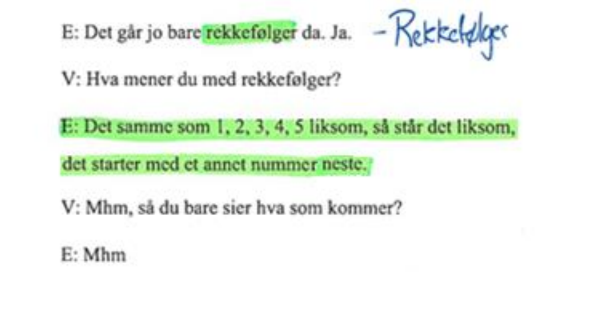
Figur	Antall blå brikker	Antall røde brikker	Totalt antall brikker
$n \times n$	$(n-2)^2$		

Figur 5: Oppgave 3.

Oppgave 3 er også hentet i fra TIMSS 2011. Denne oppgaven omhandler en geometrisk tallrekke, hvor det er blå kvadrater med røde brikker rundt seg. Opprinnelig løses TIMSS-oppgavene på samme ark som oppgavene er skrevet på. Jeg valgte å endre dette fordi jeg var redd for at noen strategier skulle forsvinne, eller ikke være like attraktive om elevene kun skulle løse oppgaven på oppgavearket. Elevene fikk selv velge om de ville skrive på oppgavearket (i tabellene) eller på kladdearket de hadde ved siden av. En annen endring jeg gjorde var å endre litt av oppgaveteksten. Oppgaven omhandlet opprinnelig en person som skulle lage disse figurene, men for å beholde en viss likhet mellom oppgavene ble dette skrevet om.

3.8 Analyse

Datamaterialet ble analysert gjennom to steg med flere faser i en *tematisk analyse*. Da jeg på forhånd hadde eksisterende kategorier for hver av strategiene, ble analysen en deduktiv analyse (Braun & Clarke, 2008). Når alle intervjuene var transkribert, var det nødvendig å systematisere de på noen måte. Jeg delte transkripsjonene opp etter oppgavene når jeg skulle kode datamaterialet. Da så jeg etter likheter i svarene til elevene. Et eksempel på hvordan en koding kunne se ut under:

 E: Det går jo bare rekkefølger da. Ja. – Rekkefølger V: Hva mener du med rekkefølger? E: Det samme som 1, 2, 3, 4, 5 liksom, så står det liksom, det starter med et annet nummer neste. V: Mhm, så du bare sier hva som kommer? E: Mhm	- Rekkefølger - «Starter med et annet nummer neste» Sier bare hva som kommer

Figur 6: Eksempel på koding - Marie oppgave 1a.

Etter kodingen analyserte jeg dataene. Analysen er deduktiv da jeg hadde strategiene på forhånd og kunne kategorisere svarene til elevene inn i rammeverket laget av strategiene fra Posamentier & Krulik (1998) og Pólya (1957). Definisjonene av strategiene elevene benyttet seg av er definert i tabellen under.

Tabell 1: Definisjoner av problemløsningsstrategier

Problemløsningsstrategi	Definisjoner
Jobbe bakover	Problemløser reverserer trinnene som produserte et sluttresultat som kan føre til den nødvendige startverdien.
Se etter mønster	Problemløser prøver å finne en regel eller mønster for å forklare situasjonen og løse problemet i henhold til mønsteret.
Se fra en annen synsvinkel	Problemløser ser problemet med en annen synsvinkel enn den som han eller hun først ble ledet av problemet.
Forenkling	Problemløser prøver å bruke enklere tall for problemet, eller prøver å løse et enklere problem til å finne ut løsningen av det opprinnelige problemet.
Vurdere ekstreme tilfeller	Problemløser vurderer ekstreme tilfeller av variablene som ikke endrer innholdet i problemet.
Tegn en figur	Problemløser tegner en figur eller et diagram for å visuelt representere gitte data i problemet.

Gjett og sjekk	Problemløser gjør en gjetning og tester den mot betingelsene for problemet. Den neste gjetningen er basert på innhentet informasjon fra forrige gjetning.
Gjøre rede for alle muligheter	Problemløser prøver å liste opp alle mulige forhold i problemet og vurdere eller sjekke hver betingelse for å finne den som passer målet med oppgaven. Oppføringen bør organiseres for å ta hensyn til alle mulighetene.
Organiser datamaterialet	Problemløser organiserer gitte data i en tabell eller gjennom en annen systematisk oversikt.
Logisk resonnement	Problemløser bruker logiske resonnementer.
Generalisering	Problemløser benytter seg av det algebraiske språket for å beskrive den generelle formelen for oppgaven.

I andre del av analyseprosessen så jeg etter sammenhenger mellom valg av strategier på oppgavene. Her ble hver oppgave sett på individuelt og elevenes problemløsningsstrategier ble sammenliknet opp mot hverandre. Det ble sett etter forskjeller på valg av strategi og hvorfor noen av elevene tok i bruk ulike strategier for samme oppgave. Det ble også sett etter sammenhenger mellom elever og deres valg av strategiene for oppgavene. Det ble sett etter om valg av ulike strategier la føringen for neste oppgave og hvordan de ulike strategiene påvirket løsningen av oppgavesettet.

3.9 Troverdighet, pålitelighet og generaliserbarhet.

All forskning som gjennomføres må kvalitetssikres for å forsikre seg om at forskningen er gyldig og holdbar. I kvalitativ forskning snakker man om dataenes troverdighet, pålitelighet og generaliserbarhet. Schoenfeld (2007b) sier det er tre spørsmål en kan stille til alle studier:

1. Why should one believe what the author says?
2. What situations or contexts does the research really apply to?
3. Why should one care?

I sammenheng med forskning inneholder begrepet *troverdighet* flere momenter. Schoenfeld deler troverdighet inn i *beskrivende og forklarende styrke, forsutsigbarhet og forfalskning,* *strenghet og særegenhet, repliserbarhet* og *triangulering.*[7] Hver og en av disse er forklart i detalj og beskrevet for mitt prosjekt.

Forskningens beskrivende styrke er hvordan teori eller modeller representerer hva som kan gjelde for det vi er ute etter. Fokuserer forskningen på det som er essensielt for analysearbeidet, på en måte som er klar og tydelig? Det som tas opp i teoridelen, rammeverket, metoden og analysen som er valgt og benyttet for undersøkelsen er nødt til å svare på det jeg forsøker å finne ut av. *Forskningens forklarende styrke* er forklaringen på hvorfor ting er slik de er. En ting er å avdekke hvilke strategier elevene benytter seg av, men hva er det som gjør at elevene velger disse strategiene? Er valget av teori hensiktsmessig, og dekker rammeverket de strategiene jeg avdekker? Jeg tolker forskningens beskrivende og forklarende styrke slik at i min undersøkelse blir dette om teorien, rammeverket, metoden, analysen og ikke minst diskusjonsdelen min svarer på problemstillingen jeg har.

Tidligere i metodekapittelet presenterte jeg hvilket læringssyn jeg plasserer undersøkelsen innenfor. Læringssynet mitt vil spille en viktig rolle for hvordan jeg tolker datamaterialet jeg får. Det andre punktet Schoenfeld snakker om er forventning og falsifisering. Cresswell & Miller (2000) sier: «It is particularly important for researchers to acknowledge and describe their entering beliefs and biases early in the research process to allow readers to understand their positions, and then to bracket or suspend those researcher biases as the study proceeds». I undersøkelsen min ser jeg etter hvilke problemløsningsstrategier elevene benytter seg av i løsningen av generaliseringsoppgaver i algebra. Dette er elevenes egne lærte strategier, da det konstruktivistiske læringssynet ser på læring som skjer hos hvert individ. Siden hver elev vil ha en forskjellig forståelse for når strategier skal benyttes vil man heller ikke kunne gjøre noen antakelser for hvilke strategier de kommer til å benytte, om noen i det hele tatt.

Strenghet og spesifisitet blir en selvfølge i empirisk forskning. Schoenfeld (2007b) sier: «The more careful one is, the better one’s work will be. And the more carefully one describes both

[7] Oversettelse av Schoenfelds (2007) begreper: Descriptive and explanatory power, Prediction and falsification, Rigor and specificity. Replicability og Triangulation.

theoretical notions and empirical actions (including methods and data), the more likely one's readers will be able to understand and use them productively, in ways consistent with one's intentions.» Det å være spesifikk og presis er essensielt når en skal drive forskning. Begreper en benytter seg av må være tydelig avgrenset slik at det ikke er noen tvil om hva en mener. Strenghet er heller ikke bare hvordan en behandler datamaterialet sitt i analysen. En kan være streng i forhold elevenes svar, gjengi akkurat det som blir sagt, men Schoenfeld (2007b) er klar på at strenghet må være gjennomsyret i hele forskningsarbeidet. I resultatdelen av oppgaven vil jeg prøve å involvere leseren i hvordan jeg har analysert datamaterialet. Dette for at leseren skal få et innblikk i hvordan jeg koder de ulike strategiene slik at det ikke er tvil om hvorfor jeg plasserer de ulike strategiene slik jeg gjør. I metodekapittelet har jeg beskrevet hvordan jeg utviklet undersøkelsen, på hvilken måte jeg gjennomførte datainnsamlingen og hvordan analyseprosessen har gitt meg datamaterialet jeg sitter med.

Det finnes mange ulike begreper for *repliserbarhet*: pålitelighet, reliabilitet (i kvantitativ forskning) er noen eksempler. Repliserbarhet er i hvor stor grad andre vil kunne få samme resultat fra forskningsopplegget, som det en selv har fått. Hvis andre skulle gått inn i en skole og gitt elevene samme oppgaver, ville de da fått de samme strategiene jeg fikk? For å sikre høy grad av reliabilitet har jeg beskrevet teorien og de antakelsene jeg bygger undersøkelsen på i teoridelen av oppgaven. I metodekapittelet har jeg beskrevet hvordan undersøkelsen er utviklet, gjennomføringen av datainnsamlingen og hvordan jeg har kommet frem til resultatene.

Til de funnene en gjør seg av et studie kan en stille seg spørsmål om hvem disse funnene vil gjelde for? Vil alle elever benytte seg av samme strategiene om de blir presentert for oppgavene? Og på samme møte kan en stille spørsmål om studiens betydning. Er den på noen måte samfunnsnyttig? En snakker da om studiens *generaliserbarhet* og *betydning*. Når en snakker om kvalitativ forskning er det vanskelig å kunne sikre generaliserbarhet. En har ikke et representativt utvalg for alle ungdomsskoleelever, så derfor må en tenke generaliserbarhet på en annen måte. Merriam (2014) skriver om *overførbarhet*. Det vil si at leseren selv må overføre mine funn til deres situasjon. For å gi leseren denne muligheten har jeg beskrevet hele prosjektet såpass grundig at leseren selv kan avgjøre om funnene vil være gjeldene for deres situasjon (Merriam, 2014). Selv om resultatene fra forskningen ikke kan generaliseres for alle elever i 9. klassetrinn, kan den gi innsikt i hvordan elevene løser generaliseringsoppgaver i algebra. Metoden kan kopieres slik at lærere får innsikt i sine egne elever for å kunne sette i verk tiltak for å øke elevenes kompetanse i algebra, eller skoleforskere for å bygge på med videre forskning rundt temaet.

Med *triangulering* menes å se på forskningen fra ulike vinkler. Schoenfeld (2007b) sier at folk gjør ting forskjellig i ulike situasjoner og at det derfor blir viktig å se på datamaterialet gjennom ulike «linser». Jeg har hele tiden kun vært én person som har analysert og kodet datamaterialet. Dette er en klar svakhet i oppgaven. Andre personer ville kunne kodet forskjellig, eller på en annen måte vært uenig i min analyse. For å dekke dette området har jeg derfor presentert utdrag i fra transkripsjonene slik at den som leser oppgaven får et innblikk og en forståelse for at jeg har kodet slik jeg har.

3.10 Kvalitet i undersøkelsen

Forskerrollen er alltid noe en kan stille seg kritisk til. Jeg hadde på forhånd tenkt å ta i bruk en *think aloud*-metode, hvor jeg bare skulle la elevene løse oppgaver og hjelpe de om de satte seg fast. Dette var noe som viste seg vanskelig under intervjuet. For det første ble jeg mer spørrende til valg eleven gjorde underveis. Spørsmål som «hvorfor gjør du det?» eller «hva tenker du?» ble stilt mer hyppig enn kanskje det som kjennetegner en typisk *think aloud*-metode. Grunnen til dette var at elevene ofte ble stille og ikke reflekterte rundt oppgavene eller oppgaveløsningen, men heller løste dem slik de er vant å løse oppgaver og problemer i matematikk: alene i stillhet på pulten i klasserommet. Dette gjaldt ikke alle elevene, det viste seg store forskjeller på hvor muntlig aktive elevene var. Da hadde jeg utarbeidet noen spørsmål eller hint som forhåpentligvis skulle få eleven til å komme seg videre. Hintene og spørsmålene var noe som kunne vært jobbet enda mer med. De kunne vært tydeligere på hvordan jeg skulle reagere i bestemte situasjoner slik at det ikke ble fare for å lede elevene inn mot strategier.

En annen måte å sikre repliserbarhet vil være å sjekke at elevene svarer det de faktisk mener. Dette kan gjøres gjennom *member checking*. Cresswell & Miller (2000) sier: «It consists of taking data and interpretations back to the participants in the study so that they can confirm the credibility of the information and narrative account». Dette er noe jeg desverre ikke har utført grunnet prosjektets tidsramme. Om jeg hadde hatt bedre tid kunne jeg dratt tilbake i skolen og spurt elevene om det var dette de mente da de svarte på oppgavene. Jeg spurte ofte elevene om «er det slik du tenker?» og «mente du dette?» i oppgaveløsningene, men dette var ikke noe jeg var bevisst på og kan derfor ikke benevnes som member checking. Hadde jeg hatt dette i bakhodet kunne det hjulpet å sikre en høyere grad av repliserbarhet.

Jeg hentet alle oppgavene i fra litteratur. Jeg har tidligere begrunnet valg av oppgaver men en kan likevel stille seg kritisk til noen av valgene som ble tatt. Jeg prøvde å gjøre oppgavene mer lik hverandre men har kanskje ikke klart dette i stor nok grad. Kanskje oppgave 3 var for ledende mot enkelte strategier da både en tabell og figurer var representert i oppgaven. Oppgavene kunne vært enda mer tenkt ut på forhånd slik at datamaterialet ville vært rikere. Oppgave 2 lot seg veldig enkelt løses ved bruk av aritmetikk og den ble kanskje litt for lett i forhold til elevenes nivå. Likevel kan den forsvares som en innledning til de to andre oppgavene, men at den da burde kommet først i oppgavesettet. Kanskje burde også oppgavene fra a til b vært mer ulike, slik at det hele tiden var problemer elevene jobbet med. Når elevene finner seg en bestemt strategi for a vil de bare kunne bruke denne for b. Dette gjelder da for oppgave 2, hvor a var «Hvor mange stoler blir det plass til om vi har 8 småbord?» og b «Hvor mange stoler blir det plass til om vi har 50 småbord?». Oppgaveteksten for a kunne heller vært «Hvor mange stoler blir det plass til om vi setter inn et bord til?» slik at det ble en forskjell i fra neste oppgave hvor de skulle finne 50 bord.

3.11 Etikk

Siden informantene til prosjektet er under 18 år er det flere etiske problemstillinger en nødt til å ta hensyn til. En trenger samtykke fra foreldrene, en må være tydelig på hvordan opptak i form av bilde, lyd og annet behandles og hvordan datamaterialet skal behandles når prosjektet er ferdig og avsluttes. For å kunne drive med et forskningsarbeid i skolen var jeg nødt til å søke om godkjenning hos NSD[8] for å kunne behandle personopplysninger. Denne søknaden var en detaljrik beskrivelse av hvordan jeg skulle behandle datamaterialet og da hvordan

[8] Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste

elevenes anonymitet skulle bevares. Samtidig med denne søknaden ble også et informasjonsskriv/samtykkeerklæring utarbeidet og sendt med (Se vedlegg 2). Tilbakemeldingen fra NSD var: «Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.» (Se vedlegg 3). Her fikk jeg også kommentar på informasjonsskrivet: «Utvalget informeres skriftlig og muntlig om prosjektet og samtykker til deltakelse. Informasjonsskrivet er godt utformet.»

Hvert av intervjuene ble startet med en gjennomgang av hvordan hvert av intervjuene kom til å bli. Jeg informerte om hva datamaterialet skulle brukes til, at jeg hadde taushetsplikt og at alt kom til å være anonymt. Det var viktig å presisere ovenfor elevene at datamaterialet skulle benyttes i sammenheng med min mastergradsoppgave og at det ikke kom til å ha noen som helst innvirkning på elevenes skolehverdag eller videre undervisning. Jeg forklarte til elevene at alt kom til å bli anonymisert og at jeg ville benytte en kodenøkkel som kom til å være oppbevart atskilt fra resten av datamaterialet. Jeg var hele tiden tydelig på og gjentok flere ganger i starten av intervjuet at det hele skulle være frivillig og at eleven, uten noen spesiell grunn, hadde mulighet til å avslutte intervjuet og forlate om det var ønskelig. Her ble også videokameraets plassering og hensikt forklart og elevene ble spurt om dette var greit for dem. Jeg forklarte også at jeg hadde en lydopptaker, som en slags back-up, i tilfelle noe skulle skje med kameraet i løpet av intervjuet. Eleven ble spurt om dette var forståelig og greit før noen form for datainnsamling ble satt i gang. Da eleven hadde samtykket til dette, startet jeg opptaket.

Det tekniske utstyret som videokamera og lydopptaker var noe jeg selv stilte med. Dette gjorde det enklere for meg da jeg hadde kjennskap til utstyret, men også at jeg ikke hadde noen frist for innlevering eller på noen annen måte måtte tenke på at andre skulle ta det i bruk i senere tid. Likevel var jeg påpasselig med å slette alt av råfilm fra kameraet så fort jeg hadde overført det til en ekstern harddisk. Samme prosedyre ble utført for lydopptakeren. For selve datainnsamlingen har jeg valgt å kun filme oppgavearket til elevene. Siden eleven selv ikke har vært i bildet har dette også bidratt til å sikre anonymitet. Ved oppgavens slutt vil all data bli anonymisert, dette innebærer å slette alle direkte personopplysninger som navn og koblingsnøkkel, slette alle indirekte personopplysninger som f.eks. alder, kjønn, bosted, osv.

og slette digitale lyd-/bilde- og videoopptak. I tillegg vil et skriv bli sendt til NSD at prosjektet er avsluttet og anonymiseringen er gjennomført.

4 Resultat

I denne undersøkelsen er målet å avdekke hvilke problemløsningsstrategier elevene bruker i løsningen av generaliseringsoppgaver i algebra. I dette kapittelet vil undersøkelsens resultater presenteres. Jeg vil ta i bruk transkripsjonene og bilder av oppgavearkene til elevene for å begrunne de funnene jeg gjør. Hensikten med å gjøre det slik er for å gi leseren en nærhet til datamaterialet jeg sitter med, slik at det kommer frem hvorfor jeg tolker dataene slik jeg gjør.

4.1 Funn

Fra de 11 deloppgavene som ble gitt elevene, fremkommer ikke alle strategiene som er presentert i rammeverket. Målet med undersøkelsen var å avdekke hvilke strategier som blir brukt og hvorfor, og derfor ville det hele tiden være en mulighet for at enkelte strategier ikke ble brukt. Kapittelet vil derfor kun presentere de strategiene som fremkommer fra elevenes løsninger. Strategiene er *se etter mønster, forenkling, tegn en figur, gjett og sjekk, organiser datamaterialet, logisk resonnement* og *generalisering.* Det fremkommer ikke i noen av elevenes løsninger at de benytter seg av strategiene *se fra annen synsvinkel, vurdere ekstreme tilfeller, jobbe bakover* eller *gjøre rede for alle muligheter.*

4.1.1 Se etter mønster

Strategien *se etter mønster* var den mest brukte strategien av elevene. Nedenfor er Cathrines løsning og forklaring av hvordan hun løser oppgave 3a:

Figurene kan man sette i en tabell for å få oversikt over hvor mange røde og hvor mange blå brikker det vil være i hver.

a) Gjør ferdig tabellen for 6x6- og 7x7-figurene.

Figur	Antall blå brikker	Antall røde brikker	Totalt antall brikker
3 x 3	1	8	9
4 x 4	4	12	16
5 x 5	9	16	25
6 x 6	16	20	36
7 x 7	25	24	49

+3 +5 +7 +9 +4 +4 +4 +7 +2 +9 +2 +11 +2 +6 +17 +8 +9

Figur 7: Cathrines svarark for oppgave 3a.

C: Mm. Ehm, nå prøver jeg å finne ut hvor mye det er mellom hvert ledd. Sånn at jeg kanskje ser en typisk rekkefølge. Og der ser jeg at antall blå brikker der plusser de på 2 mellom hvert ledd, så i det, i mellom 1 og 4 er det pluss 3, i mellom 4 og 9 er det pluss 5, så det plusser hele tiden på 2. Antall røde brikker er det hele tiden pluss 4, og totalt antall brikker er det vel bare å regne foreløpig har jeg ikke sett en sammenheng der. Eh, og da blir det i hvertfall, neste tall etter 25 på totalt antall brikker blir da 36.
I: Hva skriver du nå?
C: Eh, nå skriver jeg hvor mye det er mellom hvert ledd i totalt antall brikker, jeg minsker det enda mer nedover. Og jeg ser ikke noe system i det i hvert fall, men jeg har fått gjort ferdig tabellen i hvert fall. Skal jeg skrive inn der eller?

Figur 8: Transkripsjon av Cathrines løsning av oppgave 3a.

Cathrine forteller at hun leter etter det hun kaller for en typisk rekkefølge. Hun forteller at hun ser at for antall blå brikker øker differansen med 2 for hvert ledd, mens på de røde øker det med 4. For totalt antall brikker klarer hun ikke umiddelbart å finne noen sammenheng, annen enn å regne sammen. Hun prøver likevel å sjekke om hvor mye det er mellom hvert ledd i totalt antall brikker. Cathrines forklaring gjør det veldig tydelig at hun benytter seg av *se etter* *mønster*. Hun leter etter sammenhenger og en rekkefølge mellom leddene og benytter det hun finner for å svare på oppgaven. Siden leddet med røde brikker øker med 4, og differansen mellom de blå brikkene øker med 2 for hver gang kan hun enkelt fylle inn de resterende tallene. Selv om hun ikke ser sammenhengen mellom figuren og totalt antall brikker, ser hun at ved å legge sammen røde og blå brikker får hun også hele figuren.

Oppgave 1a var også en oppgave som mange elever brukte *se etter mønster* for å løse. Utdraget nedenfor viser hvordan Gunnar har løst oppgaven:

G: Ja, her er det 1, 2, 3, 4, 5 og 2, 3, 4, 5, 6, det er bestandig ett tall høyere nedenfor. Så blir det på en måte sånn 1, 2. Så blir det på skrå 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, då blir det 6-6, og så er det neste tallet i tallrekka 7. Så blir det 6-7 der. (Skriver ned svaret)

Figur 9: Transkripsjon av Gunnars løsning for oppgave 1a.

Gunnar leser opp den gitte informasjonen og identifiserer ulikheten mellom teller og nevner. Han sier også at nevner for leddet vil være teller for det neste leddet (det han beskriver som «på skrå»). Derfor begrunner han at neste ledd må ha 6 som teller, siden forrige ledd sluttet med 6 som nevner, og at det da må ha 7 som nevner siden det hele tiden skal være «et tall høyere nedenfor».

4.1.2 Forenkling

Forenkling var det kun én av elevene som benyttet seg av. Transkripsjonen nedenfor viser hvordan Marie har løst oppgave 2a:

M: Da er det 5 stoler på det ytterste, og 4 i det midterste, da er det 3 småbord og til sammen er det 14, hvis det er 4- nei 8. Hvis det er 4 bord, blir det 9, 10, 11, 12, 13. også blir det 13 pluss 5 som er 18, og 18 pluss 18 er 32. Da er 32 svaret.
I: Hvordan kom du frem til det?
M: Fordi at på hjørnet så er det 5 stoler og på det midterste er det 4, og hvis du legger til 1 bord da først så blir det 4 på 2 av de midterste og 5 på de ytterste igjen. Og 18 blir det til sammen da, og 18 pluss 18 er 32.

Figur 10: Transkripsjon av Maries løsning for oppgave 2a.

Hun forenkler regnestykket slik at hun finner ut antall stoler for 4 bord, for så å legge de sammen slik at det blir 8. Hun ser dog ikke at hun har lagt til de ytterste bordene 2 ganger for mye, så selv om hun hadde regnet rett ville hun fått 2 stoler for mye. Dette gjorde at hun fikk feil svar på oppgaven. Samme strategi ble benyttet for oppgave 2b, da ble også *tegn en figur* tatt i bruk:

E: Jeg kan finne 5 bord og så kan jeg gange med 10.

V: Okay.

E: Da var 18 på 4, 22? Jeg må tegne det opp. Det ble 22. Men 22 ganger 10? Det blir 220.

V: Ja, hva synes du om det? Virker det mye eller lite?

E: Ja. Er det riktig, skal jeg sette det som svar?

V: Det må du bestemme selv.

E: Ja, jeg gjør det. Så tar vi 22 ganger med 10 som er lik 220. Fordi at først var det 5 bord og så, ja 5 ganger 10 er 50, så blir det stolene så, ja vi sier så.

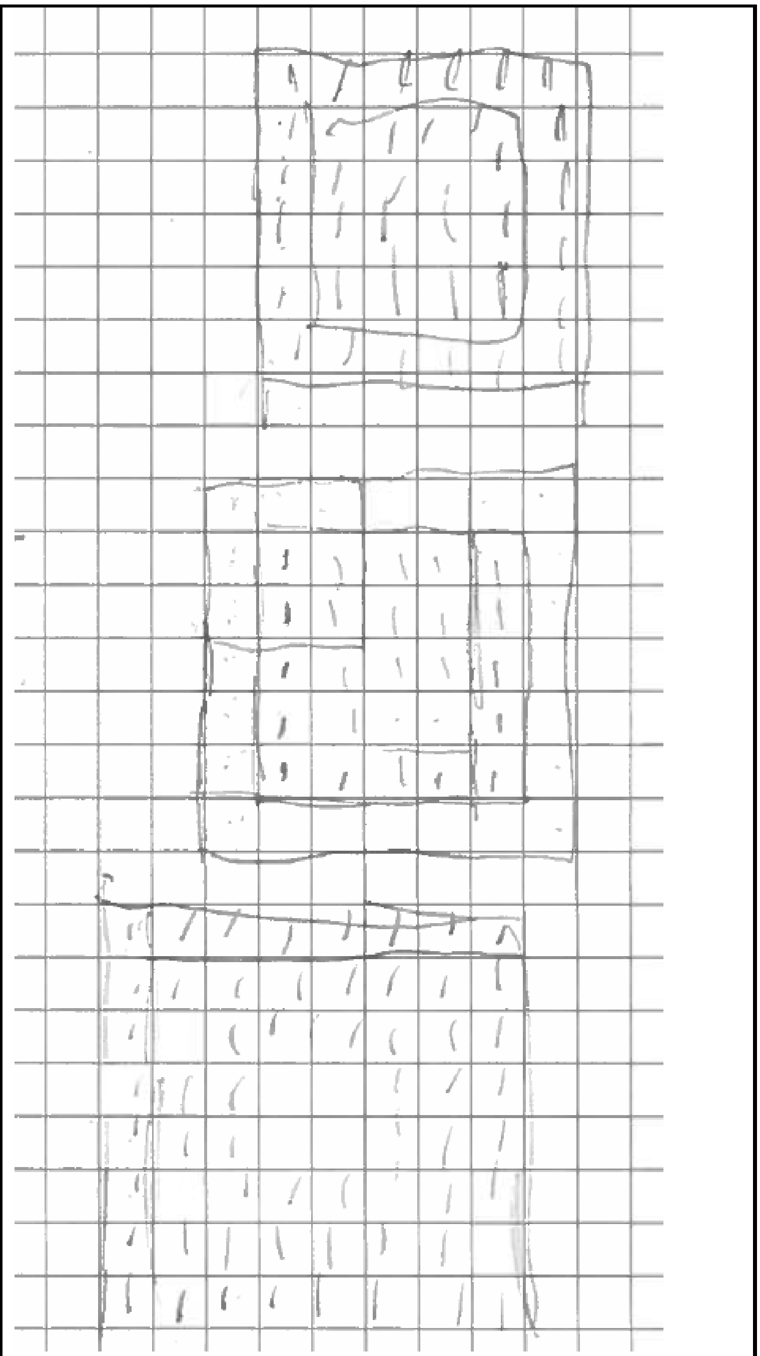
Figur 11: Transkripsjon av Maries løsning for oppgave 2b.

4.1.3 Tegn en figur

Flere av elevene benyttet seg av strategien *tegn en figur*. Dette var en strategi som var spesielt fremtredende i oppgave 3. Her er Thomas' løsning på oppgave 3a:

T: Den går opp med 9 eller 10, og den der går opp med 4. 4 hele tiden der, 9 hele tiden der. 6 ganger 6, 20 røde. Til sammen blir da 34. Da blir det jo 30 minus 20 det er 14. 6, blir det videre pluss 9 her ja. Da blir det 43. Røde blir 24, 43 minus 24, 19. I: Okay, hvordan har du tenkt nå? T: For her fant jeg ut at her går det opp med, nei det gjør det ikke. Nei, 9, 25.	

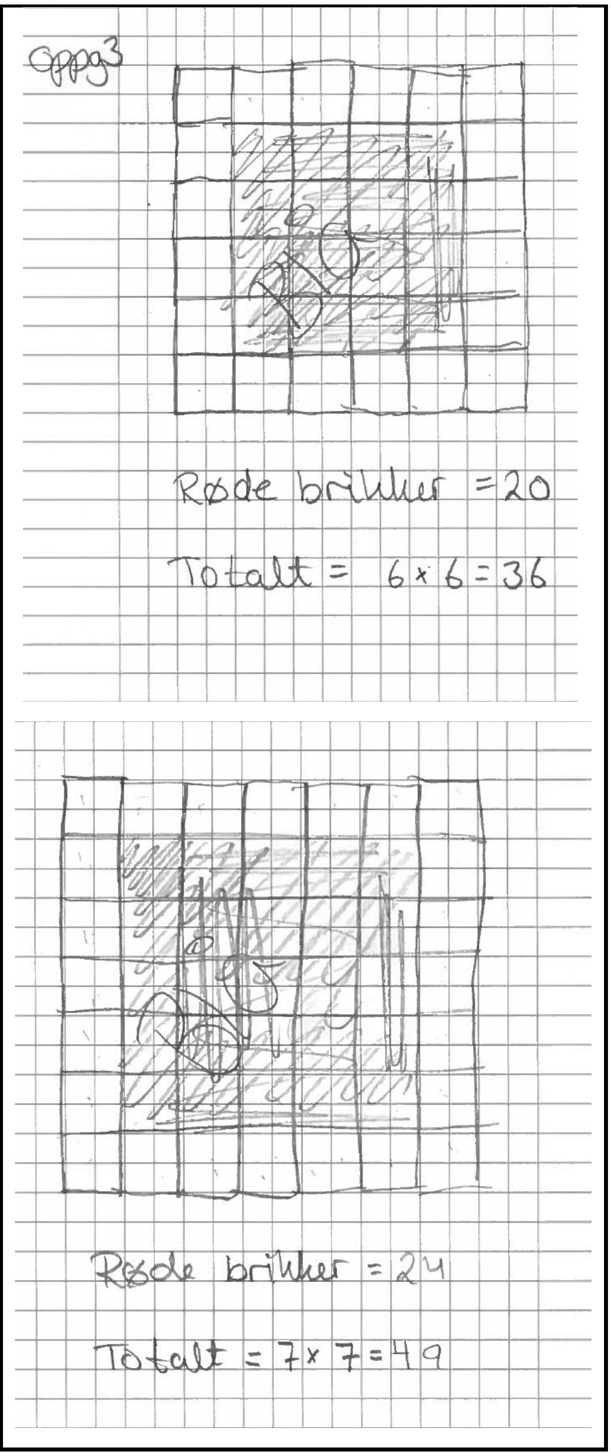
I: Hvorfor visket du ut?
T: Jeg gjorde feil.
I: Okay, hva gjorde du feil?
T: Jeg så feil, jeg tenkte bare- Der er det 4-4. (Tegner opp en 7x7-figur) (Teller det ytterste laget og kommer til 25, teller så det innerste laget og kommer til 24) legger sammen og kommer til 49)
T: (tegner så opp en 6x6-figur, teller det ytterste laget og kommer til 20, teller så det innerste og kommer til 16, legger sammen og får det totale antallet) Sånn.
I: Mm, hva har du funnet frem til nå?
T: Nå har jeg funnet ut hva figuren til 6x6 og 7x7 er.
I: Var det mange av hver på de figurene?
T: Det var, 20 røde på 6x6 og 16 blå. Og 24 blå på 7x7 og 25 røde.



Figur 12: Transkripsjon og løsning fra Thomas for oppgave 3a.

Thomas bruker flere strategier for å løse oppgaven. I første omgang er han ute etter et mønster. Når han ikke får til oppgaven ved hjelp av denne strategien velger han heller å tegne. Figurene Thomas tegner er figurene oppgaven spør etter, i dette tilfellet var det en 7x7 og 6x6-figur. Etter han har tegnet figurene teller han antall røde og blå brikker. Han er litt snar når han skal telle antall røde brikker på 7x7-figuren, og kommer derfor frem til 25 røde brikker. Fordi han ikke har vært så nøye i selve tegningen, blir det rot når han skal telle. Det virker som om Thomas har strategien med å tegne figuren klar, men velger heller å prøve å lete etter et mønster. Det kan dermed tyde på at han synes det er mindre attraktivt å tegne opp figur for så å telle antall brikker. Han vil få samme svar, men det virker som om det er mer prestisje å kunne regne seg frem til svaret enn å tegne og telle.

Nina valgte kun å tegne som strategi for oppgave 3a. Nedenfor er hennes løsning på oppgaven:

I: Bruk bare kladdearket du har. Du skriver det du vil på det. N: Ja, så- (Tegner opp en 6 x 6 figur) I: Kan du fortelle høyt hva du- N: Ja. Nei, jeg prøver bare å tegne opp 6x6 siden det er, figuren er liksom- ja. Og så er det jo, det her (tegner over kvadratet inni figuren som skal være blå) Da er det jo 20 rundt. Da har vi 20 røde brikker. (Skriver opp Røde brikker = 20) Da blir det jo (Skriver opp totalt= 6x6 = 36) 6 ganger 6, 36 brikker til sammen. Åååh, bare vent litt. Så må jeg bare tegne opp den neste figuren (tegner opp 7x7 og markerer kvadratet inni) (teller antall røde brikker utenfor) (begynner å skrive opp røde brikker =, stopper opp og teller brikkene en gang til, skriver opp røde brikker=24)	

Figur 13: Transkripsjon og løsning fra Nina for oppgave 3a. (Bildet av oppgavearket er beskjært)

I motsetning til Thomas, benytter Nina seg kun av strategien *tegn en figur* for oppgave 3a. Oppgaven spør etter hvor mange røde og blå brikker det vil være i en 6x6- og en 7x7-figur. Derfor tegner hun opp de aktuelle figurene og teller hvor mange brikker det er rundt.

4.1.4 Gjett og sjekk

Strategien *gjett og sjekk* kom også frem hos elevene. Her er et utdrag av hvordan Robin løste oppgave 3-3:

R: (leser oppgaven) I: Hva tenker du? R: Da, jeg tok utgangspunkt i 100 brikker i det hele tatt, så skulle jeg bare se om det stemte jeg tror kanskje det gjør det, så skal vi se hvor mange blå, hvis det er 44 røde og så er det, nei det blir jo bare gjetting. Åh, den var vanskelig, skal vi se. Okay, vi tar utgangspunkt i 100, da er det 44 røde da blir det 56 blå. Skal vi se, også, 56 er ikke kvadratrot så det kan ikke stemme. Nei, jeg vet ikke hvordan jeg skal løse den, rett og slett. I: Men 100, hvilken figur tenkte du da? R: 100, da tenkte jeg 10x10 og så 8x8 i midten. 8 ganger 8 blir jo ikke 56, det blir jo 64, så det stemte ikke. Nei, jeg vet ikke hvordan jeg skal løse den. I: Ja, andre forslag? R: Det kan jo være at jeg gjør akkurat det samme men i 11-gangen. Også blir det 44 røde og 11 ganger 11 er 110, så 66, og da 9 ganger 9, nei det stemmer ikke, jeg vet ikke, jeg vet ikke hvordan jeg skal gjøre det. I: Nei, har du andre forslag? R: Nei, jeg tror ikke det. I: Du har ikke lyst til å prøve med, du har nå prøvd 10x10 og 11x11. R: Prøve med 12x12. Skal vi se, da blir det 44 igjen. Da blir det 120, 44, 76 pluss 44- I: Men, 12 ganger 12, her har du vært litt snar. R: Åjaa, selvfølgelig, det stemmer ikke. 12 ganger 12, det blir selvfølgelig 144. 144 og så pluss 44, det blir da, nei, nei, nei, og så er det 100, ja sånn, og så er det 44. Så er det 44 rød og 100 blå, stemmer det? For at 100 blå, da er det 10x10 blå og så er det 12x12 i det hele. Stemmer det? I: Det hørtes veldig fornuftig ut.

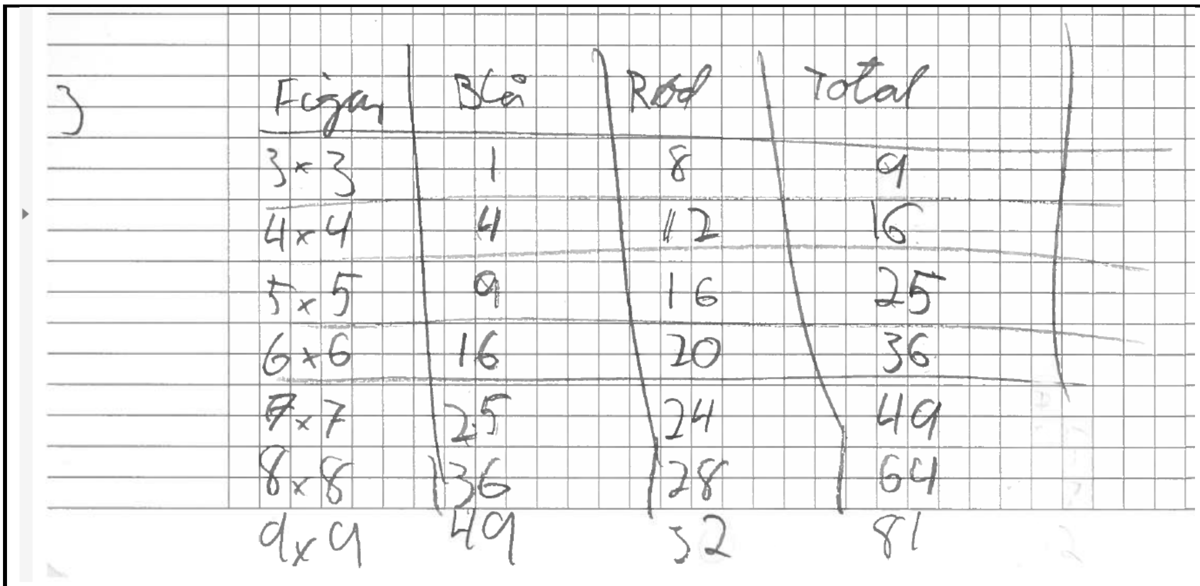
R: Så at det er 12, så er det 10, sånn altså 10x10 blå altså 100, og 44 røde rundt. Tror jeg stemmer.

Figur 14: Transkripsjon av Robins løsning for oppgave 3-3.

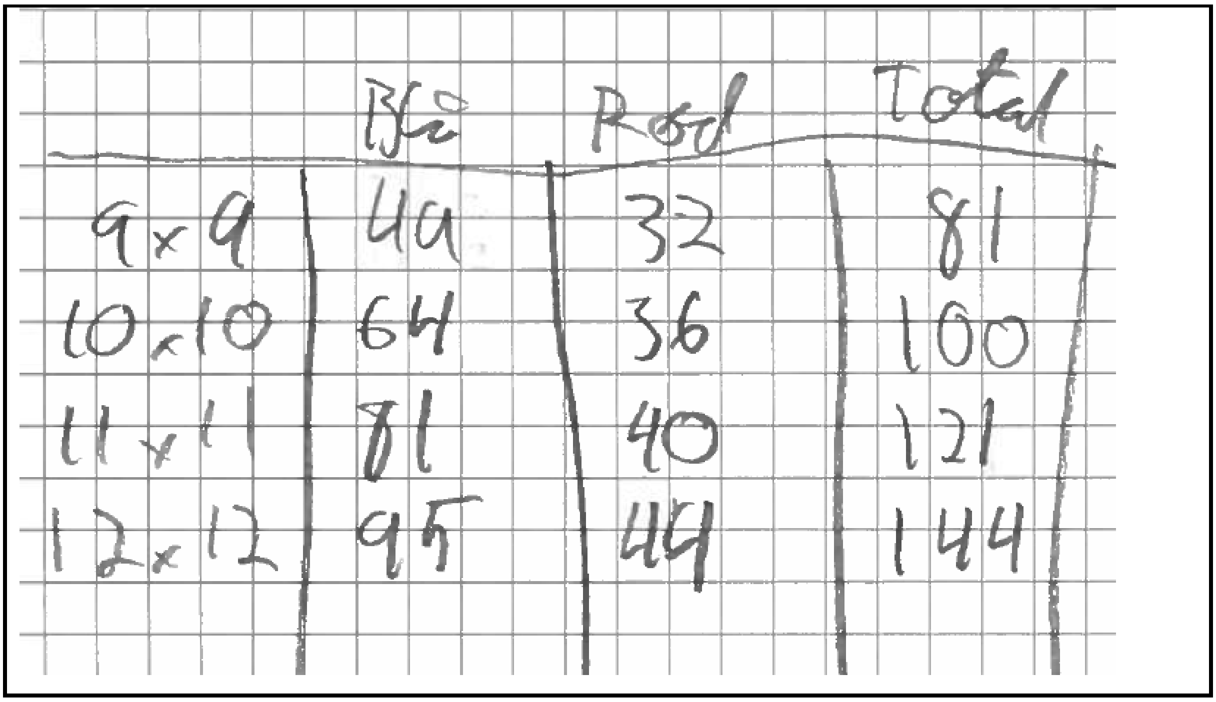
Robin har fra oppgaven fått oppgitt antall røde brikker. Han tar utgangspunkt i en 10x10-figur, 100 brikker totalt, og prøver å trekke fra de 44 røde brikkene for å se om han får et kvadrattall. Han har i de tidligere oppgavene løst figurer fra 3x3 og opp til 9x9, derfor tar han nå utgangspunkt i 10x10. Han er litt tilbakeholden med denne strategien og sier også «nei det blir jo bare gjetting». Det er derfor å forstå at denne strategien er av mindre attraktiv rang enn andre strategier. Når Robin ikke får til å løse oppgaven med en 10x10-figur prøver han seg med det samme med en 11x11. Da dette heller ikke gir svaret går han videre til en 12x12-figur og får da riktig svar.

4.1.5 Organiser datamaterialet

Noen av elevene valgte å bruke *organiser datamaterialet* for noen av oppgavene, da gjerne i samspill med andre strategier. Her er hvordan Gunnar brukte strategien:



Figur	Blå	Rød	Total
3x3	1	8	9
4x4	4	12	16
5x5	9	16	25
6x6	16	20	36
7x7	25	24	49
8x8	36	28	64
9x9	49	32	81



Figur 15: Gunnars svarark for oppgave 3.

Figur 9 er hvordan Gunnar har valgt å skrive ned svaret på oppgaven. Man kan ganske tydelig se at han benytter seg av *organiser datamaterialet*. Gunnar lager en tabell for å få bedre oversikt over den gitte informasjonen. Slik forklarer Gunnar selv det han gjør for oppgave 3-1 og 3-2:

G: Okay, så er det 64. Det er jo også et kvadrattall fordi 8 ganger 8 blir 64. Da hadde det i så fall kommet under her og blitt, ja du har 64 og så har du noe som er under. Som da hadde kanskje blitt, hm, jeg tror det er en til sammenheng her. At du tar 7 ganger 7, så har du 25, det er 2 ovenfor. Og hvis vi sier at 6 ganger 6, altså 16, 25 det er 5 ganger 5, 16 det er 4 ganger 4, 9 er 3 ganger 3. og 4 er jo 2 ganger 2. Det blir på en måte skråsystemer der og. Så hvis du tar 8 her så blir det 6 ganger 6 ruter innenfor. Kan jo prøve å tegne det der og. Bare for å vise. Så blir det 6 ganger 6 inni. Så har du 6 ganger 6 det er jo 36, då tar du, det vil jo si at, på den der, 49 minus 24 er 25, 36 minus 20 er 16, 25 minus 16 er 9, 16 minus 12, ja. Der har du også at det blir, ja, det er liksom sammenheng mellom kvadratrot og kvadrattall der tror jeg. Og hvis du da sier at du har 64 her, så har du 64 minus 24, nei 64 minus 36 tror jeg. Ja, skal vi se. (Teller antall røde brikker i 8x8-figuren, regner så ut 64-36) Ja, det er 28 ruter rundt. Nå har man jo kontrollert det så kan man si at hvis du tar denne tabellen og fortsetter der. Altså 36 pluss 28 er 64. Det er litt sånn sammenheng på kryss og tvers og opp og ned og.

I: Mm, og sammenhengen var at?

G: Hvis du tar blå, rød så får du totalt. Hvis du tar totalt minus den ene så får du den andre. Og så tar du jo vi har to tall ovenfor – 64 minus 28 er 36, 49 minus 24 er 25, 36 minus 20 er 16. Og så går det jo på skrå – 36 blir jo der, 16-16, 25-25, 9-9, 4-4, 1-1. Så det går opp og ned og på skrå og sånn, når du har en tallrekke og. Vi kan jo se her. (Skriver opp svaret på b)1)

I: Det var til oppgave 3-1 du skrev nå?

G: Ja, 3-1. Og så, man kan jo godt se i systemet hvis vi tar, 49 blir jo da neste, det blir 9 ganger 9, for skal vi se, 36 står igjen der, 2 ned og 2 bort, 25 står der, hvis vi tar 2 ned og to bort så skal 49 da stå her, 9 ganger 9, og 9 ganger 9 er 81, skal vi se er det flere sammenhenger her. Ja, 81 minus 49, 30 skal stå her.

Figur 16: Transkripsjon av Gunnars løsning for oppgave 3-1 og 3-2.

Gunnar benytter seg av flere strategier for oppgavene. Først ser Gunnar på hva som er gitt av informasjon i selve oppgaven. Deretter organiserer Gunnar datamaterialet slik at det skal bli enklere å arbeide med. Han benytter seg av *organiser datamaterialet* for å få bedre oversikt over de dataene som er gitt. Videre benytter han seg av *se etter et mønster*. Når datamaterialet er satt opp i en oversiktlig tabell er det mye enklere å kunne identifisere mønstre.

4.1.6 Logisk resonnement

Strategien *logisk resonnement* var også en strategi som tre av elevene tok i bruk. Nedenfor er hvordan Marie løste oppgave 3-3:

M: Og da er det neste oppgave. (Leser oppgaven) mm

I: Hva tenker du da?

M: Eh, hvor mange blå brikker trenger man. Må det være et kvadrat?

I: Ja, det er fortsatt liksom samme figur, eller sånn oppbygging.

M: Okay. Jeg vet ikke helt hvordan jeg skal regne det ut, men 44 rundt, hvis vi har 1, der er det 40 også 44 på hvert hjørne og da blir det, da har du, enten så har du 90 eller så har du 100.

I: Hvordan kommer du frem til det da?

M: Du har 100 inni.

I: Hvordan kom du frem til det?

M: Fordi at først så delte jeg 40, siden det er 4 sider, så tok jeg 10 utenom hjørnene, og så plusset jeg på hjørnene og da blir det 44 rundt rød.

I: Hvorfor tok du først bort hjørnene?

M: Fordi jeg delte-

I: Siden du delte det på-

M: 40 først. Og da er det jo 10 på hver side. Og så tok jeg hjørnene inn på enerne liksom. Og så inni så telte jeg den øverste, og det er jo 10, ja, og så ganget jeg det med 10 som er vannrett og loddrett. Så svaret- jeg må skrive det på nytt. 44 rundt, og da er det 144 til sammen.

Figur 17: Transkripsjon av Maries løsning for oppgave 3-3.

Når Marie skal finne ut hvor mange blå brikker man trenger i en figur med 44 røde, velger hun først å fjerne hjørnene av figuren slik at det blir 40 brikker. Deretter deler hun 40 på hver side, slik at hun får 10. Da finner hun ut at det skal være et 10x10-kvadrat inni figuren. Marie ser at om hun deler 44 på 4 vil hun få 11, men da vil hjørnene i figuren være tatt 1 gang for mye. Derfor velger hun å fjerne hjørnene slik at hun legger sammen sidene av figuren og så legger på hjørnene til slutt.

4.1.7 Generalisering

Generalisering ble benyttet når elevene skulle lage generelle uttrykk i oppgaven. Her er hvordan Thomas løser oppgave 1a:

T: Ledd nr. n.

I: Har du sett det før, ledd nr n?

T: Har brukt a, b, c, d, har brukt x-er, x, y.

I: Ja, men ikke n? Det er egentlig det samme. Så du skal lage et uttrykk som gjør at hvis du setter inn et av disse tallene så skal du få, hvis du setter inn 1 så skal det bli 2 under, hvis du setter inn 4 så skal det bli 5 under.

T: Åja

I: Så, et uttrykk som gjør at du kan sette inn hvilket som helst tall og få et ledd i tallrekka.

T: Åja, okay. Blir det, oppe blir det n, nede blir det n+1. Alltid en over hele tiden, så.

Figur 18: Transkripsjon av Thomas’ løsning for oppgave 1a.

Her ser vi hvordan Thomas løser oppgave 1c. Han trenger litt forklaring i hva *n* vil si, men når han forstår oppgaven ser man at de algebraiske idéene er på plass. Han har ingen problemer med å uttrykke tallrekka på et algebraisk språk. Her er Joakims bruk av *generalisering* for løsning av oppgave 3b:

I: Så du skal lage et uttrykk for røde brikker og totalt antall brikker. Så hvis du setter inn f.eks. 3 i stedet for n så får du en 3x3 figur, og så får du 3 minus 2 opphøyd i andre, du får 3 minus 2 som er 1, opphøyd i 2 er 1 ganger 1, da får du jo antall blå brikker. Og så var det et uttrykk for antall røde brikker.

I: Hva tenker du?

J: Det er ikke helt min sterkeste side.

I: Men hvordan har du regnet det tidligere på de oppgavene?

J: Jeg har bare brukt tabellen og så har jeg telt oppover, men jeg vet ikke hvordan jeg skal bruke det til å sette det inn i et uttrykk.

I: Men hvordan har du telt oppover?

J: Fordi det blir 4 mer på de røde hver gang. Men jeg vet ikke helt hvordan jeg skal bruke det med de her, for å.

I: Men det er 4 oppover hele veien, hva tenker du da, bør 4 være.

J: Med i uttrykket, ja det tror jeg.

I: Det kan man, jeg kan si så mye at man kan lage utallig mange forskjellige uttrykk, men å bruke 4 med i den vil virke veldig fornuftig, så ja, hva videre da, du må jo også ha n med i uttrykket. Det er jo figuren da. Videre da, hva tenker du?

J: Jeg vet ikke helt. 4 ganger n, noe i den duren men det blir ikke rett for kan ikke gange 3x3 8.

I: er det noe du kan gjøre med n eller 4 for at det skal bli 8?

J: Jeg kan sikkert ta minus noe annet også.

I: Altså det er fullt lov, du manipulerer som du vil for å få det du vil ha. Og så må du se om det stemmer for resten. Men hva du skal ta minus da?

J: Jeg lurer på at det ikke blir n ganger 4 minus 4, for den ligger på en måte under n, nei n ganger 4 pluss 4 blir det.

I: Hva skjer da hvis du tar, hvis du tar, du kan skrive opp uttrykket slik at-

J: Nei glem det. Jeg tror det blir. N ganger 4 minus 4. For at da ganger du den med 4, så ganger du den her med 4.

I: Hvis n er 3.

J: Hvis n er 3 så ganger du 3 med 4, da får du 12 så minus 4 får du 8.

I: Enn hvis n er 5?

J: Hvis n er 5 så ganger du 5 med 4, så får du 20 minus 4 er 16.

Figur 19: Transkripsjon av Joakims løsning for oppgave 3b.

Joakim forteller at han bare har brukt tabellen for å ha funnet svaret på oppgavene tidligere. Joakim vet at leddene øker med 4 for hver figur. Han er litt usikker for hvordan han skal få 4 ganger n til å bli lik 8 når n=3, men han ser til slutt av om han tar 4 ganger n minus 4, vil han ha et uttrykk for de røde brikkene.

4.2 Løsningsstrategier

Tabellen under viser hvilke strategier elevene har brukt for å løse de ulike oppgavene.

Tabell 2: Oversikt over elevenes strategier for oppgavene.

Oppgave	Nina	Janne	Gunnar	Thomas	Linn	Cathrine	Ingvild	Marie	Robin	Joakim
1a	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
1b	M	M	M	M*	M	GS*	M	M	M	M
1c	-	G	G	G	-	GS*	G	-	G	G
2a	M	M	M	M	M	M	M	F*	M	M
2b	M	M	M	M	M	M	M	F, TF*	M	M
2c	-	G	G	G	-	G	G	-	G	G
3a	TF	M*	M, O, LR, TF	O, M, TF	-	M	M	M	M	M
3-1	TF, O	-	M, TF	TF	-	LR, TF	O, TF	TF	GS, M	M
3-2	TF	-	M, TF	TF	-	TF	O, TF	TF	M	M, TF
3-3	LR, TF	-	O, M, TF	GS, TF	-	LR, TF	LR, TF	LR, TF	GS	O, M
3b	-	-	G	G	-	G	G	G	G	G

Se etter et mønster: M
Forenkling: F
Tegn en figur: TF
Gjett og sjekk: GS
Organiser datamaterialet: O

Logisk resonnement: LR
Generalisering: G
Ikke gjort oppgaven: (-)
Feil svar: (*)

En forutsetning for resultatene er at de strategiene elevene velger kan benyttes til å gi et matematisk korrekt svar. Uansett er det interessant å se hvilke strategier elevene tar i bruk og det er derfor satt et tegn (*) hvor en strategi fremkommer som ikke gir rett svar. Dette betyr ikke at strategien ikke kan benyttes, men heller at eleven har gjort en feil i løsningsprosessen eller på en annen måte fått et feil svar.

4.2.1 Sammenheng mellom valg av strategier og oppgaver

Av tabell 2 ser man at mange av de samme strategiene går igjen for enkelte oppgaver. I oppgave 1 er det mange av elevene som har benyttet seg av samme strategi for løsning av hele oppgaven. Alle elevene har benyttet seg av *se etter mønster* for oppgave 1a. Foruten om én elev, har alle også benyttet seg av samme strategi for oppgave 1b også. Endring av strategi kommer når elevene skal begi seg ut på oppgave 1c, da er elevene nødt å komme med et generelt uttrykk.

Dette kan man også se likhet til i oppgave 2. Her benytter alle seg av strategien *se etter mønster* for oppgave 2a, foruten én elev. Her er det Marie som tar i bruk *forenkling* for oppgaven. På oppgave 2b er igjen *se etter mønster* det mest fremtredende strategivalget blant elevene. Igjen er det Marie som tar i bruk andre strategier for oppgaven. I stedet for *se etter mønster* benytter hun seg av *forenkling* og *tegn en figur*. Når elevene skal uttrykke mønsteret algebraisk er det de samme elevene som ikke har gjort oppgave 1c, som går igjen for 2c.

Oppgave 3 skiller seg ut fra de to forrige oppgavene, her ser man at flere strategier blir tatt i bruk. For oppgave 3a ser man Gunnar og Thomas ta i bruk flere strategier for å løse oppgaven, enn hva de har benyttet seg av tidligere. Man ser fortsatt at *se etter mønster* er den strategien elevene benytter seg mest av. For oppgave 3-1 ser man at *tegn en figur* er tatt i bruk 6 ganger, mens det for oppgave 3-2 er én elev til som har tatt strategien i bruk. Mens for oppgave 3-3 er den tatt i bruk 6 ganger. *Gjett og sjekk* fremkommer også 6 ganger i oppgavesettet. Ser man på oppgavesettet til oppgave 3 i helhet, er det flere strategier for hver av oppgavene. Elevene må ta i bruk flere strategier for å løse de ulike delene for oppgave 3. Noe som også er spesielt er at det ofte ender med at de må tegne en figur etter å ha prøvd flere strategier.

Oppgave 1c, 2c og 3b er alle oppgaver hvor elevene skal lage formler. For oppgave 1c ser man at alle elevene som løste oppgaven gjorde akkurat dette. For oppgave 2c ser man også at nesten alle gjør dette, foruten Marie. Hun tar i bruk *gjett og sjekk* for oppgaven. Oppgave 3b er det 7 elever som får til.

4.2.2 Sammenheng mellom elever og valg av strategier

Hos noen av elevene kan man se en sammenheng mellom elevene og deres valg av strategier. I tabell 2 ser man at siste benyttede strategi ofte er den som er valgt til neste oppgave. Som man ser på Nina benytter hun seg av *finn et mønster* for oppgave 1a og 1b. Hun hopper over 1c da hun ikke vet hvordan hun skal løse oppgaven. En lik fremgangsmåte er å spore i oppgave 2a og 2b: Nina benytter seg av *generalisering* for begge. For oppgave 3 ser man igjen en lik fremgangsmåte: Nina tar i bruk *tegn en figur* for oppgave 3a. Denne strategien benytter hun seg av for oppgave 3-1, 3-2 og 3-3. For oppgave 3-1 er det en liten endring da Nina også tar i bruk *organiser datamaterialet* i tillegg til *tegn en figur*. Nina velger seg én strategi og holder seg til den.

Robin er også et godt eksempel på dette. Foruten oppgave 1a og 1b og oppgave 3-3 har Robin kun benyttet seg av strategien *generalisering*. For oppgave 3-3 har Robin vært usikker på hvordan han skulle løse oppgaven og heller da tatt i bruk strategien *gjett og sjekk.*

Dette er noe man kan se hos flere av elevene. Elevene velger seg en strategi og holder seg til den. Ofte ser man at siste strategi de benytter seg av er *tegn en figur*. De prøver ulike strategier for oppgave 3, men det ender ofte i *tegn en figur*.

5 Drøfting

I dette kapittelet vil jeg diskutere funnene jeg har gjort og se dem i lys av eksisterende forskning. Kapittelet er strukturert at jeg først drøfter de avdekkede strategiene og så elevenes valg av strategi.

5.1 Elevers valg av strategier

Resultatene viste at elevene tok i bruk flere strategier for problemer som omhandler numeriske rekker og geometriske mønstre. Mer spesifikt indikerte resultatene at *se etter mønster* er den mest brukte strategien av elevene. Strategien skiller seg kraftig ut da elevene har tatt den i bruk hele 53 ganger. Strategien kommer med andre ord frem i nesten halvparten av alle oppgavene. At elevene tar i bruk denne strategien for oppgavene er kanskje ikke så rart. Brekke, Grønmo og Rosén (2000) skriver at arbeid med tallmønster gjør at elevene må finne sammenhengene. Det blir derfor den mest naturlige strategien å ta i bruk når en arbeider med tallmønstre. En må også tenke på at en forutsetning for å kunne generalisere er at en forstår mønsteret (Pólya, 1957). Elevene kommer med en generalisering av tallmønstrene 20 ganger, som betyr at om en legger sammen disse er *se etter mønster* fremtredende i totalt 73 av løsningene til elevene.

Strategien som er tatt i bruk færrest ganger er *forenkling.* Det er kun Marie som tar seg i bruk av *forenkling*, dette for oppgave 2a og 2b. Det fremkommer av løsningene til Marie at hun ikke helt stoler på sine egne matematiske ferdigheter. Hun spør ofte spørsmål som «er dette rett?» eller «skal jeg sette dette som svar?», som tyder på at hun selv ikke validerer svarene hun får. I stedet spør hun intervjuer om svaret er valid. Dette henger nok med strategivalget til Marie, fordi hun ikke helt stoler på sine egne matematiske ferdigheter velger hun å jobbe med så enkle tall som mulig. Et annet eksempel på at elevene ikke validerer svarene er Cathrines løsning av 1b hvor hun tar i bruk *gjett og sjekk* for oppgaven. Selv om strategien tilsier at problemløser skal sjekke svaret en får, er dette fraværende i eksempelet og kommentaren «Ja, jeg tror det blir rett.» kommer ofte frem. Dette bekrefter tidligere forskning på elevenes metakognisjon (Schoenfeld, 2007a; Verschaffel & De Corte, 1997; Verschaffel, Greer, & De Corte, 2007): elevene velger seg en strategi og får et svar, og validerer ikke svaret på oppgaven. Det er tydelig for Cathrine og Marie at de ikke ser om svaret er valid for oppgaven.

Dette kan det være flere grunner til. Dette er likevel noe som var veldig individuelt. Mens det er eksempler på elever som Marie og Cathrine som ikke validerer svarene, i tråd med forskning (Schoenfeld, 2007a; Verschaffel & De Corte, 1997; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007), ser man også eksempler på elever som tar i bruk strategier uavhengig av løsningsmetoden for å sjekke om svaret er korrekt. Et eksempel på dette er Gunnar. For løsning av hele oppgave 3 tar Gunnar i bruk flere strategier: Gunnar organiserer datamaterialet han får oppgitt av oppgaven og det han kommer frem til i en tabell, og ser etter mønstre i denne. Selv om han kommer frem til et svar for oppgaven, tar han i bruk *tegn en figur* for å sjekke at det han har fått er korrekt. Stipek et al., (1998) hevder at når elevene er motiverte for faget, vil de ta i bruk flere og mer kreative problemløsningsstrategier. Likevel er ikke oppfatningen at noen av elevene at de virker demotiverte for faget, snarere tvert imot.

Logisk resonnement er en strategi som kommer frem 6 ganger i elevenes løsning av oppgavene. Likevel er dette en strategi som jeg ser på som vanskelig å identifisere. Flere av elevene kan gjøre logiske slutninger i tankene, men hvis elevene ikke uttrykker disse resonnementene verbalt er det vanskelig å identifisere strategien. Dermed betyr det at flere av elevene kan ha tatt i bruk strategien. De 6 gangene den kommer frem er når elevene gir uttrykk for det. Det var store forskjeller på hvor muntlig aktive elevene var i løpet av intervjuet. Gunnar er et eksempel på en veldig verbal elev, mens elever som Nina og Janne var mer tilbakeholdne.

Noen av strategiene *se fra en annen synsvinkel*, *vurdere ekstreme tilfeller* og *gjøre rede for alle muligheter* var ikke fremtredende i noen av løsningsforslagene fra elevene. Posamentier og Krulik (1998) understreker i sin forskning at det er sjeldent at et problem kan løses ved bruk av alle strategiene de presenterer. *Vurdere ekstreme tilfeller* og *gjøre rede for alle muligheter* ville vært veldig tidkrevende og ikke gitt svar på de bestemte leddene en har bruk for.

5.2 Strategivalg for oppgavene

For oppgave 1 og 2 fremkommer det fra resultatene et mønster over hvilke strategier elevene har tatt i bruk for oppgavene. Det er i hovedsak kun to strategier som trengs for å løse de: *se* *etter mønster* og *generalisering*. Elevene trenger kun identifisere mønsteret og så overføre det til et algebraisk språk. Dette henger mye med oppgavenes utforming. Strategien som brukes for 1a kan også benyttes for 1b, og på samme måte kan strategien som tas i bruk for 2a også benyttes for 2b. Når en strategi fungerer for en oppgave er det naturlig for elevene å prøve ut den samme strategien for neste, fordi elevene har en gitt fremgangsmåte å løse den på (Olafsen & Maugesten, 2015; Posamentier & Krulik, 1998; Mayer & Hegarity, 1996). Dette henger nok sammen med oppgavenes utforming. Det er oppgitt et tallmønster og problemløser bes om å finne bestemte ledd i tallmønsteret, før mønsteret skal overføres til et algebraisk språk. Dermed vil oppgavene 1 og 2 være problemer helt til elevene har en fremgangsmåte for hvordan de kan løses. Fra oppgave 1a til 1b eller fra 2a til 2b, er fremgangsmåten oppdaget og kan bare videreføres til neste del av oppgaven og benyttes på samme måte.

Likevel ser man noen eksempler på avvik fra dette. Som nevnt tidligere benytter Cathrine seg av *gjett og sjekk* for oppgave 1b og 1c, og Marie benytter seg av *forenkling* for oppgave 2a og 2b. Forskjellen på svarene elevene får er at Maries fremgangsmåte ikke er langt fra det som er rett, hun har bare ikke sett at når hun ganger sammen bordene får hun stolene på endene flere ganger. Cathrines svar er bare en gjetning som ikke sjekkes opp mot svaret. Grunnen til at Cathrine velger *gjett og sjekk* henger med at hun fortalte at de holdt på med likninger i matematikkundervisningen. Hun tar utgangspunkt i en likning hun lager seg, av noen tall hun mener er viktige for oppgaven. Dette kan tyde på en misoppfatning om hva de forskjellige begrepene «formel», «uttrykk» og likninger betyr.

Elevenes forskjeller i svar for oppgave 3 er ganske tydelig. For oppgave 3a går fortsatt *se etter mønster* igjen i flere av løsningsforslagene fra elevene, men oppgaven skiller seg fra de to tidligere at flere elever tar i bruk andre strategier også. Gunnar og Thomas tar i bruk flere strategier for oppgaven enn tidligere. Mens Thomas tar i bruk *organisere datamaterialet*, *se etter mønster* og *tegn en figur*, tar Gunnar i tillegg til disse også *logisk resonnement* i bruk for oppgaven. Thomas' løsning av oppgaven er å organisere dataene i en tabell for så å lete etter mønstre. Da han ikke klarer å løse oppgaven på denne måten velger han å tegne figuren og telle antall brikker. Det virker dermed som om Thomas hadde strategien klar, men valgte å prøve å løse oppgaven med de to første strategiene før han måtte ty til å tegne figuren. Denne måten å angripe oppgaven på ser man hos flere av elevene. Først prøver de å løse oppgaven ved bruk av andre strategier, men da det ikke går tar de i bruk *tegn en figur*. Gunnars svar skiller seg i fra Thomas'. Gunnar bruker *se etter mønster, organiser datamaterialet* og *logisk resonnement* sammen for å løse oppgaven. Han kommer frem til et svar som han sjekker ved å bruke *tegn en figur*.

For oppgave 3-1 tar flere elever i bruk *tegn en figur*. Flere studier (De Corte, Greer, & Verschaffel, 1996; Pólya, 1957; Schoenfeld, 2007a) har sett på modelleringer av problemer, og De Bock, Verschaffel, Janssens, Van Dooren & Claes (2003) sier at strategiens allsidighet gjør den til et veldig hjelpsomt kognitivt verktøy i problemløsning. Det er likevel forskjeller på hvordan elevene tar den i bruk. I Ingvilds løsningsforslag for oppgave 3-1 sier hun «For å gjøre det enklere og ikke telle, så skal det gå ant å regne det ut.» Dette viser at Ingvilds holdning til strategien *tegn en figur* er at den ikke er så attraktiv og anerkjennende. Dette var det flere eksempler på. Thomas' løsning av oppgave 3a er først å benytte seg av flere strategier: *organiser datamaterialet* og *se etter mønster*. Da oppgaven ikke kan løses eller han kommer til feil svar, velger han å tegne figuren og bare telle. En visuell modellering av problemet vil gi elevene svaret, men dette er ikke så attraktivt som løsningsmetode. Steen, Turner & Burkhard (2007) har i sin studie avdekket at modellering av problemer ofte er forbundet med matematisk svakere elever, men at dette ikke trenger å være tilfelle siden modelleringer kan føre til sterkere bånd mellom matematikken og den virkelige verden. Det kan dermed være en holdning hos elevene at kun matematiske svake elever trenger å ta i bruk modelleringer for å løse problemer, og at de derfor er avventende med å ta strategien i bruk.

En liknende situasjon oppsto i Robins løsning av oppgave 3-3:

> R: Da, jeg tok utgangspunkt i 100 brikker i det hele tatt, så skulle jeg bare se om det stemte jeg tror kanskje det gjør det, så skal vi se hvor mange blå, hvis det er 44 røde og så er det, nei det blir jo bare gjetting. Åh, den var vanskelig, skal vi se. Okay, vi tar utgangspunkt i 100, da er det 44 røde da blir det 56 blå. Skal vi se, også, 56 er ikke kvadratrot så det kan ikke stemme. Nei, jeg vet ikke hvordan jeg skal løse den, rett og slett.

Robin benytter seg av strategien *gjett og sjekk* og da bruken av denne strategien ikke gir svar på oppgaven gir han opp. Av lærer ble jeg fortalt at Robin er en «6'er-elev» og av løsningsforslagene på de ulike oppgavene er dette også noe jeg sitter igjen med som inntrykk.

Likevel viser ikke Robin utholdelse på oppgavene, noe jeg støtter meg på forskningen til Schoenfeld (1988): elevers oppfattelse av matematikkfaget er at oppgaver og problemer skal løses i løpet av kort tid. I likhet med *tegn en figur* virker det som om noen elevers syn på strategiene er at de er en «siste utvei». Dette kan også henge med undersøkelsens setting: At elevene tror oppgaveløsningen vil ha innvirkning på karakter i skolen (Goldin, 2000).

5.3 Matematikkholdninger i løsningsforslagene

Et annet interessant funn er hvordan elevenes matematikkholdninger kommer til syne i løsningsforslagene: På den ene siden har man elever som Gunnar som reflekterer godt gjennom hele løsningsprosessen. Som er kritisk til svarene han får og sjekker de opp før han går videre til neste oppgave, og som tar seg god tid til hver og en av oppgavene. På den andre siden kommer det frem elever som Thomas og Robin som ikke validerer svarene sine. Som prøver å løse oppgavene raskest mulig og hvis står fast, gir opp, i tråd med Schoenfelds forskning (1988). Selv om matematikkholdninger i fra PISA-undersøkelsene viser en positiv utvikling hos elevene (Kjærnsli & Olsen, 2012), ser man i fra resultatene at det fortsatt er noe som må jobbes mer med.

6 Avslutning og videre forskning

I denne masteroppgaven har jeg analysert datamaterialet mitt etter forskningsspørsmålet for å besvare problemstillingen min:

> *Hvilke problemløsningsstrategier benytter ungdomsskoleelever seg av for løsning av numeriske rekker og geometriske mønstre?*

Av problemløsningsstrategier som kommer frem i løsning av problemer med numeriske rekker og geometriske mønstre er det strategiene *se etter mønster*, *forenkling*, *tegn en figur*, *gjett og sjekk*, *organiser datamaterialet*, *logisk resonnement* og *generalisering* som de 10 elevene i mitt forskningsprosjekt benytter seg av, og at strategiene *se fra en annen synsvinkel, vurdere ekstreme tilfeller, jobbe bakover* og *gjøre rede for alle muligheter* ikke blir brukt i løsning av oppgavene. Spesielt ser en at strategien *se etter mønster* er den som kommer frem flest ganger for løsning av numeriske rekker og geometriske mønstre. Resultatene viser også at elevene forsøker å ta i bruk andre strategier før de løser oppgaven med *tegn en figur* og *gjett og sjekk*. Dette kan tyde på at strategiene ikke er så attraktive som løsningsalternativer. Det kommer frem at flere av elevene er bevisst på egne matematiske ferdigheter og veldig reflekterte rundt løsningsprosessen. Disse elevene tar også i bruk flere strategier for løsning av problemer med tallrekker. Likevel er dette noe som er veldig individuelt, og enkelte av elevene reflekterer ikke over svarene de får, de bare aksepterer dem. Resultatet er likevel ikke generaliserbart for alle elever i 9. klassetrinn da utvalget mitt ikke representativt.

Det er mange veier en kan ta prosjektet videre. Den mest naturlige vil være å ha undervisning rettet mot problemløsning og sammenliknet resultatene fra før-testen til en etter-test. Dette var noe jeg hadde lyst til men grunnet prosjektets tidsramme var noe som så seg vanskelig å gjennomføre.

Én annen mulighet vil være å ta metoden jeg har benyttet meg av for å se hvordan svake og sterke elevers strategivalg påvirker løsningsprosessen og sammenlikne disse. Dette trengs ikke kun gjøres for problemer som omhandler numeriske rekker og geometriske mønstre, men er noe som er interessant å se for alle temaene innenfor matematikkfaget. Dette er noe som alltid vil være relevant, da en slik undersøkelse vil gi læreren forståelse for elevene og bedre mulighet for tilretteleggelse for enhver i matematikkfaget.

Litteraturliste

Bergsten, C., Häggström, J., Lindberg, L., Emanuelsson, G., Rosén, B., Ryding, R. & Wallby, K. (2009). *Algebra för alla.* Göteborg: Livréna AB.

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W. & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and instruction*, *13,* 441-463.

Brekke, G., Grønmo, L. S. & Rosén, B. (2000). *Rettleiing til algebra*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Blanton, M. l., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, (36)5, 414-446.

Charles, R. I. & Lester, F. K. (1984). An evaluation of a process-oriented instructional program in mathematical problem solving in grades 5 and 7. Journal for Research in Mathematics Education, 15(1). (s. 15-34).

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structures, task-based interviews in mathematics education research. I: Lesh, R., & Kelly, A. E. (red) *Research design in mathematics and science education.* (s. 517–545). Erlbaum: Hillsdale.

Gray, D. E. (2004). Doing Research in the Real World. London: Sage Publications.

Grevholm, B., Riesbeck, E. & Taflin, E. (2013). Å lære matematikk gjennom problemløsning. I B. Grevholm (Red.), Matematikkundervisning 1-7 (s. 207 – 237). Oslo: Cappelen Akademisk.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2012). *Framgang men langt fram.* Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011. Oslo: Akademika forlag.

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (2013) *Opptur og nedtur*. Analyser av TIMSS-data for Norge og Sverige. Oslo: Akademika forlag.

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (2013) Bakgrunn, mål og innhold. I Grønmo, L. S. & Onstad, T. (red) *Opptur og nedtur*. (s. 9-18) Oslo: Akademika forlag.

Hewitt, D. (2001). Arbitrary and necessary: Part 3 educating awareness. For the Learning of Mathematics, 21(2), 37–49.

Kieran, C. (2007). The learning and teaching of school algebra. I: D. Grouws (Red.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning.* (s. 707-762). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kirke- og utdanningsdepartementet. (1987). *Mønsterplan for grunnskolen.* Oslo: Aschehoug.

Kjærnsli, M. & Olsen, R. V. (Red.) (2013). *Fortsatt en vei å gå.* Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012. Oslo: Universitetsforlaget.

Lampert, M. (1990). *When the problem is not the problem and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching.* I American Educational Research Journal, Vol. 27, No. 1. (s. 29-63).

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and moodeling. I F. K. Lester, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*: a project of the National Council of Teachers of Mathematics (s. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Mayer, R. E., & Hegarity, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. I R. J. Stenderg & T. Ben-Zee (Red.), *The nature of mathematical thinking* (s. 29 – 54). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

McIntosh, R. & Jarrett, D. (2000). *Teaching mathematical problem solving: Implementing the vision.* A literature review. Appalachia: Mathematics and Science Education Center.

Merriam, S. B. (2014). Qualitative Research: A Guide to Design and Implementation: A Guide to Design and Implementation. San Francisco: Jossey-Bass.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y. & Preuschoff, C. (2009). *TIMSS 2011 Assessment Frameworks.* Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center Lynch School of Education.

Ng, S. F., & Lee, K. (2009). The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. Journal for Research in Mathematics Education, 282-313. [PDF] (Hentet, 04.05.16, fra http://www.jstor.org/stable/pdf/40539338.pdf?_=1463045855421)

Nosrati, M & Wæge, K. (2014). *En oppsummering av status for forskning på hva som kjennetegner god læring og undervisning innenfor matematikk.* [PDF] (Hentet, 11.05.2016, fra: https://nettsteder.regjeringen.no/fremtidensskole/files/2014/05/Status-rapport-matematikksenteret.pdf).

Olafsen, A. R. & Maugesten, M. (2015). *Matematikkdidaktikk i klasserommet.* Oslo: Universitetsforlaget.

Persson, J. (2014). *Problemløsning*. Kompendium. NTNU: Trondheim.

Posamentier, A. S., & Krulik, S. (1998). Problem solving strategies for efficient and elegant solutions: A resource for the mathematics teachers. USA: Corwin Press Inc.

Roschelle, J. (2000). Choosing and Using Video Equipment for Data Collection. I: Lesh, R., & Kelly, A. E. (red) *Research design in mathematics and science education.* (s. 709-732). Erlbaum: Hillsdale.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well-taught" mathematics courses. Educational Psychologist, 23 (2), 145-166.

Schoenfeld, A. H. (2007a). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. I D. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (2007b). Method. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 69–107). Charlotte, NC: Information Age.

Someren, M.W. van, Barnard, Y.F. & Sandberg J.A.C. (1994). *The think aloud method*. A practical approach to modelling cognitive processes. Amsterdam: University of Amsterdam, FMG: Psychology Research Institute.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. I R. Charles & E. Silver (Red.), The teaching and assessing of mathematical problem solving (s. 1-22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Steen, L. A., Turner, R. & Burkhardt, H. (2007). Developing mathematical literacy. I: Blum, W., Glabraith, P. L., Henn H. W. & Niss, M. (Red.) *Modelling and Applications in Mathematics Education*. Springer: New York. (s. 285-294).

Stipek, D. J., Salmon, J. M., Givvin, K. B., & Kazemi, E. (1998). The Value (and Convergence) of Practices Suggested by Motivation Research and Promoted by Mathematics Education Reformers. Journal for Research in Mathematics Education, 29(4), 465-488.

Unenge, J. & Wyndhamn, J. (1988). *Täljaren – Problemlosning*. Stockholm: Utbildningsförlaget i samarbeid med Skolöverstyrelsen (SÖ) og Utbildingsradion (UR).

Utdanningsdirektoratet. (2013). Læreplan i matematikk fellesfag. (Mat1-04). [PDF] Hentet 27.04.2016 fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Word problems. A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school. I T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), Learning and teaching mathematics: An international perspective (s. 69-97). Hove, U.K: Psychology Press.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole Number Concepts and Operations. I F. K. Lester, Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a 86 project of the National Council of Teachers of Mathematics (s. 557-628). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Vygotskji, L. (1986). *Thought and Language*. (Oversatt av Alex Kozulin). Massachusettes: The MIT Press. (Originalutgaven utgikk i år 1934).

Vedlegg

Vedlegg 1 – Intervjuguide

1. Informasjon

Snakke litt om temaet for det oppgavebaserte intervjuet.

- Informere igjen om hva som skal skje i løpet av intervjuet og hva slags data jeg er ute etter.
- At jeg først vil at elevene skal løse noen oppgaver og at jeg er ute etter metodene de bruker.

Informere om hva datamaterialet skal brukes til, taushetsplikt og at alt er anonymt.

- Datamaterialet vil bli brukt til å svare på en mastergradsoppgave og vil ikke ha noen innvirkning på din hverdag eller skoleundervisning. Alt blir anonymisert og det vil bli brukt en kodenøkkel som vil bli oppbevart adskilt fra resten av datamaterialet.
- Du står fritt til å avslutte intervjuet når som helst.
- Oppgavene vil ta ca. 25-30 minutter og intervjuet i etterkant ca. 10-15. Totalt 30-45 minutter.

Informere om videoopptak og få samtykke til å ta opptak.

- Jeg kommer til å bruke videoopptak for å få med meg mest mulig data. Her får jeg med video av det du gjør på arket og lydopptak av det du sier. Dette datamaterialet er bare noe jeg og min veileder kommer til å ha tilgang til, ingen andre.

2. Oppgaveløsningen

Oppgavene du får utdelt er problemløsningsoppgaver. Da vil jeg bare at du skal løse oppgavene og prate høyt mens du løser de. Jeg kommer ikke til å si så mye mens oppgavene løses, det eneste er at jeg vil si ifra om du blir litt for stille.

Om ikke eleven snakker høyt selv om jeg ber om det kan jeg stille noen spørsmål for å få mer informasjon:

- Hva gjør du?
- Hvorfor gjør du det?
- Hvordan hjelper dette deg i å løse oppgaven?

3. Intervjuet

Da skal vi ha et lite intervju. Jeg kommer til å stille noen spørsmål i forhold til oppgavene du løste.

På oppgave x valgte du å (bruke strategi).

- Hvorfor gjorde du dette?
- Hvordan hjalp denne strategien deg?
- Kunne du brukt en annen strategi her?
    - Hvilke?
    - Ville denne vært bedre/dårligere?
        - Hvorfor?

1. Har du sett oppgaver som likner på disse fra tidligere?
    a. Hvor har du sett de?
2. Hvordan var oppgavene? Var de lette/vanskelige?
3. Hvilke oppgaver var lettest/vanskeligst?
    a. Hva var det som var spesielt lett med disse oppgavene?
    b. Hva var det som var spesielt vanskelig med disse oppgavene?
4. Hvilke forventinger har du til deg selv når du får en ny oppgave?
    a. Forventer du å få den til?
5. Hva gir deg lyst til å løse en oppgave?
6. Når du får presentert en ny oppgave, leser du hele teksten på oppgaven før du begynner å løse den?
    a. Leser du deler av den plukker ut det du tror er viktigst?

    b. Hvordan vet du hva som er viktigst?
7. Om du ikke får til å løse oppgaven med en gang, prøver du da ulike måter å løse oppgaven på?
8. Hva gjør du om du ikke får til å løse oppgaven med en gang?
    a. Går du til neste oppgave?
    b. Prøver du en annen måte å løse oppgaven på?
9. Bruker du å sjekke om svaret du har fått er korrekt?
    a. Hvordan gjør du det?

Takke for at eleven tok seg tid til å være med på intervjuet.

Vedlegg 2 – Infoskriv

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

"En kvalitativ studie om elevers strategier i løsning av problemløsningsoppgaver i matematikk"

Bakgrunn og formål

Dette er en avsluttende masterstudie for en 5-årig integrert master ved fakultet for lærerutdanning under Universitetet i Tromsø, Norges arktiske universitet. Formålet med studien er å avdekke og kategorisere ulike strategier elever tar i bruk i løsning av problemløsningsoppgaver i matematikk. Problemstillingen er: *Hvilke strategier for matematisk problemløsning benytter elevene seg av i arbeidet med problemløsningsoppgaver?*

Hva innebærer deltakelse i studien?

Studien vil være basert på oppgavebaserte intervju. Elever bes løse ulike matematiske oppgaver og forklare hvordan de utfører det høyt. Etter oppgavene vil det være et intervju som omhandler oppgavene som ble gitt, for å grave litt mer i dybden og avdekke ting som ikke kom frem under selve oppgaveløsningen. Studiet utføres ved hjelp av videoopptak for å få ut mest mulig data fra intervjuene. Jeg vil ikke filme eleven, men selve arket de arbeider med, slik at jeg får arbeidsmetoden eleven bruker i løsningen. Varighet på oppgavene og intervjuet vil være ca. 40 minutter.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Det vil kun være masterstudent Vegar Sivertsen og veileder Per Øysten Haavold. Personopplysninger som navn vil være lagret på et koblingsark som vil være adskilt fra datamaterialet i et låsbart skap. Etter endt prosjekt vil koblingsnøkkel og innsamlet data bli destruert, senest 31. mai.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert. Skulle du trekke deg fra studien vil alle opplysninger om deg slettes. Det vil selvsagt ikke ha noen innvirkning på skole eller undervisningstilbud om du ikke ønsker at ditt barn skal delta i studien.

Dersom du ønsker å delta eller har noen spørsmål, ta kontakt med student Vegar på 48173833 eller veileder Per Øystein Haavold på tlf 77645587.
Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å delta

--- ---

(Deltakers navn) (Dato og sted)

(Foreldre/foresattes underskrift)

Vedlegg 3 – Godkjenning fra NSD

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel: +47-55 58 21 17
Fax: +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Per Øystein Haavold
Institutt for lærerutdanning og pedagogikk UiT Norges arktiske universitet

9006 TROMSØ

Vår dato: 05.01.2016 **Vår ref:** 45953 / 3 / AGL **Deres dato:** **Deres ref:**

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 03.12.2015. Meldingen gjelder prosjektet:

45953	*En kvalitativ studie om elevers strategier i løsning av problemløsningsoppgaver i matematikk*
Behandlingsansvarlig	*UiT Norges arktiske universitet, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Per Øystein Haavold*
Student	*Vegar Sivertsen*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 31.05.2016, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Katrine Utaaker Segadal

Audun Løvlie

Kontaktperson: Audun Løvlie tlf: 55 58 23 07

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.