UiT
NORGES ARKTISKE UNIVERSITET

Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Å lære bort divisjon med brøk

Hvordan forklarer matematikklærere i ungdomsskolen sin undervisning i emnet divisjon med brøk?

—

Ole Christian Vedvik

Masteroppgave i lærerutdanning 5.-10. trinn, mai 2017

30 studiepoeng

Sammendrag

I dette mastergradsprosjektet har jeg sett nærmere på hvordan lærere forklarer sin undervisning knyttet til emnet divisjon med brøk. Hensikten med undersøkelsen har vært å avdekke sentrale kjennetegn ved ulike måter å undervise på når det gjelder det aktuelle emnet.

Som et teoretisk grunnlag for oppgavens tematikk har jeg i det andre kapittelet løftet frem ulike forståelser av brøk, divisjon og divisjon med brøk, hentet fra den matematikkdidaktiske forskningslitteraturen. I kapittel 2.4 har jeg også trukket frem ulike sider ved læring og undervisning i matematikk som er sentrale for funnene jeg presenterer i kapittel 4, og diskusjonen rundt disse funnene som kommer i kapittel 5.

Studiet har et kvalitativt design, og baserer seg på intervjuer med ti ulike lærere som underviser matematikk i ungdomsskolen. For å få et rikest mulig datamateriale ble intervjuene gjennomført som semistrukturerte, oppgavebaserte intervju. Intervjuene ble tatt opp med båndopptager, slik at de kunne transkriberes og analyseres i etterkant. Forskningsdesignet er beskrevet mer utførlig i kapittel 3.

Funnene i undersøkelsen er resultatet av en analyseprosess som har likhetstrekk med tematisk analyse (Braun og Clarke 2006). Gjennom å veksle mellom induktiv og deduktiv bearbeiding av lydopptak fra intervjuene har jeg kommet frem til fire ulike tilnærminger som lærere har til undervisning i emnet divisjon med brøk.

Resultatene viser at lærere kan ha en konseptuell tilnærming, en prosedyrebasert tilnærming, en induktiv tilnærming eller en deduktiv tilnærming til undervisning i dette emnet. Videre tyder funnene på at disse tilnærmingene på ulike måter kan kombineres.

Forord

Å levere denne masteravhandlingen betyr at en femårig lærerutdanning ved UiT, er ved veis ende. Takk til alle lærere og medstudenter som har bidratt til å utvikle og opprettholde et godt sosialt og lærerikt miljø.

Arbeidet med denne oppgaven har vært krevende, men svært givende. Jeg føler meg privilegert og takknemlig for anledningen til å kunne fordype meg i noe som er så relevant for mitt fremtidige virke. Jeg vil særlig takke min veileder Ove Drageset for god støtte og nyttig veiledning underveis i prosjektet.

Videre vil jeg takke alle som direkte eller indirekte har påvirket meg til å gjennomføre et arbeid som dette. Takk til alle lærere, som midt i sin travle hverdag sa seg villig til å delta i prosjektet. Takk til Maria Hellestøl Reyes for korrekturlesing av oppgaven. Takk til pappa for det gode forbilde du er for meg. Og takk til min kjære kone Ingvild, som har inspirert meg til å stå på selv i de krevende periodene, og samtidig hjulpet meg til å koble av når jeg har trengt det som mest. Midt oppi alt dette går du selv rundt og bærer på det lille mirakelet som vi snart skal få lov til å bli bedre kjent med. Du er sterk!

Til slutt vil jeg takke Gud, for liv, helse og evner – og gleden over å kunne utforske den verden jeg har rundt meg.

Tromsø, mai 2017

Innholdsfortegnelse

Figuroversikt

1 Innledning

Denne masteravhandlingen er et kvalitativt studie som retter seg mot læreres undervisning i emnet *divisjon med brøk*. Studiet retter seg altså mot undervisning som er koblet til kompetansemålet i K06 som sier at elevene etter 10 trinn skal kunne ”utføre divisjon av brøkar” (Utdanningsdirektoratet 2013).

1.1 Bakgrunn for tema

Tidlig i mitt studie fattet jeg interesse for ulike matematikklæreres valg i undervisning, og erfarte gjennom eget studie, observasjoner og praksis at det finnes mange ulike tilnærminger til matematikkundervisningen. Jeg har gjennom dette også reflektert over min egen skolegang og måten jeg selv har tilegnet meg matematisk kompetanse. Da jeg tok avsluttende eksamen i matematikk på videregående fikk var alle hjelpemidler tillatt på en del av eksamen. Jeg husker godt hvordan jeg anvendte en prosedyre beskrevet i læreboka uten å forstå hva jeg faktisk gjorde. Det eneste jeg forstod var at jeg kom til å få rett svar, siden jeg gjorde det på samme måten som det var gjort i læreboka. I lys av slike opplevelser har jeg grunnet en del på hva matematisk kompetanse innebærer og hva det vil si å lære og kunne matematikk.

Som utgangspunkt for denne oppgaven startet jeg med å utvikle et prosjekt som skulle se nærmere på læreres matematikkfaglige orientering, med utgangspunkt i Thompson, Philipp, Thompson og Boyd (1994) sin bruk av begrepene ”Conceptual orientation” og ”Calculational orientation”. Underveis i prosjektet opplevde jeg at det ville bli mer interessant å se mer konkret på læreres undervisning innenfor det spesifikke emnet divisjon med brøk.

En konkret opplevelse jeg hadde med en lærer har i særlig grad vært med å lede meg til temaet for denne masteroppgaven. I en diskusjon om hvordan man kan hjelpe elever på ungdomsskolen til en god forståelse av divisjon med brøk, uttrykte denne erfarne matematikklæreren noe sånt som: ”Det er ikke noe poeng å prøve å få dem til å forstå. De kommer ikke til å forstå det uansett. Lær dem bare regelen.” Jeg hadde selv på dette tidspunktet en mangelfull forståelse av konseptet brøkdivisjon, men kunne likevel regne oppgaver mekanisk ved å anvende algoritmen som jeg i denne oppgaven kommer til å omtale som ”snu-og-multipliser-algoritmen”. Da jeg fikk denne beskjeden fra en rutinert matematikklærer, gjorde det meg mer nysgjerrig på å finne ut av hvilke muligheter man har til å undervise i dette emnet. Jeg slo meg ikke til ro med at denne læreren stod på hele fasiten, og har derfor ønsket å gå mer i dybden på dette.

1.2 Formål med undersøkelsen

Det primære formålet med denne undersøkelsen har vært å lære om ulike måter å undervise på innenfor temaet brøkdivisjon. Gjennom dette prosjektet har jeg også ønsket å bidra teoretisk til en bevisstgjøring om hvordan ulike tilnærminger kan føre til at elever tilegner seg forskjellig matematisk kompetanse. Studiet er først og fremst deskriptivt, selv om jeg også diskuterer og drøfter de ulike tilnærmingene opp mot hverandre. Til slutt ønsker jeg også gjennom min undersøkelse å pirre andres nysgjerrighet til å utvikle og videreutvikle undervisningsmetoder innenfor emnet, som kan bidra til en rik og langvarig matematisk kompetanse.

1.3 Forskningsspørsmål

Med undersøkelsens formål som bakgrunn har jeg valgt å formulere forskningsspørsmålet mitt slik:

> **"Hvordan forklarer matematikklærere i ungdomsskolen sin undervisning i emnet divisjon med brøk?"**

Jeg har altså først og fremst ønsket å finne ut av hvordan lærere *forklarer* sin undervisning, ikke hva de gjør i praksis. Ikke fordi praksisen ikke er interessant i seg selv, men fordi jeg gjennom å fokusere på deres forklaringer i større grad kan få innblikk i deres intensjoner med undervisningen. Hva som skjer i ulike undervisningssituasjoner kan være påvirket av mange ulike faktorer, og det har i denne sammenhengen vært av mindre betydning. At det er *matematikklærere i ungdomsskolen* sine forklaringer jeg har valgt å undersøke, er en naturlig konsekvens av at det er de som har ansvaret for at elever lærer å utføre divisjon med brøk jf. læreplanen K06 (Utdanningsdirektoratet 2013). Emnet *divisjon med brøk* har jeg valgt ut fra egen interesse, samt at det er et emne som omtales som lite forstått, men som samtidig er rikt på matematikk (Smith 2002; Lamon 2007; Van de Walle 2014). Det har gjort emnet desto mer interessant å gå i dybden på.

2 Teori

2.1 Brøk

Brøk blir sammen med forhold og proporsjonalitet omtalt som et av de mest kognitivt krevende, matematisk komplekse og utfordrende emnene å undervise i skolematematikken (Lamon 2007; Smith 2002). Begrepet brøk benyttes ifølge Susan Lamon (2012) på to forskjellige måter i matematikken, og hun bruker uttrykkene ”numeral” og ”number” for å skille disse to. På den ene siden kan man se på brøk som en måte å skrive tall på, som et todelt symbol: $\frac{a}{b}$. En annen betydning er brøk som ikke-negative rasjonale tall. Rasjonale tall er tall som kan skrives med endelige desimaler eller med uendelige, repeterende desimaler (Lamon 2012). Når det gjelder brøk som ikke-negative rasjonale tall skilles det for eksempel ikke mellom $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{4}$, fordi begge brøkene tilsvarer det samme rasjonale tallet. For å dele inn de ulike betydningene kan man da skille mellom *tall som er skrevet i brøkform*, og *brøk* (som ikke-negative rasjonale tall) (Lamon 2012). Eksempel på et tall skrevet i brøkform, som ikke er et rasjonalt tall er $\frac{\pi}{2}$. Lamon (2007; 2012) peker på at begrepene brøk og rasjonale tall uheldigvis sammenblandes og brukes om hverandre, på tross av at det vil være mer korrekt å se på brøk som en undergruppe av rasjonale tall. Siden mye av forskningslitteraturen knyttet til rasjonale tall imidlertid er direkte knyttet sammen med brøk, vil jeg i denne oppgaven likevel bruke denne litteraturen som en del av forskningslitteraturen knyttet til brøk.

2.2 Brøkens mange ansikter

Lamon (2012) viser at en enkel brøk kan representere flere ulike betydninger. Mange har forsøkt å kategorisere disse ulike variasjonene som undergrupper av rasjonale tall. Behr, Lesh, Post og Silver (1983) viser til 4 slike undergrupper, eller konstrukter: ”Measure”, ”Quotient”, ”Ratio” og ”Operator”. Hos Van de Walle, Bay-Williams, Lovin og Karp (2014) deles det inn i 5 grupper: ”Part-Whole”, ”Measure”, ”Division”, ”Operator” og ”Ratio”. Her skal vi imidlertid merke oss at Behr m. fl. (1983) omtaler ”Part-Whole” og ”Measure” under et felles avsnitt, og regner disse da delvis som samme kategori. Likevel antyder de at skillet mellom diskrete og kontinuerlige mengder også impliserer et skille mellom ”Part-Whole” (hvor mange deler) og ”Measure” (hvor mye evt. hvor lang). Dette baserer Van de Walle m. fl.

(2014) seg på når de grunngir sin inndeling. Videre kan vi merke oss at ”Division” og ”Quotient” er ekvivalente konstrukter, og jeg vil i det følgende omtale dette som kvotient, oversatt fra quotient. Lamon (2007) tar også i bruk de 5 konstruktene: ”Part-Whole”, ”Measure”, ”Operator”, ”Quotient” og ”Ratios”, noe som altså i stor grad samstemmer med både Behr m. fl. (1983) og Van de Walle m.fl. (2014). Lamon (2007) påpeker imidlertid at hun likevel ikke ser på ”Part-Whole” som et separat konstrukt, men mener det kan ses på som en del av ”Measure”-konstruktet, i likhet med Behr m. fl. (1983).

2.2.1 Del-helhet (Part-Whole)

Ut fra ”part-whole”-kategorien, heretter oversatt til del-helhet, kan man tolke brøken $\frac{3}{4}$ som 3 av 4 like deler som utgjør en enhet. Behr m. fl. (1983) ser på denne kategorien som et fundament for de øvrige kategoriene. Lamon (2007) legger vekt på denne kategoriens funksjon for sammenligning av ulike brøker, og at ekvivalente brøker blir funnet ved å gjøre delene større eller mindre. $\frac{3\ hele\ paier}{4\ hele\ paier} = \frac{12\ kvarte\ paier}{16\ kvarte\ paier}$ er et eksempel på dette (Lamon 2007). $\frac{3}{4}$ kan brukes for å omtale en del av eksempelvis en gruppe mennesker ($\frac{3}{4}$ av klassen), eller en del av en lengde ($\frac{3}{4}$ mil) (Van de Walle m.fl. 2014). Lamon (2012) viser at brøk i betydningen del-helhet har lett for å gå over i en av de andre betydningene av brøk.

2.2.2 Måling (Measure)

$\frac{3}{4}$ kan også bety 3 ($\frac{1}{4}$-enhet) på tallinja fra 0 til 1 eller 3 ($\frac{1}{4}$-enhet) av et gitt område, ut fra kategorien måling, oversatt fra ”measure” (Lamon 2007). Van de Walle m. fl. (2014) forklarer forskjellen mellom måling og del-helhet med at del-helhet fokuserer på hvor mange deler, mens måling fokuserer på hvor mye, eller hvor lang. Kategorien måling knytter seg altså til kontinuerlige mengder (Behr m. fl. 1983).

2.2.3 Operator (Operator)

En brøk kan ses på som en regel for hvordan vi skal operere på en enhet (Lamon 2007). I et slikt tilfelle ser vi på brøken $\frac{3}{4}$ som ” $\frac{3}{4}$ av noe”. Dette betyr at man må multiplisere med 3 og dividere med 4, eller dividere med 4 og multiplisere med 3. Behr m. fl. (1983) omtaler en slik brøk, med utgangspunkt i det generelle uttrykket $\frac{p}{q}$, som en funksjon som gjør om en mengde/lengde/figur til å bli $\frac{p}{q}$ ganger så mange/lang/stor. Dersom brøken er $\frac{3}{4}$ viser Lamon (2007; 2012) at dette både kan bety 3 ($\frac{1}{4}$-enheter), 1 ($\frac{3}{4}$-enheter) eller $\frac{1}{4}$ (3-enheter).

2.2.4 Kvotient (Quotient)

Lamon (2012) knytter denne betydningen av brøk til det vi etter hvert skal omtale som klassisk delingsdivisjon. $\frac{3}{4}$ kan også være en annen skrivemåte for 3 : 4, altså 3 dividert med 4 (Behr m. fl. 1983; Lamon 2007). Dette tilsvarer den mengden hver person får dersom 4 personer deler 3 enheter av noe. Brøken $\frac{3}{4}$ er ekvivalent med desimaltallet 0,75.

2.2.5 Forhold (Ratio)

Brøk i betydningen forhold, oversatt fra ”ratio”, er ifølge Behr m.fl. (1983) egentlig mer som en komparativ indeks enn et tall. $\frac{3}{4}$ står da for en relasjon mellom to ulike enheter (Lamon 2007). For eksempel kan 3 gutter stå i en multiplikativ relasjon til 4 jenter, dersom det er 4 jenter for hver tredje gutt. Van de Walle m. fl. (2014) viser at forhold både kan brukes i betydningen del-helhet og del-del. Eksempelet med gutter og jenter er et typisk del-del-relasjon. En del-helhet-relasjon har man dersom det er 3 gutter for hver fjerde menneske, eller mer generelt 3 Aer for hver fjerde $A \cup B$.

2.2.6 Flytende overganger

Lamon (2007) mener de ulike kategoriene løfter frem ulike og essensielle karakteristikker av rasjonale tall, men påpeker at de er uløselig knyttet sammen. Behr m.fl. (1983) løfter frem at en god forståelse av rasjonale tall krever både forståelse for de ulike konstruktene, og samtidig en forståelse av hvordan de henger sammen. Derfor anbefales det å vektlegge ulike betydninger av brøk (Van de Walle m. fl. 2014). Samtidig antyder Lamon (2007) at barn bør starte brøklæringen med utgangspunkt i en av kategoriene, fortrinnsvis måling, forhold eller del-helhet.

2.3 Divisjon med brøk

Det er vanlig å skille mellom to forskjellige typer divisjon: ”partitive division” og ”quotative division”, som også kan kalles ”measurement division” eller ”subtractive division” (Empson og Levi 2011; Lamon 2012; Van de Walle m. fl. 2014). Oversatt til norsk bruker vi delingsdivisjon og målingsdivisjon. Löwing og Kilborn (2002) peker på distinksjonen mellom disse to variantene som essensiell for å forstå divisjon med brøk.

2.3.1 Delingsdivisjon

”Partitive division”, eller delingsdivisjon, baserer seg på prinsippet om rettferdig fordeling. Dersom 6 gutter skal dele en pakke med 18 kjeks, så blir spørsmålet hvor mange kjeks hver gutt får. Van de Walle m. fl. (2014) peker imidlertid på at det finnes to varianter av delingsdivisjon. Den første varianten er den klassiske fordelingen slik som i spørsmålet med de seks guttene. I tillegg har vi en type spørsmålsstilling som fokuserer på den ene porsjonen, noe Van de Walle m. fl. (2014) kaller for ”rate problems”: Dersom jeg går 12 kilometer på 3 timer, hvor mange kilometer går jeg per time? Det er denne type problem Van de Walle m. fl. (2014) og Empson og Levi (2011) bruker i sine eksempler for delingsdivisjon med brøk, for eksempel: ”3/5 bag of coffee weighs 6/7 pound. How much does a whole bag of coffee weigh?” (Empson og Levi 2011:201). Hos Sinicrope, Mick og Kolb (2002) og hos Flores (2002) ser vi imidlertid et tydeligere skille mellom de to typene spørsmål, som særlig har betydning for brøkdivisjon. Sinicrope m. fl. (2002) skiller mellom ”partitive division” og ”determination of a unit rate”, mens Flores (2002) tilsvarende deler inn i ”partitive division” og ”finding a whole given a part”. I varianten ”partitive division” forutsettes det da at divisoren er et helt tall, som i $\frac{a}{b} = c$, der c står for et helt tall. I ”finding a whole given a part” kan divisoren derimot ikke være et helt tall, mens ”determination of a unit rate” handler om at man skal finne raten per enhet, uavhengig av om divisoren er et helt tall eller ikke.

Dersom vi skal følge Sinicrope m. fl. (2002) sin inndeling er delingsdivisjon oppgaver som generelt kan skrives og løses slik:

$\frac{a}{b}$: c = $\frac{a:c}{b}$ dersom a dividert med c gir et helt tall

eller:

$\frac{a}{b}$: c = $\frac{a}{b*c}$ dersom a dividert med c ikke gir et helt tall

Når det gjelder å finne raten per enhet bruker Sinicrope m. fl. (2002) et eksempel som tilsvarer det Van de Walle m. fl. (2014) kaller for “rate problems”: ”A printer can print 20 pages in two and one-half minutes. How many pages does it print per minute?” (Sinicrope m.fl. 2002:157). Her blir det altså om å gjøre å finne ut hvor mange ark printeren kan printe på et minutt, når den kan printe 20 ark på to og et halvt minutt. Svaret kan man finne ved å tenke proporsjonalt:

20 ark på 2 og et halvt minutt

40 ark på 5 minutter

8 ark på 1 minutt

Gjennom denne prosessen multipliserer man altså med to og dividerer med fem for å finne hva en er. Med andre ord multipliserer man med brøken $\frac{2}{5}$. Denne prosessen ligger til grunn for det vi kaller for snu-og-multipliser-algoritmen, som vi skal komme tilbake til senere. Oppgaven kan også løses gjennom denne skrivemåten:

$$20 : 2\ \frac{1}{2} = \frac{20}{\frac{5}{2}} = \frac{20*2}{\frac{5}{2}*2} = \frac{40}{5} = \frac{40:5}{5:5} = \frac{8}{1}$$

som kan skrives generelt slik:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}*\frac{d}{c}}{\frac{c}{d}*\frac{d}{c}} = \frac{\frac{ad}{bc}}{1} = \frac{ad}{bc}$$

(Sinicrope m.fl. 2002)

2.3.2 Målingsdivisjon

I oppgaver med målingsdivisjonstankegang er man blitt gitt et totalt antall objekter som skal deles inn i grupper med et spesifikt antall objekter (Empson og Levi 2011; Van de Walle m. fl. 2014). Spørsmålet kan da være for eksempel hvor mange personer som kan få det spesifikke antallet objekter, altså hvor mange grupper man kan lage (Lamon 2012). Dersom vi gjør om på oppgaven med gutter og kjeks, bli spørsmålet: Hvis man har 18 kjeks og deler 3 kjeks til hver person, hvor mange personer rekker det til? Målingsdivisjon kunne vi også kalt for *gjentakende subtraksjon* eller *like grupper*, som den motsatte operasjonen til *gjentakende addisjon* som er et uttrykk for multiplikasjon (Van de Walle 2014). Spørsmålet som stilles i forbindelse med målingsdivisjon er egentlig ”hvor mange ganger går divisoren opp i dividenden?” Denne tankegangen kan gi god mening til mange oppgaver med brøkdivisjon. 2 dividert med $\frac{1}{2}$ er 4 fordi en halv går fire ganger opp i 2 (Sinicrope m.fl. 2002). Sinicrope m. fl. (2002) viser at tankegangen ved målingsdivisjon kan representeres ved en algoritme som tar utgangspunkt i å finne felles nevner: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$.

2.3.3 Flere varianter av brøkdivisjon

Selv om det er vanlig å vektlegge skille mellom delings- og målingsdivisjon har vi allerede antydet at det går an å gjøre ytterligere inndelinger. Liping Ma (1999) har gjennomført et stort studie av kinesiske og amerikanske læreres forståelse av grunnleggende matematikk, og har bl.a. sett på divisjon med brøk. Hun kommer frem til 3 ulike måter å tenke på knyttet til oppgaven $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$. De tre ulike måtene eksemplifiserer hun slik (oversatt til norsk kontekst):

1) Hvor mange $\frac{1}{2}$-meterlengder er det i noe som er $1\frac{3}{4}$ meter langt? (Målingsdivisjon)

2) Hvis $\frac{1}{2}$ av en lengde er $1\frac{3}{4}$ meter, hvor lang er hele lengden? (Delingsdivisjon)

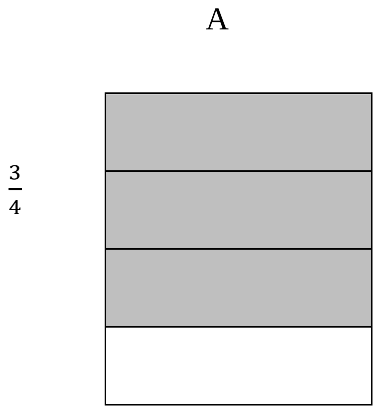
3) Hvis en side av et 1 $\frac{3}{4}$ kvadratmeters rektangel er $\frac{1}{2}$ meter, hvor lang er den andre siden? (Produkt og faktorer) (Ma 1999)

Først merker vi oss at hun bruker delingsdivisjon, på den måten Sinicrope m. fl. (2002) kaller for "å finne raten per enhet". Videre ser vi at Ma tar med som en egen tolkning av brøkdivisjon tilfeller der man er gitt et produkt og en av faktorene i en multiplikasjonsoperasjon.

Flores (2002) regner også "missing factors" som en egen variant, tilsvarende Mas (1999) "produkt og faktorer". Som tidligere nevnt setter Flores i tillegg et skille mellom delingsdivisjon og "finding a whole given a part".
Sinicrope m. fl. (2002) bruker i tillegg til delingsdivisjon, målingsdivisjon og "å finne raten per enhet" to supplerende tolkninger av divisjon: divisjon som omvendt multiplikasjon og divisjon som et omvendt kartesisk produkt. Forskjellen på det Sinicrope m. fl. (2002) kaller for divisjon som omvendt multiplikasjon og måten Ma (1999) og Flores (2002) bruker produkt og faktor, er at divisjon som omvendt multiplikasjon er mer direkte tolket som reverseringen av en brøk som operator. De bruker dette eksempelet: "In a seventh-grade survey of lunch preferences, 48 students said they prefer pizza. This is one and one-half times the number of students who prefers the salad bar! How many prefer the salad bar?" (Sinicrope m.fl. 2002:159).

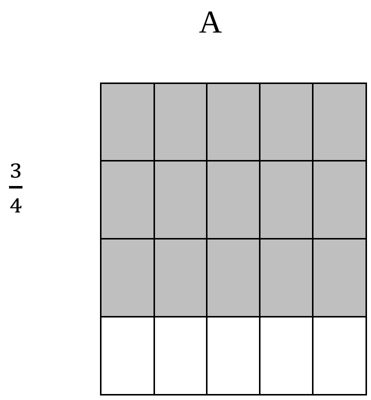
Her er det altså oppgitt at en og en halv, eller $\frac{3}{2}$ av studentene som foretrekker salatbaren er 48 stk. Brøken $\frac{3}{2}$ betyr da at det tallet vi er ute etter multiplisert med 3 og dividert med 2 er lik 48. I stedet for å bare skulle finne den manglende faktoren, så kan man invertere operator-brøken $\frac{3}{2}$. Da multipliserer man med 2 og dividerer med 3, eller dividerer med 3 og multipliserer med 2 (Sinicrope m. fl. 2002).

Divisjon som et omvendt kartesisk produkt kan egentlig ses på som en variant av divisjon som omvendt multiplikasjon. Forskjellen er imidlertid at man aktivt bruker faktorene for både teller og nevner. I oppgaven $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ ser man både etter et ukjent tall som multiplisert med c er lik a (telleren), og et ukjent tall som multiplisert med d er lik b (nevneren). Generelt kan vi skrive: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a:c}{b:d}$. Vet du for eksempel at arealet til et rektangel er på $\frac{6}{20}$ kvadratenheter, og at en av sidelengdene er $\frac{3}{4}$ enhet, så må $\frac{x}{y} * \frac{3}{4}$ være $\frac{6}{20}$. Dette er det samme som at $\frac{3*x}{4*y} = \frac{6}{20}$, og at $\frac{x}{y} = \frac{6:3}{20:4}$. Denne tankegangen kan illustreres ved å tegne opp et rektangel slik:



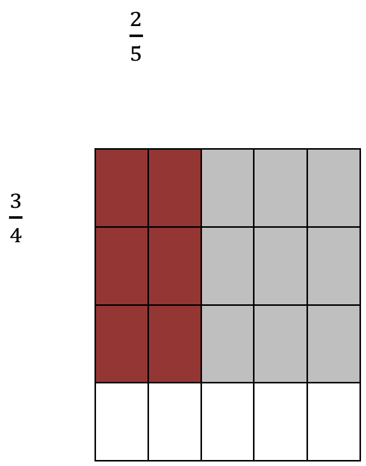
Figur 1: Tre fjerdedeler av rektangelet markert med grått

Foreløpig er det markert et rektangel på $\frac{3}{4}$ * A kvadratenheter. $\frac{3}{4}$ enhet blir da den vertikale dimensjonen. Siden det totale arealet skal være på seks tjuedeler, kan vi dele rektangelet opp horisontalt slik at vi får tjuedeler, ved å tenke at 20:4=5.



Figur 2: Oppdeling av rektangelet i tjuedeler

Videre kan vi illustrere at vi trenger to av de fem kolonnene for å distribuere seks tjuedeler fra de tre grå radene (markert med rødt):



Figur 3: Seks tjuedeler markert med rødt

Løsningen blir at den ukjente sidelengden må være $\frac{2}{5}$.

(Sinicrope m.fl. 2002)

2.3.4 Algoritmer

Van de Walle m. fl. hevder det finnes to ulike algoritmer for brøkdivisjon, fellesnevner-algoritmen: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$ og snu-og-multipliser-algoritmen: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c}$ (Van de Walle m. fl. 2014). Og dersom vi studerer de ulike variantene av brøkdivisjon kan vi utlede disse to algoritmene. Vi ser imidlertid at fellesnevner-algoritmen bygger på at man deler teller på teller og nevner på nevner slik: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a:c}{b:d}$. Dette er det samme konseptet Sinicrope m. fl. (2002) knytter til et omvendt kartesisk produkt. At man kan snakke om to algoritmer er uansett ikke en grunn til å se bort fra de ulike betydningene brøkdivisjon kan ha. De ulike betydningene viser nemlig at algoritmene kan utledes på forskjellige måter og bør være med om man skal snakke om en helhetlig forståelse av brøkdivisjon.

2.3.5 Misforståelser

I Ma (1999) sitt forskningsprosjekt på kinesiske og amerikanske læreres forståelse av elementær matematikk, finner hun at særlig to misforståelser er vanlige knyttet til oppgaver med brøkdivisjon. Mange av de amerikanske lærerne forvekslet divisjon med $\frac{1}{2}$ og divisjon med 2 da de skulle gi mening til regnestykket $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$. Dette ble trukket frem som et representativt eksempel:

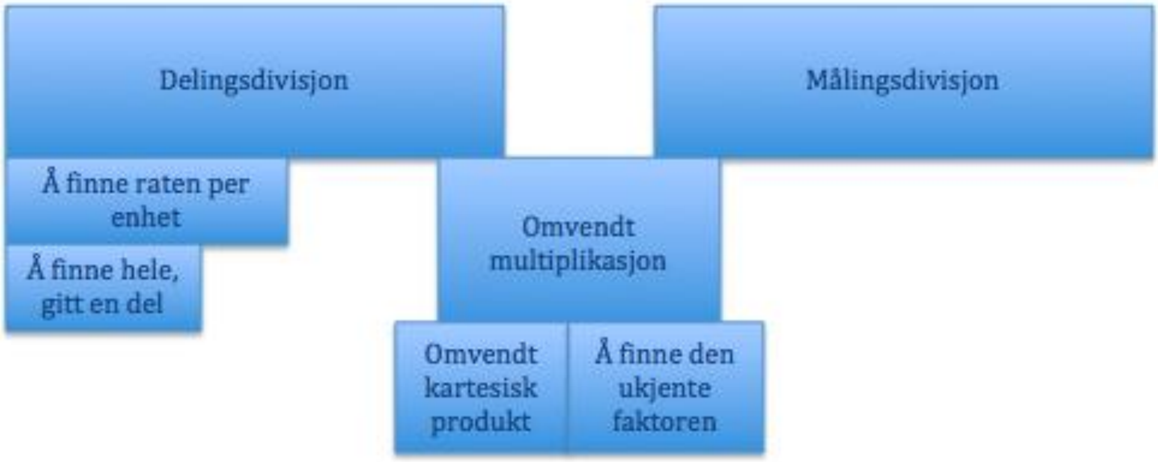
> ”You could be using pie, a whole pie, one, and then you have three fourths of another pie and *you have two people*, how will you make sure that this gets *divided evenly*, so that each person gets an equal share. (Ms. Fiona, italics added)” (Ma 199:65).

Tankegangen er som vi ser klassisk delingsdivisjon-tankegang. I stedet for å dele på en halv, prøver læreren å komme frem til halvparten av det hun har. Dermed deler man på to i stedet for en halv. Regneoperasjonen er riktig, men tallene er feil.

En annen lignende forveksling er at man multipliserer med en halv i stedet for å dividere med en halv. Altså at man tar halvparten av dividenden. Her brukes et eksempel på en lærer som også ser for seg en og trekvart pai. Denne læreren deler ikke på to personer, men sier at man må ta halvparten av den totale mengden. Dermed bruker man riktige tall, men utfører feil operasjon, nemlig multiplikasjon med en halv.

2.3.6 Oppsummering av divisjon med brøk

Oppsummerende kan vi si at det finnes to hovedtolkninger av divisjon, nemlig delingsdivisjon og målingsdivisjon (Empson og Levi 2011; Lamon 2012; Van de Walle m. fl. 2014). Delingsdivisjon kan omfatte varierte tolkninger. I tillegg til tolkningen om å fordele likt, kan det å finne raten per enhet regnes som en egen variant (Sinicrope m. fl. 2002). En enda mer snever kategori er det å skulle finne hele, gitt en del (Flores 2002). Divisjon som operasjon kan tolkes og behandles som den motsatte operasjonen til multiplikasjon (Sinicrope m. fl. 2002). Divisjonsoppgaver kan derfor også betraktes med utgangspunkt i å skulle finne en ukjent faktor (Ma 1999; Flores 2002). En variant av divisjon som omvendt multiplikasjon, er også et omvendt kartesisk produkt, noe som kan anvendes på oppgaver med brøkdivisjon. For å gi et oppsummerende overblikk over sammenhengene mellom de ulike betydningene av divisjon med brøk, har jeg på neste side laget en modell som skisserer disse sammenhengene.



Figur 4: Ulike tolkninger av divisjon med brøk

Modellen viser at divisjon kan tolkes enten som delingsdivisjon eller målingsdivisjon. Når det gjelder brøkdivisjon er det relevant å omtale egne varianter av delingsdivisjon, som ”å finne raten per enhet” eller ”å finne hele, gitt en del”. Videre kan divisjon ses på som omvendt multiplikasjon, som også gir grunnlag for å behandle oppgaver med brøkdivisjon ut fra tanken om ”å finne den ukjente faktoren” eller et ”omvendt kartesisk produkt”.

2.4 Ulike tilnærminger til undervisning i matematikk

Jeg vil i dette underkapittelet gjøre rede for relevant teori som retter seg mot undervisning i matematikk. Denne teorien vil danne et viktig grunnlag for analysen av de ulike tilnærminger ungdomsskolelærere har når de skal undervise i emnet divisjon med brøk.

2.4.1 Konseptuell og prosedyrebasert kunnskap

Flere steder i den matematikkdidaktiske forskningslitteraturen finner vi en distinksjon mellom to ulike måter å forstå og lære seg matematikk på. Richard Skemp (1976/2006) skiller mellom de to begrepene ”instrumentell forståelse” (instrumental understanding) og ”relasjonell forståelse” (relational understanding). Med dette vil Skemp beskrive to forskjellige typer av matematisk forståelse. *Den instrumentelle forståelsen* er en forståelse som er basert på tillærte prosedyrer og algoritmer. Som eksempel kan en elev med en instrumentell forståelse komme frem til at $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$. Grunnen til dette kan være at man har lært å finne fellesnevner gjennom å multiplisere over og under brøkstreken med den andre brøkens nevner slik at man får at begge brøkene kan skrives som $\frac{36}{54}$. En annen elev, med en *relasjonell forståelse* kunne derimot forstått at $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ gjennom en mer selvstendig og fleksibel tilnærming. Som eksempel kunne en slik elev benyttet seg av en proporsjonal tankegang: $\frac{2}{3} \rightarrow \frac{4}{6} \rightarrow \frac{6}{9}$. Den relasjonelle forståelsen er nemlig en forståelse som baserer seg på de fundamentale konseptene og idéene i matematikken (Skemp 1976/2006).

Hos Hiebert og Lefevre (1986) finner vi et lignende, men ikke tilsvarende skille. Her brukes i stedet begrepene ”konseptuell kunnskap” (conceptual knowledge) og ”prosedyrebasert kunnskap” (procedural knowledge) i matematikk. Konseptuell kunnskap beskrives som kunnskap rik på relasjoner, eller som et nettverk av kunnskap der ulike biter av informasjon knyttet til hverandre. Hiebert og Lefevre (1986) peker på at begrepet ”understanding”, altså forståelse, ofte brukes om det samme som de har valgt å kalle konseptuell kunnskap. Sammenlignet med Skemp (1976/2006) sin variasjon av begrepet forståelse tilsvarer dette da først og fremst en relasjonell forståelse. Videre hevder Hiebert og Lefevre (1986) at konseptuell kunnskap kan deles inn i et primært og et reflekterende nivå. På det primære nivået kan man sette sammen to kunnskapsbiter innenfor det samme temaet. Som eksempel viser de til kunnskapen om at når man adderer to desimaltall stiller du dem opp under hverandre, og kunnskap om posisjonssystemets inndeling. Dersom disse to kunnskapene er sammenvevd vil man forstå at man adderer tideler med tideler og hundredeler med hundredeler. Fordi det bare er to biter med kunnskaper knyttet til en kontekst med desimaltall, kaller Hiebert og Lefevre (1986) dette for primær konseptuell kunnskap. Hvis vi sammenligner med Skemp (1976/2006) ser vi at kunnskapen om å stille opp desimaltallene under hverandre, kan karakteriseres som instrumentell forståelse dersom den ikke er knyttet til kunnskapen om posisjonssystemet. Sammen med denne kunnskapen ville det imidlertid kunne blitt sett på som relasjonell forståelse.

På et reflekterende nivå, vil en ifølge Hiebert og Lefevre (1986) kunne knytte kunnskapen videre til andre kontekster. For eksempel vil en kunne se at de samme matematiske idéene gjelder når man skal addere to brøker med hverandre, for eksempel at brøker med samme nevner gjør at man kan legge tellerne sammen: $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$.

Prosedyrebasert kunnskap beskrives som en strukturert, steg-for-steg-kunnskap, bestående av regler, algoritmer og prosedyrer. For øvrig regnes også det formelle matematiske språket som en egen type prosedyrebasert kunnskap (Hiebert og Lefevre 1986). Et kjennetegn på den konseptuelle kunnskapen er at den må læres med mening, mens prosedyrer både kan læres med eller uten mening. Dersom prosedyrer læres med mening kan dette ifølge Hiebert og Lefevre knyttes til konseptuell kunnskap. Som motsetning kan prosedyrer læres gjennom ”rote learning”, pugging, som i første omgang vil bidra til en prosedyrebasert kunnskap (Hiebert og Lefevre 1986). Begrepet ”rote learning” knyttes av Lithner (2008) til et annet begrep: ”imitative reasoning”. Dette handler om å memorere en prosedyre, eller rett og slett memorere svar på gitte oppgaver (Lithner 2008). Kunnskapen man får gjennom dette kan derfor sammenlignes med en prosedyrebasert kunnskap, da den ikke knyttes sammen i et nettverk av kunnskap. Hiebert og Lefevre (1986) påpeker at kunnskap tilegnet gjennom pugging på sikt kan bli en bit av kunnskapsnettverket som bygger opp konseptuell kunnskap. Til forskjell fra Skemp (1976/2006), som omtaler relasjonell og instrumentell forståelse i kontrast til hverandre, snakker Hiebert og Lefevre (1986) om de to typene kunnskap i relasjon til hverandre. De er ikke motsetninger, men komplementære kunnskapsformer.
Kieran (2013) påpeker i samsvar med dette at prosedyrer som utdypes er konseptuelle i sin natur. Hun hevder at distinksjonen mellom konseptuell forståelse (Conceptual understanding)

og prosedyrebaserte ferdigheter (Procedural skills) derfor kan være ødeleggende. Kieran henviser bl.a. til National Research Council (2001) som beskriver konseptuell forståelse (conceptual understanding) og prosedyreflyt (procedural fluency) som to av fem sammenknyttede deler i en helhetlig matematisk kompetanse:

> ”Procedural fluency and conceptual understanding are often seen as competing for attention in school mathematics. But pitting skill against understanding creates a false dichotomy. As we noted earlier, the two are interwoven. Understanding makes learning skills easier, less susceptible to common errors, and less prone to forgetting. By the same token, a certain level of skill is required to learn many mathematical concepts with understanding, and using procedures can help strengthen and develop that understanding.” (National Ressearch Council 2001).

Her hevder National Research Council altså at konseptuell forståelse og prosedyrebaserte ferdigheter støtter og henger sammen med hverandre, fremfor å være motsetninger til hverandre. Et av de viktige argumentene de kommer med er at økt prosedyreflyt vil kunne frigjøre kapasitet til å fokusere på konseptuell forståelse (National Research Council 2001). Det kan derfor virke hensiktsmessig å skille mellom begrepene prosedyrebasert kunnskap og prosedyreflyt, da en god prosedyreflyt er vevd sammen med en god konseptuell forståelse.

2.4.2 Deduktiv og induktiv argumentasjon

I følge Kunnskapsforlagets matematikkleksikon (Thompson og Martinsson 1997) stammer matematikken vi bruker fra både deduktive og induktive prosesser:

> ”Matematikken er i sin natur en *deduktiv vitenskap.* Vi går ut fra et antall faste aksiomer (som må oppfylle visse krav, se **aksiomsystem**), og så utledes nye resultater (såkalte *setninger*) gjennom logiske slutninger (se **matematisk teori**). Den matematiske forskningen er derimot nærmest induktiv. Matematikerne arbeider i høy grad med gjetninger og eksempler, veiledet av intuisjon og følelser. Først når hun/han har nådd et resultat, som hun/han ser på som nokså sannsynlig, søker vedkommende å finne et bevis for sin påstand.” (Thompson og Martinsson 1997).

Selve matematikken er altså bygd opp av deduktive bevis, mens veien for å komme frem til disse bevisene gjerne går gjennom induktive arbeidsformer. Med deduktive bevis, eller deduksjon, menes at man utleder konklusjoner med logisk nødvendighet ut fra visse premisser (Alnes 2015). Dersom premissene er sanne, må altså konklusjonen i argumentet være sann (Morris 2002). Induksjon er derimot en metode som konkluderer med grunnlag i erfaringer og eksempler, og som dermed baserer seg på sannsynliggjøring fremfor bevisføring (Tranøy 2015). Slutninger i induktive argument trekkes i motsetning til deduktive argumenter, fra enkelttilfeller til generelle påstander (Morris 2002). Schoenfeld (1992) løfter frem en matematikkundervisning som tar utgangspunkt i matematikk som en empirisk disiplin, der systematiske forsøk og eksperimenter er viktige elementer for å lære å tenke matematisk. Dette impliserer altså en induktiv tilnærming. Artigue og Blomhøj (2013) fremmer i samsvar med Schoenfeld termen ”inquiry-based education in mathematics” som kan oversettes til utforskende matematikkundervisning. Dette beskrives som en måte å undervise på som bygger på en vitenskapelig arbeidsmetode. Gjennom utforsking skal elevene løse matematiske problem, uten å ta utgangspunkt i tradisjonelle instruksjoner og pugging (Artigue og Blomhøj 2013).

I en mer negativ betoning skriver Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron og Winicki-Landman (2012) om misforståelsen som mange elever gjør gjennom å benytte seg av empiriske og dermed induktive argumenter som *bevis* for matematiske generaliseringer. Stylianides og Stylianides (2009) og Tall m. fl. (2012) peker i likhet med dette på at elever må ledes bort fra denne formen for argumentasjon, og se betydningen av å bruke deduktive resonnement i matematisk bevisføring.

Hanna (2000) mener også elever burde læres opp til å ta i bruk deduktive bevis, men påpeker samtidig at nytten av dette først og fremst får sitt utslag dersom bevis blir brukt på en slik måte at det fremmer matematisk forståelse. Hun hevder at et godt bevis ikke bare hjelper en til å se *at* noe er sant, men også til å forstå *hvorfor* det er sant. Matematisk induksjon beskriver Hanna som en metode som ikke av seg selv forklarer hvorfor, men som innenfor enkelte emner likevel kan være nyttig å bruke. Dreyfus (1999) viser at et bevis noen ganger trenger forklaringer som beviset ikke gir i seg selv, og mener lærere burde være bevisste på skillet mellom forklaringer, argumenter og bevis. Elever bør imidlertid ikke forventes å kunne gjøre dette skillet i samme grad, og han mener det ikke er helt innlysende hvilke kriterier som bør settes til elevers matematiske argumenter (Dreyfus 1999). Hanna (2000) uttrykker direkte at man bør gi plass til både bevis, som impliserer deduktive prosesser, og utforsking, som tilsvarende impliserer induktive prosesser. Hun hevder bevis og utforsking komplementerer og forsterker hverandre (Hanna 2000). Derfor gir hun sin støtte til at elever som har fått et teorem bevist, og hevder de forstår beviset, likevel ønsker å undersøke dette empirisk:

> ”From a purely mathematical viewpoint such a request seems unreasonable, and teachers usually take it as an indication that the students do not really understand what a mathematical proof is. From the viewpoint of an experimental scientist, however, it seems quite natural. No physicist, for

example, would accept a fact as true on the basis of a theoretical deduction alone." (Hanna 2000:19).

Oppsummerende ser vi at både induktiv og deduktiv argumentasjon løftes frem som viktige grunnlag for elevers matematiske utvikling. Det er imidlertid ikke entydig hvilke implikasjoner dette skillet bør ha for undervisningen.

3 Forskningsdesign

3.1 Epistemologi og teoretisk perspektiv

Før jeg går gjennom mitt forskningsdesign i sin helhet ønsker jeg å klargjøre mitt kunnskapssyn og det teoretiske perspektivet som ligger til grunn for mine valg i forskningsprosessen. Likesom Kuhn (1962) argumenterte for at enhver vitenskap baserer seg på visse antagelser eller premisser gitt innenfor en bestemt forskningstradisjon, eller et paradigme, så kan vi supplere med å hevde at forskning innenfor matematikkdidaktikk tar utgangspunkt i ulike teoretiske perspektiver (Cobb 2007). Gjennom min bakgrunn og reise gjennom en femårig lærerutdanning har jeg innarbeidet et konstruktivistisk grunnsyn. Dette vil si at jeg ser på kunnskap først og fremst som noe som konstrueres i individet. Det er på en side en viss relativitet eller subjektivitet i dette, da det finnes mangfoldige slike konstruksjoner. På den andre siden er sannheten innenfor dette grunnsynet definert som konsensus utarbeidet av en kombinasjon av helhetlig kvalitativ og kvantitativ informasjon. Gjennom en dialektisk prosess kan man komme frem til mer og mer holistisk kunnskap. (Lincoln, Lynham og Guba 2011)

Videre er min forskning relatert til et kognitivt psykologisk perspektiv, som innebærer at jeg ser på andre menneskers utsagn og handlinger som troverdige kilder til deres kognitive og psykologiske prosesser. Helt spesifikt hevder jeg at jeg gjennom delvis strukturerte, oppgavebaserte intervjuer med lærere kan trekke ut informasjon som bidrar til å bygge opp empirisk vitenskap. Dermed befinner jeg meg innenfor en tradisjon med klare røtter tilbake til læringsteoretikeren Jean Piaget (Cobb 2007).
Kognitiv psykologi er ikke opptatt av å finne et statistisk konstruert kollektivt subjekt, slik som i eksperimentell psykologi. Cobb (2007) sier at "cognitive psychology focuses on how the epistemic individual successively reorganizes its activity and comes to act in a mathematical environment" (Cobb 2007:20). Fordelen med dette teoretiske perspektivet er, som Cobb påpeker, å kunne bidra til utvikling og forbedring av den konkrete undervisningen i klasserommet. Dette er fordi man innenfor kognitiv psykologi ikke bare ser etter en ideell teori, men heller søker etter mangfoldig og fleksibel kunnskap som kan komme til nytte ettersom vi har med mangfoldige elever å gjøre.

Mitt prosjekt kan også ses på som et emne-spesifikt kognitivt studie, da jeg er spesielt interessert i læring av divisjon med brøk. Battista m. fl. (2009) peker på hvordan denne studieformen kan hjelpe lærere til å håndtere de ulike individene i klasserommet best mulig. Det som skiller mitt studie fra eksemplene til Cobb (2007) og Battista m.fl. (2009) er at min forskning tar utgangspunkt i læreres kognisjon, og ikke elevenes.

3.2 Generisk kvalitativ metode

I samspill med mitt konstruktivistiske kunnskapssyn og kognitivt psykologiske perspektiv, har jeg hatt en pragmatisk tilnærming til forskningsprosessen. Med dette mener jeg at jeg har valgt de metoder som har vært hensiktsmessig for å kunne svare på mitt forskningsspørsmål. Denne måten å designe forskning på kalles gjerne for generisk kvalitativ metode. En av grunnene til at jeg har valgt dette designet er min manglende erfaring som forsker, som har gitt et behov for fleksible rammer, og mulighet til å tilpasse prosjektet underveis (Caelli, Ray og Mill 2003). Som nevnt i innledningen har jeg også endret en del på selve forskningsspørsmålet fra jeg begynte forskningsprosessen. Fra å skulle kategorisere og videreutvikle teori om læreres matematikkfaglige orientering (Jf. Thompson 1994), har jeg landet på å mer spesifikt se nærmere på ulike måter norske lærere i ungdomsskolen underviser på for å lære bort divisjon med brøk. Prosjektet kan relateres til elementer fra tematisk analyse, men er ikke i sin helhet utformet som dette, noe jeg vil utdype i avsnittet om intervjuguide og analyse.

3.3 Metode for å svare på forskningsspørsmål

Som forskningsspørsmålet mitt tilsier har jeg hatt et ønske om å finne ut hvordan matematikklærere i ungdomsskolen går frem for å lære sine elever å dividere med brøk:

”Hvordan forklarer lærere i ungdomsskolen sin undervisning i emnet divisjon med brøk?”

For å kunne svare best mulig på dette spørsmålet er det ikke nødvendigvis kun én måte å gå frem på. En mulig metode kunne vært å observere lærere i praksis mens de underviste omkring dette emnet. Mitt spørsmål retter seg imidlertid mot hvordan lærerne *forklarer* sin undervisning, og dette kan vanskelig observeres. Jeg kunne riktignok ha observert som et supplement, men tanken på å skulle få dette til å klaffe med mange ulike læreres planer for sin undervisning ville da blitt en stor utfordring. Dette arbeidet ville blitt for omfattende med tanke på hva som er gjennomførbart i en masteravhandling. Om det ville blitt representative undervisningssituasjoner med meg som flue på veggen er også vanskelig å vite sikkert. (Cohen 2007)

Andre metoder som for eksempel ulike varianter av spørreskjema forkastet jeg da jeg ønsket å komme mest mulig i dybden på forskningsspørsmålet. Å benytte spørreskjema ville trolig gitt for upresis informasjon, fordi man mister muligheten til å be informantene om å utdype sine svar.

3.4 Intervju

Selv om jeg har valgt bort observasjon som metode følger jeg Thompson (1992) sitt poeng: ”researchers must go beyond teachers´ professed beliefs and at least “examine teachers´ verbal data along with observational data of their instructional practice or mathematical behavior”” (Thompson 1992:135 i Philipp 2007:260). Dette er blitt sagt i forbindelse med forskning på læreres oppfatninger, men jeg mener dette også kan relateres til min forskning som baserer seg på hva lærere sier at de gjør. Argumentasjonen for å ha noe mer å forholde seg til enn informantenes utsagn er jo at dette ofte kan avvike fra det man gjør i praksis (Cohen 2007). Jeg har derfor valgt å ikke bare intervjue mine informanter, men har knyttet intervjuene til noen oppgaver, for å bedre legge til rette for at informantenes ”matematiske oppførsel” kan komme frem. Goldin (1997) hevder at oppgavebaserte intervju er nyttig til å samle informasjon fra elever som direkte retter seg mot det man ønsker skal skje i klasserommet. Dette mener jeg altså kan gjelde også i forbindelse med intervju av lærere. Forskjellen er bare at fokuset er rettet mot lærerens prosesser og ikke elevens.

Generelle fordeler med å bruke intervju som metode er at jeg som forsker kan be mine informanter om å svare på konkrete spørsmål, også de som er komplekse og går i dybden (Cohen 2007). Det gir ifølge Kvale og Brinkmann (2015) også muligheten for å stille oppfølgingsspørsmål som tar hensyn til intervjuundersøkelsens forskningsspørsmål. Dette er grunnen til at jeg valgte å benytte meg av et semistrukturert intervju og ikke et strukturert intervju. Cohen (2007) rangerer fire ulike intervjuformer fra det uformelle og åpne, til det formelle og lukkede. Det formelle intervjuet har en strukturert form som følger en fast plan både når det gjelder spørsmål og svar. Da er det heller ikke rom for oppfølgingsspørsmål. Et uformelt intervju er ustrukturert der spørsmålene som stilles blir til underveis. Siden jeg ikke har lang erfaring med å gjennomføre forskningsintervju var det heller ikke aktuelt med et slikt ustrukturert intervju, som er en krevende øvelse å gjennomføre på en god og analyserbar måte. Jeg befinner meg en plass i midten, mellom det Cohen (2007) kaller for ”Interview guide approach” og ”Standardized open-ended interviews”. I dette ligger det at jeg tok utgangspunkt i en intervjuguide, at jeg i hovedsak stilte identiske spørsmål til alle informantene ut fra intervjuguiden, og at jeg gjorde dette i en noenlunde fast rekkefølge. Noen av spørsmålene fikk imidlertid litt ulik ordlyd i de forskjellige intervjuene. Jeg hadde altså et strukturert utgangspunkt, men tilpasset meg også underveis da jeg opplevde at dette kunne bidra til rikere og mer presis data. Alle intervjuene ble tatt opp med digital båndopptaker slik at de kunne transkriberes i etterkant.

3.5 Utvalg

Det er fort gjort i et kvalitativt studie at antall informanter enten blir for stort, eller for lite. Dersom datainnsamlingen stammer fra noen få informanter, blir resultatet mindre generaliserbart. Og om det er veldig mange informanter blir det svært komplisert å gjøre gode analyser. (Kvale og Brinkmann 2015) I min studie har ikke målet vært å generalisere, men det har likevel vært et mål å inkludere mangfoldet av måter lærere går frem på når de skal undervise om divisjon med brøk. Loven om fallende utbytte, også kalt metning, handler om at jeg med et visst antall informanter sannsynligvis ville fått lite ny kunnskap selv om jeg hadde hatt flere informanter (Kvale og Brinkmann 2015). Christoffersen og Johannessen (2012) hevder det er vanlig med et utvalg på 10-15 informanter i pilotprosjekter og andre mindre prosjekter. De påpeker imidlertid at dette også er et spørsmål om hva som er praktisk gjennomførbart, og at studentprosjekter kanskje må begrense seg til færre enn ti. (Christoffersen og Johannessen 2012). For å oppnå en viss grad av metning har jeg likevel valgt å intervjue ti lærere i mitt prosjekt. Underveis opplevde jeg dette antallet som tilstrekkelig, ved at dukket opp lite nytt i de siste intervjuene. Sånn sett opplevdes det overflødig å skulle bruke ressurser på å få tak i flere informanter.

Måten jeg gikk frem på for å komme i kontakt med mine informanter var å utnytte nettverket til en kjenning som jobber i ungdomsskolen. Han videresendte en generell forespørsel jeg hadde utformet per mail til aktuelle matematikklærere som han kjente til. Da ti personer hadde meldt seg stoppet jeg søket etter flere informanter. Dette var en effektiv metode for å komme i kontakt med informanter som var villige til å delta i prosjektet, og sparte meg trolig fra å gå flere omveier til aktuelle informanter. Denne måten å samle et utvalg på kaller Christoffersen og Johannessen (2012) for snøballmetoden. Det eneste kriteriet jeg stilte var i utgangspunktet at man jobbet som matematikklærer i ungdomsskolen. Sånn sett var det også en kriteriebasert utvelgelse (Christoffersen og Johannessen 2012). Utvalget varierte fra lærere som hadde jobbet i ca. et halvt år, til lærere som hadde jobbet i nesten 40 år.

3.6 Intervjuguide og analyse

Da jeg startet prosjektet var forskningsspørsmålet mitt noe mer åpent og generelt enn det jeg endte opp med. Intervjuguiden jeg benyttet i intervjuene var preget av dette. Jeg stilte ett spørsmål knyttet til vurdering av ulike elevsvar på en oppgave, to spørsmål knyttet til en problemløsningsoppgave og tolv andre spørsmål, der alle var rettet mot å se nærmere på læreres matematikkfaglige orienteringer (Thompson m. fl. 1994; Kapittel 1.1). Blant dem var også de tre spørsmålene som ligger til grunn for denne oppgaven. Disse tre spørsmålene var knyttet til to brøkoppgaver:

A: $3\frac{3}{4} : \frac{1}{2} =$

B: $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} =$

Den første oppgaven er inspirert av Ball (1990) og Ma (1999), og den andre er hentet fra Löwing og Kilborn (Löwing og Kilborn 2002). De tre spørsmålene jeg ville at mine informanter skulle svare på var:
1) Hvordan ville du løst oppgave A?
2) Hvordan ville du gått frem hvis du skulle lære dine elever divisjon med brøk?
3) Ville du tenkt på samme måte på oppgave B som på oppgave A? (Både når det gjelder å løse det for egen del, og når det gjelder å forklare for elevene)

Ordlyden i det første spørsmålet kunne enten være ”hvordan ville du angrepet en sånn oppgave”, eller ”Hvordan ville du tenkt hvis du skulle løse denne oppgaven?”. Det underliggende poenget var å finne ut hvordan informantene selv ville gått frem for å løse en slik oppgave der man skal dele et blandet tall med en halv, eller en todeler. Dette spørsmålet skapte et grunnlag som det kunne bygges videre på til det neste spørsmålet. Da fikk nemlig informantene spørsmål om hvordan de ville gått frem for å lære elevene divisjon med brøk. Dette kan ses på som kjernespørsmålet i intervjuet. Det var imidlertid ikke alle informantene som fikk dette spørsmålet direkte, fordi det falt seg naturlig at de selv tok initiativ til å ta dette opp. Til slutt ble de spurt om de tenkte likt på oppgave B, som på oppgave A. Dette var et spørsmål som var ment å peke tilbake på både det første og det andre spørsmålet, altså hvordan de selv ville løst oppgaven, og hvordan de ville brukt denne sammen med elevene sine. Her uttrykte jeg meg noe ulikt i de forskjellige intervjuene. Av og til kom jeg med en tilføying som indikerte at jeg først og fremst var interessert i hvordan de ville forklart oppgavene for elever, som var det mest interessante. Jeg kunne for eksempel si: "Altså hvis du skulle ha jobbet med dine elever, på den oppgaven, hva ville du ha tenkt da?" Hensikten med oppgave B er å avsløre lærernes fleksibilitet eller mangel på fleksibilitet i utførelsen av divisjon med brøk, og deres forståelse av konseptet. Oppgaven er hentet fra Löwing og Kilborn (2002) som bl.a. viser hvor enkelt oppgaven kan forstås gjennom en målingsdivisjonstankegang, men at de som er låst i en klassisk delingsdivisjonstankegang vil slite med å gi en forklaring til regnestykket.

Måten jeg har gått frem på for å analysere data har som nevnt vært preget av elementer fra tematisk analyse. Til å begynne med hørte jeg gjennom alle intervjuene, samtidig som jeg transkriberte dem grovt. Deretter gikk jeg gjennom transkripsjonene og sammenlignet disse, noe Braun og Clarke (2006) ser på som første fase i en tematisk analyse. Det var i denne prosessen jeg oppdaget at svarene på spørsmålene knyttet til divisjon med brøk var såpass interessante at de ville danne et spennende grunnlag for en masteravhandling. På dette tidspunktet hørte jeg gjennom denne delen av intervjuene på nytt, samtidig som jeg finpusset transkripsjonene. I denne prosessen hørte jeg gjennom den aktuelle delen av intervjuet mange ganger, for å finne viktige utsagn som fortalte mye om de ulike lærernes måter å forklare på i en eller annen retning. En slik leting etter interessante utsagn knyttet til problemstillingen kaller Braun og Clarke for den andre fasen. Jeg begynte da å danne meg et grovt bilde av de ulike forklaringskategoriene som jeg skal presentere i kapittelet om mine funn, og var dermed på samme tid inne i den tredje fasen, som handler om å lete etter temaer, eller for min del ulike type forklaringer (Braun og Clarke 2006). Etter å ha jobbet med dette, gikk jeg grundigere til verks for å fordype meg i teorien knyttet til undervisning av divisjon med brøk.

Denne fordypningen er grunnlaget for teorikapittelet. Basert på teorifordypningen utviklet jeg mine analyser, og slik foregikk en dialektisk prosess mellom teori og mine hermeneutiske analyser i flere omganger, slik at funnene ble så autentiske som mulig. Denne prosessen har likhetstrekk med fase fire og fem i en tematisk analyse. Fase fire dreier seg nemlig om å sjekke om temaene (forklaringskategoriene) og kodingen (de ulike utsagnene) kan relateres til hverandre, og fase fem handler om å bearbeide og tydeliggjøre temaene (Braun og Clarke 2006). I dette arbeidet kom jeg frem til de fire ulike tilnærminger lærere har til å undervise brøkdivisjon. Disse skal jeg presentere i kapittel 4: «Analyse og funn». Totalt sett kan de ulike fasene i min analyseprosess minne svært mye om de seks fasene Braun og Clarke (2006) presenterer i *Using thematic analyses in psychology,* uten at jeg har fulgt denne tematiske analyse-modellen slavisk. Fase seks handler om å produsere en rapport, noe jeg gjør i og med denne masteravhandlingen.

3.7 Metodekritikk

En begrensning i mitt forskningsprosjekt er forandringen i forskningsspørsmålet underveis i prosjektet. Dette medførte at intervjuguiden ble utformet basert på et annet utgangspunkt enn det jeg endte opp med. Jeg fikk uansett tak i mye god data knyttet til forskningsspørsmålet, men kunne altså fått tak i enda mer, dersom jeg tidligere hadde tatt utgangspunkt i dette forskningsspørsmålet. En annen begrensning er min manglende erfaring som forsker og intervjuer. Dette kan i noen grad ha påvirket intervjuene, da jeg underveis kunne merke en progresjon og en økende trygghet i denne rollen.

Videre er generaliserbarheten i mitt prosjekt begrenset da jeg ikke har mer enn ti informanter. Samtidig fikk jeg opplevelsen av å komme til det Christoffersen og Johannessen (2012) kaller for et metningspunkt, som handler om at det forekommer lite ny data per informant.

Til slutt kan jeg igjen nevne begrensningen i form av tid og ressurser, som gjorde at jeg for eksempel valgte å ikke samle inn supplerende data i form av observasjon o.l..

3.8 Validitet og reliabilitet

I tråd med metodekritikken er det verdt å vurdere hvorvidt mine forskningsresultater er reliable og valide, eller enklere sagt om de er pålitelige og gyldige (Kvale og Brinkmann

2015). Påliteligheten i mitt prosjekt avhenger av om intervjuene mine er gjennomført slik av svarene som blir gitt er troverdige. Som allerede nevnt er det en fare at det som blir sagt i intervjusituasjonen ikke stemmer helt overens med virkeligheten. Jeg vil imidlertid påpeke bruken av det oppgavebaserte intervjuet, som tvinger flere sider av informantenes matematiske oppførsel, og dermed bidrar til å styrke reliabiliteten. Når det gjelder om forskningsresultatene er valide, eller gyldige, henger dette også i stor grad sammen med reliabiliteten. Slutningene som trekkes baserer seg på at datamateriale er reliabelt. Noe som kan ses på som en svekkelse av validiteten, er den nevnte endringen av forskningsspørsmål, som førte til en noe svekket spørsmålssentrering i intervjuguiden. Det som imidlertid styrker validiteten i prosjektet er at funnene baserer seg på analyser fra ti forskjellige intervjuer, og ikke bare noen få enkeltstående tilfeller. Dette bidrar til å sannsynliggjøre at tolkningene i analysen samsvarer med virkeligheten.

Min egen forståelse, holdninger og meninger har jeg forsøkt å legge til side, da prosjektet primært er et deskriptivt studie. Hensikten har altså først og fremst vært å presentere, ikke vurdere, de ulike måtene lærere går frem på for å undervise divisjon med brøk.
I verste tilfelle, om det skulle ha falt seg slik at noen av informantenes utsagn skulle være usanne, eller at noen av mine tolkninger ikke var korrekte, vil jeg likevel fremheve prosjektets *pragmatiske validitet* (Jf. Kvale og Brinkmann 2015). Med dette mener jeg at prosjektets resultater uansett vil være av verdi for å lære om ulike metoder for å undervise divisjon med brøk.

3.9 Etikk

Prosjektet er godkjent av NSD, Norsk senter for forskningsdata, og har fulgt NSDs retningslinjer som omhandler oppbevaring av data og behandling av opplysninger som er personidentifiserende. Dette vil bl.a. si at ingen andre enn min veileder og jeg har hatt tilgang på data og personidentifiserende informasjon, samt at informantene er anonymisert i form av fiktive navn. Som en del av anonymiseringen har jeg også valgt å skrive alle transkripsjonene i målformen bokmål.

Alle informantene har deltatt med bakgrunn i De nasjonale forskningsetiske komiteenes prinsipp om informert samtykke (De nasjonale forskningsetiske komiteene 2016). Dette innebærer at de på forhånd ble informert om prosjektets overordnede formål, og har skrevet under på et samtykkeskjema i forkant av deltagelse i prosjektet (Kvale og Brinkmann 2015). Videre har jeg lagt vekt på å gi informantene en så positiv opplevelse av deltagelsen som mulig. Dette innebærer at jeg har vist dem respekt for den rollen de har som lærere, og jeg har behandlet dem likeverdig uavhengig av mine preferanser til svarene de har gitt. Fordi jeg visste ut fra bl.a. Liping Mas (1999) sammenligning av amerikanske og kinesiske lærere i *Knowing and teaching elementary mathematics,* at brøkoppgavene kunne oppleves utfordrende prøvde jeg å ufarliggjøre og normalisere nettopp dette. Dette gjorde jeg ved å introdusere spørsmålet med for eksempel ”Det er noen som kan oppleve at dette er litt slemt, men…”.

4 Analyse og funn

Som jeg skrev i forskningsdesignet mitt har jeg kommet frem til fire ulike tilnærminger som lærere har når det gjelder å lære elever i ungdomsskolen å utføre divisjon med brøk.
Jeg vil nå se nærmere på noen av de mest interessante utsagnene fra intervjuene og forklare hvordan jeg mener disse peker mot en inndeling i de fire nevnte kategoriene. Som jeg vil komme tilbake til, var noen av lærerne også innom flere ulike tilnærminger.

4.1 Tor

Læreren ”Tor” løste selv oppgavene ved å ta i bruk snu-og-multipliser-algoritmen som er omtalt i teorikapittelet. Når det gjaldt å lære elevene sine å dele på brøk trakk han imidlertid frem bruk av praktiske eksempler. Sitatene under viser hvordan Tor tenkte om det å introdusere brøkdivisjon for elevene sine. I sitatet under har jeg kun kuttet vekk mine egne kommentarer som ”mm” og ”ja” for at Tors utsagn skal bli mer sammenhengende:

> *”Så når jeg skal introdusere det for elever… Så pleier jeg ofte å begynne med den motsatte… La oss si at vi har, jeg og deg da, vi har femten firedeler som vi skal dele på to. Så… Så lager jeg det som en brøk. Vi deler det på to endeler. For at, for å vise at det er en brøk… For å… Og så sier vi at, ja men hvis, hvis du skal ha, hvis vi to skal dele femten firedeler av… av pizza, det er jo vanlig å bruke pizza, hehe. Så er det det samme som at, jo da, hvor mye skal du ha da, jo da skal du ha halvparten. Hvis vi deler på to, så skal du ha halvparten. Så det å dele på to er det samme som å gange med en halv. Så pleier jeg å tegne opp, å… å illustrere det, og bruke klosser eller et eller annet. Og da er jo det lettere og å… Da har jeg på en måte forklart den overgangen.”*

Tor viser at han vil bruke empiriske eksempler for å hjelpe elevene til å forstå hva som skjer når vi deler på en brøk. Det underliggende spørsmålet er: Hva skjer når to personer skal dele noe? Da får de halvparten hver. Idet han sa at han hadde ”forklart den overgangen” pekte han på utregningen der han multiplisere med den motsatte brøken, og det er altså overgangen til multiplikasjon han sikter til. Gjennom et eksempel argumenterer altså Tor for at å dividere på en todeler er det samme som å multiplisere med en halv.

Vi legger imidlertid merke til nettopp det at han ønsker å benytte seg av et helt tall uttrykt som en brøk, nemlig to endeler. Dette samsvarer med Sinicrope m.fl. (2002) sin variant av delingsdivisjon som forutsatte at divisoren er et helt tall: $\frac{a}{b}$: c (Kapittel 2.4.1). Gjennom ett eksempel antyder Tor altså at $\frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} : \frac{1}{c}$. Litt senere spør jeg ham mer direkte om han kunne forklart for elevene hva det betyr å dele på en halv, siden han foreløpig bare har tatt for seg brøk som heltall. Til dette gir han følgende respons (Også her, og i senere tilsvarende avsnitt er mine småkommentarer innimellom tatt vekk):

> *"Da kan vi jo faktisk sitte litt på kalkulatoren og så kan vi dele på en. Det… Da får vi jo det samme. Så kan vi dele på to. Da får vi jo halvparten av det vi hadde. Så kan vi dele på tall som er mindre enn en. Hva er det som skjer da? Jo da får vi faktisk mer. Så det, det er liksom… Må elevene drive å utforske litt og… finne ut av litt hva er det som skjer når du deler på noe som er mindre enn en. Og det er veldig rart synes mange at det kan bli mer enn det vi hadde. Hehe. Det er litt vanskelig å konkretisere det synes jeg. Det sliter jeg med."*

I stedet for å svare på spørsmålet om han kunne forklart for elevene hva det betyr å dele på en halv, henviser Tor til en utforskende arbeidsform for å finne ut av det. "Sitte litt på kalkulatoren", "utforske litt" og "finne ut av litt hva er det som skjer når du deler", er viktige stikkord fra Tor sin forklaring. Noe av grunnen til at han svarer på denne måten synes å være at han synes det "er litt vanskelig å konkretisere". Vi merker oss altså at det ikke er en didaktisk argumentasjon som ligger til grunn for tilnærmingen i dette tilfelle, men rett og slett at Tor synes det er vanskelig å forklare dette for elevene. Dette bekreftes når jeg videre spør om han ville tenkt og gjort det på samme måten med oppgave B:

> *"Mm. Tror jeg ville tenkt ganske likt altså. Skal vi se. Kanskje jeg kunne ha tegnet et eller annet? (Tegner) Det var tre fjerdedeler. Og så skal de deles på en fire… Det er litt vrient å… Kunne jo ha delt hver sånn tredel i, altså jeg har tre. Kunne dele hver*

sånn i fire kanskje? Det blir jo, nei, det funker ikke så veldig bra. Hehe. Nei, det, jeg tror jeg ville hatt litt samme tilnærmingen. Tror jeg. Altså fokuset må jo bli hva, hva skjer når vi, når vi deler på en halv? Hva skjer når vi deler på en fjerdedel? Og så drive å forske litt på de tallene som er under en da, mellom null og en. Mm."

Her kan det se ut til at Tor på et vis leter etter andre tilnærminger, men ikke klarer å finne dette. Han er i alle fall noe upresis. "Kanskje jeg kunne ha tegnet et eller annet?" sier han og forsøker å gjøre dette, uten å lykkes. Samtidig kan dette i seg selv vise noe av Tor sin interesse av å eksperimentere, og forske seg frem til en løsningsmetode. Tor henviser etter hvert uansett til den type tilnærming som han også pekte på i forbindelse med oppgave A. Han gjentar uttrykket "drive å forske litt", og sier at *fokuset* må bli: Hva skjer "når vi deler på en halv? Hva skjer når vi deler på en fjerdedel?" Det å utforske denne type spørsmål ser altså ut til å være det viktigste i innlæringen av divisjon med brøk, ifølge Tor.

4.1.1 Hvorfor Tor sin tilnærming er induktiv

Jeg mener disse utsagnene peker på at Tor har en induktiv tilnærming til å undervise divisjon med brøk. Med en induktiv tilnærming mener jeg i denne sammenhengen at man jobber seg frem til prosedyrer gjennom å teste ut ulike eksempler. Dette er en utforskende arbeidsform, og tilnærmingen kunne også blitt kalt for en utforskende tilnærming da den har elementer kjent fra utforskende matematikkundervisning (Artigue og Blomhøj 2013; Kapittel 2.5.2). Tilnærmingen er preget av en argumentasjon som tar utgangspunkt i eksemplene, som vi så i teorikapittelet er et kjennetegn på induksjon (Kapittel 2.5.2). Læreren ønsker altså å gi elevene et empirisk grunnlag for å kunne jobbe med lignende oppgaver. Tor viser en slik tilnærming da han er opptatt av at elevene skal utforske ulike oppgaver for å finne ut hvordan man skal løse tilsvarende oppgaver. Han sier de gjerne kan bruke kalkulatoren, og på denne måten utvikle det empiriske grunnlaget for å finne ut av dette. Dette minner om den arbeidsformen som ifølge Thompson og Martinsson (1997) brukes av matematikere, og er en måte å undervise på som ser ut til å tilfredsstille Schoenfeld (1992) sine anbefalinger om å jobbe som forskere med forsøk og eksperimenter.

4.2 Ingeborg

Jeg vil nå se på et eksempel som skiller seg noe fra det forrige. Også Ingeborg benyttet seg av snu-og-multipliser-algoritmen når hun selv regnet oppgave A. Men da hun ble spurt om hvordan hun ville lært elevene å dele på brøk var svaret som følger:

> *"Ja, det synes jeg er like vanskelig hver gang da, jeg gruer meg alltid til jeg skal gjøre det, fordi at jeg syns det er vanskelig å finne gode eksempler. Men det er typisk at jeg begynner med stoffstykker, at du har 3 og ¾ meter stoff som skal deles opp i halvmetere, så må vi finne ut hvor mange halvmetere vi har da. Og det kan de til en viss grad se for seg, selv om jeg en gang hadde en mor som klagde på at sønnen hennes ikke sydde gardiner. Sånn at ikke om jeg kunne finne noe som var mer relevant for dagens ungdom. Sånn prøver jeg å forklare det, også snakker vi om at det å gange med en halv og dele på to. At jeg prøver å vise dem sammenhengen mellom heltall og brøk da."*

Også Ingeborg kommer med et praktisk eksempel, slik som Tor, men hun bruker et eksempel med målingsdivisjon, som gjør at hun kan bruke oppgave A og sette den inn i en meningsfull sammenheng. Selv om hun selv hevder det er vanskelig, gir hun en matematisk korrekt forklaring til et regnestykke der man skal dele på en brøk som ikke har én i nevneren. Hun spør hvor mange halvmetere man kan få på tre og tre firedels meter med stoff. Her legger Ingeborg altså vekt på å gi regnestykket et meningsfylt innhold, noe hun gjør gjennom å benytte seg av målingsdivisjon. Samtidig henviser hun til å snakke om sammenhengen mellom "å gange med en halv og dele på to", akkurat som Tor, men det kommer imidlertid ikke helt frem hvordan hun ser for seg at dette skjer i praksis. Etter hvert i intervjuet erkjenner Ingeborg at hun synes det er krevende å gjøre dette emnet forståelig for elevene, og peker på at det er enklere å lære dem snu-og-multipliser-algoritmen (mitt spørsmål er uthevet, som det også vil være i senere avsnitt):

> *"Men jeg synes det er veldig lett å lære dem formelen. Det er veldig vanskelig å gi dem en god forståelse, det er kanskje fordi min forståelse er litt mangelfull også innimellom på hvordan dette henger sammen da."*

”Vil det si at du ganske fort går over på å lære dem formelen da?”
”Ja, på dette gjør jeg det. Det skal jeg ærlig innrømme, for jeg syns det er litt vanskelig å forholde seg til selv. Selv om det er noe praktisk så syns jeg det er litt abstrakt. Jeg må vel bare være ærlig på det tror jeg.”

Ingeborg mener selv at hennes forståelse er litt mangelfull, og at det derfor er lett å gå over til å lære elevene en formel for hvordan de skal løse slike oppgaver. Med formelen, mener hun snu-og-multipliser-algoritmen, noe som kommer frem i løpet av intervjuet. Gjennom disse utsagnene kunne man sagt at Ingeborg legger vekt på at elevene skal lære seg å utføre brøkdivisjon gjennom å lære denne algoritmen. I resten av intervjuet skinner det imidlertid gjennom at Ingeborg er opptatt av at elevene skal tilegne seg en konseptuell forståelse av dette. Vi ser det tydeligere når jeg spør henne om hun tenker på samme måte om oppgave B:

”Jo hvis jeg bare blir bedt om å regne så ville jeg nok stilt opp helt likt. Men her tenker jeg at det er lettere for dem å se det logiske svaret. At man kan tegne litt og sånn. Tre fjerdedeler og en fjerdedel er kanskje de brøkene som de lettest ser for seg sammen med en halv, så her kan man snakke om at hvis man har tre fjerdedeler som skal deles opp i fjerdedeler, hvor mange fjerdedeler får du da, at man får en viss forståelse for hva de tallene betyr da. ”
”Hvis du skal skrive ned nå da, hva ville du tenkt?”
”For å sitere elevene: Man ser jo bare at det blir tre. Men det er jo snakk om hvor mange ganger en fjerdedel går opp i tre fjerdedeler og for de fleste vil det da være ganske intuitivt at det blir tre. Men hvis jeg bare hadde fått den sånn foran meg så ville jeg bare gjort som i stad.”
”Det er litt mekanisk? Det sitter i?”
”Ja det bare sitter i. Men jeg ville ikke vært avhengig av å gjøre det for å se svaret. Nei.”
”Sånn at hvis du ville forklart det for dine elever, så ville du ikke bare gått rett på algoritmen?”
”Nei, da ville jeg ha prøvd å gi dem litt opplevelse av hva dette betyr.”

Ingeborg peker på at hun vil gi elevene en forståelse av tallenes praktiske betydning: ”at man får en viss forståelse for hva tallene betyr” og ”prøvd å gi dem litt opplevelse av hva dette betyr” er utsagn som bekrefter dette. Hun ser på divisjon med brøk som et konsept som betyr noe bestemt, og som kan forklares. Ingeborg viser at hun kan forklare dette konseptet gjennom utsagnene: ”… her kan man snakke om at hvis man har tre fjerdedeler som skal deles opp i fjerdedeler, hvor mange fjerdedeler får du da, at man får en viss forståelse for hva de tallene betyr da”, og ”Men det er jo snakk om hvor mange ganger en fjerdedel går opp i tre fjerdedeler...” Utsagnene viser at Ingeborg er opptatt av å gi elevene en konseptuell forklaring på hva slike oppgaver kan bety, og ikke bare hvordan de kan regne seg frem til riktig svar. Igjen merker vi oss at det er målingsdivisjon som benyttes for å sette mening til regnestykket.

4.2.1 Hvorfor Ingeborg sin tilnærming er konseptuell

Ingeborg sitt eksempel viser en tilnærming som jeg har valgt å kalle for en konseptuell tilnærming. At Ingeborg har en konseptuell tilnærming betyr imidlertid ikke at denne er helt gjennomført. Noen av utsagnene plasserer henne i en tilnærming som er mer prosedyrebasert. Hun er likevel den av de ti intervjuede lærerne som er mest konseptuell i tilnærmingen og som i størst grad viser en konseptuelt orientert tankegang. Kjernen i det jeg her kaller for en konseptuell tilnærming er at man prøver å gi elevene en konseptuell kunnskap og forståelse av matematikken som undervises (Hiebert og Lefevre 1986; National Research Council 2001), eller det som Skemp (1976/2006) har kalt for en relasjonell forståelse. Dette innebærer at man for eksempel ser nærmere på konseptet brøkdivisjon og spør etter hva det betyr og hvordan det kan forklares slik at det gir mening. Ingeborg viser en slik tilnærming gjennom å sette regnestykkene inn i meningsfulle kontekster, og ved at hun er opptatt av at elevene får en forståelse av hva tallene betyr.

4.3 Irene, Pernille og Gustav

Jeg vil nå se på tre lærere som skiller seg fra Tor og Ingeborg, men som har noe til felles med hverandre i sin forklaring.

4.3.1 Irene

Alle disse tre brukte også snu-og-multipliser-algoritmen for å løse den første oppgaven. Irene henviste til denne også når hun skulle forklare hvordan hun ville gått frem for å lære elevene sine divisjon med brøk:

> *"Jeg sier at, egentlig lærer jeg dere bare å gange sier jeg. Jeg lærer teller ganger teller og nevner ganger nevner. Også lærer jeg det her å forkorte på lang brøkstrek. Og når det er deling så må vi gjøre det om til gangestykke. Også bruker vi den ene regelen. Slippe å huske på så mange regler, så prøver liksom å gjøre det enklest mulig for dem da."*

Her ser vi med en gang en tydelig forskjell fra den konseptuelle tilnærmingen. Hun sier: "egentlig lærer jeg dere bare å gange" og videre at "når det er deling så må vi gjøre det om til gangestykke". Grunnen til at dette skiller seg fra den konseptuelle tilnærmingen er at hun i stedet for å fokusere på hva regnestykket faktisk kan bety, kun er opptatt av hva elevene skal utføre. Og i praksis trenger elevene bare å kunne multiplisere for å løse slike oppgaver, ifølge Irene. Hun presiserer at de bruker "den ene regelen". Med den ene regelen sikter hun til snu-og-multipliser-algoritmen som hun selv har demonstrert. Hennes argumentasjon for denne tilnærmingen var her å gjøre det enklest mulig for elevene. Hun bekrefter også at hun tenker likt på oppgave B:

> *"Ja jeg ville nok det. Så det blir liksom tre fjerdedeler ganger fire endeler også tar du bort de og så blir det tre."*

Irene kommer ikke med noen annen forklaring enn "regelen" som altså sikter til snu-og-multipliser-algoritmen.

4.3.2 Pernille

La oss se på hvordan Pernille forklarer at hun går frem for å lære elevene å dividere med brøk:

”Jeg lærer dem jo mye regelen. Men så lurer de på hvorfor, å dele på en halv hva vil det si? Du kan jo for eksempel ha noen svære fliser som er en halv meter og se hvor mange ganger de går opp i noe…
Det er jo rart at du får et større svar en det du begynte med, når du deler på en halv, altså når du deler på en brøk som er ekte. Ellers så tar jeg jo regelen. De må jo først ha lært dette med å gjøre om og så må de lære det å snu og så gange med den omvendte brøk. Jeg bruker mye å… Altså, vi gjennomgår det, og så ser vi hvordan boka har forklart det, og så øver vi sammen også regner de selv, hvis det er det du tenker på?”

Vi kan se at Pernille er inne på noe som kan minne om en konseptuell forklaring til oppgave A: ”Du kan jo for eksempel ha noen svære fliser som er en halv meter og se hvor mange ganger de går opp i noe”. Dette utsagnet viser at hun ser etter forklaringer som viser hva regnestykket kan bety. Men gjennomgangstonen distanserer seg likevel fra denne tilnærmingen: ”Jeg lærer dem jo mye regelen”, ”… og så må de lære det å snu og så gange med den omvendte brøk”, ”Vi gjennomgår det, og så ser vi hvordan boka har forklart det, og så øver vi…”, er viktige utsagn i denne sammenhengen. Det ser ut til at Pernille heller ikke viser til en selvstendig forklaring av regelen, men at hun støtter seg på forklaringer fra en lærebok. Når jeg videre spør om hun kan si mer om hvordan hun ville gått gjennom og lært elevene å dele på brøk, sier hun:

”Jeg prøver jo at vi har sagt reglene så mange ganger høyt at de hører det som, nesten som et mantra eller noe sånn, at vi ganger to brøker ved å… Så har vi nesten korlesning av det. Hvordan deler vi to brøker: Vi ganger på den omvendte brøk. Vi tryller til gangetegn kan jeg si til de svakere, vi snur opp ned den siste brøken. Det gjelder å huske at det er den da. Men akkurat dette er vanskelig å vise hvorfor det blir riktig. Altså tre fjerdeler delt på en fjerdedel er jo vanskelig å se for seg. Jeg er ikke noe sånn veldig flink til å konkretisere det altså. Det er lettere å konkretisere pluss og minus med brøk.”

I likhet med Tor og Ingeborg, uttrykker Pernille at hun synes det er vanskelig å konkretisere slike oppgaver. Men tilnærmingen er likevel en annen enn begge to. Vi ser tydelig at Pernille er fokusert på innlæringen av regler, ved at hun sier: "… prøver jo at vi har sagt reglene så mange ganger høyt at de hører det som, nesten som et mantra eller noe sånn…" Hun konkluderer videre: "Hvordan deler vi to brøker: Vi ganger på den omvendte brøk." På denne måten forklarer Pernille hva man kan gjøre når man skal utføre divisjon med brøk, men forklaringen er knyttet til en regel som tilsvarer snu-og-multipliser-algoritmen: "Å gange med den omvendte brøk". Hun forklarer altså ikke *hvorfor* man skal multiplisere med den omvendte brøken. Å bruke uttrykket "trylle til gangetegn" for elever som er svake i matematikk, kan sies å stå som en motsetning til den konseptuelle tilnærmingen som søker mot forståelse. Gjennom en slik ordbruk distanserer hun seg også fra en deduktivt logisk argumentasjon og spiller på at matematikken heller kan ses på som et tilfeldig spill som bare må læres.

4.3.3 Gustav

Gustav fremstår som usikker på hvordan han ville gått frem for å lære elevene sine å dividere med brøk:

> *"Ja det er det vet du. Nei det vet jeg ikke faktisk. Faktisk så er det sånn. Den regelen der, kan jeg forklare, ikke nå men sånn i, det blir så dårlig forklaring at jeg har endt opp med å bare: Okey. Det finnes noen ting i matematikken (Mumler…) Sånn setninger ikke sant. Vi må bare akseptere det, og så kan vi komme tilbake til det hvis vi nå skjønner hvorfor vi gjorde det der. Det ligger på det nivået der."*

For Gustav er det tilsynelatende så vanskelig å forklare hvordan man skal dele på en brøk at han velger å si at det finnes noen ting i matematikken man bare må akseptere. Måten Gustav legger dette frem på antyder at han ville lært elevene å regne oppgaver med brøkdivisjon på samme måte som han selv. I forkant av avsnittet over har han nemlig vist hvordan han selv bruker snu-og-multipliser-algoritmen for å løse oppgavene. I den forbindelse sa han dessuten:

"og så ville jeg sagt at regelen er, bare sånn det, at når du skal dele en brøk med en brøk, så snur du nummer to opp ned..."

En av grunnene til Gustav sine utfordringer med å forklare hvorfor man kan bruke snu-og-multipliser-algoritmen kan skyldes at han har en mangelfull konseptuell forståelse. Dette antydes særlig når han etter hvert kommer inn på en pedagogisk problematisk forklaring:

"Akkurat det du spør om nå, det er jo en kinki liten sak. For du klarer liksom ikke å se det for deg helt at du skal dele på en halv. Du vet jo at egentlig hvis du deler på et halvt menneske så får du jo mer. Fordi at da får det hele menneske mer. Hehe. Sånne der ting."

Gustav begynner å snakke om et halvt menneske, noe som blir abstrakt og lite knyttet til virkeligheten (Ma 1999). Forklaringen henger sammen med at han prøver å tenke klassisk delingsdivisjonstankegang, slik dette er definert i kapittel 2.4.1. Dersom Gustav hadde benyttet seg av andre måter å tenke divisjon på, som målingsdivisjon, finne raten per enhet, eller omvendt kartesisk produkt, så kunne han gitt oppgaven en regnefortelling som kunne knyttes til det virkelige liv.

4.3.4 Hvorfor Irenes, Pernilles og Gustavs tilnærming er prosedyrebasert

Det Irene, Pernille og Gustav har til felles er at de viser til snu-og-multipliser-algoritmen, gjerne omtalt som "regelen", når de skal lære bort divisjon med brøk. Fokuset i undervisningen ser ut til å rette seg mot å lære elevene hvordan de skal utføre slike oppgaver enklest mulig. Dette fokuset kan forsvares dersom du slavisk følger ordlyden i kompetansemålet som sier at elevene etter 10. trinn skal kunne "utføre divisjon av brøkar" (Utdanningsdirektoratet 2013). Uansett er det naturlig å kalle disse tre lærernes tilnærming for en prosedyrebasert tilnærming. Grunnen til dette er at de bruker en prosedyre som sentrum for undervisningen og lar prosedyren stå alene som forklaring på det som elevene skal lære. Denne tilnærmingen ser altså ut til å legge til rette for utvikling av en instrumentell forståelse og en isolert prosedyrebasert kunnskap hos elevene (Kapittel 2.5.1; Skemp 1976/2006;

Hiebert og Lefevre 1986). Selv om Pernille er inne på en konseptuell forklaring til oppgave A, er det lite som ellers tyder på at disse lærerne legger vekt på den konseptuelle betydningen av brøkdivisjon. De virker heller ikke å være opptatt av induktive forsøk eller deduktive utledninger av snu-og-multipliser-algoritmen som de anvender på oppgavene.

4.4 Kristine og Berit

Kristine og Berit hadde også noe til felles i sine tilnærminger. Da Kristine skulle forklare hvordan hun ville gått frem for å løse oppgave A, svarte hun i stedet med en didaktisk forklaring:

> *"For de som ønsker å forstå hvordan man deler en brøk på en brøk, så bruker jeg ofte brudden brøk. Jeg gjør den om til femten firedeler, og så tar jeg en stor brøk og så skriver jeg en halv under."*
> **"Ja, du kan skrive, så viser du."**
> *"(Skriver) Femten firedeler, og så, og så skriver jeg en halv under. Og så pleier jeg da å si at hvordan, hvordan skal jeg få det under likhetstegnet til å bli en. Jo da kan jeg gange med to endeler, for det er jo det omvendte. Da gjør jeg det under brøken, så må jeg også gjøre det over brøken. Det er det jeg stort sett pleier å bruke som bevisføring."*

Kristine gjør stykket om til en brudden brøk og regner slik: $\frac{\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = \frac{\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}} * \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} * \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}}} = \frac{\frac{\mathbf{30}}{\mathbf{4}}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{4}}$. Dette kjenner igjen fra den generelle algoritmen knyttet til å finne raten per enhet: $\frac{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}{\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}} = \frac{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} * \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}}}{\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} * \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}}} = \frac{\frac{\boldsymbol{ad}}{\boldsymbol{bc}}}{\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{ad}}{\boldsymbol{bc}}$

(Sinicrope m.fl. 2002)

Denne metoden kan ses på som et matematisk deduktivt bevis for snu-og-multipliser-algoritmen. Selv om Kristine brukte denne bevisførselen ved hjelp av brudden brøk, ser det ut til at hun ikke gjør det uoppfordret, men som en respons til de elevene som "ønsker å forstå". Med dette sier hun implisitt at elever som ikke er opptatt av å forstå heller ikke trenger å forstå. Berit peker også på denne varianten som en mulig tilnærming, men først og fremst for faglig sterke elever:

> *"Også bruker jeg å vise det her til elevene av og til ved å sette opp sånn (Brudden brøk). Men jeg har så fryktelig lyst til å få bort den her (Nevneren). Og da må jeg gange med to her. Men da må jeg gjøre det her og. Det her er kun for sterkere elever. Da får vi 30/4/1 og det er 30/4. At vi viser på den måten også at det faktisk stemmer (Regelen). Det er bare for å vise hvorfor tenker jeg."*

Berit setter også opp regnestykket som en brudden brøk, men presiserer at det "er kun for sterkere elever". Senere modererer hun dette utsagnet ved å si:

> "… eller at jeg tar det felles også håper at jeg når så langt, så mange som mulig."

Vi merker oss for øvrig begrunnelsen for å presentere dette beviset: "Det er bare for å vise hvorfor", altså hvorfor regelen fungerer. Regelen er sånn sett fokuset i utgangspunktet.

4.4.1 Hvorfor Kristines og Berits tilnærming er deduktiv

Forklaringene som Kristine og Berit her kommer med har som utgangspunkt å skulle gi en logisk begrunnelse for snu-og-multipliser-algoritmen. Jeg har derfor valgt å kalle denne tilnærmingen for en deduktiv tilnærming. Den deduktive tilnærmingen har likesom den prosedyrebaserte tilnærmingen en algoritme som utgangspunkt, men den deduktive tilnærmingen skiller seg ut ved at den samtidig retter seg mot en matematisk deduktiv begrunnelse for algoritmen.

4.5 Blandede og uklare tilnærminger

4.5.1 Paul

Ikke alle informantene var entydige i sin tilnærming. Paul var et godt eksempel på dette. Han begynte med å fortelle hvordan han ville forklart oppgave A:

”Så får vi jo, så får vi femten fjerdedeler her, også får vi da delt med en halv, og så, ikke sant, hvordan skal vi få til, vi klarer jo ikke å dele med en halv, nei men, så bruker jeg sånne triks av og til, altså hvor jeg sier at da må vi kanskje gjøre det motsatte. Vi klarer å gange, det klarer vi. Okey, hvis vi snur den siste på hodet da, så blir jo den det dobbelt så mye så, ganging da, da kan jo det opp… da liksom opphever det hverandre, så tenker vi at det blir sånn… der (viser på arket).”

Vi ser at Paul begrunner det han gjør med ”triks” der han gjør ”det motsatte”. Måten han forklarer dette på gjør det litt vanskelig å kategorisere, siden han ikke kommer med noen klare matematiske begrunnelser for det han gjør. Det virker som han vil forsøke å skape en intuitiv forståelse gjennom sin delvise forklaring. På den ene siden virker tilnærmingen å være prosedyrebasert, på grunn av den mangelfulle forklaringen. Samtidig er det en slags hintes det om en slags logikk når han for eksempel sier: *”hvis vi snur den siste på hodet da, så blir jo den det dobbelt så mye…”.* Tilnærmingen får et slags utforskende og induktivt preg, gjennom måten Paul undrer seg. Får å få mer utfyllende informasjon spør jeg han etter hvert hvordan han ville introdusert divisjon med brøk, og da svarer Paul:

”Jeg går veien om desimaltall. Det viser seg at de skjønner mer med desimaltall, av en eller annen grunn. Selv om vi (mumler…) av og til med prosent også men det er en annen sak, men ikke her. Så jeg ville sagt, dele med 0,5, dele med en halv, altså. Du har altså tre og trekvart liter med melk, som skal deles opp i sånne halvliters kartonger eller, hvor mange blir det da. Da må det jammen bli flere ikke sant. Det må jo bli dobbelt så mye som tre og trekvart ikke sant.
Du skal dele det opp. Du har jo en svær bøtte med tre og trekvart liter, så skal du dele det opp i sånne halve, halvliters. Et eller annet sånn.
Altså at de skjønner… Når de skjønner at det kommer til å bli mer.
Jeg tror jeg ville tatt sånn at, tre komma syttifem del på null komma (Mumler…) Ser dere at det er det samme dere?”

Paul peker på koblingen mellom brøk og desimaltall, og at elevene lettere kan forstå dersom man går veien om desimaltall. Han kommer også med et praktisk eksempel, som forklarer betydningen av uttrykket 3 ¾ : ½ . ”Du har jo en svær bøtte med tre og trekvart liter, så skal du dele det opp i sånne halve, halvliters*”*. Her ser vi et tydelig eksempel på en konseptuell tilnærming. Han legger vekt på å forklare regnestykket konseptuelt ved å sette det inn i en naturlig kontekst, med målingsdivisjonstankegang. I tillegg knytter han brøkene til tilsvarende desimaltall, og viser med dette at han er opptatt av å knytte sammen ulike typer kunnskap til et nettverk av kunnskap, som nettopp kjennetegner den konseptuelle kunnskapen (Kapittel 2.5.1; Hiebert og Lefevre 1986). Etter hvert skifter imidlertid Paul noe fokus i sin forklaring:

> *”Altså etter at jeg har brukt litt tid på å forstå hvorfor dette da vokser når du deler med mindre enn en, gjerne med hjelp av sånn eksempler med melkespann og melkekartonger og sånt noe. Så sier jeg at det er svært vanskelig å dele to brøker med hverandre så vi ganger i stedet og det er jo det motsatte, og da kan vi jo gjøre det rett og slett ved å snu den andre brøken på hodet, og da blir jo den motsatt, og så gjør vi motsatt regneoperasjon. Det hører vel litt logisk ut?”*

Her virker det som om Paul både ser for seg å delvis bruke en induktiv tilnærming, og en prosedyrebasert tilnærming. Utsagnene: *”gjerne med hjelp av sånn eksempler”* og *”Det hører vel litt logisk ut?”* mener jeg peker i retning av en induktiv tilnærming. Paul vil bruke eksempler for å vise hvordan man skal tenke. Det bør imidlertid bemerkes at Paul ser ut til å ha et ønske om å få frem logikken i regneoperasjonen gjennom eksemplene, og dette impliserer ikke nødvendigvis en induktiv tilnærming som i større grad gjør eksemplene til selve argumentasjonen. At Paul sier: *”Det hører vel litt logisk ut?”*, gir forklaringen et induktivt preg fordi dette inviterer elevene til å utforske holdbarheten i påstanden, eller at de intuitivt skal forstå at det stemmer. Samtidig kan det ses på som en invitasjon til å lete etter den deduktive logikken i operasjonen. Siden dette ikke er noe Paul selv benytter i sin forklaring vil jeg uansett ikke si at han har en deduktiv tilnærming. Når vi går videre til å se på oppgave B, begynner Paul igjen med en konseptuell tilnærming:

> *”Jamen, den er også litt… Jah… Jeg ville tatt altså… Du har tre kvart liter med melk. Så skal du dele det opp i sånne bittesmå… Kvartliter kartonger, altså snakka sånn konkret. Da ville veldig mange skjønt at da blir det jo tre stykker.”*

Vi ser at Paul igjen tenker målingsdivisjon, og forklarer at gjennom en slik tankegang "ville veldig mange skjønt at da blir det jo tre stykker". Men etter å ha begynt med å fokusere på en konseptuell betydning av oppgaven, ender Paul opp med en prosedyrebasert forklaring:

> *"Ja, det skjønte jeg, ja men da skal vi ta metoden da, vet du, den er fin, da skal vi, det er vanskelig å klare å dele, så vi tar den der, husker du at vi kan snu på hodet dere? Ikke sant. Og så gange, for da bli jo liksom den motsatt og så, satte vi inn motsatt (Mumler…) Flott, og så, sånn og sånn og sånn, så det blir jaggu tre ja. Ikke sant."*

Det kan se ut til at Paul først vil at elevene først skal opparbeide seg en konseptuell, eventuelt en intuitiv forståelse av brøkdivisjon. Etter at dette er på plass går han over til en prosedyrebasert tilnærming. Selv om han først har vist hvor enkelt man kan forklare oppgave B går han over til å si: *"det er vanskelig å klare å dele, så vi tar den der…"*, før han henviser til snu-og-multipliser-algoritmen. Det er ikke helt tydelig hvorfor Paul kombinerer disse tilnærmingene på denne måten. En grunn til å gjøre det kan være at han tenker at flere elever kan få utbytte av undervisningen dersom han har variasjon i tilnærmingen. Andre årsaker kan være at han på den ene siden ønsker å skape forståelse, mens han på den andre siden ser på snu-og-multipliser-algoritmen som en god og effektiv metode for å regne seg frem til svaret på slike oppgaver. Videre kan det tenkes at han mener man trenger å kunne denne algoritmen når man kommer til vanskeligere oppgaver, og derfor bør få denne inn under huden. Uansett er det verdt å merke seg at det ikke er noen sammenheng mellom Paul sin konseptuelle forklaring og den prosedyrebaserte forklaringen. Dette kommer jeg til å drøfte mer utførlig i diskusjonskapittelet.

4.5.2 Berit

Berit ble tidligere brukt som eksempel på en deduktiv tilnærming (Kapittel 4.4). Likevel var heller ikke hennes tilnærming helt entydig, og hun brukte noe av den samme sjargongen som Paul i sin forklaring. Her er to utdrag fra hvordan Berit ville forklart divisjon med brøk for sine elever:

”Så er det jo da den regelen. Jeg ville ha brukt å forklare dem om regelen. Når du skal dele en brøk på en brøk. Jeg ville rett og slett snakket om hva gjør vi? Jo, vi snur regnetegnet, samtidig som vi snur den siste brøken. Og når jeg sier snu regnetegnet så vet mine elever hva jeg mener. Jeg snur det fra deling til ganging.”

”Vi snur regnetegnet sier jeg når vi snur den bakerste brøken, og hvis vi snur regnetegnet med deling, så mener jo jeg da, når jeg forteller dem det så skjønner jo de hva jeg mener, for det har vi jo snakket om, og da gjør vi jo det om til gange og da snur vi den.”

Berit bruker uttrykket ”snu regnetegnet” og ”snu fra deling til ganging” i likhet med Pauls uttrykk: ”Motsatt regneoperasjon”. Hvordan Berit har forklart dette for sine elever kommer ikke helt frem i intervjuet, da hun sier: ”når jeg forteller dem det så skjønner jo de hva jeg mener, for det har vi jo snakket om”. Tilsynelatende legger ikke forklaringen hennes vekt på at elevene skal forstå hvorfor, men pugge at man kan endre regnetegnet fra divisjon til multiplikasjon samtidig som man inverterer divisoren. ”Når du skal dele en brøk på en brøk. Jeg ville rett og slett snakket om hva gjør vi? Jo, vi snur regnetegnet, samtidig som vi snur den siste brøken.” Etter hvert peker også Berit på sammenhengen mellom brøk og desimaltall:

> *”Samtidig som vi gjør alt det her, så prøver vi med noen desimaltall og ser hva skjer når vi deler på en halv. Hva skjer når vi ganger med to, sant. At dem ser at det faktisk er det samme. Det er litt viktig. At dem ser at hvis vi bare tar hvilket som helst tall og deler på en halv så blir det det samme som at hvis vi tar et tall og ganger med to. Så de ser den sammenhengen der at det faktisk er lov.”*

Berit ønsker som sagt å knytte kunnskapen om brøk til kunnskapen om desimaltall, og jobber dermed med å utvikle elevenes relasjonelle forståelse og konseptuelle kunnskap (Skemp 1976/2006; Hiebert og Lefevre 1986). Hun er likevel først og fremst på sporet av en induktiv tilnærming, der elevene blir oppfordret til å forske på sammenhengen mellom å dele på en halv og å gange med to. Berit bruker imidlertid ikke ordet ”forske” aktivt, slik for eksempel Tor gjorde. Hun benytter her en slags empirisk argumentasjon for å multiplisere med den andre brøkens invers, i motsetning til den matematisk logiske argumentasjonen som kommer frem gjennom en deduktiv tilnærming (Kapittel 2.5.2; Alnes 2015; Tranøy 2015). Men som vi allerede har sett kan Berit anvende en deduktiv tilnærming også, siden hun iblant beviser hvorfor snu-og-multipliser-algoritmen fungerer ved å sette opp regnestykket som en brudden brøk (Kapittel 4.4). Da jeg spurte Berit om hun kunne forklare hvorfor man gjør det man gjør når man snur den bakerste brøken og multipliserer svarte hun:

> *"Hvorfor? Det er jo fordi det å dele på en halv er det samme som å gange på to. Det er jo bare derfor."*
> ***"Og det å dele på en firedel er det samme som å gange med 4?"***
> *"Ja. Også bruker jeg å vise det her til elevene av og til ved å sette opp sånn (Brudden brøk)…"*

Måten Berit her svarer på kan tyde på at hun selv har en så innarbeidet forståelse av snu-og-multipliser-algoritmen at hun oppfatter mitt spørsmål som overflødig: "… å dele på en halv er det samme som å dele på to. Det er jo bare derfor". Det er uvisst om hun ville svart på samme måten dersom jeg hadde vært en elev som spurte. I forlengelsen av dette forklarer hun imidlertid hvordan dette kan bevises gjennom å sett opp en brudden brøk. Dette har vi sett på tidligere, så jeg gjentar det ikke her.

4.5.3 Anna

Anna var en av de jeg fikk hentet minst informasjon ut av. Dette kan skyldes at hun var en av de første som ble intervjuet, og at intervjuene ble mer fyldigere etter hvert. Hun brukte selv snu-og-multipliser-algoritmen når hun skulle løse begge oppgavene. Men når det gjaldt å lære elevene dette var hun mer usikker:

> *"Det er sånn som jeg alltid må repetere fordi at da jeg gikk på skolen så pugget jeg regler. Men begrunnelsen for hvorfor dette her funker, den må jeg alltid repetere, den sitter ikke i hodet nå."*
> ***"Men du ville ha…?"***

”Jeg ville ha begrunnet hvorfor ja. Tatt hele begrunnelsen, fra A til Å.”

Det er altså uvisst hvordan Anna ville gått frem, fordi hun ikke selv har en konseptuell forståelse av oppgavene. Hun regner dem selv tilsynelatende mekanisk. Det interessante er at hun likevel ikke har valgt å bruke en ren prosedyrebaserte tilnærming slik som Irene og Pernille. ”… begrunnelsen for hvorfor dette her (regelen) funker, den må jeg alltid repetere”, sier hun, og bekrefter at hun på en eller annen måte ville kommet med en begrunnelse. Det kan høres ut som om hun da ville benyttet en deduktiv tilnærming, men dette er uvisst.

4.5.4 Agnete

Agnete sine svar var noe utfordrende å analysere. Dette skylde at hun var svært opptatt av en måte å undervise på som hun selv hadde glemt. Hun regnet selv ut begge oppgavene ved å sette opp en brudden brøk, slik som lærerne med den deduktive tilnærmingen brukte for å undervise sine elever. Men Agnete så ut til å ha en intensjon om å gi elevene sine en konseptuell forståelse gjennom å konkretisere oppgavene, noe som i seg selv er et kjennetegn på en konseptuell tilnærming. Problemet var at hun ikke visste hvordan hun skulle gjøre dette, noe som tydet på at hun selv hadde en mangelfull konseptuell forståelse:

”Det jeg lærte dem, var å prøve å forstå, fortelle de hva det betyr. Nå husker jeg ikke hva jeg gjorde. Den hukommelsen min er så dårlig, men jeg prøver å gi det en betydning. Så jeg tok å delte det inn i ruter. Så tre fjerdedeler, blir det riktig da?”

Agnete tok her utgangspunkt i oppgave B. Hun husket rett og slett ikke hvordan hun hadde gått frem for å lære elevene divisjon med brøk. Begge oppgavene ville hun løst gjennom å sette opp regnestykket som en brudden brøk, men når det gjaldt undervisningen sa hun:

”Men foran klassen så hadde jeg først prøvd å forklare hvorfor det her blir riktig.”

Med ”det her” mente hun utregningen gjennom brudden brøk, som vi kan skrive generelt:

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} * \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} * \frac{d}{c}} = \frac{\frac{ad}{bc}}{1} = \frac{ad}{bc}$ (Kapittel 2.4.1; Sinicrope m. fl. 2002). Underforstått er ikke denne metoden med den brudne brøken en tilstrekkelig forklaring, ifølge Agnete. Hun var ivrig etter å finne en måte å illustrere på, men endte opp med å tegne tre fjerdedeler, for så å dele hver fjerdedel i fire biter. Det så ut til at hun forvekslet divisjon med en fjerdedel og divisjon med fire, som vi så var en vanlig forveksling blant de amerikanske lærerne i Mas (1999) prosjekt (Kapittel 2.4.5). Etter en del prøving og feiling og litt frustrasjon peker Agnete på den brudne brøken:

> *"Eller jeg ville… Bare liksom pressa på at det er en vanlig brøk og vi gjør akkurat sånn som vi alltid gjør, og så ikke vist de den der snu og bytte-tingen da. For det viser jeg til slutt at det blir det samme hvis du bytt... snur om den og ganger."*

Agnete er altså bevisst på at hun ikke ønsker å bare lære elevene en regel de kan bruke, og ser ut til å distansere seg fra en prosedyrebasert tilnærming ved å si: "og så ikke vist de den der snu og bytte-tingen da." Med "vanlig brøk" mente hun en brudden brøk, og viste til at man kunne multiplisere med samme tall over og under brøkstreken. Først etter å ha vist utregningen med den brudne brøken ser det ut til å være greit å vise at svaret blir det samme gjennom snu-og-multipliser-algoritmen. Dette virker egentlig naturlig å si at Agnete har en deduktiv tilnærming, men det er litt uklart i hvilken grad hun anerkjenner det deduktive beviset for algoritmen. For i fortsettelsen sier hun:

> *"Og så gikk jeg gjennom en sånn der forklaring på hvorfor det blir sånn, fordi at det, som jeg ikke kommer på nå."*

Igjen ser vi at Agnete leter etter en bedre argumentasjon enn det deduktive beviset med den brudne brøken: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} * \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} * \frac{d}{c}} = \frac{\frac{ad}{bc}}{1} = \frac{ad}{bc}$. Etter hvert ender hun likevel igjen opp med å peke på nettopp denne måten å regne på:

> *"Men jeg ville ha forklart det på en måte mate… Med, med, med liksom vanlig brøkregning uten å si snu og gang og bytt og… Fordi at det er så forvirrende… synes*

jeg. Så hvis en skriver det som en brøk, og så kan vi minne de på at vanlig brøkregler er at du kan gange med det… teller og nevner med samme tall og da gjør det egentlig ingenting."

Det kommer frem i intervjuet at hun med "vanlig brøkregning" og "vanlige brøkregler" i denne sammenhengen mener at man kan løse oppgavene gjennom å stille dem opp som en brudden brøk, og at man kan multiplisere teller og nevner med samme tall uten å endre på verdien. Agnete gir også her små hint om at hun ikke har sans for en prosedyrebasert tilnærming, ved at hun sier: "uten å si snu og gang og bytt og…". Selve tilnærmingen er imidlertid noe uklar, selv om vi kan kjenne igjen tegn på både en konseptuell tilnærming og en deduktiv tilnærming. Dette kommer av at hun hopper noe frem og tilbake i sine forklaringer.

5 Diskusjon

I analysen kom jeg frem til disse fire ulike tilnærmingene til undervisning i divisjon med brøk:

1) **Induktiv tilnærming** (Prøver å komme frem til en prosedyre gjennom bruk av eksempler)
2) **Konseptuell tilnærming** (Prøver å skape en konseptuell forståelse)
3) **Prosedyrebasert tilnærming** (Prøver å få elevene til å lære seg en prosedyre)
4) **Deduktiv tilnærming** (Prøver å bevise hvorfor prosedyren fungerer)

Jeg vil i dette kapittelet drøfte mulige konsekvenser av å benytte seg av de ulike tilnærmingene, og hva som er de viktigste forskjellene og likhetene mellom dem. På overflaten kan det se enkelt ut å avgjøre hvilke ringvirkninger de ulike tilnærmingene vil gi. Virkeligheten er imidlertid litt mer komplisert. Og grensene mellom de ulike tilnærmingene er heller ikke nødvendigvis entydige.

5.1 Den induktive tilnærmingen

Som vi har sett tydet noen av Tors utsagn på at han valgte en induktiv tilnærming fordi han syntes det var vanskelig å forklare mer direkte for elevene hvordan man utfører divisjon med brøk. Dette medfører ikke nødvendigvis at den induktive tilnærmingen er en pedagogisk dårlig tilnærming. Ifølge Schoenfeld (1992), Hanna (2000) og Artigue og Blomhøj (2013) kan induktivt arbeid være et viktig element i god matematikkundervisning. Dette gir arbeidsformer der elevene får jobbet slik matematikere jobber, og elevers intuisjon blir anerkjent som en kilde til å skape ny kunnskap (Thompson og Martinsson 1997). Den induktive tilnærmingen bygger dermed en type forståelse, men som kan bli mer basert på intuisjon enn konseptuell kunnskap. Slik blir man ikke nødvendigvis i stand til å argumentere og forklare på noen annen måte enn gjennom bruk av eksempler. Samtidig vil jeg påpeke at det går an å se for seg andre måter å gjennomføre en induktiv tilnærming på, enn det vi møter gjennom Tor sitt eksempel. Tor gir inntrykk av at han gir elevene stor frihet til å utforske dette på egenhånd. Van de Walle m. fl. (2014) foreslår et mer strukturert opplegg designet for at elevene gjennom utforsking skal utvikle forståelsen sin gjennom en serie av oppgaver. En slik serie kan se ut som dette, oversatt til norsk fra Van de Walle m. fl. (2014):

3 : $\frac{1}{2}$ = (Hvor mange serveringer av $\frac{1}{2}$ er det i 3 beholdere)?

5 : $\frac{1}{4}$ = (Hvor mange serveringer av $\frac{1}{4}$ er det i 5 beholdere)?

8 : $\frac{1}{5}$ = (Hvor mange serveringer av $\frac{1}{5}$ er det i 8 beholdere)?

$3\frac{3}{4}$: $\frac{1}{8}$ = (Hvor mange severinger av $\frac{1}{8}$ er det i $3\frac{3}{4}$ beholder)?

Her foreslår Van de Walle m. fl. (2014) at man ber elevene om å se etter et mønster. Gjennom dette kan de gjøre oppdagelser av at det f.eks. er 5 femtedeler i hver beholder i det tredje eksempelet, og at du derfor kan multiplisere 5 med 8 for å komme frem til svaret.
Etter å ha forsket på oppgaver i en slik serie foreslår Van de Walle m.fl. (2014) å bygge videre på dette til utforsking av en ny serie:

5 : $\frac{3}{4}$ =

8 : $\frac{2}{5}$ =

$3\frac{3}{4}$: $\frac{3}{8}$ =

Basert på kunnskapen i den første serien om at det er 5 femtedeler i hver beholder, kan elevene her oppdage en ønsket sammenheng. Dersom det er 40 femtedeler i 8 må det være halvparten så mange par med femtedeler. På denne måten kan man legge til rette for at elevene gjennom utforsking bygger en konseptuell kunnskap som gjør at de forstår at 8 : $\frac{2}{5}$ = 8 * 5 : 2, som videre kan knyttes til snu-og-multipliser-algoritmen: 8 * $\frac{5}{2}$. Gjennom dette kan man bygge elevenes konseptuelle og prosedyrebaserte kunnskap i tilknytning til hverandre (Hiebert og Lefevre 1986; Kapittel 2.5.1).

Vi ser at det ikke nødvendigvis er en motsetning mellom den induktive tilnærmingen og den konseptuelle tilnærmingen. De kan forenes, da den induktive tilnærmingen først og fremst er en metode, mens den konseptuelle tilnærmingen i større grad kan omtales som en hensikt. Man kan derfor se for seg å ha denne hensikten som basis samtidig som man velger en induktiv tilnærming.

5.2 Den konseptuelle tilnærmingen

En skulle for eksempel tro at en konseptuell tilnærming automatisk er det som i størst grad vil bidra til en konseptuell forståelse hos elevene. Vi husker at Ingeborg, som eksemplifiserte en konseptuell tilnærming, la vekt på at elevene skulle forstå hva et regnestykke med brøkdivisjon kunne bety (Kapittel 4.2). Men disse forklaringene var ikke koblet til den prosedyren som hun samtidig lærte elevene, snu-og-multipliser-algoritmen. Et relevant spørsmål en da må stille seg, er hvilken metode man ønsker at elevene skal bruke for å løse slike oppgaver. Dersom man til syvende og sist ender opp med å oppfordre elevene til å bruke snu-og-multipliser-algoritmen, hvordan er denne da blitt knyttet til den konseptuelle forståelsen? Vi husker også at læreren Paul anvendte forklaringer knyttet til en konseptuell tilnærming, men etter at elevene hadde forstått disse forklaringene sa han: ”det er vanskelig å klare å dele, så vi tar den der, husker du at vi kan snu på hodet dere?”. Først viste han altså hvordan man kunne tenke konseptuelt om oppgaven, før han skiftet til en prosedyrebasert tilnærming. På denne måten blir ikke den konseptuelle kunnskapen og den prosedyrebaserte kunnskapen knyttet sammen slik intensjonen bør være om vi skal følge Hiebert og Lefevre (1986), Kieran (2013) og National Research Council (2001). Med Skemp (1976/2006) sine begreper kan vi tenke oss at elever gjennom en slik undervisning fort vil sitte igjen med en instrumentell forståelse av snu-og-multipliser-algoritmen.

Hvis Ingeborg og Paul i stedet for å bruke snu-og-multipliser-algoritmen, hadde knyttet forklaringene sine til fellesnevner-algoritmen, ville den konseptuelle kunnskapen i større grad blitt knyttet til den prosedyrebaserte kunnskapen. Dette er fordi fellesnevner-algoritmen ($\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$) konseptuelt er knyttet til den måten å tenke målingsdivisjon på, som de brukte for å tenke konseptuelt om oppgavene. Dersom vi tenker målingsdivisjon på oppgave B: $\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$, så vil spørsmålet være hvor mange ganger en fjerdedel går opp i tre fjerdedeler. På oppgave A: $3\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, vil man først kunne finne felles nevner, for eksempel 4, slik at man videre kan spørre hvor mange par med fjerdedeler vi har i femten fjerdedeler ($\frac{15}{4} : \frac{2}{4}$).

Dersom Ingeborg og Paul derimot skulle brukt målingsdivisjon som grunnlag for snu-og-multipliser-algoritmen kunne de fulgt det samme prinsippet som vi så nærmere på i kapittel 5.1, knyttet til den induktive tilnærmingen. Altså at 5 femtedeler i 1 gir 40 femtedeler i 8, eller 20 par femtedeler i 8 (Kapittel 5.1). De kunne også brukt tankegangen som Sinicrope m. fl. (2002) kaller for å finne raten per enhet (Kapittel 2.4.1). Med denne tankegangen kunne $\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$ fått betydningen: ”En fjerdedels porsjon gir deg $\frac{3}{4}$ poteter. Hvor mange poteter får du i en hel porsjon?” Siden det er fire fjerdedeler i en hel må man multiplisere med fire for å finne den hele porsjonen, som gir tre poteter. Denne varianten kunne altså blitt knyttet til snu-og-multipliser-algoritmen. Dersom oppgaven hadde vært $\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$ ville spørsmålet kunne blitt: ”To tredjedels porsjon gir deg $\frac{3}{4}$ poteter. Hvor mange poteter får du i en hel porsjon?” For å svare på dette kan man finne en tredjedels porsjon ved å dele på to, før man multipliserer med tre for å finne den hele porsjonen, som tilsvarer brøken $\frac{3}{2}$ i betydningen operator (Kapittel 2.4.1).

Vi har sett at en konseptuell tilnærming bør knyttes til de prosedyrer som man leder elevene til å bruke. Dersom de konseptuelle forklaringene ikke samsvarer med de prosedyrer elevene lærer vil elevene sannsynligvis ikke knytte sammen den konseptuelle og prosedyrebaserte kunnskapen, og sitte igjen med en instrumentell forståelse av de prosedyrer de anvender.

5.3 Den prosedyrebaserte tilnærmingen

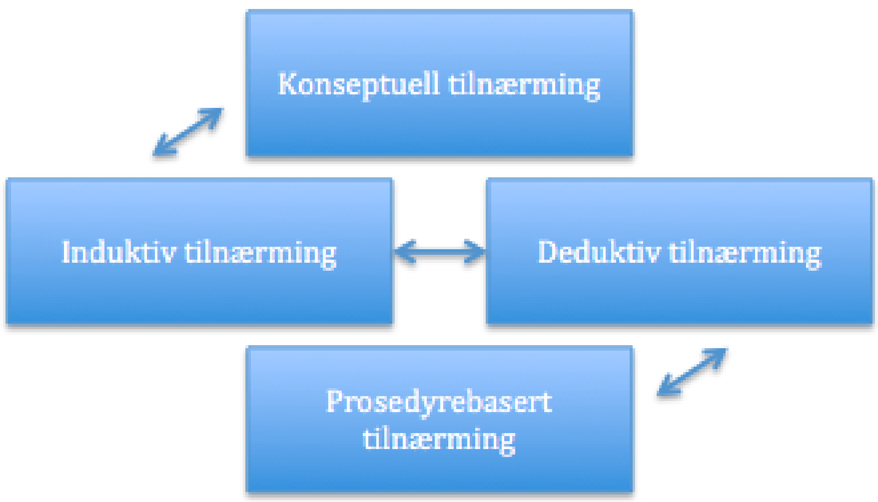
Den prosedyrebaserte tilnærmingen sentrerer seg mot det elevene skal *gjøre* uten å ta hensyn til utvikling av elevenes konseptuelle forståelse. På den måten kan den sies å være en motsetning til den konseptuelle tilnærmingen. Et av argumentene som ble trukket frem av en av lærerne som hadde denne tilnærmingen, var at gjennom en slik tilnærming ble det enklest for elevene (Kapittel 4.3.1). Ved å kun forholde seg til én eneste algoritme blir det mindre å lære og forholde seg til. Men, som antydet i kapittel 2.5.1, kan en slik kunnskap, som ikke står i relasjon til andre kunnskaper, gjøre at ens matematiske kompetanse blir mer fragmentert og mindre fleksibel, og man blir avhengig av å huske algoritmen for å komme frem til riktig svar. Det skal sies at alle lærerne behersket snu-og-multipliser-algoritmen, selv om ikke alle kunne komme med gode konseptuelle forklaringer. Dersom hovedmålet for undervisningen er at elevene skal klare å utføre brøkdivisjon slik at de kommer til riktig svar, kan kanskje denne tilnærmingen trekkes frem som en brukbar tilnærming. Pernille påpekte imidlertid at det kunne være vanskelig å huske hvilken brøk som skulle snus i snu-og-multipliser-algoritmen (Kapittel 4.3.2). Hvis elevene derimot forstår algoritmen konseptuelt vil ikke denne type problem være reelt. Uansett vil det være aktuelt å sette spørsmålstegn til om det er ønskelig at elever lærer seg isolerte kunnskapsfragmenter som ikke er knyttet til deres konseptuelle forståelse.

5.4 Den deduktive tilnærmingen

Som en legitimering av å bruke snu-og-multipliser-algoritmen viste Kristine og Berit til at de førte bevis for elevene sine ved stille oppgavene opp som en brudden brøk (Kapittel 4.4). Vi merker oss at lærerne brukte deduktiv argumentasjon primært for å overbevise elevene. Det ble ikke lagt vekt på at elevene selv skulle utlede bevis, eller læres opp til matematisk argumentasjon. Kristine presiserte at hun gjorde dette ”for de som ønsker å forstå hvordan man deler en brøk på en brøk”. Hun sier med andre ord at den viktigste grunnen til å anvende bevis i denne sammenhengen er at elevene skal *forstå.* Som vi så i kapittel 2.5.2 hevdet Hanna (2000) imidlertid at bevis ikke automatisk skaper god forståelse, men at et *godt* bevis nettopp bidrar til dette. Selv om man kan presentere en god og gyldig deduktiv argumentasjon, som beviser at en algoritme er allmenngyldig, betyr det for eksempel ikke at man nødvendigvis kan komme med en god regnefortelling til regnestykkene. At man kan utlede svaret på oppgave B slik: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4} * \frac{4}{1}}{\frac{1}{4} * \frac{4}{1}} = \frac{\frac{12}{4}}{1} = \frac{12}{4} = \frac{3}{1}$ betyr ikke at man kan forstå utledningen konseptuelt i betydningen at man kan sette den inn i en kontekst fra virkeligheten. Den deduktive tilnærmingen har dermed likhetstrekk med den prosedyrebaserte tilnærmingen, dersom den ikke aktivt knyttes til den konseptuelle tilnærmingen. Som vi også så i kapittel 2.5.2 kan den deduktive tilnærmingen gjerne kombineres med den induktive tilnærmingen da de utfyller og komplementerer hverandre (Hanna 2000). Med induktive arbeidsformer kan elevene komme frem til prosedyrer og algoritmer, og med deduktive arbeidsformer kan de stadfeste at disse stemmer matematisk (Thompson og Martinsson 1997). På denne måten vil en deduktiv tilnærming kunne bidra til å øke den helhetlige matematiske kompetansen hos elevene.

5.5 Å kombinere ulike tilnærminger

Som vi allerede har sett er det høyaktuelt å kombinere flere tilnærminger i undervisningen. En induktiv tilnærming vil i seg selv kunne bidra til at elevene tilegner seg utforskende arbeidsmetoder som kan utvikle deres matematiske tankegang (Schoenfeld 1992). Dersom dette ikke knyttes til en bevisst konseptuell tilnærming vil elevenes utbytte imidlertid kunne bli begrenset og noe tilfeldig. Den prosedyrebaserte tilnærmingen og den deduktive tilnærmingen vil kunne gi en fragmentert prosedyrebasert kunnskap dersom disse ikke knyttes sammen med den konseptuelle og eventuelt den induktive tilnærmingen. Slik jeg har definert den prosedyrebaserte tilnærmingen står den imidlertid som en motsetning til den konseptuelle tilnærmingen ved at den nettopp ikke tar hensyn til den konseptuelle forståelsen. På den andre siden er den konseptuelle tilnærmingen avhengig av at den konseptuelle kunnskapen knyttes sammen med den prosedyrebaserte kunnskapen som læres. Totalt sett kan modellen under fortelle oss noe om hvordan de ulike tilnærmingene henger sammen, basert på mine funn:



Figur 5: Oversikt over ulike tilnærminger

Gjennom denne modellen ønsker jeg å påpeke følgende forhold: Den konseptuelle tilnærmingen og den prosedyrebaserte tilnærmingen er prinsipielt de største motsetningene blant de ulike tilnærmingene, og er plassert på hver sin side vertikalt med de andre tilnærmingene mellom seg. Disse to tilnærmingene har som fokus *hva slags* type kunnskap elevene skal sitte igjen med. Det kan sies at Ingeborg brukte begge disse tilnærmingene, men at dette antagelig skyldtes en manglende sammenheng i undervisningen. Den induktive og den deduktive tilnærmingen har som fokus *hvordan* kunnskapen skal tilegnes. De kan også ses på som motsetninger, men pilene i modellen viser at disse tilnærmingene prinsipielt kan kombineres likevel. Denne påstanden er imidlertid ikke direkte knyttet til mine funn, men er basert på drøftingen av potensialet i tilnærmingene. Berit eksemplifiserte for eksempel både en induktiv og en deduktiv tilnærming uten å knytte tilnærmingene aktivt til hverandre (Kapittel 4.5.2; Kapittel 4.4). Som vi har sett i kapittel 5.4 kan man imidlertid se for seg at et induktivt arbeid med brøkdivisjon kan lede frem til algoritmer som kan deduseres matematisk.

Videre ser vi pilene som viser en sammenheng mellom en konseptuell tilnærming og en induktiv tilnærming, med bakgrunn i at begge disse tar utgangspunkt i forståelse, enten konseptuell eller intuitiv. Pilene mellom den prosedyrebaserte tilnærmingen og den deduktive tilnærmingen kommer av at begge disse isolert sett tar utgangspunkt i prosedyrer. Som vi har sett i mine funn er lærerne med den deduktive tilnærmingen tilsynelatende ikke langt unna å ha en rent prosedyrebasert tilnærming. Dette betyr ikke med nødvendighet at den deduktive tilnærmingen ikke kan kobles sammen med en konseptuell tilnærming, men at de hver for seg har et ulikt utgangspunkt.

6 Avslutning

6.1 Konklusjon

Forskningsspørsmålet som ligger til grunn for denne undersøkelsen har vært:

> **"Hvordan forklarer matematikklærere i ungdomsskolen sin undervisning i emnet divisjon med brøk?"**

Mine funn er basert på intervjuer med ti lærere som forteller om sin undervisning i emnet divisjon med brøk. Disse intervjuene har jeg analysert ved å knytte deres utsagn til matematikkdidaktisk teori, og jeg har gjennom dette utledet fire ulike tilnærminger til undervisning i dette emnet. En induktiv tilnærming, en konseptuell tilnærming, en prosedyrebasert tilnærming og en deduktiv tilnærming. De ulike tilnærmingene beveger seg langs to akser, som henholdsvis forteller noe om *hva slags* kunnskap man ønsker at elevene skal tilegne seg, og *hvordan* man ønsker at elevene skal tilegne seg denne kunnskapen. De bør ikke ses på isolert fra hverandre, men kan i ulik grad og på ulike måter kombineres. Lærere med en konseptuell tilnærming fokuserer på at elevene skal få en konseptuell forståelse av divisjon med brøk, som kan knyttes til begrepene konseptuell kunnskap og relasjonell forståelse (Hiebert og Lefevre 1986; Skemp 1976/2006). Om man lykkes med dette ser imidlertid ut til å være avhengig av flere faktorer enn tilnærmingen man har til undervisningen. Lærere med en prosedyrebasert tilnærming fokuserer på prosedyren som elevene skal lære seg, slik at de kan utføre divisjon med brøk. Elevenes konseptuelle forståelse er av underordnet betydning for lærere med denne tilnærmingen, og kan derfor relateres til begrepene instrumentell forståelse, og prosedyrebasert kunnskap som er isolert fra konseptuell kunnskap (Skemp 1976/2006; Hiebert og Lefevre 1986). Lærere med en induktiv tilnærming fokuserer på at elevene skal utforske konseptet divisjon med brøk, og gjennom dette prøve å komme frem til hvordan man skal regne på slike oppgaver. I diskusjonskapittelet har jeg påpekt at læreren kan legge til rette for et mer eller mindre strukturert induktivt arbeid, og hevdet at det er et særlig potensiale for at denne tilnærmingen kan kombineres med en konseptuell tilnærming. Lærere med en deduktiv tilnærming retter et fokus mot deduktive bevis for prosedyrer som kan anvendes i forbindelse med brøkdivisjon. Ut fra mine funn brukes denne tilnærmingen primært for å overbevise elever om at prosedyren er matematisk korrekt. I diskusjonen hevder jeg at denne tilnærmingen kan bli en variant av den prosedyrebaserte tilnærmingen, dersom den ikke knyttes sammen med en konseptuell tilnærming.

Som nevnt i kapittel 2.4.1 er det vanlig å skille mellom begreper som relasjonell og instrumentell forståelse, eller konseptuell og prosedyrebasert kunnskap. Det er derfor ikke overraskende at disse begrepene kan relateres innholdsmessig til analysen av lærernes tilnærminger. Samtidig viser mine funn til en variasjon av tilnærminger som tyder på at det er hensiktsmessig å ta med enda flere aspekter når man skal snakke om ulike måter å undervise og lære matematikk på. Lærere som underviser i emnet divisjon med brøk har ikke enten en konseptuell eller en prosedyrebasert tilnærming. De kan også ha som utgangspunkt en induktiv tilnærming, eller en deduktiv tilnærming, noe som til sammen gir oss fire ulike tilnærminger til undervisning i emnet divisjon med brøk. Fire tilnærminger som på ulike måter og i ulik grad kan kombineres.

6.2 Begrensninger

Konklusjonene i dette prosjektet bør ses i lys av dets styrker og dets begrensninger. Da jeg startet prosjektet var hensikten å se mer generelt på læreres matematiske tankegang i undervisningen. Intervjuene kunne derfor i større grad vært designet for å gå enda mer i dybden på forskningsspørsmålet. Likevel mener jeg at mine funn gir et troverdig bilde av ulike tilnærminger til undervisning knyttet til emnet divisjon med brøk, og sammenhenger mellom tilnærminger og ulike forståelser av divisjon med brøk. Gjennom intervjuene med mine ti informanter har jeg oppnådd en viss grad av ”metning”, selv om resultatene ikke kan sies å gi et fullstendig og generelt bilde av norske læreres undervisning knyttet til divisjon med brøk.

6.3 Veien videre

I løpet av arbeidet med denne masteravhandlingen har det dukket opp flere ubesvarte spørsmål som hadde vært spennende å undersøke nærmere, i nye forskningsprosjekt. Det ville for eksempel vært svært interessant å finne ut hvor stor overføringsverdi kategoriseringen i de fire ulike tilnærmingene har til andre emner i matematikken. I denne sammenhengen kunne man også sett om det er en tydelig sammenheng mellom lærernes undervisning i emnet brøkdivisjon og deres undervisning i andre emner.

Et annet sentralt spørsmål knyttet til mine funn er i hvilken grad de ulike tilnærmingene innenfor brøkdivisjon kan bidra til å øke elevenes regneferdigheter på kort og lang sikt. I tilknytning til dette er det flere forhold som hadde vært interessant å se nærmere på. Jeg har blant annet antydet at en induktiv og en deduktiv tilnærming har potensiale til å kunne kombineres. Men på hvilken måte kan dette gjøres på en hensiktsmessig måte? Og på hvilke måter kan induktive og deduktive tilnærminger kombineres med en konseptuell tilnærming?

Videre ville det vært interessant å gå mer i dybden på hvilke betydninger av brøk, og av brøkdivisjon en bør ta utgangspunkt i når man skal undervise brøkdivisjon (jf. kapittel 2.2 og 2.3), og hvilken relasjon dette har til de ulike tilnærmingene. I den forbindelse ligger også spørsmålet om hvilken sammenheng det bør være mellom tidlig brøklæring og læring av divisjon med brøk.

For å svare på disse spørsmålene kunne man ha forsket på konkrete undervisningssituasjoner, og/eller prøvd ut ulike undervisningsopplegg i praksis. Gjennom dette ville man kunne finne svar på hvordan elevers forståelse og kunnskaper knyttet til brøkdivisjon påvirkes av ulike opplegg og ulike tilnærminger. Her er det mange muligheter både for kortere og longitudinelle prosjekter, som kan bedre grunnlaget for å gjøre gode vurderinger i forbindelse med undervisning om brøk, divisjon og divisjon med brøk.

7 Litteratur

Alnes, J. H. (2015). Deduksjon: bevisføring. I *Store norske leksikon*. URL: https://snl.no/deduksjon_-_bevisf%C3%B8ring [lest 01.05.2017]

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). *Conceptualizing inquiry-based education in mathematics.* ZDM, 45(6), 797–810. DOI: 10.1007/s11858-013-0506-6.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understandings of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132–144. DOI: 10.2307/749140

Battista, M.; Boerst, T.; Confrey, J.; Knuth, E.; Smith, M. S.; Sutton, J.; White, D. og Quander, J. (2009). Research in mathematics education: Multiple methods for multiple uses. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 216-240

Behr, M.; Lesh, R.; Post, T. og Silver, T. (1983). Rational Number Concepts. I R. Lesh og M. Landau (Red.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, (s. 91-125). New York: Academic Press.

Braun, V. og Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77-101.

Caelli, K.; Lynne, R. og Mill, J. (2003). `Clear as Mud: Toward Greater Clarity in Generic Qualitative Research. *International Journal of Qualitative Methods, 2*(2). Article 1. Lest [19.04.2017]: https://journals.library.ualberta.ca/ijqm/index.php/IJQM/article/view/4521/3651

Christoffersen, L.; Johannessen, A. (2012) *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Oslo: Abstrakt forlag.

Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work: Coping with multiple theoretical perspectives. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 3–38). Charlotte, NC: Information Age.

Cohen, L., Morrison, K. og Manion, L. (2007). *Research methods in education (6. utg.).* London: Routledge.

De nasjonale forskningsetiske komiteene (2016). Generelle forskningsetiske retningslinjer. URL: https://www.etikkom.no/forskningsetiske-retningslinjer/Generelle-forskningsetiske-retningslinjer/ [lest 27.04.2017]

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove? *Educational Studies in Mathematics, 38,* 85–109. DOI: 10.1023/A:1003660018579

Empson, S. B. og Levi, L. (2011). *Extending Children´s Mathematics. Fractions and Decimals.* Portsmouth: Heinemann.

Flores, A. (2002). Profound Understanding of Division of Fractions. I G. Bright og B. Litwiller (Red.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook* (s. 153–161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Goldin, G. A. (1997). Observing mathematical problem solving through task-based interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph 9*, 289–320. DOI: 10.2307/749946

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics, 44(1),* 5-23. DOI: 10.1023/A:1012737223465

Hiebert, J. og Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (s. 1-27). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2013). The false dichotomy in mathematics education conceptual understanding and procedural skills: an example from Algebra. I *Vital directions for mathematics education research* (s. 153-171). New York: Springer.

Kuhn, T. S. (1962). *The structure of scientific revolutions* (2. utg.). Chicago: University of Chicago Press.

Kvale, S. og Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju (3. utg.)* Overs. T. M. Andersen og J. Rygge. Oslo: Gyldendal akademisk.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 629-667). Charlotte: Information Age Publishing.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers (3. utg.).* New York & London: Routledge.

Lincoln, Y. S.; Lynham, S. A.; Guba, E. G. (2011). Paradigmatic controversies, contradictions, and emerging confluences, revisited. *The Sage handbook of qualitative research*, *4*, 97-128.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics,* 67(3), 255–276. DOI: 10.1007/s10649-007-9104-2. Springer.

Löwing, M. og Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik för skola, hem och samhälle.* Lund: Studentlitteratur.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers´ Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Morris, A. K. (2002). Mathematical Reasoning: Adults' Ability to Make the Inductive-Deductive Distinction, *Cognition and Instruction, 20:1,* 79-118: Routledge.

National Research Council (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell (Red.) Mathematics Learning Study Commitee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers´ beliefs and affect. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 629–667). Charlotte: Information Age Publishing.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. I D. Grouws (Red.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 334-370). New York: MacMillan.

Sinicrope, R.; Mick, H. W. og Kolb, J. R. (2002). Interpretations of Fraction Division. I G. Bright og B. Litwiller (Red.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook* (s. 153–161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Skemp, R. R. (1976/2006). Relational understanding and instrumental understanding. I *Mathematics Teaching in the Middle School*, 12(2), 88–95. Opprinnelig publisert i *Mathematics Teaching*.

Smith, J. P. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. I G. Bright og B. Litwiller (Red.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook* (s. 3–17). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stylianides, G. J. og Stylianides, A. J. (2009) *Facilitating the Transition from Empirical Arguments to Proof.* Journal for Research in Mathematics Education, 40(3), 314-352

Tall, D.; Yevdokimov, O.; Koichu, B.; Whiteley, W.; Kondratieva, M. og Cheng, Y-H. (2012). Cognitive Development of Proof. I G. Hanna og M. de Villiers (red.) *Proof and Proving in Mathematics Education*, New ICMI Study Series 15, DOI: 10.1007/987-94-007-2129-6_2. Springer

Thompson, A. G. (1992). Teachers´ beliefs and conceptions: A synthesis of the research. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 127-146). New York: Macmillan.

Thompson, A. G.; Philipp, R. A.; Thomspon, P. W. og Boyd, B. A. (1994). Calculational and conceptual orientations in teaching mathematics. I D. B. Aichele og A. F. Coxford (Red.), *Professional development for teachers of mathematics* (s. 79-92). Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics.

Thompson, J. og Martinsson, T. (1997). *Kunnskapsforlagets matematikkleksikon*. Oslo: Kunnskapsforlaget.

Tranøy, K. E. (2015). Induksjon: filosofi. I *Store norske leksikon*. URL: https://snl.no/induksjon_-_filosofi [lest 01.05.2017]

Utdanningsdirektoratet (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag. Kompetansemål etter 10. årssteget.* URL: https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-10.-arssteget [Lest 27.04.2017]

Van de Walle, J. A.; Bay-Williams, J. M.; Karp, K. S. og Lovin, LA. H. (2014). *Teaching Student-Centered Mathematics: Developmentally Appropriate Instruction for Grades 6-8. (2. utg.)* NJ: Pearson Education.

Zaslavsky, O.; Nickerson, S. D.; Stylianides, A. J.; Kidron, I. og Winicki-Landman, G. (2012). The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical perspectives. I G. Hanna and M. de Villiers (Red.), *Proof and Proving in Mathematics Education, New ICMI Study Series* 15, DOI 10.1007/978-94-007-2129-6_9. Springer.

8 Vedlegg

Vedlegg 1: Intervjuguide

Oppgave A) $3\frac{3}{4} : \frac{1}{2} =$

Oppgave B) ¾ : ¼ =

a) Regn ut oppgave A, samtidig som du beskriver hvordan du tenker for å løse oppgaven.

b) Hvordan ville du gått frem for å lære elevene dine hvordan de skal dele på en brøk?

c) Ville du tenkt likt på oppgave B, som på oppgave A?

Vedlegg 2: Samtykkeskjema

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjekt

”Læreres matematikkfaglige tankegang”

Bakgrunn og formål

Jeg ønsker å gjøre et studie på norske matematikklæreres matematikkfaglige tankegang. Hensikten vil være å utvikle teori som kan øke forståelsen for lærernes ulike måter å tenke på, evt. videreutvikle eksisterende teori. Dette vil jeg gjøre gjennom å lytte til lærernes didaktiske refleksjoner i møte med noen matematiske oppgaver på ungdomsskolenivå. Videre vil jeg finne ut hvordan lærere vurderer elever/fiktive elevsvar og hvordan de responderer på noen generelle matematikkdidaktiske spørsmål. Prosjektet er en del av mitt masterstudie ved UiT Norges arktiske universitet, og vil være grunnlaget for min masteroppgave som skal leveres våren 2017.

Du er spurt om å delta i studien fordi du jobber som matematikklærer i ungdomsskolen.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Om du sier ja til å delta i dette studiet vil bli med på et oppgave-basert intervju med maksimalt 30 minutters varighet. Jeg vil gjøre noen notater basert på observasjoner underveis i intervjuet, samt gjøre et lydopptak av intervjuet. Dette vil jeg senere analysere med hensyn til prosjektets formål. Opplysninger jeg vil innhente er studiebakgrunn og jobberfaring, i tillegg til det som er nevnt under avsnittet ”bakgrunn og formål”.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Kun student Ole Christian Vedvik og veileder Ove Drageset vil ha tilgang på informasjonen som hentes inn, som for øvrig vil bli lagret i et skap låst med hengelås.

Deltakerne vil i oppgaven anonymiseres, ved at de vil omtales med fiktive navn. Dette medfører at deltakerne ikke vil kunne gjenkjennes i publikasjon.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 15. mai. Sensurfrist er 6 uker etter innlevering, og alle oppbevarte personopplysninger vil da bli anonymisert/destruert. Hvis prosjektet mot formodning ikke er fullført på dette tidspunktet, vil alle deltakende kontaktes dersom jeg ønsker ytterligere oppbevaring av informasjon.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli fjernet.

Dersom du ønsker å delta eller har spørsmål til studien, ta kontakt med student Ole Christian Vedvik, tlf: 92460151, eller veileder Ove Drageset, tlf: 91723314.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å delta

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 3: Godkjenning fra NSD

NSD

Ove Gunnar Drageset
Institutt for lærerutdanning og pedagogikk UiT Norges arktiske universitet

9006 TROMSØ

Vår dato: 16.01.2017 Vår ref: 51696 / 3 / KH Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 20.12.2016. Meldingen gjelder prosjektet:

51696	*Matematikklæreres matematikkfaglige tankegang*
Behandlingsansvarlig	*UiT Norges arktiske universitet, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Ove Gunnar Drageset*
Student	*Ole Christian Vedvik*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 15.07.2017, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Katrine Utaaker Segadal

Kjersti Haugstvedt

Kontaktperson: Kjersti Haugstvedt tlf: 55 58 29 53
Vedlegg: Prosjektvurdering

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no