

# Muslingen som er dyktig i matematikk

Steinar Thorvaldsen, dr.scient. Universitetet i Tromsø.

Albueskæl: Wikipedia



Albueskjell [da.: albueskæl], eller hatteskjell, er et bløtdyr og tilhører albusneglene som har et lavt, kjegleformet skall. Som navnet sier, ligner det en albue, fordi dens spiss har en runding som ligner på en albuespiss. Den er gjerne 3-6 cm bred og sitter fast på steiner og berg i strandsonen. De lever langs kysten i Norge og Sverige, langs hele Jyllands vestkyst og

Huse af albueskæl.



## saken kort



Dyr som har skelettet utenpå (exoskelet) i form af kitin eller kalkskaller, må bygge en skal som passer til det voksne individ eller udskifte skallen i takt med væksten. Der er også en tredje mulighed. Skallen kan have en facon som kan udvides løbende ved at dyret bygger materiale på kanten af skallen. Sneglen som forfatteren beskriver, udvider sit hus på denne måde. Den løser også andre problemer. Hvordan får jeg mest for pengene? Eller hvordan får jeg det største hus med de færreste byggematerialer og samtidig indkalkulerer andre vigtige faktorer? Læs her hvordan det lille dyr tilsyneladende har regnet dette ud længe før rumalderen.

videre nedover langs vestkysten i Europa. Den suger seg fast til underlaget og kan være svært vanskelig å få løs. Det meste av sneglen består av en kraftig muskel som den bruker som en slags sugeskål for å holde seg fast til underlaget. Albuesnegler (latin: *Patella vulgata*) lever av å raspe alger av berget. Sneglen kan bli opp til 15 år gammel.

Hos albueskjellet er skallets rand nøyaktig tilpasset underlaget og lukker seg tett ved lavvann når skallet er i luft. Når vannstanden er høyere, vandrer albueskjellet opp til én meter fra utgangspunktet, men det er tilbake på samme sted ved lavvann. Der har den tilpasset skallet slik at det tetter godt ned mot underlaget. Sneglen lager et slimspor som den gjerne benytter til å finne tilbake til bostedet. På den måten kan den tåle å stå over vannflaten i perioder uten å tørke ut. Muslingen har også med seg litt vann inne i skallet for de periodene den befinner seg i luft.

### Kjeglehus

Kjeglen er som kjent en av de klassiske figurene i geometrien. Som en matematisk modell for albueskjellets hus, kan vi ta utgangspunkt i en standard kjegle. Skjellets geometri er da gitt ved velkjente formler som kan baseres på kjeglens sirkulære grunnflate, dens høyde og vinkel i toppen. Noen kjegler har høy spiss, mens andre har lav spiss.

Men hvordan skal muslingen bygge sitt hus for å få mest mulig rom å rutte med? Grunnmuren er gitt med fjellet, men veggen gjelder det å legge slik at resultatet inne blir størst mulig.

Dette er et vanlig optimaliseringsproblem som løses ved å sette opp en volumfunksjon, og deretter finne den største verdien av denne ved bruk av derivasjon. For mange har slike regnestykker vært en del av pensum i matematikk i videregående skole (gymnaset). Kaller vi radien i grunnflaten for  $r$ , høyden i kjeglen for  $h$ , får vi denne formelen for arealet av sideveggen,  $S$ :

$$S = 2\pi r \cdot \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{2} = \pi r \cdot \sqrt{h^2 + r^2}$$

Denne sideveggen kan vi anta at har en gitt størrelse som tilsvarer de byggematerialene muslingen kan benytte til huset. Vi setter  $S = 1$ , og bruker dette til å finne et uttrykk for  $h$  av ligningen over. Det gir oss:

$$h = \sqrt{\frac{1 - \pi^2 r^4}{\pi^2 r^2}}$$

Så kan vi se på volumet. Volumet  $V$  av en kjegle er som kjent grunnflaten ganger høyden delt på 3, som nå blir:

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{r\sqrt{1 - \pi^2 r^4}}{3}$$

Vi ønsker å finne den verdien av radien  $r$ , som gjør volumet  $V$  størst mulig. Til vanlig gjøres dette ved å derivere funksjonen  $V$  med hensyn på  $r$ , og sette den deriverte lik 0, men vi kan også plote funksjonen grafisk for å se når den får sin største verdi. Dette er gjort i figuren. Resultatet blir at  $V$  har sin største verdi for:

$$r = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

Dette gir at den toppvinkelen i spissen på kjeglen som gir størst volum er på **70.5 grader**.

Jeg har samlet et titalls albueskjell fra kystområdene i Norge og målt vinkelen i den nedre vekstsonen som vist i figuren. Mot toppen er skjellene noe slitt av vær og vann, og vinkelen varierer også en del fra skjell til skjell. For de jeg har samlet, ligger toppvinkelen mellom **75 og 85 grader**, dvs. at skjellene er noe lavere enn det som ville ha gitt maksimalt volum i en kjegle med gitt sideflate.

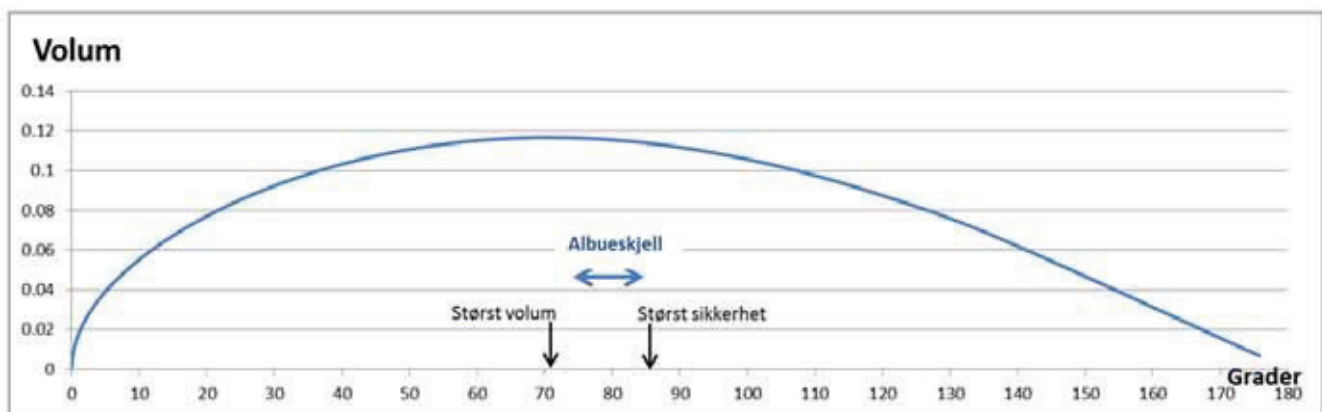
Men det er også andre faktorer enn stort volum som spiller inn. Tidevannssonen er et av de områdene som eksponeres for de største temperatursvingninger på jorden, fra varme bergvegger til snødekte strender. En kjegleform med stor høyde vil fortære miste varme til omgivelsene enn et skjell med mindre høyde. Temperatursvingene vil i tillegg skape spenninger som skjellveggen må kunne takle.



Måling av vinkelen. Foto: Forfatteren

### Å tåle storm

Skjellet sitter som sagt på fjell og steiner der det kan bli utsatt for bølger med vannhastigheter i overkant av 20 m/s. Disse ekstreme vannstrømmene påfører også skjellet sterke krefter, både løft- og dra-krefter, som utfordrer muslingens evne til å holde seg fast til underlaget og unngå å bli knust. Den koniske formen av skjellet er mye bedre egnet til dette enn den kule-lignende form eller spiralformen som er vanlig hos de fleste andre skjelltyper. (Denny 1988; Vermeij 1993). Kjegleformen har den egenskapen at den vil redusere de hydrodynamiske kreftene. Men fortsatt er det en viss risiko for at muslingen blir slitt løs fra underlaget på grunn av de kreftene den tross alt vil bli utsatt for. Denne risikoen kan det være smart å gjøre så liten som mulig. For et skjell med lav spiss (stor toppvinkel) vil løft være den dominerende kraft, og for de med en høyt spiss vil dra-kraften være den dominerende. I en teoretisk studie har Mark W. Denny (2000) vist at risikoen for at muslingen blir rykket løs er minimert når forholdet mellom høyde og radius er lik 1.06, dvs. når toppvinkelen er **86.6 grader**. I figuren er de forskjellige verdiene tegnet inn, og vi oppdager at de virkelige Albueskjellene er plassert imellom de to teoretiske verdiene vi har regnet oss frem til.



Figuren viser hvordan albueskjelllets volum varierer med toppvinkelen når vi antar at byggematerialet som brukes i skjellets vegger, har et gitt areal. De to lodrette pilene viser optimale verdier beregnet ut fra naturvitenskapelig betraktninger og teori, mens den vannrette pilen viser det empiriske variasjonsområdet for en del virkelige skjell som ble samlet inn.



### Apollokapselen

Albueskjellets form minner om formen på det romfartøyet som ble bygd for å frakte mennesker tur/retur til månen. Kommando- modulen som ble brukt i forbindelse med måneferdene, hadde en form tilsvarende vårt skjell. Toppvinkelen i kjeglen var på 66 grader, og det var plass til 3 mennesker inni, pluss alt utstyret. Ingeniørene ga kapselen nettopp denne optimale form for å gjennomføre ekspedisjonen helt ut til månen som ligger 384 000 km borte, og som vi vet ble dette en av de største og mest vellykkede teknisk-vitenskapelige prosjekter i historien. Kjeglen var egentlig avkortet i spissen for å gi plass til en luke for astronautene å bevege seg igjennom. I tillegg var den konstruert med et spesielt varmeskjold nederst som ga mulighet for å bremse opp i jordens atmosfære uten å komme i spinn. Nettopp det siste var svært viktig for å sikre en trygg landing for astronautene. Alle disse behovene gjorde at romfartsingeniørene valgte kjeglen som den optimale løsning, og alle spesialbehov ble designet inn i grunnformen av en kjegle.

På tilsvarende måte aner vi av regnestykkene over at skjellet på stranden er resultat av samme type ingeniørkunst, der behovet for plass og sikkerhet er bygget inn på en mesterlig måte. ■

Apollo 14 var en av de vellykkede måneferdene, og astronautenes romkapsel står nå utstilt på Kennedy Space Center i USA. Foto: Wikipedia.

### Litteratur

- Cabral, J.P and Natal Jorge, R.M. (2007) *Compressibility and shell failure in the European Atlantic Patella limpets*. Mar Biol. 150:585–597.
- Denny, M.W.(2000) *Limits to optimization: fluid dynamics, adhesive strength and the evolution of shape in limpet shells*. The Journal of Experimental Biology 203, 2603–2622.
- Denny, M.W. (1988) *Biology and mechanisms of the wave-swept environment*. Princeton University Press, Princeton.
- Harley, C.D.G. et al. (2009) *Thermal stress and morphological adaptations in limpets*. Functional Ecology, 23, 292–301.
- Vermeij, G.J. (1993) *A natural history of shells*. Princeton University Press, Princeton.