Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Styrking av matematiske samtaler

En kvalitativ studie av hvilke grep to engasjerte matematikklærere tar for å styrke de matematiske samtalene i klasserommet.

—

Håkon Ottesen og Ådne Figenschau Pedersen

Masteroppgave i lærerutdanning 5.-10. trinn. Mai 2018. 30 studiepoeng.

Sammendrag

Denne masteroppgaven i matematikkdidaktikk er en kvalitativ casestudie som undersøker følgende forskningsspørsmål: «Hvilke grep gjør to engasjerte lærere på mellomtrinnet knyttet til de matematiske samtalene i klasserommet, og hvordan styrker grepene samtalene?». Studien retter fokus mot tre undersøkelsesfaktorer som ble oppdaget i datainnsamlingen: 1) oppgaver, 2) samtalegrep og 3) undervisningsorganisering og samtalestruktur. Faktorene analyseres og diskuteres hver for seg, før vi til slutt drøfter hvordan de sammen styrker de matematiske samtalene.

Et viktig formål med prosjektet er at praksisen vi beskriver kan danne grunnlag for naturalistisk generalisering som andre kan dra nytte av. Studien er relevant for andre matematikklærere som ønsker å utvikle egen praksis, men resultatene kan også være nyttige for lærerutdanningen, for å avgjøre i hvilken grad fokus bør rettes mot læreres kunnskap om matematiske samtaler.

Studiens funn viser at lærerne foretar flere grep knyttet til hver undersøkelsesfaktor. Valg av åpne og kognitivt utfordrende oppgaver gjør at oppgavene kan løses på flere måter, og bidrar til at elevene har noe å samtale om. Lærerne organiserer undervisningen slik at elevene kan utforske oppgavene lenge i læringspar, noe som gir dem mulighet til å utvikle solide forklaringer til helklassediskusjonen. Lærerne overvåker og veileder elevene ved å bruke samtalegrep som gir innsikt i elevenes matematiske tenkning, fremgangsmåter, svar og forklaringer. Lærerne kobler elevenes ulike løsningsstrategier og svar til hverandre, og til viktige matematiske ideer. Grep innenfor de tre undersøkelsesfaktorene bidrar sammen til at samtalene fokuseres rundt elevenes egne matematiske tanker, ideer, strategier og forklaringer.

Forord

Denne masteroppgaven i matematikkdidaktikk markerer avslutningen på vår tid som studenter ved Universitetet i Tromsø. Arbeidet har vært både lærerikt, interessant og utfordrende. Temaet kommunikasjon i matematikk har gjennom arbeidsprosessen blitt enda viktigere for oss, og er noe vi tar med oss videre inn i arbeidslivet.

Først og fremst vil vi takke våre veiledere Ove Gunnar Drageset og Ida Friestad Pedersen for god støtte og veiledning underveis i prosessen. Vi ønsker også å rette en stor takk til våre to lærerinformanter, deres elever og skolen der vi har samlet inn data!

Vi takker våre medstudenter for fem uforglemmelige år, og vi retter en stor takk til våre nærmeste, som har støttet oss underveis i skrivingen.

Til slutt vil vi takke hverandre for gode samtaler og refleksjoner som har bidratt til å drive prosessen fremover. Samarbeidet har fungert meget godt!

Ådne Figenschau Pedersen og Håkon Ottesen

Tromsø, mai 2018

Innholdsfortegnelse

Tabelliste

Figurliste

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for tema

Matematikk blir ofte karakterisert som et «puggefag» der terping av regler, formler og algoritmer vektlegges (Herheim, 2016). Et vanlig svar på hva matematikk innebærer, er at det handler om de fire regneartene. Et annet synspunkt er at matematikk omhandler regning med, eller manipulasjon av, tall. Lockhart (2009) skriver at hverken skoler, utdanningsinstitusjoner eller lærebokforfattere forstår hva matematikk egentlig er, og hevder at til og med de fleste matematikklærere har feil oppfatning av hva matematikkfaget egentlig bør handle om (ibid.).

Hiebert og Lefevre (1986) vektlegger samspillet mellom begrepskunnskap (*conceptual knowledge*) og prosedyrekunnskap (*procedural knowledge*). Forholdet mellom disse kunnskapstypene kan sees i sammenheng med det Skemp (1976) kaller relasjonell og instrumentell forståelse. Der Skemp (1976) argumenterer for størst vektlegging av relasjonell forståelse, mener Hiebert og Lefevre (1986) at det er tjenlig å balansere de to måtene å undervise og forstå matematikk på. Et overdrevent fokus på regnetekniske operasjoner vil kunne føre til at man mister det strukturelle og relasjonelle. Elevene slutter rett og slett å tenke. Herheim (2016) skriver at dagens matematikkundervisning innebærer at elevene bare ser «… tal og teikn, og prøver å hugsa kva som skal gjerast. Det vert «gjering» utan refleksjon» (s. 135).

Selv om det virker tjenlig å balansere de ulike formene for forståelse og kunnskap, hevder Hiebert & Lefevre (1986) at tradisjonell matematikkundervisning har større fokus på prosedyrekunnskap enn på begrepskunnskap. Innenfor tradisjonalistisk undervisning fremstår læreren som styrende og aktiv, mens elevene forholder seg som passive mottakere av kunnskap. Slike tilnærminger bidrar til bestemte oppfatninger av matematikkfaget. Lesh og Zawojewski (2007) skriver at mange, både lærere og elever, er av den oppfatning at matematikk er noe som skal foregå individuelt. Disse forestillingene stammer ofte fra erfaringer i klasserommet der matematikktimen er tiden elevene sitter stille på egne plasser og regner oppgaver (ibid.). Der slike oppfatninger dominerer vil undervisningen i liten grad legge til rette for utforsking, samarbeid og kommunikasjon. Elevene blir passive mottakere av etablert kunnskap og bidrar i liten grad til de matematiske samtalene.

Så hva er alternativene? Det synes å være mange meninger, men representanter for et relasjonelt, strukturelt og helhetlig syn vil kunne enes om at matematikk også bør handle om det som «ligger bak» tallene, formlene og algoritmene, og at fokus bør være på helhetlig forståelse, heller enn isolert pugging. Matematikk blir således ikke bare en søken etter, eller gjenkallelse av, det ene rette svaret, men dreier seg i større grad om tankevirksomheten som vil kunne føre til flere (ulike) løsninger på et problem. Elever bør, i tillegg til å kunne bruke algoritmer og manipulere tall, forstå hva de gjør og hvorfor de kan gjøre det. Smith og Stein (2011) argumenterer for en mer helhetlig matematisk forståelse ved å hevde at moderne samfunn trenger problemløsere som kan tenke, argumentere og begrunne. De skriver:

> *It is unrealistic to expect students to learn to grapple with the unstructured, messy challenges of today's world if they are forced to sit silently in rows, complete basic skill worksheets, and engage in teacher-led «discussions» that consist of literal, fact-based questions and answers* (Smith & Stein, 2011, s. 1).

Den virkelige verden består ikke av ferdigoppsatte regnestykker som kan løses med en standardisert algoritme. De virkelige problemene er komplekse og sammensatte, og krever at man samarbeider og kommuniserer for å finne gode løsninger.

Gjennom snart fem år på lærerutdanningen har forfatterne av denne masteroppgaven erfart et stort fokus på at elevene skal forstå matematikk. Likevel opplever vi at mange elever fortsatt betrakter matematikk som et puggefag. Et annet inntrykk er misnøyen flere elever uttrykker for matematikkfaget. Ifølge Franke, Kazemi og Battey (2007) begrunner mange elever som misliker matematikk disse oppfatningene med at matematikk handler om å passivt motta kunnskap fra læreren. Bakgrunnen for denne studien er derfor et underliggende ønske om at matematikk skal bli et fag elevene gleder seg til. Vi ønsker elever som er aktive, engasjerte, nysgjerrige og utforskende, og vi ønsker matematikkundervisning der kunnskap, mening og forståelse dannes i samspill mellom lærer og elever, og elevene seg imellom. Mulige steg i en slik retning kan innebære en balanse mellom begreps- og prosedyrekunnskap, økt fokus på elevenes egen matematiske tenkning, og et kritisk blikk på hvordan lærere følger opp elevers utsagn i klasseromssamtaler.

Ifølge Franke m.fl. (2007) er det lærerens ansvar å legge til rette for et miljø der elevene kan samtale og samhandle for å skape mening. Vår oppfatning er at lærere generelt har for lite fokus på hvordan kommunikasjon og samarbeid kan bidra til økt forståelse i matematikk. Likevel finnes det unntak. Bjerkeli (2017) viser blant annet hvordan en dyktig lærer tar i bruk individuelle tavler for at elevene skal få tid til å tenke og reflektere, slik at mulighetene for produktive klasseromssamtaler øker. Ved å observere en annen dyktig lærer fant Eliassen (2017) ut at læreren løftet frem elevenes tanker og ideer ved å be elevene forklare sine svar. Det trengs imidlertid mer forskning på området for å forstå hvordan matematikkundervisningen kan struktureres og gjennomføres slik at elevene får gode forutsetninger for å samtale i og om matematikk. Vår studie fokuserer derfor på hvordan to engasjerte lærere legger til rette for gode matematiske samtaler i klasserommet. Muligens vil vår studie kunne være et steg på veien for økt forståelse og mening i matematikk som skolefag, og påvirke elevenes holdninger til matematikk.

1.2 Formål og forskningsspørsmål

Formålet med studien er å beskrive hvilke grep to engasjerte matematikklærere gjør knyttet til de matematiske samtalene i klasserommet, og undersøke hvordan grepene styrker de matematiske samtalene. Grep oppfattes i denne studien som handlinger som kan påvirke noe positivt. Våre beskrivelser og funn kan danne grunnlag for naturalistisk generalisering som andre kan dra nytte av. Studien er først og fremst relevant for andre matematikklærere som ønsker å utvikle egen praksis, men resultatene kan også være nyttige for lærerutdanningen, for å avgjøre i hvilken grad fokus bør rettes mot læreres kunnskap om matematiske samtaler. Vi har formulert følgende forskningsspørsmål:

Hvilke grep gjør to engasjerte lærere på mellomtrinnet knyttet til de matematiske samtalene i klasserommet, og hvordan styrker grepene samtalene?

Forskningsspørsmålet er todelt, der første del fokuserer på *hvilke* grep lærerne tar knyttet til de matematiske samtalene. Andre del omhandler *hvordan* disse grepene bidrar til å styrke samtalene.

1.3 Oppgavens struktur

Oppgaven er delt inn i over- og underkapitler. Kapittel 2 inneholder oppgavens teorigrunnlag. Kapittel 3 omhandler metode, og vi beskriver metodiske og analytiske valg i forskningsprosessen. Kapittel 4 inneholder analyse, funn og diskusjon. I kapittel 5 drøftes våre funn opp mot hverandre, før vi i kapittel 6 besvarer vårt forskningsspørsmål.

2 Teori

Dette kapitlet omfatter studiens teorigrunnlag. I første delkapittel redegjør vi for dominerende kommunikasjonsmønstre i dagens klasserom og skildrer noen alternativer til disse. I andre delkapittel presenteres teori om utfordrende oppgaver. I tredje delkapittel ser vi på hva som menes med produktive matematiske samtaler og presenterer aktuelle samtalegrep lærere kan bruke på veien mot produktive samtaler. I fjerde delkapittel redegjør vi for hva som menes med utforskende læring i matematikk og ser nærmere på undervisningsorganisering og samtalestruktur.

2.1 Kommunikasjon i det matematiske klasserom

Ifølge Franke m.fl. (2007) opprettholder de fleste klasserom i USA et *IRE*-mønster (Initiation-Response-Evaluation).[1] Dette innebærer korte samtalesekvenser der læreren stiller et spørsmål, eleven svarer, og læreren evaluerer svaret (Franke m.fl., 2007; Johnsen-Høines & Alrø, 2010). Evalueringen retter fokus på om svaret er rett eller galt, mens belysning av elevens strategi eller idé nedtones. Ifølge Herbal-Eisenmann og Breyfogle (2005) er et slikt kommunikasjonsmønster med på å undergrave elevenes selvstendige tenkning. Ifølge Nystrand (1997) kan over to tredeler av kommunikasjonen i de fleste klasserom karakteriseres som *IRE*. *IRE*-mønsteret er også gjeldende i norske klasserom (Nosrati & Wæge, 2014).

Et begrep som kan sees i sammenheng med *IRE* er det Knuth og Peressini (2001) kaller *univocal communication*. Dette kommunikasjonsmønsteret fokuserer ifølge Imm og Stylianou (2012) på et tydelig budskap mellom avsender (lærer) og mottaker (elev). *Univocal communication* kan, ifølge Truxaw og DeFranco (2008), kobles mot *deduktive* klasserom der informasjon og kunnskap sendes i én retning, ofte fra læreren til én elev. I deduktive klasserom presenterer læreren først regler eller prosedyrer, for så å la elevene bruke prosedyrene for å finne svaret på problemet eller oppgaven (ibid.). *Univocal communication* og *deduktive* klasserom preges dermed av enveiskommunikasjon der lærerens stemme og autoritet dominerer, og der presentasjon av prosedyrer kommer før løsning av problemer eller

[1] Kalles av noen for *IRF* (Initiation-Response-Feedback), se for eksempel Herbal-Eisenmann og Breyfogle (2005) for gode eksempler.

oppgaver i tid. Franke m.fl. (2007) skildrer *univocal communication* som det vanligste kommunikasjonsmønsteret i dagens klasserom.

Et annet aspekt ved matematisk kommunikasjon er hvordan læreren følger opp elevenes utsagn. En vanlig måte dette gjøres på i dagens klasserom er ved bruk av *funneling* (Herbal-Eisenmann & Breyfogle, 2005). Wood (1998) skriver at *funneling* dreier seg om at læreren stiller en serie spørsmål som leder elevene inn på lærerens foretrukne løsningsstrategier og svar. Læreren er i slike situasjoner en slags «ekspert med definisjonsmakt» der løsningsstrategien er forhåndsbestemt av lærerens foretrukne måte å løse oppgaven på. Med ensidig bruk av *funneling* innskrenkes derfor elevenes muligheter for selvstendig tenkning. Wood (1998) skriver: «… [with funneling] the student needs to know only how to respond to the surface linguistic patterns to derive the correct answer» (s. 172). Elevenes egen tenkning blir dermed plassert i andre rekke. Drageset (2014) skriver at *funneling* kan bidra til å redusere kompleksiteten i oppgaver, noe som fører til at elevene i større grad gjetter hva læreren er ute etter, i stedet for å tenke selv. *Funneling* gjør på denne måten lærerens tenkning eksplisitt, mens elevens ideer forblir tause (Herbal-Eisenmann & Breyfogle, 2005).

Til sammen representerer *IRE*, *univocal communication*, *deduktive* klasserom og *funneling* dominerende kommunikasjonsmønstre der læreren gjør mesteparten av arbeidet og der elevene fungerer som passive mottakere av kunnskap. Særlig illustreres dette ved lærerens bruk av *funneling*, som bidrar til å redusere kompleksiteten i oppgavene det jobbes med. Selv om dette naturligvis kan påvirke elevenes læring negativt, kan slik reduksjon av kompleksitet i noen tilfeller også være produktivt. Ifølge Newman (1990) er *appropriation* en prosess der en nybegynner skal lære noe helt nytt og ukjent. Det kan for eksempel dreie seg om innlæring av en subtraksjonsalgoritme eller om å tegne et bilde i ettpunktsperspektiv for første gang. I slike tilfeller må nybegynneren ikke bare lære de spesifikke prosedyrene, men også den overordnede strukturen og hensikten med prosedyren (ibid.). I skolesammenheng kan *appropriation* dreie seg om at en elev prøver noe, får tilbakemelding fra læreren, og justerer sitt neste forsøk basert på interaksjonen med læreren. Prosessen pågår over tid, og eleven tilpasser gradvis sine forsøk til lærerens (eller omgivelsenes) forventninger (Newman, 1990). Siden eleven endrer sine forsøk ut fra lærerens forventninger, kan slike isolerte prosesser med *appropriation* sees i sammenheng med for eksempel *IRE* eller *funneling*. Likevel vil *appropriation* ifølge Drageset (2014) kunne være både nyttig og nødvendig, for eksempel ved at lærerens gjentatte spørsmål kan bidra til at elevene opplever en forventning om at løsningsstrategier og svar skal forklares.

Også Schoenfeld (1992) viser hvordan lærerens gjentakende spørsmål kan føre til at elever i større grad overvåker egen tenkning i oppgave- og problemløsningsprosesser. I Schoenfelds problemløsningsøkter spurte han sine studenter spørsmål som «hva gjør du?», «hvorfor gjør du det?» og «hvordan hjelper det deg?». I begynnelsen kunne ikke studentene besvare spørsmålene, noe som gjorde dem ukomfortable. Ved at han fortsatte å stille spørsmålene, til tross for studentenes ubehag ved å ikke kunne svare, begynte studentene etter hvert å forsvare seg ved å diskutere seg frem til svar før spørsmålene ble stilt neste gang. Ved slutten av semesteret hadde studentene innarbeidet vaner der de tenkte over disse spørsmålene i alle nye problemløsningssituasjoner (Schoenfeld, 1992).

Det finnes alternativer til de nevnte kommunikasjonsmønstrene i dagens klasserom. *Dialogic communication* er motparten til *univocal communication*, og innebærer kommunikasjon mellom to eller flere likeverdige parter der ulike ideer og løsningsstrategier verdsettes (Knuth & Peressini, 2001). Fokuset i *dialogic communication* er å utveksle meninger, tanker og strategier (Truxaw & DeFranco, 2008). Lærerens oppgave blir dermed å løfte frem elevenes tenkemåter, heller enn å forelese ferdig bearbeidet kunnskap. *Dialogic communication* kan ifølge Truxaw og DeFranco (2008) kobles til *induktive* klasserom der dialog brukes for å konstruere og uttrykke matematiske tanker og ideer. I *induktive* klasserom presenterer læreren oppgaven eller problemet først, og lar deretter elevene selv utforske passende ideer og løsningsstrategier (ibid). *Dialogic communication* er ifølge Truxaw og DeFranco (2008) sterkere knyttet til det Hiebert og Lefevre (1986) kaller *conceptual knowledge*, sammenlignet med *univocal communication*.

Wood (1998) skildrer *focusing* som et alternativ til *funneling*. *Focusing* innebærer at læreren stiller veiledende spørsmål som fokuserer på strategiene og svarene eleven selv formulerer (Wood, 1998). *Focusing* handler også om å hjelpe elevene å artikulere egne løsningsstrategier, samtidig som den enkelte elevs matematiske tenkning gjøres eksplisitt og forståelig for læreren og resten av klassen (ibid.). En slik artikulering kan fungere som en katalysator for læring (Smith & Stein, 2011). Økt innslag av *focusing* kan dermed føre til mer *dialogic communication* der elevenes egen autonomi vektlegges, og der alle deltakernes ideer og strategier får en mer likeverdig status.

Beskrivelsene av de ulike kommunikasjonsmønstrene, klasseromstypene og måtene å følge opp elevers utsagn på, indikerer at det er viktig at lærere tenker på hvilke spørsmål, og mønstre av spørsmål, som stilles i klasserommet. Selv om Herbal-Eisenmann og Breyfogle (2005) argumenterer for at *focusing* er å foretrekke fremfor *funneling*, og at *dialogic* *communication* ovenfor fremstilles som et ønskelig alternativ til *univocal communication*, presiserer Knuth og Peressini (2001) at all matematisk klasseromsdiskurs til en viss grad er både *univocal* og *dialogic*. Som en konsekvens skildrer både Knuth og Peressini (2001) og Truxaw og DeFranco (2008) det faktiske kommunikasjonsmønsteret som et kontinuum som kan ha større eller mindre innslag av kjennetegnene til *univocal* og *dialogic communication*. Dette kan tyde på balansen mellom flere mønstre er viktig, og at ulike måter å samtale på kan tjene til ulike formål. Overvekten i dagens matematiske klasserom synes likevel å være mønstre som *IRE*, *univocal communication* og *funneling*.

2.2 Utfordrende oppgaver og deres struktur

Ifølge Smith og Stein (2011) foregår gode undervisningsøkter med basis i utfordrende oppgaver. Utfordrende oppgaver er ifølge Franke m.fl. (2007) oppgaver eller problemer som kan løses på flere ulike måter og som kan involvere flere representasjoner. Ponte og Quaresma (2016) argumenterer for at oppgaver som krever at elevene forklarer, begrunner og tolker svarene og strategiene sine, er utfordrende siden elevene i de fleste tilfeller ikke besitter strategier for å løse dem. Elevene må derfor tenke.

Det er flere fordeler med å bruke utfordrende oppgaver i matematikktimene. Sullivan, Knott og Yang (2015) påpeker at oppgaver som kan løses på flere måter kan bidra til økt engasjement og motivasjon, siden elevene utvikler og bruker strategier de selv forstår. Stillman m.fl. (2009) skriver at når elever løser utfordrende oppgaver, befinner de seg i utkanten av sin komfortsone. Slike utfordringer kan lære elevene at usikkerhet er en viktig faktor for å løse virkelige problemer, ettersom virkeligheten ofte er komplisert og ikke uten videre lar seg redusere til standardiserte matematiske algoritmer (ibid.). Arbeid med utfordrende oppgaver kan dermed åpne for at elevene utvikler dypere forståelse for matematiske begreper og sammenhenger, det Hiebert og Lefevre (1986) kaller begrepskunnskap, ved å berike det Stillman m.fl. (2009) kaller elevenes begrepsbilde (*concept image*).

At utfordrende oppgaver kan løses på flere ulike måter forutsetter at de har en *åpen struktur*. Åpne oppgaver kan beskrives med begrepet Sullivan m.fl. (2015) kaller *low floor - high ceiling*. *Low floor* indikerer en lavere inngangsterskel, og gjør at elevene lettere kommer i gang med oppgaven, for eksempel ved at vanskelighetsgraden ikke er for høy. *High ceiling* innebærer at oppgaven åpner for bruk av løsningsmetoder på et høyere matematisk eller abstrakt nivå, og gjør at oppgaven får en rik dybde hvor elevene kan drive utforskning av strategier og metoder (ibid). Oppgaver som oppfyller disse kriteriene vil kunne bidra til at elever med ulik grad av matematisk kompetanse kan jobbe med samme oppgave og bruke ulike strategier. Hashimoto og Becker (1999) definerer matematiske oppgavers åpenhet mer spesifikt ved å presentere tre kateogier: 1) *open-middled*, som er oppgaver som åpner for flere ulike fremgangsmåter; 2) *open-started*, som er oppgaver med åpne formuleringer og som åpner for at elevene selv kan formulere problemet; og 3) *open-ended*, som er oppgaver som har flere mulige løsninger. Silver (1997) viser at bruk av *ill-structured problems*, det vil si ustrukturerte matematiske problemer uten et gitt mål eller rett svar, blant annet kan bidra til utvikling av elevenes matematiske kreativitet og problemløsningskompetanse. *Ill-structured problems* representerer en særlig åpen form for matematiske oppgaver, som står i sterk kontrast til det Ponte og Quaresma (2016) kaller *exercise*, som arter seg som ferdigoppsatte regnestykker elevene skal løse med kjente algoritmer.

Smith og Stein (1998) viser at oppgaver kan kategoriseres ut fra hvor kognitivt utfordrende de er, og benytter en todeling som skiller mellom oppgaver som stiller 1) lavere kognitive krav (*lower-level demands*) og 2) høyere kognitive krav (*higher-level demands*). Oppgaver som stiller lavere kognitive krav kan være oppgaver som fokuserer på a) memorering (*memorization*) eller b) prosedyrer uten koblinger (*procedures without connections*), mens oppgaver som stiller høyere kognitive krav kan være c) prosedyrer med koblinger (*procedures with connections*) eller d) gjøre matematikk (*doing mathematics*).

Memoreringsoppgaver kjennetegnes blant annet ved at elevene kan løse dem ved å reprodusere svar eller tidligere lærte regler, fakta eller prosedyrer. Elevene kan derfor løse oppgavene ved å benytte seg av det Lithner (2006) kaller *imitative reasoning*, enten ved å gjenkalle et svar (*memorised reasoning*), eller ved å gjenkalle en prosedyre (*algorithmic reasoning*). Memoreringsoppgaver kan ifølge Smith og Stein (1998) ikke tolkes på flere måter, og oppgavene kan i liten grad kobles til underliggende matematiske ideer. Denne typen oppgaver stiller derfor lavere kognitive krav til elevene.

Oppgaver som Smith og Stein (1998) kaller prosedyrer uten koblinger kan sees i sammenheng med det Ponte og Quaresma (2016) kaller *exercise*, som innebærer at elevene får presentert en algoritme fra læreren, og deretter trener på denne algoritmen ved å regne gjennom flere (like) oppgaver. Prosedyrer uten koblinger kjennetegnes nettopp ved å ikke inneholde koblinger til underliggende matematiske ideer, og arter seg derfor som mengdetrening, som i større grad ensidig fordrer det Hiebert og Lefevre (1986) kaller prosedyrekunnskap. Så lenge elevene kan algoritmen som etterspørres, enten ved at algoritmen spesifikt nevnes i oppgaven eller ved at elevene har fått presentert fremgangsmåten fra læreren, vil de kunne løse oppgaven (Smith & Stein, 1998). Prosedyrer uten koblinger stiller derfor lavere kognitive krav til elevene (ibid.).

Prosedyrer med koblinger er ifølge Smith og Stein (1998) oppgaver som i større grad enn prosedyrer uten koblinger fokuserer elevenes oppmerksomhet på å forstå prosedyrene, og på å utvikle dypere matematisk forståelse. De skriver: «Although general procedyres may be followed, they cannot be followed mindlessly» (Smith & Stein, 1998, s. 348). Slike oppgaver kan vanligvis representeres og løses på ulike måter, noe som legger til rette for at elevene kan se koblinger mellom representasjonene og løsningsmetodene og dermed skape mening (ibid.). Kazemi og Hintz (2014) vektlegger at elever må gis muligheten til å se på seg selv som *sense makers*, som innebærer at elevene får betrakte seg selv og sitt matematiske arbeid som meningsfylt og viktig. Elevers søken etter mening er viktig for utvikling av det Hiebert og Lefevre (1986) kaller *conceptual knowlegde,* som kjennetegnes av et nettverk av forståelse og kunnskap. Ved at oppgavetypen prosedyrer med koblinger bidrar til meningsskaping, fokuserer på elevenes forståelse og krever at elevene tenker, stiller slike oppgaver høyere kognitive krav (Smith & Stein, 1998).

Doing mathematics foregår ifølge Smith og Stein (1998) med bakgrunn i komplekse oppgaver som ikke fokuserer på innøvde eller forutsigbare måter å løse dem på. Oppgaver som ikke fokuserer på en tidligere lært strategi, vil i større grad enn de tidligere nevnte oppgavetypene kunne inneha det Sullivan m.fl. (2015) kaller for *low floor - high ceiling*, ved at oppgavene ikke låses til én fremgangsmåte. De vil også kunne være åpne på én av de tre områdene Hashimoto og Becker (1999) bruker for å kategorisere åpenhet. Å gjøre matematikk handler i stor grad om å utforske og prøve å forstå de underliggende konseptene, prosessene og forholdene i oppgaven (Smith & Stein, 1998). Elevene må derfor i slike settinger være i stand til å overvåke seg selv og sine kognitive prosesser. Oppgaver som tar sikte på at elevene skal gjøre matematikk stiller ifølge Smith og Stein (1998) høyere kognitive krav til elevene. Oppgavenes økte grad av uforutsigbarhet vil også kunne føre til at elevene befinner seg i det Stillman m.fl. (2009) kaller utkanten av komfortsonen.

2.2.1 Lærerens rolle

Stein og Smith (1998) viser at oppgaver går gjennom tre faser. Første fase innebærer oppgavens originale formulering, for eksempel i lærebøker eller lærerveiledninger. Andre fase handler om hvordan lærere presenterer oppgaven for elevene. Tredje fase handler om hvordan elevene faktisk arbeider med oppgaven. Stein og Smith (1998) hevder at oppgaver kan omformes underveis i disse fasene. For eksempel kan lærerens presentasjon av oppgaven innebære forenkling ved at elevene gis informasjon som i utgangspunktet ikke forelå, noe som kan påvirke hvordan oppgaven implementeres i tredje fase. Stein og Smith (1998) viser til et tidligere forskningsprosjekt (QUASAR) og skriver:

> *High-level tasks were sometimes found to be implemented in such a way that students thought and reasoned in complex and meaningful ways. Sometimes, however, tasks that were set up to place high levels of cognitive demand on students' thinking changed dramatically in terms of how students actually went about working on them* (Stein & Smith, 1998, s. 270).

Sitatet viser at oppgaver ikke alltid går uforandret gjennom de tre fasene. Lærerens måte å presentere oppgavene for elevene, og hvordan elevene veiledes i arbeidet med dem, har derfor betydning for oppgavens kognitive krav. Oppgaver som i utgangspunktet (fase 1) fordrer lavere kognitive krav, kan påvirkes til å stille høyere kognitive krav i implementeringen (fase 3), for eksempel ved at læreren i fase 2 ber elevene forklare hvorfor prosedyren fungerer for det gitte problemet. I arbeidet med oppgaver som i utgangspunktet stiller høyere kognitive krav, bør læreren være bevisst sin presentasjon og veiledning, slik at oppgaven ikke omformes til å stille lavere kognitive krav, for eksempel ved å legge til informasjon eller hinte om passende løsningsstrategier.

2.3 Produktive matematiske samtaler

Ifølge Truxaw og DeFranco (2008) er matematiske samtalers kvalitet og form avgjørende for om elevene utvikler helhetlige matematikkforståelse. De poengterer at prat ikke er ensbetydende med forståelse: «… the mere presence of talk does not ensure that understanding follows» (Truxaw & DeFranco, 2008, s. 489). Franke m.fl. (2007) skriver også at det ikke er nok å bare prate om matematikk, og påpeker viktigheten med å fremheve elevenes tenkning og gjøre den eksplisitt. I samtalene er det særlig viktig at elevene selv får tenke, formulere og forklare for å skape mening (ibid.). Boaler (2009) skriver at den beste måten for å sjekke om elevene forstår, er å be dem forklare. Chapin, O'Connor og Anderson (2009) vektlegger også forståelse og meningsskaping. De skriver: «The source of knowledge, of creating new understanding, lies within the student, and making sense is the key» (Chapin m.fl., 2009, s. 18). Dette fokuset aktualiserer læreres arbeid med å legge til rette for at elevene får prate på en måte som gjør at detaljer i deres tenkning blir synlig for andre, samtidig som elevene får forklare. Spesielt virker forklaringer å være avgjørende for produktiviteten i matematiske samtaler.

Peressini og Knuth (2000) hevder at produktive matematiske samtaler innebærer at elevene får presentere og forklare sitt arbeid for resten av klassen. Forklaringer kan forekomme på ulike matematiske nivåer, men en forklaring forutsetter ifølge Franke m.fl. (2007) alltid mer forståelse for matematikken, sammenlignet med en gjengivelse av hvilke tall man plasserte inn i en formel eller algoritme. Ved at elever får forklare detaljene i egen matematisk tenkning, blir de ifølge Kazemi og Hintz (2014) også interesserte i detaljer i andres matematiske ideer. Produktive matematiske samtaler kan på denne måten gi en slags selvforsterkende effekt som påvirker elevenes motivasjon for å forstå og skape mening i matematikk.

Fokuset på forklaringer kan bidra til utvikling av den helhetlige matematiske kompetansen elevene skal tilegne seg. Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) vektlegger *adaptive reasoning* som én av fem hovedkomponenter i matematisk kompetanse. Delkompetansen handler blant annet om å være i stand til å reflektere, forklare og begrunne egne og andres matematiske utsagn (ibid.). Kilpatrick m.fl. (2001) har en bred forståelse av *adaptive reasoning*, som de mener strekker seg fra deduktiv bevisførsel, til mer intuitive forklaringsformer. Kilpatrick m.fl. (2001) hevder derfor at barn så unge som 4-5 år ofte kan arbeide med forklaringer ved å beskrive hva de har gjort eller hva de har tenkt. I Niss og Jensen (2002) sin beskrivelse av matematisk kompetanse er *kommunikasjonskompetanse* én av totalt åtte kompetanser elever bør besitte for å forstå matematikk, og innebærer å være i stand til å uttrykke seg om matematiske forhold på ulike måter og på forskjellige nivåer. Å begrunne vil innebære å uttrykke seg på et høyere nivå enn for eksempel å beskrive (ibid.). Niss og Jensen (2002) vektlegger også *tankegangskompetanse*, som blant annet omhandler at elevene skal kunne benytte matematiske begreper i sitt språk. En annen aktuell kompetanse hos Niss og Jensen (2002) er *resonnementkompetanse*, som handler om at elevene skal være i stand til å gi, samt følge matematiske resonnement.

For at en matematisk samtale skal være produktiv bør den, i tillegg til å fordre forklaringer, knyttes til matematiske ideer eller sammenhenger (Franke m.fl., 2007). Dette kan være krevende for læreren, siden det er flere faktorer å ta hensyn til. Kazemi og Hintz (2014) skriver: «Math discussions aren’t just about show-and-tell: sit-down, clap, clap, clap.

Knowing what to do with students' ideas and teaching children how to meaningfully participate in discussions can be a lot more dounting» (s. 1). Læreren må vite hvordan man planlegger produktive matematiske samtaler, og samtidig være i stand til å følge opp og styre samtalene i ønsket retning. Smith og Stein (2011) påpeker at det er viktig at lærere finner en balanse mellom *lecture* (forelesning) og *show-and-tell*. De skriver at hvis ikke læreren planlegger hvordan samtalene skal foregå, er det på den ene siden fare for at samtalene ender i et forelesningsmønster der læreren forteller elevene om sin foretrukne fremgangsmåte for å løse oppgaven, såkalt *funneling*. På den andre siden kan samtalene ende opp i et mønster med parallellfortellinger der deltakerne ikke utforsker hverandres ideer, strategier og svar fullt ut (ibid.). Det er da fare for at samtalene blir overfladiske.

2.3.1 Samtalegrep og handlinger for å påvirke kommunikasjonen

Michaels og O'Connor (2015) beskriver *talk moves* som «… simple families of conversational moves intended to accomplish local goals» (s. 334). Michaels og O'Connor (2015) vektlegger at ulike samtalegrep kan brukes til å oppnå ulike mål, og argumenterer for at innholdet i dem er viktig. En vanlig forskjell i innhold er om det stilles åpnere spørsmål der læreren kanskje ikke selv vet svaret, eller om det stilles spørsmål som er mer lukket og der læreren er ute etter ett rett svar. Lærere bør ifølge Michaels og O'Connor (2015) i større grad stille de åpne spørsmålene som tillater elevene å finne egne løsningsstrategier og svar.

Forskningslitteraturen inneholder et bredt utvalg samtalegrep. For eksempel har Kazemi og Hintz (2014) definert syv samtalegrep som læreren kan foreta for å styrke produktiviteten i de matematiske samtalene: 1) *revoicing*, 2) *reasoning*, 3) *repeating*, 4) *adding* on, 5) *revise*, 6) *wait time* og 7) *turn-and-talk*. Chapin m.fl. (2009) bruker en lignende inndeling, men utelater *revise* og *turn-and-talk* i sin fremstilling av fem produktive samtalegrep. Chapin m.fl. (2009) fremhever likevel *turn-and-talk* som et strukturelt grep i undervisningen.

Revoicing innebærer at læreren gjentar det en elev eller en gruppe elever har sagt, og brukes for å oppklare, forsterke eller fremheve en idé eller strategi (Kazemi & Hintz, 2014). Også Franke m.fl. (2007) skildrer *revoicing* som et viktig samtalegrep der læreren kan formulere det eleven har sagt med et språk som er matematisk korrekt, noe som kan støtte utviklingen av elevens egne ideer og gjøre at elevene ser på seg selv som viktige bidragsytere til matematikken. Ved at læreren gjentar elevens eksakte utsagn eller omformulerer det (men likevel gjentar essensen), kan det Yackel og Cobb (1996) kaller for sosiale og sosiomatematiske normer påvirkes. Eksempler på sosiale normer er å ikke gi opp, å akseptere feil svar eller delvise ideer, eller en generell kollektiv forventning om at man skal begrunne og forklare sine løsninger og strategier (Yackel & Cobb, 1996). Sosiomatematiske normer er mer spesifikke enn de sosiale, og dreier seg for eksempel om hva som er en akseptabel matematisk forklaring eller normative forståelser av hva som er forskjellig, sofistikert, effektiv eller elegant matematikk (ibid.). At læreren gjentar eller omformulerer en elevs delvise strategi eller svar (*revoicing*) kan signalisere at delvise ideer tolereres (sosial norm). Lærerens gjentakelse av to elevers ulike forklaringer (*revoicing*) kan signalisere at fremgangsmåtene var forskjellige (påvirkning av sosiomatematisk norm).

Reasoning er et samtalegrep som innebærer at læreren ber en elev forklare sin tenkning eller fremgangsmåte (Kazemi & Hintz, 2014). Smith og Stein (2011) fremhever viktigheten av å få elevene til å forklare sin tenkning, og vektlegger forklaringer som noe av det viktigste både i oppgaver og i matematiske samtaler. Ifølge Smith og Stein (2011) vil en oppgave som ber elevene forklare, alltid være på et høyere kognitivt nivå enn en oppgave som ikke gjør det. Chapin m.fl. (2009) hevder at noe av det viktigste læreren kan gjøre er å trene elevene i å forklare. Som allerede presisert er forklaringer også en viktig del av elevenes helhetlige matematiske kompetanse. *Reasoning* vil i likhet med *revoicing* kunne påvirke normene i klasserommet. Lesh og Zawojewski (2007) hevder at dersom elevene stadig blir bedt om å forklare hvordan de har tenkt eller hvorfor svaret er rett, vil elevene etter hvert forvente at forklaringer også kommer fra andre deltakere (sosial norm). Stadige detaljspørsmål underveis i elevers forklaringer vil kunne rette fokus mot hva klassen ser på som en akseptabel matematisk forklaring (sosiomatematisk norm). Prosessen Newman (1990) kaller *appropriation* kan også beskrive slike fenomener. Ved at en elev (nybegynneren) gjentatte ganger blir spurt om å forklare hva han har tenkt, vil han etter hvert justere egen tankegang på bakgrunn av interaksjonen med læreren (eksperten). Når læreren neste gang ber eleven forklare, så er eleven mer forberedt og forklaringen vil stadig kunne forbedres.

Repeating presenteres i litteraturen som et samtalegrep som handler om at en elev blir bedt om å gjenta det en annen elev har sagt (Kazemi & Hintz, 2014). *Repeating* har samme virkning som *revoicing*, nemlig fremheving av elevens utsagn. Ved bruk av *repeating* gjentas imidlertid forklaringen av en annen elev, og ikke av læreren (ibid.). Samtalegrepet *adding on* handler om å invitere flere elever inn i samtalen ved å spørre om noen ønsker å legge til noe. Elevene kan dermed bygge på hverandres forklaringer og erfare at kollektiv meningsskaping kan føre til å drive løsningsprosesser fremover. Samtalegrepet Kazemi og Hintz (2014) kaller *wait time* innebærer å gi elevene nok tid til å formulere et svar eller en forklaring, og er ifølge

Michaels og O'Connor (2015) et av de samtalegrepene som er vanskeligst for lærere å bruke konsekvent. En av grunnene til at *wait time* er vanskelig å implementere for lærere, kan være at *IRE* er for dominerende og at normene foreligger ut fra dette mønsteret. *Revise* er et annet samtalegrep, og handler om at læreren spør om noen av elevene har endret mening eller svar i løpet av samtalen (Kazemi & Hintz, 2014). Flere av de sistnevnte samtalegrepene vil kunne påvirke normene i klasserommet. Eksempelvis kan *wait time* føre til en sosial norm om at det er greit å bruke tid til å tenke seg om, og bruk av *revise* kan føre til en sosial norm om at det er greit å ha et feil svar eller en feil strategi, for så å endre mening når forståelsen har endret seg. *Turn-and-talk* presenteres av Kazemi og Hintz (2014) som et samtalegrep som innebærer at elevene blir bedt om å samtale med sidemannen. *Turn-and-talk* er identisk med det Chapin m.fl. (2009) kaller for parsamtaler som strekker seg over noen få minutter.

Drageset (2014) presenterer et rammeverk med 13 kategorier som fokuserer på handlinger lærere gjør som påvirker kommunikasjonen i klasserommet. Disse er: 1) *correcting actions*, 2) *advising a new strategy*, 3) *put aside*, 4) *demonstration*, 5) *simplification*, 6) *closed progress details*, 7) *open progress details*, 8) *enlighten details*, 9) *justification*, 10) *apply to similar problems*, 11) *request assessment from other students*, 12) *recap* og 13) *notice*. Kategoriene er videre plassert i overkategoriene *redirecting actions* (omdirigerende), *progressing actions* (fremdrivende) og *focusing actions* (fokuserende) ut fra om handlingene tar sikte på å endre elevens strategi, drive samtalen fremover, eller videreutvikle eller fremheve elevens strategi eller løsningsmetode (ibid.). Vi redegjør nærmere for noen av kategoriene, og ser disse opp mot samtalegrep. I den videre redegjørelsen er kategoriene valgt primært fra hovedkategorien *focusing actions*, fordi disse er handlinger rettet mot elevenes tanker. To kategorier, *open progress details og closed progress details*, er tatt med fra *progressing actions* og handler om hvordan samtalen kan drives fremover.

Kategorien *justification* handler ifølge Drageset (2014) om at læreren ber om grundige forklaringer. Dette kan være spørsmål om hvorfor svaret eller løsningsmetoden er rett. Ifølge Drageset (2014) handler *justification* ikke bare om hva elevens svar er, og hva han har gjort for å komme frem til det. Læreren ber også elevene forklare hvorfor de har kommet frem til det aktuelle svaret, og hvorfor løsningsstrategien fungerte for å finne det. Denne grundigheten i lærerens ønske om forklaring gjør at vi oppfatter *justification* som en grundig form for det Kazemi og Hintz (2014) kaller *reasoning*.

Ifølge Drageset (2014) handler kategorien *enlighten details* om at læreren stopper opp og, ved bruk av lukkede spørsmål, retter fokuset mot detaljer i elevens utsagn eller forklaring. Eleven må forklare hva noe betyr eller hvorfor noe skjer, noe som bidrar til innsikt i elevens tenkemåte, eller gjør elevens forklaring mer tilgjengelig for de andre deltakerne. *Enlighten details* kan også fungere som en måte å be om forklaring på. Slik vi tolker Drageset (2014) er forskjellen mellom *justification* og *enlighten details* strukturen på spørsmålene. *Justification* kan være spørsmål som «hvorfor det?» eller «hvordan kom du frem til det?», mens *enlighten details* kan være spørsmål som «og da fikk du?» eller «hva betyr tallet 8?». Å fremheve detaljer i elevenes forklaringer kan ifølge Franke m.fl. (2007) bidra til at lærere får økt innsikt i hvordan elever skaper mening i matematikken det prates om. Denne innsikten kan fortelle lærere noe om hvordan elevene skaper mening generelt i matematikk eller innenfor spesifikke emner (ibid.).

Drageset (2014) skriver at *recap* handler om å trekke sammen informasjon og peke på hva som er viktig i elevens utsagn, mens *notice* handler om å gjenta viktige elementer fra dialogen og, i noen tilfeller, legge til informasjon for å gjøre ideen tydeligere (ibid.). Slik gjentakelse av elevenes utsagn, og i noen tilfeller omformulering av det, er et kjennetegn ved det Franke m.fl. (2007) kaller *revoicing*. Både *recap* og *notice* fungerer for å fremheve elevens utsagn og vise elevene hva som er viktig i et resonnement, og kan sees på som spesifikke former for *revoicing*.

Drageset (2014) presenterer kategoriene *open progress details* og *closed progress details* som to måter læreren kan drive samtalen fremover på. *Open progress details* er å stille åpne eller delvis åpne spørsmål som gjerne har flere mulige svar. Ifølge Michaels og O'Connor (2015) bør lærere stille mindre lukkede spørsmål, til fordel for spørsmål med åpnere utforming. Spørsmålene som stilles i *open progress details* kan dreie seg om hvordan man kan tenke, løse eller generalisere mønstre (Drageset, 2014). Et eksempel er «hvordan kan vi finne løsningen på dette?» (ibid.). Kategorien *closed progress details* handler om at læreren stopper opp og stiller elevene lukkede spørsmål til det læreren selv er i gang med å formidle (ibid.).

Både samtalegrepene og kodene fra rammeverket til Drageset (2014) kan sees på som grep lærere kan ta i undervisningsøktene for å påvirke kommunikasjonen. Grepene er på denne måten situasjonsavhengige, men kan til en viss grad planlegges og innøves. For eksempel kan læreren bestemme seg for at han eller hun skal fokusere på å be elevene forklare (*reasoning*/*justification*).

2.4 Utforskende læring i matematikk

Utforskende[2] læring handler, i motsetning til tradisjonell matematikkundervisning, om å ta utgangspunkt i ideene elevene utvikler i løpet av matematikktimen (Sherin, 2002). Utforskende læring innebærer at *IRE*-mønsteret brytes ved «… at noen (eller alle) deltagere går inn i en undersøkende, utforskende samtale der de ønsker å finne ut av noe de ikke vet svaret på» (Johnsen-Høines & Alrø, 2010, s. 80). Samtalestrukturen blir mindre forutsigbar, eksempelvis ved at læreren gir elevene lenger tid til å tenke eller ved at elevene ytrer seg mer spørrende, prøvende og dvelende (ibid.). En utforskende tilnærming innebærer også at læreren i større grad tar hensyn til elevenes strategier og svar. Elevene blir dermed kildene til kunnskap. Chapin m.fl. (2009) mener at dette gjør samtaler med fokus på elevenes tenkning godt egnet i undervisningen. I en utforskende tilnærming gjøres det kontinuerlige vurderinger for hvilke ideer, svar og løsningsstrategier som skal følges opp, og hvordan dette kan gjøres på best mulig måte (Smith & Stein, 2011). Utforskende læring legger derfor til rette for matematiske samtaler der elevene får presentere hvordan de selv har tenkt, hvilke løsningsmetoder de foretrekker, og åpner for at elevene kan forklare sine matematiske tanker, strategier og svar, noe som er en viktig del av elevenes helhetlige matematiske kompetanse.

2.4.1 Undervisningsorganisering og samtalestruktur

For å kunne gjennomføre utforskende læring i matematikk, må undervisningen organiseres slik at elevene får utforske. Ifølge Franke m.fl. (2007) er det læreren som er ansvarlig for å legge til rette for et miljø der elevene kan samtale og samhandle for å skape mening. Slik tilrettelegging kan foregå på flere måter. Blant annet viser Chapin m.fl. (2009) at undervisningen kan deles inn i ulike formater, der hvert format har sine «rules for talk» (s. 16). Reglene trekkes sjelden frem, men elevene kan dem uansett (ibid.). Disse reglene kan tolkes som det Yackel og Cobb (1996) kaller sosiale normer. Det finnes ifølge Chapin m.fl. (2009) flere ulike formater, for eksempel er forelesning et format, det samme er *IRE*. Chapin

[2] Utforskende og undersøkende matematikklæring har i internasjonal forskningslitteratur flere ulike navn. Sherin (2002) bruker fellesbegrepet *adaptive teaching*, og viser blant annet at *inquiry* (Ball, 1993), *discovery* (Hammer, 1997) og *improvisation* (Heaton, 2000) er begreper som viser til en utforskende eller undersøkende tilnærming til læring i matematikk (s. 122).

m.fl. (2009) skildrer tre produktive formater: parsamtaler, samtaler i små grupper og helklassediskusjoner.

Parsamtaler skildres som et samtaleformat som læreren kan benytte seg av for å drive helklassediskusjonen fremover, og varer ifølge Chapin m.fl. (2009) i 1-2 minutter. Samtaler i små grupper involverer 3-6 elever og strekker seg over en lengre tidsperiode enn parsamtalene. En fordel med små grupper er at det kan samtales om flere ulike matematiske temaer eller ideer samtidig (ibid.). Utforsking i små grupper gir elevene mulighet til å høre andres løsninger og strategier, og gir læreren mulighet til å veilede elevene i arbeidet (Peressini & Knuth, 2000). Helklassediskusjoner skildres av Chapin m.fl. (2009) som det viktigste samtaleformatet siden fokuset er deling av elevenes tanker, ideer og strategier, og at elevene kan bygge på hverandres tenkning. I tillegg presiserer Chapin m.fl. (2009) at helklassediskusjoner gir elevene mulighet til å delta i en vedvarende prosess med forklaringer og begrunnelser: «These whole class discussions give the students the chance to engage in sustained reasoning» (Chapin m.fl., 2009, s. 17). Alt i alt skildres helklassediskusjoner der elevene presenterer, forklarer og bygger på hverandre som det ultimate målet med de to øvrige samtaleformatene spesielt, og med matematikkundervisningen generelt (ibid.).

Smith og Stein (2011) presenterer et rammeverk bestående av fem praksiser for planlegging og gjennomføring av produktive matematiske samtaler med utgangspunkt i elevenes egen tenkning. Praksisene er 1) *anticipating*, 2) *monitoring*, 3) *selecting*, 4) *sequencing* og 5) *connecting*. Hver praksis bygger på den foregående, og hensikten er å gi lærere mer kontroll over samtalene. Slik kan detaljert planlegging føre til mindre improvisasjon, og gjøre samtalene mer produktive (ibid.).

Anticipating dreier seg om å forutsi hvordan elevene vil respondere på oppgavene læreren planlegger å gi (Smith & Stein, 2011). Dette skjer i hovedsak før undervisningsøkten starter. I tillegg til å omhandle vanskegrad og relevans, innebærer denne praksisen en bevisstgjøring av hvordan elevene vil kunne tolke oppgavene, og hvilke strategier de vil kunne komme til å bruke. *Monitoring* handler om å overvåke elevenes respons på oppgavene. Dette skjer ofte i samtaleformatene Chapin m.fl. (2009) kaller parsamtaler eller samtaler i små grupper, der læreren kan orientere seg til elevene for å skape innsikt i hva elevene tenker, gjør og samtaler om (Smith & Stein, 2011). *Monitoring* innebærer ikke bare en passiv overvåking. Læreren bør ifølge Smith og Stein (2011) også stille parene eller gruppene spørsmål som synliggjør deres ideer og sørge for at alle deltar i samtalene. *Monitoring* dreier seg dermed om å stille spørsmål for å forstå hva elevene tenker, og ikke for å fortelle dem hva de skal gjøre.

Lærerens spørsmål kan også forberede elevene på at svar og løsningsstrategier skal forklares og begrunnes, for eksempel ved å stille gjentakende spørsmål slik Schoenfeld (1992) gjorde til sine studenter.

Praksisen *selecting* innebærer å velge ut hvem som skal få presentere sin forklaring, sin fremgangsmåte eller sitt svar (Smith & Stein, 2011). Utvelgelsen skjer på bakgrunn av informasjonen læreren har opparbeidet seg ved å observere og veilede de ulike parene eller gruppene i overvåkingen (ibid.). Kazemi og Hintz (2014) vektlegger at målene i undervisningsøktene bør bidra til å styre hvem som skal få dele sine strategier og svar i helklassediskusjonene. Målene med undervisningen vil derfor også kunne være styrende for det Smith og Stein (2011) kaller *selecting*.

Direkte knyttet til *selecting* er *sequencing*, som er den fjerde praksisen. *Sequencing* dreier seg om å ordne rekkefølgen på deltakerne som blir valgt ut til å dele sine tanker og ideer i plenum (Smith & Stein, 2011). Læreren må i *sequencing* bestemme seg for hvilke elever, par eller grupper som får dele først, og om man for eksempel skal starte med det riktige eller det gale svaret. Læreren bør også vurdere hva som skal presenteres først av de konkrete/abstrakte ideene eller de delvise/fullstendige forklaringene. Slik kan elevene bygge på hverandres ideer, og samtalen kan styres mot målet i undervisningsøkten (ibid.). *Connecting* er den femte og siste praksisen, og handler om å koble strategiene og svarene a) mellom ulike løsningsstrategier og b) til viktige matematiske ideer (Smith & Stein, 2011). Dette skjer oftest i samtaleformatet Chapin m.fl. (2009) kaller helklassediskusjon (Smith & Stein, 2011). At denne koblingen av strategier ofte skjer i helklassediskusjon kan være én av grunnene til at Chapin m.fl. (2009) fremstiller dette samtaleformatet som det mest produktive. Smith og Stein (2011) fremhever at en viktig utfordring knyttet til helklassediskusjoner er i hvilken grad læreren styrer dem. På det ene ytterpunktet er læreren foreleser, mens kommunikasjonen i det andre ytterpunktet arter seg som parallellfortellinger (*show-and-tell*) der elevene ukritisk forteller uten at innholdet tilpasses mottakerne (ibid.). En lærer som vurderer og sammenligner strategier, og som på en forståelig måte kobler elevenes svar til de matematiske ideene vil, slik vi ser det, beherske praksisen *connecting* godt. Bruk av *connecting* vil dermed kunne bidra til å gjøre matematikken meningsfull for alle elevene i klasserommet.

3 Metode

I dette kapitlet belyses våre metodiske og analytiske valg i arbeidet med vårt forskningsspørsmål: «Hvilke grep gjør to engasjerte lærere på mellomtrinnet knyttet til de matematiske samtalene i klasserommet, og hvordan styrker grepene samtalene?». Vi redegjør for vårt kunnskapssyn og valg av forskningsmetode og forskningsstrategi. Vi gir også en beskrivelse av valg av informanter og hvilke datainnsamlingsstrategier vi har brukt. Videre beskrives klassetrinnet og den praktiske gjennomføringen, før vi ser på hvilke analytiske tilnærminger vi har brukt. Avslutningsvis betrakter vi relevante etiske hensyn og ser på kvalitet i forskningen.

3.1 Kunnskapssyn

Epistemologi handler om synet på kunnskap, og oppfatningen av hvordan kunnskap utvikles (Guba & Lincoln, 1994). Vårt forskningsspørsmål impliserer at interaksjonene i klasserommet avhenger av grep lærerne gjør knyttet til de matematiske samtalene. For å undersøke disse grepene har vi gjennomført ustrukturert klasseromsobservasjon og ett intervju av to engasjerte lærere. Ifølge Cobb (2007) er distribuert kognisjon et teoretisk perspektiv som er egnet til å undersøke læringsmiljøet i klasserom ved at fokuset rettes mot normer, klasseromsdiskurs og verktøy. Vår bruk av observasjon tyder på et distribuert kognitivt perspektiv, siden tolkningen av observasjonene bidrar til konstruksjon av kunnskap. Vår bruk av intervju peker mot perspektivet Cobb (2007) kaller kognitiv psykologi, som fokuserer på sinnet og på hva personer sier og gjør, særlig siden lærernes meninger bidrar til å påvirke kunnskapsutviklingen i studien.

Ifølge Cobb (2007) vektlegger både distribuert kognisjon og kognitiv psykologi kunnskap som noe kontekstuelt og subjektivt. Guba og Lincoln (1994) skriver at i et konstruktivistisk paradigme er virkeligheten relativ, og konstrueres lokalt, mens kunnskap oppfattes som subjektiv, kontekstuell og overførbar. Mertens (2004) skriver at de grunnleggende antakelsene innenfor konstruktivisme er at all kunnskap er sosialt konstruert av de som er aktive i forskningsprosessen. Siden vi studerte lærernes praksis og deres sosiale interaksjon med elevene, tok vi del i deres virkelighet i klasserommet. På denne måten ble vi, sammen med forskningsdeltakerne, aktører i kunnskapsutviklingen.

Distribuert kognisjon og kognitiv psykologi kan betraktes som våre teoretiske perspektiver. I tillegg oppfattes konstruktivisme som vårt forskningsparadigme. Til sammen utgjør dette vårt epistemologiske ståsted.

3.1.1 Kvalitativ metode

Målet innenfor et konstruktivistisk forskningsparadigme er å skape forståelse (Guba & Lincoln, 1994). Tjora (2012) presenterer *kvalitativ metode* som en forskningsmetode der hovedfokuset er å skape innsikt og forståelse for det som studeres. Mertens (2004) viser at kvalitativ metode er en tjenlig tilnærming innenfor konstruktivisme, siden denne tilnærmingen tillater forskerne å ta del i settingen som studeres, og da også i forskningens kunnskapsutvikling. Ettersom vår hensikt er å skape innsikt og forståelse for hvilke grep lærerne tar, og hvordan grepene påvirker den matematiske samtalen, er det mest hensiktsmessig å benytte kvalitativ forskningsmetode.

Ifølge Creswell (2014) har kvalitativ metode til hensikt å beskrive kompleksiteten i et fenomen knyttet til et bestemt fokus. Guba og Lincoln (1982) viser at dette kan gjøres ved hjelp av rike beskrivelser av fenomenet og settingen som studeres. Guba og Lincoln (1982) skriver videre at fenomenet ofte er en setting der sosiale interaksjoner og prosesser står i sentrum, og at forskerens mål ofte er å belyse deltakernes perspektiver knyttet til fenomenet det forskes på. Vårt forskningsspørsmål, nærmere bestemt hvilke grep lærerne gjør og hvordan disse styrker de matematiske samtalene i klasserommet, betraktes som vårt fokus.

Casestudie

Innen kvalitativ metode finnes det ulike tilnærminger som kan benyttes i møte med forskningsfeltet, blant annet fenomenologi, etnografi og casestudie (Creswell, 2014). Casestudier brukes ofte for å kaste lys over en klasse fenomener ut fra grundige beskrivelser (ibid.). Yin (2003) hevder at forskningsspørsmålets formulering kan aktualisere bruk av casestudier. Han skriver:

> *In general, case studies are the preffered strategy when «how» or «why» questions are being posed, when the investigator has little control over events, and when the focus is on a contemporary phenomenon within some real-life context* (Yin, 2003, s. 1).

Vårt forskningsspørsmål spør om hvilke grep lærerne gjør knyttet til de matematiske samtalene, samt hvordan disse grepene styrker samtalene. Siden vi beskriver og tolker hvordan denne påvirkningen skjer, er vårt forskningsspørsmål et hvordan-spørsmål, og gjør casestudie til en egnet tilnærming til feltet.

Christoffersen og Johannessen (2012) viser at casestudier kjennetegnes av at forskeren innhenter data fra få enheter over en gitt periode. Casestudier er derfor tid- og stedbundet. Det kan dreie seg om én undervisningsøkt eller et bestemt fag i skolen. Yin (2003) argumenterer for at casestudier er nyttige for å studere individer eller grupper av individer, grunnet stor valgfrihet blant datainnsamlingsstrategier. Casestudie egner seg godt til utdanningsforskning ved at det åpner for å belyse et fenomen eller en prosess (Christoffersen & Johannessen, 2012), samt forklare hvorfor eller hvordan noe skjer (Postholm, 2010). Vår studie omhandler to læreres undervisningspraksis i matematikk med fokus på matematiske samtaler. Fenomenet vi har studert er lærerne og deres praksis. Vi studerte utelukkende lærernes matematikkundervisning og oppholdt oss på forskningsfeltet i 1 uke. Vi ønsket å være i stand til å studere de sosiale prosessene i klasserommet med fokus på kommunikasjon, og på bakgrunn av dette skape innsikt og forståelse for hvordan lærernes grep styrker de matematiske samtalene.

Postholm (2010) viser at dersom hensikten er å tolke det innsamlede datamaterialet, vil rapporten få en *beskrivende* og *tolkende* karakter, og hun skiller mellom tre ulike former for casestudier: *indre*, *instrumentelle* og *kollektive*. Indre casestudier kan benyttes for å løfte frem en unik deltakers praksis slik at lesere av rapporten kan bruke beskrivelsene og tolkningene som tankeredskap i egen praksis, mens kollektive casestudier dreier seg om å studere flere kasus (ibid.). I vårt prosjekt studerer vi to matematikklærere (kollektiv case), samtidig som lærerne er valgt på bakgrunn av deres engasjement for matematikkundervisningen (indre case). Vår studie kan dermed betraktes som en indre kollektiv casestudie som har til hensikt å beskrive og tolke lærernes praksis knyttet til de matematiske samtalene i klasserommet, samt skape forståelse for hvordan denne praksisen påvirker samtalen. Rike beskrivelser av forskningsfeltet, forskningsprosessen og analyseprosessen vil kunne føre til at lesere av rapporten kan identifisere seg med, og nyttiggjøre seg av, vår forskning.

3.2 Datainnsamling

Casestudie åpner for en pragmatisk og eklektisk holdning til innsamling av data, og valg av strategi avhenger blant annet av forskningsspørsmålets formulering og hva datamaterialet skal besvare (Creswell, 2014). I følgende underkapitler presenterer vi hvordan vi har valgt informanter, og hvilke metoder vi har brukt i datainnsamlingen.

3.2.1 Valg av informanter

Forskningsspørsmålet inneholder termen «engasjerte lærere». Engasjement er en subjektiv dimensjon og kan være vanskelig å måle. Vi valgte derfor å definere vår oppfatning av begrepet før vi startet søken etter informanter: En engasjert matematikklærer kan være en lærer som har vært med i nasjonale eller lokale utviklingsprosjekter, eller som på andre måter har jobbet aktivt for å utvikle matematikkfaget. En engasjert lærer søker også kontinuerlig å utvikle seg selv og egen praksis, gjerne i samarbeid med andre. På leting etter informanter har vi i tillegg vært opptatt av lærernes anerkjennelse, både på informantenes aktuelle arbeidsplass og fra andre lærere, universiteter og fra Matematikksenteret. Dette har resultert i et nasjonalt søk etter informanter, som innebærer over 40 telefonsamtaler og utveksling av rundt 30 e-poster, hvor vi etterspurte det vi har definert som engasjerte matematikklærere.

I vårt forskningsprosjekt har vi én kvinnelig og én mannlig lærerinformant, som jobber sammen på mellomtrinnet. Den kvinnelige informanten har rundt 30 års fartstid i læreryrket. Hun uttrykker et brennende engasjement for matematikkfaget og har deltatt i flere utviklingsprosjekter, både lokalt og nasjonalt. Hun har vært leder for matematikkseksjonen, og fått nasjonale utmerkelser for sitt arbeid som matematikklærer. Hun beskrives av kolleger som en dyktig motivator, samt at hun behersker kunsten å gjøre faget attraktivt for elevene. Hun har stort fokus på kreativitet, tverrfaglighet og utforskning i sin undervisning. Vår mannlige lærerinformant jobber på samme skole og underviser på samme trinn. Han har rundt fem år erfaring i læreryrket, og har mange av de samme tankene om skolematematikk som vår kvinnelige informant. Han beskrives av kolleger som en lærer med et ønske om aktive elever som arbeider undersøkende og oppdagende. Begge informantene viste stor interesse for vårt forskningsprosjekt da vi i etterkant av datainnsamlingen fortalte om prosjektets fokus. Dette viser, slik vi ser det, et ønske og vilje til å utvikle seg selv, noe som også uttrykker et engasjement for undervisning i matematikk.

Strategien vi har brukt i valg av informanter kan sees på som en hybrid mellom det Christoffersen og Johannessen (2012) kaller *ekstreme og/eller avvikende utvalg, kriteriebasert utvelgelse* og *snøballmetoden*. Førstnevnte strategi kjennetegnes ved at informanten er rik på informasjon fordi han eller hun er ekstrem, spesiell eller avvikende i forhold til andre (ibid.). Denne strategien kom til uttrykk ved at vi fortsatte å lete etter de lærerne vi mente passet best til vårt prosjekt helt til vi fant våre to informanter. Lærerne ble anbefalt av flere ulike instanser. Den andre strategien innebærer at informantene som velges oppfyller spesifikke kriterier (ibid.). De to lærerne som etter hvert ble valgt, imøtekom kriteriene vi hadde satt på forhånd i form av deres engasjement for utvikling av seg selv og matematikkfaget. Den tredje strategien omhandler hvordan man oppnår kontakt med informanter (ibid.). Ved bruk av snøballmetoden rekrutteres informanter ved for eksempel å ringe rundt og bli henvist i den ønskelige retningen. Bruk av denne strategien kom til uttrykk gjennom de titalls telefonsamtaler og e-poster vi sendte til Matematikksenteret, og til ulike universiteter og grunnskoler i Norge.

3.2.2 Observasjon

Tjora (2012) skriver at observasjon egner seg godt dersom man vil skape innsikt og forståelse for hva informantene gjør. I vår studie ønsket vi å skape innsikt i hvilke grep lærerne gjør knyttet til de matematiske samtalene, samt forstå hvordan grepene styrker samtalene. Observasjon egnet seg derfor godt som datainnsamlingsstrategi, og kan betraktes som vår primære datakilde.

En fordel med observasjon som strategi er at det gir forskeren mulighet til å ta del i konteksten som studeres. Slik får man tilgang til primærdata, i motsetning til intervju som gir tilgang til datamaterialet gjennom intervjuobjektet, såkalt sekundærdata (Cohen m.fl., 2011). Tjora (2012) skriver at studier som baseres på observasjon er preget av naturalisme, da det som observeres skjer i sin naturlige setting ved å løfte frem deltakernes perspektiver. Naturalisme er ifølge Guba og Lincoln (1982) en grunn til at observasjon er en passende metode innenfor et konstruktivistisk forskningsparadigme. Vi ønsket fra starten av prosjektet, at datamaterialet skulle være så autentisk som mulig, og mente observasjon i stor grad kunne bidra til dette.

Bjørndal (2012) presenterer to ulike former for observasjon: observasjon av *første* og *andre orden*. Observasjon av første orden er når forskeren har observasjon som primæroppgave, mens observasjon av andre orden forekommer når forskeren selv aktivt deltar i settingen som observeres. Observasjon blir da en sekundæroppgave (ibid.). Siden vi ville observere lærernes autentiske praksis uten å selv bidra eller påvirke undervisningen, var observasjon av første orden hensiktsmessig for oss.

Som observatør kan man innta ulike roller, og valg av rolle avhenger blant annet av hva datamaterialet skal brukes til (Cohen m.fl., 2011). En av de første som betraktet disse rollene var Gold (1958), som utformet fire kategorier: *fullstendig deltaker*, *observerende deltaker*, *deltakende observatør* og *fullstendig observatør*. Observerende deltaker innebærer at forskeren ikke er medlem av kulturen som observeres og der deltakelsen i aktivitetene er minimal og perifer. Forskerens rolle som observatør er kjent og akseptert av alle deltakerne (ibid.). Å ikke være medlem av kulturen som studeres betyr å ikke ha tidligere kjennskap til deltakerne i studien. Rollen er også, ifølge Gold (1958), ofte brukt i engangsintervjuer hvor man søker innsikt i informantens forståelse eller meninger.

Som forskere har vi ikke vært en del av kulturen som har blitt observert, i den forstand at vi ikke kjente noen av informantene fra tidligere og at vi etterstrebet å ikke påvirke undervisningen. Vi var likevel til stede under observasjonene. Rollene våre kan derfor sies å være det Gold (1958) kaller observerende deltakere. Det første møtet med klassene vi observerte inneholdt en kort presentasjon av oss selv og prosjektet. Blant annet påpekte vi at vi ikke skulle betraktes som deltakere av undervisningen, og at dersom elevene hadde spørsmål, måtte disse stilles til læreren. I undervisningsøktene oppholdt vi oss i bakgrunnen. Vi sto bakerst i klasserommet og observerte det som skjedde og forsøkte å fremstå usynlig. Med utgangspunkt i at vi ville beskrive, samt tolke, lærernes autentiske praksis, ble en slik anonym tilstedeværelse i form av observerende deltaker valgt.

Cohen m.fl. (2011) skiller mellom *strukturert* og *ustrukturert* observasjon. Strukturert observasjon kan benyttes i sammenlikningsstudier ved at forskeren trer inn i forskningsfeltet med forutbestemte og spesifikke faktorer eller kategorier som skal observeres. Det kan dreie seg om en opptelling av bestemte hendelser, som senere sammenlignes med like observasjoner fra andre felt (ibid.). Ved ustrukturert (også kalt naturalistisk) observasjon er det ikke bestemt hva som skal observeres på forhånd, eller hvordan datamaterialet skal kodes. Ved slik observasjon er intensjonen å studere deltakerne i sin naturlige setting (ibid). Før våre observasjoner bestemte vi oss for å observere alt lærerne gjorde i matematikkundervisningen uten å innta et spesielt fokus. Hensikten var å kunne oppdage grep lærerne tok knyttet til de matematiske samtalene, uten påvirkning fra forskningslitteratur eller egne antakelser. Dette gjorde at vi valgte ustrukturert observasjon.

Observasjon ved hjelp av lyd og video

Ustrukturert observasjon kombineres ofte med video- og lydopptak (Cohen m.fl., 2011). Observasjon ved hjelp av lyd og bilde kan, ifølge Christoffersen og Johannessen (2012), resultere i et mer ufiltrert datamateriale enn menneskelig observasjon med feltnotater. Dette skyldes at observasjonene ikke nødvendigvis må gjenfortelles av observatøren. Ved menneskelig observasjon er det også vanskelig å få med alle dialogene som forekommer i klasserommet, mens opptak gjør at man kan studere datamaterialet gjentatte ganger (Tjora, 2012).

Siden vi ønsket å studere grep lærerne gjør, samt hvordan disse styrker de matematematiske samtalene i klasserommet, var det hensiktsmessig å ta lyd- og videoopptak av undervisningsøktene. Kameraet ble under observasjonene plassert bakerst i klasserommet. Ved å kombinere ustrukturert observasjon med bruk av video og lyd kunne vi studere datamaterialet flere ganger, noe som åpnet for grundige analyser av de grepene som utmerket seg.

3.2.3 Intervju

I følge Tjora (2012) er intervju en godt egnet strategi til å skape innsikt i, og forståelse for hva noen mener eller tenker. Intervju er ifølge Creswell (2014) en velegnet strategi for å samle inn data til kvalitativ forskning, og åpner i følge Kvale, Brinkmann, Anderssen og Rygge (2015) for å løfte frem deltakernes perspektiver og erfaringer knyttet til et fenomen eller en prosess. Vi ønsket å skape innsikt og forståelse for grepene lærerne gjorde med utgangspunkt i deres syn og tanker om matematikk som fag. Dette førte til at vi gjennomførte et intervju med våre to informanter, som betraktes som vår sekundære datakilde.

Vi kan skille mellom intervjutyper på flere måter. Postholm og Moen (2009) skiller mellom strukturerte, halvstrukturerte og ustrukturerte intervjuer, mens Tjora (2012) deler inn i semistrukturerte intervju, fokusgrupper, fokusert intervju og dybdeintervju. Ustrukturerte intervju kan beskrives som mer uformelle samtaler der intervjueren ikke har en planlagt struktur for rekkefølgen i intervjuet (Postholm & Moen, 2009). Et dybdeintervju kjennetegnes ved å være en relativt fri samtale om spesifikke temaer som forskeren har valgt ut på forhånd. Stemningen i samtalen er avslappende og informantene får god tid til å tenke, reflektere og forklare sine synspunkter. Hensikten bak denne type intervju er å skape innsikt i informantens meninger, holdninger og erfaringer (Tjora, 2012).

Vi valgte å gjennomføre det vi kalte et ustrukturert dybdeintervju med begge informantene og begge forskerne til stede. Dybdeintervju ble valgt fordi vi ønsket innsikt i lærernes syn på matematikk, og deres erfaringer og tanker bak deres undervisningsform. Intervjuet ble gjort i slutten av datainnsamlingen, etter alle observasjonene, siden vi ønsket at vårt fokus i samtalen ikke skulle påvirke undervisningen som skulle observeres. I tillegg ønsket vi begrunnelser fra lærerne knyttet til elementer vi betraktet som interessante fra undervisningen. Intervjuet komplementerte på denne måten observasjonene. Tjora (2012) skriver at intervju kan gjennomføres på flere ulike måter, avhengig av hva man ønsker å bruke det til. Vårt ustrukturerte dybdeintervju foregikk som en samtale der alle kunne ta ordet. Samtalen omhandlet elementer fra observasjonene som vi ville få dypere innsikt i. Vi snakket også om ideene bak lærernes undervisningsform, samt deres erfaringer, som har ledet til at de underviser på måtene de gjør. Lærerne fikk også ta opp ting de lurte på eller ønsket å si. Vi hadde forberedt enkelte temaer vi ville styre samtalen mot, men ellers artet samtalen seg fritt. Intervjuet ble tatt opp med båndopptaker, slik at vi i ettertid kunne lytte til lærernes utsagn og se dem i sammenheng med datamaterialet fra observasjonene.

3.3 Beskrivelse av trinnet og praktisk gjennomføring

I dette delkapitlet beskriver vi klassetrinnet vi har observert, og beskriver den praktiske gjennomføringen av datainnsamlingen. Innholdet i redegjørelsen kommer dels fra observasjonene, og dels fra det ustrukturerte dybdeintervjuet med lærerinformantene.

For å samle inn data reiste vi til en større norsk by og besøkte en barneskole (1.-7. trinn). Observasjonene ble gjennomført på mellomtrinnet. Våre to lærerinformanter hadde ansvaret for matematikkundervisningen på trinnet, som besto av omtrent 60 elever som var to- og firedelt i matematikktimene. Lærerne skildret et blandet nivå på trinnet hvor det var mange faglig sterke elever, samt én stor gruppe mindre faglig sterke elever. Det var få elever som befant seg i midtsjiktet. Lærerne fortalte at elevene var godt vant med besøk og filming av undervisningen fra tidligere praksis- og forskerbesøk. I løpet av 1 uke med lyd- og videoobservasjoner hadde trinnet fire undervisningsøkter på 90 minutter (mandag og tirsdag), hvor klassen var todelt, og fire undervisningsøkter på 45 minutter (onsdag og torsdag) hvor klassen var firedelt. Hver elev hadde i løpet av uken 2 økter på 90 minutter og 1 økt på 45 minutter. Vår kvinnelige informant underviste dobbeløktene, mens vår mannlige informant underviste enkeltøktene.

Alle undervisningsøktene tok utgangspunkt i en utforskende undervisningsmetodikk kalt Fosnot, som er utviklet av amerikaneren Catherine Fosnot. I dybdeintervjuet fortalte informantene om denne metodikken. Fosnot består av flere små bøker (hefter) med ferdigutviklete undervisningsopplegg og oppgaver. Oppgavene er utviklet slik at de kan endres og tilpasses elevenes nivå. Grunnideen er å bidra til aktive, nysgjerrige og engasjerte elever som er motiverte for å lære matematikk. Informantene mente oppgavene fra Fosnot vektla samarbeid og kommunikasjon blant elevene.

Datamaterialet ble samlet inn ved at læreren som ledet undervisningen hadde en trådløs mikrofon på seg som fanget opp det læreren og elevene sa. Vi observerte én lærer av gangen og justerte kameraet slik at læreren, og elevene læreren samhandlet med, var i fokus. På denne måten kunne vi fange opp kontekst og kroppsspråk knyttet til samtalene som ble ført.

I løpet av datainnsamlingen utmerket det seg tre interessante faktorer. Vi oppdaget at oppgavene spilte en viktig rolle i undervisningen, og at de dannet grunnlag for en séregen måte å arbeide med matematikk på. Også dialogene mellom lærerne og elevene, og undervisningens generelle struktur, skilte seg fra våre tidligere erfaringer.

3.4 Analytiske valg

I kvalitativ forskning kan man støtte seg til ulike analyseverktøy i møte med datamaterialet, blant annet kan vi skille mellom personsentrert og temasentrert tilnærming (Thagaard, 2013). Personsentrert analyse retter oppmerksomheten mot personer eller situasjoner, mens temasentrert analyse vektlegger sentrale temaer representert i datamaterialet. De to tilnærmingene kan også kombineres og utfylle hverandre (ibid.).

I starten av analyseprosessen ble både temasentrert og personsentrert analyse vurdert, men etter den innledende fasen i arbeidet med datamaterialet erfarte vi at kontekst spilte en viktig rolle for kodingen. Vi bestemte oss derfor for å se nærmere på faktorene som hadde utmerket seg i datainnsamlingen. Etter hvert ble faktorene spisset til undersøkelsesfaktorene vi har kalt: 1) oppgaver, 2) samtalegrep og 3) undervisningsorganisering og samtalestruktur. Innenfor hver undersøkelsesfaktor analyserte vi grep lærerne gjorde knyttet til de matematiske samtalene i klasserommet. Dette førte til at personsentrert analyse der lærerinformantenes utsagn ble sortert uten elevenes svar, ble forkastet. I stedet valgte vi å sortere datamaterialet i ulike temaer. Hensikten var å oppdage, og etter hvert sortere, ulike grep lærerne gjorde for å styrke de matematiske samtalene. Ifølge Braun og Clarke (2006) er tematisk analyse godt egnet til å finne slike mønstre eller koder i et datasett.

Percy, Kostere og Kostere (2015) viser til ulike måter å gjennomføre tematisk analyse på. Én måte er induktiv analyse som tar utgangspunkt i datamaterialets egenart uten å ta hensyn til tidligere etablert teori. Forskeren danner egne koder eller kategorier på bakgrunn av datamaterialet. En annen måte er ifølge Percy m.fl. (2015) teoretisk analyse, som kan betraktes som det Thagaard (2013) kaller en deduktiv tilnærming, der forskeren analyserer datamaterialet på bakgrunn av forutbestemte kategorier fra ulik teori. Likevel er forskeren åpen for at det kan dukke opp nye kategorier i datamaterialet som ikke tar utgangspunkt i lest teori (ibid.). Postholm (2010) hevder at det i de fleste tilfeller vil være interaksjon mellom induktiv og deduktiv analyse i forsknings- og analyseprosesser, blant annet ved at forskerens antakelser, interaksjon med informantene og kunnskapssyn kan påvirke tolkningen av data. Begrepene induktiv og deduktiv analyse kan dermed betraktes som et kontinuum med induktiv som det ene ytterpunktet, og deduktiv som det andre. Slik vil en analyseprosess kunne sees på som mer eller mindre induktiv eller deduktiv, og med ulik grad av påvirkning fra den andre tilnærmingen.

Våre tre undersøkelsesfaktorer er analysert på ulike måter i søken etter grep lærerne benyttet innenfor hver faktor. Oppgavene som ble brukt i undervisningen er hovedsakelig analysert teoretisk (deduktivt), mens samtalegrepene og undervisningsorganisering og samtalestruktur hovedsakelig er analysert induktivt. I følgende beskrivelse av de ulike analysene vil vi eksemplifisere hvordan vi har arbeidet analytisk med datamaterialet innenfor de tre undersøkelsesfaktorene.

3.4.1 Oppgavene

Elevene arbeidet med tre ulike oppgaver underveis i datainnsamlingen. Før analysen av oppgavene valgte vi, på bakgrunn av observasjonene, å sette oss inn i teori om utfordrende oppgaver, oppgavestruktur og kognitive krav i oppgaver. Analysene av oppgavene ble gjort av begge forfatterne samtidig, og med utgangspunkt i allerede etablert teori. Det ble ikke brukt et fullstendig etablert rammeverk for denne analysen, men vi valgte å studere oppgavene ut fra ulike kjennetegn på struktur, utfordring og kognitive krav formulert av Sullivan m.fl. (2015), Stillman m.fl. (2009), Franke m.fl. (2007), Ponte og Quaresma (2016) Smith og Stein (2011) og Smith og Stein (1998). Denne analyseprosessen kan sees på som det

Percy m.fl. (2015) kaller en teoretisk tilnærming og det Thagaard (2013) kaller en deduktiv tilnærming, siden vi fra første stund analyserte oppgavene ut fra etablert teori. Våre observasjoner har likevel gitt retning for hvilken teori vi valgte å analyserte oppgavene ut fra. At våre erfaringer fra feltet har bidratt til å gi retning til analysene av oppgavene, kan sees på som et innslag av det Percy m.fl. (2015) kaller induktiv analyse.

3.4.2 Samtalegrep

I analysen av hvilke spesifikke samtalegrep lærerne benyttet i undervisningsøktene valgte vi å transkribere datamaterialet fra lyd- og videofilene i sin helhet, før vi begynte kodingen. Transkripsjonene ble så lastet inn i dataprogrammet Nvivo. Kodingen ble gjort av begge forfatterne samtidig, og diskusjoner forfatterne imellom bidro til at kodene endret navn flere ganger underveis i prosessen og til at deler av datamaterialet ble kodet om flere ganger. Kodingen foregikk i starten på det Percy m.fl. (2015) kaller en induktiv måte ved at vi betraktet likheter og forskjeller i datamaterialet, uten hensyn til teori. Etter at alt datamaterialet var kodet begynte vi å lete etter mønstre, og kodene som lignet på hverandre ble plassert i overkategorier. Deretter ble samtalegrepene som forekom hyppigst valgt ut for videre analyse. Videre ble navnene på de utvalgte kodene og kategoriene spisset, til vi sto igjen med over- og underkategorier av samtalegrep. Til slutt ble de ulike kategoriene og kodene diskutert opp mot etablert teori, noe som kan betraktes som et innslag av det Thagaard (2013) kaller deduktiv analyse og det Percy m.fl. (2015) kaller teoretisk tilnærming. Analysen av samtalegrepene artet seg derfor først induktivt, med innslag av deduktive analyser etter hvert.

3.4.3 Undervisningsorganisering og samtalestruktur

Analysene av undervisningens organisering tok utgangspunkt i våre observasjoner. Gjennom å studere video- og lydopptak, merket vi oss interessante organisatoriske grep lærerne gjorde i de ulike fasene av undervisningen. Analysene av samtalestruktur tok i tillegg til våre observasjoner utgangspunkt i det transkriberte datamaterialet, og vi studerte hvordan lærerne strukturerte samtalene i klasserommet. At vi formulerte kategorier direkte ut fra datamaterialet kan betraktes som det Percy m.fl. (2015) kaller induktiv analyse.

Kategoriene i undervisningens organisering ble til slutt knyttet til Chapin m.fl. (2009) sine produktive samtaleformater, mens kategoriene i samtalestrukturen ble sett i sammenheng med Smith og Stein (2011) sine fem praksiser. At vi valgte å se våre analyser og funn opp mot etablert teori kan betraktes som det Percy m.fl. (2015) kaller teoretisk analyse og det Thagaard (2013) kaller deduktiv analyse. Analysene av undervisningsorganisering og samtalestruktur foregikk derfor også, i likhet med analysene av samtalegrepene, først induktivt, så teoretisk (deduktivt).

3.4.4 Generelt om analyseprosessen

Analyseprosessen startet med samtalegrepene. Deretter analyserte vi undervisningsorganisering og samtalestruktur. Til slutt analyserte vi oppgavene. Beskrivelsene ovenfor viser at spesifikke samtalegrep fra lærernes undervisning, samt undervisningens organisering og samtalestruktur, i overveiende grad har blitt analysert induktivt med innslag av deduktiv analyse, mens oppgavene har blitt analysert deduktivt med innslag av induktiv analyse.

Thagaard (2013) bruker begrepet *abduksjon* når hun betrakter samspillet mellom teori og empiri. Her preges forskningen av en symbiose mellom induktiv og deduktiv tilnærming til datamaterialet. På den ene siden danner etablert teori grunnlag for forskningen, mens analyse av datamaterialet og dets mønstre danner grobunn for nye teoretiske perspektiver. Begrepet abduksjon kommer til uttrykk gjennom vår koding og våre analysemetoder. Vår forforståelse og erfaringer fra feltet har bidratt til hvilken teori oppgavene har blitt analysert ut fra. I analysene av samtalegrep, og undervisningsorganisering og samtalestruktur har tolkningen av datamaterialet blitt påvirket av våre antakelser på bakgrunn av vår kunnskap om kommunikasjon i matematikk. Likevel har datamaterialet i de to sistnevnte analysene fått tale for seg selv ved at vi har oppdaget mønstre, som senere har blitt sett opp mot teori. Det faktum at både induktiv og deduktiv tilnærming brukes i analysene, samt at vi har sett disse funnene opp mot hverandre, kan betegnes som abduksjon.

3.5 Etiske betraktninger

Kvalitative studier kjennetegnes av et tydelig samarbeid mellom forsker og informanter, og man må derfor ta bevisste hensyn til ulike faktorer med etisk og moralsk karakter i møte med forskningsfeltet og forskningsdeltakerne (Tjora, 2012). Nasjonale forskningsetiske komite for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) har utviklet normative retningslinjer for forskningsprosesser. For eksempel innebærer «Ansvaret for å informere» at forskningsdeltakerne har rett til informasjon vedrørende deres posisjon i forskningen slik at de kan danne et bilde av forskningsforløpet (ibid.). Kapitlet «Samtykke og informasjonsplikt» påpeker at deltakerne skal informeres om prosjektets omfang og at de selv kan velge om de ønsker å delta. Ifølge NESH (2016) skal samtykket være fritt, noe som betyr at det er «… avgitt uten ytre press eller begrensninger av personlig handlefrihet» (s. 14-15). Samtykket skal også være informert, noe som innebærer at forskeren gir tilstrekkelig informasjon om hva det innebærer å delta i forskningsprosjektet (ibid.). Dette betyr at hver deltaker, på hvilket som helst tidspunkt og grunnlag, kan velge å trekke seg fra studien. «Kravet om konfidensialitet» innebærer at deltakerne i forskningen ikke skal kunne identifiseres i forskningsrapporten. Datamaterialet som samles inn må behandles slik at det ikke blir tilgjengelig for andre enn forskerne (NESH, 2016).

For å imøtekomme retningslinjene ble informasjon om forskningsprosjektet sendt til NSD (Norsk Senter for Forskningsdata) for godkjenning. Dette skjedde før prosjektstart. Vi utviklet deretter samtykkeskjemaer til lærerne og til elevenes foresatte som inneholdt informasjon om prosjektet, frivillig deltakelse og forsikring om deres anonymitet (se vedlegg 4 og 5). Samtykkeskjemaene inneholdt tilstrekkelige beskrivelser av studien, slik at deltakerne kunne danne seg et bilde av forskningsforløpet. For å sikre autentisk datamateriale unngikk vi likevel å fortelle at hensikten med observasjonene omhandlet kommunikasjon i klasserommet. Vi skrev at vi ville observere lærernes undervisningspraksis i matematikk ved hjelp av observasjon i form av video og lyd. Før datainnsamlingen startet fikk vi bekreftet at alle elevene hadde fått signert samtykkeskjemaene av sine foresatte. I tillegg hadde vi utviklet en reserveløsning for de som ikke ville delta i studien, selv om dette ikke ble nødvendig: De elevene som ikke ønsket å delta skulle plasseres utenfor kameraets fokus, samt at deres uttalelser i klasserommet ikke skulle bli transkribert eller tatt med i forskningsrapporten. Kravet om konfidensialitet ble særlig aktualisert ettersom vi benyttet video- og lydopptak. Filene med opptak inneholdt sensitiv informasjon knyttet til de som ble observert, noe som kunne medføre at deltakernes anonymitet ble blottlagt hvis datamaterialet kom på avveie. Datamaterialet ble derfor oppbevart på en passordbeskyttet ekstern harddisk, som var innelåst i tiden vi ikke brukte den. I transkriberingen opprettet vi koblingsnøkler for de deltakerne som ble tildelt navn. Koblingsnøklene inneholdt bare fornavn, og ble oppbevart på passordbeskyttet Word-dokument på PC. Bare forfatterne hadde tilgang til datamaterialet.

Cohen m.fl. (2011) presenterer et etisk dilemma knyttet til observasjoner med video og lyd som kalles *reactivity*. Fenomenet er knyttet til deltakeres atferd i settinger hvor de vet at de blir filmet. Opptak kan føre til at deltakerne endrer atferd eller væremåte, noe som gjør at det som fanges opp ikke er naturlig, eller ville vært annerledes, dersom det ikke hadde vært brukt video- og lydopptak (ibid.). Da vi ankom skolen fortalte vi elevene at det var lærernes praksis som var hovedfokuset, slik at elevene ikke skulle endre atferd under observasjonene. I intervjuet med lærerne fikk vi inntrykk av at hverken kamera eller mikrofon hadde påvirket dem i undervisningen. Lærerinformantene fortalte at de hadde blitt filmet før, og at de ut i undervisningsøktene glemte at de ble filmet. Lærerne mente også elevene oppførte seg normalt.

Også i forholdet mellom teori og data kan det oppstå etiske dilemmaer. Thagaard (2013) viser til at det i analyseprosesser ofte kun er forskerens forståelse og synspunkter som vektlegges, siden forskeren er den som studerer dataen og ser den opp mot teori. Slik blir ikke kunnskap utviklet i et samspill mellom forsker og deltaker, som Postholm (2010) hevder er et kjennetegn ved kvalitativ metode, men i et samspill mellom forsker, datamateriale og teori. I løpet av datainnsamlingen valgte vi å gjennomføre det ustrukturerte dybdeintervjuet med lærerinformantene der de fikk muligheten til å løfte frem egne tanker knyttet til undervisningsøktene. Lærernes meninger knyttet til undervisningen har på denne måten vært med å påvirke vår tolkning av datamaterialet.

I forskning handler etikk ikke bare om å forstå og ta hensyn til andre, men også om å forsøke å forstå egen tenkning og egne slutninger (Steen-Olsen, 2010). Kvalitative studier har ifølge Schoenfeld (2007) alltid en verdiladet karakter, noe som innebærer at forskningen tar utgangspunkt i forskerens egne interesser, antakelser, virkelighetsoppfatning og kunnskapssyn. Forskningens verdiladde aspekt fordrer ifølge Postholm (2010) et nært samarbeidsforhold mellom forsker og forskningsdeltakere. Å reflektere over egne antakelser og sin egen subjektive forståelse kalles refleksivitet, og kan defineres som «… en form for selvkonfrontasjon hvor man retter et revidert blikk på egne tanker, verdier og handlinger» (Steen-Olsen, 2010, s. 97-98). Vi kan skille mellom epistemologisk og metodologisk refleksivitet. Det første handler om forskerens verdigrunnlag og kunnskapsforståelse, og det andre handler om forskerens innvirkning på feltet (Steen-Olsen, 2010).

Man risikerer alltid at personlige meninger farger analyser og tolkninger. Vi har imidlertid prøvd å være oss selv bevisste og tatt hensyn til meningene informantene uttrykte i intervjuet, noe som er et kjennetegn på epistemologisk refleksivitet. Vi har også utfordret oss selv og hverandre med kritiske spørsmål, og forsøkt å vurdere og reflektere over vår empiri på best mulig måte. I samtykkeskjemaene til lærerne og elevene unnlot vi å skrive at forskningen omhandlet kommunikasjon. Våre refleksjoner knyttet til nødvendigheten av å holde tilbake informasjon for å få autentisk datamateriale, kan sees på som metodologisk refleksivitet. Våre refleksjoner om å gjennomføre det ustrukturerte dybdeintervjuet etter alle observasjonene, for at samtalen ikke skulle påvirke undervisningen som skulle observeres, kan også knyttes til metodologisk refleksivitet.

3.6 Kvalitet i forskningen

I følgende delkapitler betraktes forskningens kvalitet. Vi redegjør for validitet og reliabiltet, før vi ser på generaliserbarhet, nytte og viktighet. Til slutt betraktes våre metodiske valg med et kritisk blikk.

3.6.1 Validitet og reliabilitet

Kvaliteten på undersøkelser avhenger ifølge Patel og Davidson (2011) av den innsamlede dataens validitet (gyldighet) og reliabilitet (pålitelighet). Validitet og reliabilitet må sees i forhold til hverandre, for hverken høy reliabiliteten garanterer høy validitet, eller motsatt. Dermed bør både reliabiliteten og validiteten være høy for å sikre kvaliteten i undersøkelsen (Patel & Davidson, 2011).

Validitet omhandler overenstemmelsen mellom det forskeren sier skal undersøkes og det som faktisk undersøkes (Patel & Davidson, 2011). Validitet er knyttet til tolkning av data, og en måte å studere egen validitet på er å spørre om de tolkningene man kommer frem til er gyldige i forhold til den virkeligheten man har studert (Thagaard, 2013). Creswell (2014) viser til ulike strategier forskeren kan benytte seg av for å sikre studiens validitet. Blant disse er *triangulering* som omhandler bruk av flere strategier i datainnsamlingen. For eksempel kan observasjoner sees i sammenheng med intervju. På denne måten kan observasjonsdata og forskerens antakelser testes opp mot informantens perspektiver. En annen strategi som ifølge Creswell (2014) bør benyttes innenfor kvalitativ forskning, uavhengig av valg av datainnsamlingsstrategi, er *rike beskrivelser*. Gjennom detaljerte beskrivelser av forskningsfeltet og forskningsprosessen kan forskeren sikre at lesere av rapporten kan kjenne seg igjen og benytte forskningsrapporten i egen forskning, praksis eller hverdag (ibid.).

Reliabilitet omhandler overenstemmelse mellom innsamlet data og virkeligheten (Patel & Davidson, 2011). Ved bruk av intervju eller observasjon avhenger reliabiliteten av at forskeren unngår vurderingsfeil når svar eller observasjoner registreres (ibid.). Vurderingsfeil kan blant annet unngås ved at man utviser det Steen-Olsen (2010) kaller refleksivitet, som handler om å rette et revidert blikk mot egne antakelser.

I vår studie er validitet tatt hensyn til ved å være ærlig og redelig i rapporten og gjennom rike beskrivelser av metode, gjennomføring, analytiske valg og funn. Vi har også triangulert datainnsamlingen ved bruk av observasjon og intervju, slik at validiteten og måten dataen betraktes på, blir så autentisk som mulig ut fra informantenes perspektiv. I våre analyser presenteres kontekst, for eksempel ved at vi har beskrevet oppgavene elevene arbeidet med mens vi observerte klassen, slik at leseren på en bedre måte kan forstå våre eksempler, analyser og funn. I analyser av dialogene i klasserommet er utdrag presentert og beskrevet, noe som er typisk for bruk av rike beskrivelser. Reliabiliteten er styrket ved at undervisningsøktene ble tatt opp med video og lyd, siden opptakene har ført til en grundig transkribering og flere runder med koding og tolkning. Ved å gjennomføre det ustrukturerte dybdeintervjuet med lærerinformantene har også lærernes meninger påvirket våre tolkninger, noe som kan ha bidratt til færre vurderingsfeil av observasjonene fra undervisningsøktene. Vi har også utfordret hverandre i tolkning og analyse av datamaterialet. Dette har ført til kritiske tolkninger av observasjon- og intervjudata, og et revidert blikk på egne antakelser.

3.6.2 Generealiserbarhet, nytte og viktighet

I kvalitativ forskning er man ute etter å beskrive noe spesifikt, fremfor noe generelt. Dette medfører at man ikke har de samme mulighetene for generalisering som i kvantitativ forskning hvor kvantiteter, statistikk og målbare enheter kan generaliseres (Tjora, 2012). Et formål med kvalitativ forskning er likevel at funn skal kunne generaliseres eller brukes i sammenheng med annen utviklet teori og kunne danne grunnlag for videre forskning, eller innsikt i et spesifikt fenomen eller sosiale settinger (Creswell, 2014).

Tjora (2012) viser til tre ulike former for generalisering innenfor kvalitativ forskning. Den første formen kalles *naturalistisk generalisering* og innebærer en detaljert beskrivelse av forskningsprosessen og forskningsfeltet. Denne beskrivelsen gir leseren mulighet til å vurdere hvorvidt funnene har gyldighet for egen forskning eller praksis. Den andre formen Tjora (2012) omtaler er *moderat generalisering* som handler om at forskeren definerer hvor, når og i hvilke settinger resultatene i forskningsrapporten har sin gyldighet. Den tredje formen er *konseptuell generalisering* som bygger på at forskeren utvikler konsepter, typologier eller teorier på bakgrunn av egen forskning som kan være relevant for videre forskning eller i andre lignende settinger eller situasjoner.

Vår forskningsrapport danner, ut fra rike beskrivelser av lærernes grep, grunnlag for naturalistisk generalisering, som bidrar til at lesere av rapporten kan vurdere om våre funn er relevante for deres praksis eller forskning. Vi mener også at forskningsrapporten til en viss grad bidrar til konseptuell generalisering, siden vi blant annet har utviklet begreper innenfor samtalegrep og undervisningsorganisering og samtalestruktur som kan forskes videre på, eller brukes i lignende settinger eller situasjoner. Studien som helhet viser interessante konsepter som kan forskes videre på eller adapteres av matematikklærere. Gjennom rike beskrivelser av metodiske og analytiske valg, samt grundige beskrivelser av forskningsfeltet og funnene, kan lesere derfor dra nytte av vår forskning. Ifølge Battista (2009) er nytte subjektivt. Lærere vil for eksempel kunne definere nytteverdi i forskning annerledes enn politikere. Schoenfeld (2008) peker på at forskning kan være mer eller mindre viktig for ulike lesere. Vi mener at vår studie først og fremst er relevant for andre matematikklærere som ønsker å utvikle egen praksis med fokus på kommunikasjon i klasserommet. Vi mener også at resultatene kan være viktige for lærerutdanningen, for å avgjøre i hvilken grad fokus bør rettes mot læreres kunnskap om matematiske samtaler.

3.6.3 Metodekritikk

Vi har observert to lærerinformanters undervisningspraksis i 1 uke. Selv om datamaterialet består av 9 klokketimer undervisning, kan det likevel være sider ved lærernes praksis som ikke kommer til uttrykk i vårt datamateriale. Vi har rettet fokus mot tre undersøkelsesfaktorer i analysen. Det er trolig også andre viktige faktorer som kan styrke de matematiske samtalene i klasserommet. Til tross for dette vil vi hevde at oppgavene, lærernes samtalegrep og undervisningsorganisering og samtalestruktur i stor grad fanger undervisningsøktenes helhet, noe som har bidratt til at vi har betraktet flere, og de mest fremtredende aspektene, til våre informanters praksis knyttet til de matematiske samtalene.

Analysene av datamaterialet farges av våre forkunnskaper og antakelser som forskere, noe som vil kunne medføre at elementer i analysene av datamaterialet vektlegges på en annen måte enn andre ville gjort. Vi har benyttet oss av video- og lydopptak i våre observasjoner. Ifølge Tjora (2012) kan video- og lydopptak virke forstyrrende for informantene, og deres væremåte vil kunne endres. Denne problemstillingen har vært gjeldene i vårt prosjekt. Likevel uttrykte lærerinformantene en oppfatning av at elevene og de selv hadde fremstått naturlig og autentisk gjennom datainnsamlingen.

4 Analyse, funn og diskusjon

Kapitlet er strukturert etter våre tre undersøkelsesfaktorer. I første delkapittel beskrives og analyseres oppgavene fra undervisningsøktene. I andre delkapittel analyserer vi utdrag fra det transkriberte datamaterialet og presenterer spesifikke samtalegrep lærerne benytter seg av i dialog med elevene. I tredje delkapittel beskrives og analyseres undervisningsorganisering og samtalestruktur.

4.1 Beskrivelse og analyse av oppgavene

Dette delkapitlet inneholder beskrivelse og analyse av de tre hovedoppgavene elevene arbeidet med i løpet av datainnsamlingen. Beskrivelsene danner grunnlag for analyser av oppgavenes struktur og om oppgavene inneholder kjennetegn for å kunne karakteriseres som kognitivt utfordrende. Beskrivelsene av oppgavene har også til hensikt å gi kontekst til analysene i kapittel 4.2 og 4.3.

4.1.1 Hovedoppgave 1: Kombinasjonskart

Antall 8-ere

14	112														
13	104	110													
12	96	102	108												
11	88	94	100	106											
10	80	86	92	98	104	110									
9	72	78	84	90	96	102	108	114							
8	64	70	76	82	88	94	100	106	112						
7	56	62	68	74	80	86	92	98	104	110					
6	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102					
5	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106	112	118	124
4	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98	104	110	116
3	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108
2	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100
1	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92
0		6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Antall 6-ere

1. Finn mønster
2. Hva skjer når du går opp to rader? Hvorfor økes tallene på kartet med 16?
3. Hva skjer hvis du flytter deg en rad oppover og så en kolonne til venstre?
4. Hva skjer hvis du går to rader ned og hopper tre kolonner til høyre? Hvorfor blir det slik?
5. Tallet 30 finnes to ganger på kombinasjonskartet. Hva betyr det? Hvorfor er det sånn? Hva slags endringer finner sted mellom de to tallene?
6. Hvor finner du tallene 52 og 66? Hvorfor finner du dem der? Finner du igjen kombinasjonene dine fra plakatene du laget forrige time?

Figur 1: Hovedoppgave 1 om kombinasjonskart

Beskrivelse

Første hovedoppgave tok utgangspunkt i et kombinasjonskart (figur 1). Elevene arbeidet med denne oppgaven i undervisningsøktene på mandag (to økter på 90 minutter). Oppgaven var en fortsettelse av et tidligere arbeid hvor elevene skulle fylle inn tallene i kombinasjonskartet. Kombinasjonskartets felter representerer den totale lengden på et gjerde som skal ringe inn en bane der det skal foregå en hoppekonkurranse for frosker. Total gjerdelengde må kombineres av planker på 6 og 8 meter. I kombinasjonskartet representerer kolonnene planker på 6 meter, mens radene representerer planker på 8 meter. Oppgaven er inndelt i seks deloppgaver. Den første deloppgaven ber elevene finne mønster i kombinasjonskartet, mens de øvrige fem oppgavene ber elevene forklare spesifikke mønstre eller spesifikke tall i tabellen.

Analyse av oppgavens struktur

Første deloppgave er formulert slik: «Finn mønster». Oppgaveteksten gir styring for hva elevene skal gjøre, og er formulert som en beskjed. Formuleringen legger opp til at elevene kan arbeide med mønstrene de selv finner i kombinasjonskartet. Det er ikke gitt *hvilke* mønstre elevene skal finne. Oppgaven legger på denne måten få føringer for elevene, samtidig som oppgaven ikke har fasitsvar. Oppgaveteksten kan ikke forstås på mer enn én måte, og kan derfor sies å ha en lukket start. Hashimoto og Becker (1999) viser at én måte oppgaver kan være åpne på, er ved å ha flere mulige løsninger. Oppgaver som har flere mulige løsninger kalles *open-ended* (ibid.). Deloppgave 1 kan derfor, på grunn av en lukket start og flere mulige løsninger, karakteriseres som *open-ended*. Sullivan m.fl. (2015) viser at oppgaver kan inneha det de kaller *low floor - high ceiling*, som innebærer at en oppgave har lav inngangsterskel og er lett å komme i gang med, samtidig som den åpner for mer avanserte tenkemåter og løsningsstrategier. At deloppgave 1 åpner for å finne flere ulike mønstre, gjør at elevene kan finne enkle mønstre, eksempelvis at tallverdien øker med 2 hvis man beveger seg én rute opp og én rute til venstre. Muligheten til å finne enkle mønstre gjør at oppgaven har en lav inngangsterskel (*low floor*). Elevene kan imidlertid også velge å fokusere på mer avanserte mønstre, eksempelvis at alle tallene i kombinasjonskartet er partall. Deloppgavens muligheter for å finne mer avanserte mønstre gjør at oppgaven også kan sies å høy takhøyde (*high ceiling*). Deloppgave 1 innehar dermed både det Sullivan m.fl. (2015) kaller *low floor*, og *high ceiling*.

De tre neste deloppgavene har lengre formuleringer enn første deloppgave, og kan betraktes som mer spesifikke. Blant annet formuleres deloppgave 2 slik: «Hva skjer når du går opp to rader? Hvorfor økes tallene på kartet med 16?». Deloppgave 3 formuleres slik: «Hva skjer hvis du flytter deg en rad oppover og så en kolonne til venstre?». Og deloppgave 4 formuleres slik: «Hva skjer hvis du går to rader ned og hopper tre kolonner til høyre? Hvorfor blir det slik?». Disse tre deloppgavene ber elevene se på spesifikke mønstre, og deloppgave 2 og 4 ber også elevene forklare *hvorfor*. Deloppgave 3 ber elevene beskrive hva som skjer. Deloppgave 2, 3 og 4 har dermed en lukket start. De har i tillegg ett fasitsvar, henholdsvis at tallene øker med 16 fordi vi adderer to åttere (oppgave 2), at tallverdien øker med 2 hvis man beveger seg én opp og én til venstre (oppgave 3), og at tallverdien øker med 2 meter hvis man flytter seg to rader ned og tre kolonner til høyre fordi vi trekker fra to åttere og legger til tre seksere (oppgave 4). At oppgavene har fasitsvar, innebærer at de også har en lukket slutt. Elevene kan imidlertid beskrive og forklare mønstrene på flere ulike måter og ved bruk av ulike representasjoner. Oppgaven legger heller ingen føringer for hvor i tabellen elevene skal finne og forklare de respektive mønstrene. Deloppgave 2-4 kan derfor betraktes som det Hashimoto og Becker (1999) kaller *open-middled*, som innebærer at oppgavene kan løses ved bruk av ulike løsningsstrategier.

Deloppgave 5 og 6 tar utgangspunkt i spesifikke tall i kombinasjonskartet og ber elevene forklare sammenhengene eller forskjellene mellom dem. Deloppgave 5 er formulert slik: «Tallet 30 finnes to ganger i kombinasjonskartet. Hva betyr det? Hvorfor er det sånn? Hva slags endringer finner sted mellom de to tallene?». Deloppgave 6 er formulert slik: «Hvor finner du tallene 52 og 66? Hvorfor finner du dem der? Finner du igjen kombinasjonene dine fra plakatene du laget forrige time?». Disse deloppgavene har klare formuleringer og ett riktig svar hver, noe som innebærer lukket start og lukket slutt. Både deloppgave 5 og 6 ber elevene forklare. Elevene kan selv velge på hvilken måte dette gjøres. Disse oppgavene kan derfor løses ved bruk av ulike løsningsstrategier, og dermed betraktes som det Hashimoto og Becker (1999) kaller *open-middled*.

Deloppgavene 2-6 har ulik grad av det Sullivan m.fl. (2015) kaller *low floor - high ceiling*. Deloppgave 2, 3 og 4 ber elevene beskrive et spesifikt mønster, før det forklares (unntatt deloppgave 3, som bare innebærer beskrivelse). Disse mønstrene kan finnes og forstås ved bruk av enkle strategier som åpner for at elevene kan komme raskt i gang med oppgavene. I deloppgave 5 og 6 må elevene gå rett på forklaring. Ifølge Niss og Jensen (2002) er forklaringer på et høyere matematisk nivå enn beskrivelser. Dette gjør at deloppgavene 2-4 har en lavere inngangsterskel (*low floor*) enn deloppgave 5 og 6, der elevene må gå rett på forklaring. *High ceiling* dreier seg som nevnt om dybden i oppgavene. Ved at deloppgave 5 og 6 fokuserer på spesifikke tall som elevene skal finne flere steder i tabellen og forklare, legger de til rette for arbeid med matematiske ideer, for eksempel ekvivalens. Elevene kan for eksempel oppdage at tallet 52 kan dannes ved å kombinere 6x6 + 2x8, eller ved å kombinere 5x8 + 2x6. Elevene kan se at disse to uttrykkene har samme verdi, noe som kan bidra til dypere tallforståelse og forståelse for likhetstegnet. Slike koblinger til matematiske ideer bidrar til økt dybde (*high ceiling*) i disse deloppgavene. Ser vi oppgavene i sammenheng kan vi si at deloppgavene 2-6 totalt sett innehar mindre grad av *low floor - high ceiling* enn deloppgave 1. Deloppgavene 2-4 har likevel større grad av det Sullivan m.fl. (2015) kaller *low floor*, sammenlignet med deloppgavene 5 og 6. Deloppgave 5 og 6 inneholder imidlertid stor grad av *high ceiling*.

Analyse av oppgavens utfordring

Franke m.fl. (2007) argumenterer for at oppgaver som kan løses på flere ulike måter kan bidra til å gjøre dem mer utfordrende. Vi har i analysen av oppgavens struktur sett at deloppgave 1 har flere mulige svar, og kan løses på flere ulike måter. Deloppgavene 2-6 kan også løses på flere ulike måter. Ponte og Quaresma (2016) argumenterer for at oppgaver som krever at elevene forklarer, er utfordrende. Dette siden forklaringsoppgaver ofte ikke er ferdigoppsatte regnestykker, men fokuserer på at elevene selv må finne egne strategier de kan bruke i sine forklaringer. Ved at deloppgave 2, 4, 5 og 6 eksplisitt ber elevene forklare, kan de ut fra Ponte og Quaresma (2016) sees på som utfordrende. Alle deloppgavene innehar på denne måten kjennetegn som peker mot en viss grad av generell utfordring.

Smith og Stein (1998) viser at oppgaver kan analyseres ut fra kognitiv utfordring, og de skiller mellom *lavere kognitive krav* og *høyere kognitive krav*. For å finne mønstre i deloppgave 1 kan elevene bruke ulike strategier som involverer prosedyrer, eksempelvis dobling, addisjon og multiplikasjon. Deloppgavens korte formulering, «finn mønster», sier ikke noe om at elevene skal forklare mønstrene. Isolert sett innebærer derfor ikke deloppgave 1 at elevene skal koble strategiene de bruker til overordnede matematiske ideer, og kan derfor betraktes som det Smith og Stein (1998) kaller *prosedyrer uten koblinger*, som befinner seg innenfor kategorien *lavere kognitive krav*. Stein og Smith (1998) viser at lærerens presentasjon og veiledning kan påvirke oppgavene til å bli mer eller mindre kognitivt utfordrende enn de i utgangspunktet er. Læreren i vårt datamateriale presiserte i presentasjonen av oppgaven at i tillegg til å finne mønstre, måtte elevene formulere forklaringer til mønstrene de fant. Dette førte til at elevene måtte forklare, og i større grad se koblinger mellom, prosedyrene de valgte å bruke. Lærerens presentasjon førte derfor til at den kognitive utfordringen i deloppgave 1 ble større enn formuleringen i utgangspunktet skulle tilsi. Hvis lærerens presentasjon tas med i analysen av oppgaven, kan deloppgave 1 derfor betraktes som det Smith og Stein (1998) kaller *prosedyrer med koblinger*, som innebærer større fokus på kobling til matematiske ideer og et større fokus på forståelse for prosedyrene. *Prosedyrer med koblinger* befinner seg ifølge Smith og Stein (1998) innenfor kategorien *høyere kognitive krav*.

Deloppgave 2-4 betraktes sammen, da de har lik struktur. Disse deloppgavene kan, i likhet med første deloppgave, løses ved bruk av automatiserte regneoperasjoner som dobling, addisjon og multiplikasjon. At deloppgavene 2 og 4 eksplisitt ber elevene forklare løsningen sin, samt at læreren i presentasjon av oppgavene presiserte at alle oppgavene skulle foklares, bidar likevel til å løfte disse oppgavene opp til det Smith og Stein (1998) kaller *høyere kognitive krav*, nærmere bestemt *prosedyrer med koblinger*. Dette fordi elevene må vise forståelse for prosedyrene de bruker i oppgaveløsningen gjennom å forklare dem, samtidig som oppgavene gir elevene mulighet til å se ulike matematiske sammenhenger.

Deloppgave 5-6 er også relativt lik i struktur og innhold. De fokuserer på spesifikke tall i kombinasjonskartet, hvor elevene, på bakgrunn av deres forståelse for sammenhengene, må forklare forskjeller mellom tallene. Begge disse oppgavene danner grunnlag for generalisering og dypere matematisk forståelse siden elevene kan finne og begrunne avanserte mønstre og matematiske sammenhenger, for eksempel ekvivalens. Dette bidrar til at de kan betraktes som mer utfordrende enn deloppgave 1-4. Deloppgave 5-6 stiller derfor det Smith og Stein (1998) kaller *høyere kognitive krav*. Deloppgavene 5-6 skiller seg ut siden de i særlig grad fordrer at elevene skal forstå sammenhengene i kombinasjonskartet. Likevel kan ikke deloppgave 5-6 plasseres innenfor det Smith og Stein (1998) kaller *gjøre matematikk*, som innebærer komplekse oppgaver som ikke fokuserer på innøvde eller forutsigbare fremgangsmåter. Dette skyldes at elevene kan løse deloppgave 5 og 6 med utgangspunkt i kunnskap de har opparbeidet seg gjennom de øvrige deloppgavene, så lenge elevene gjør oppgavene i denne rekkefølgen. Deloppgave 5 og 6 kan derfor i likhet med deloppgavene 2-4 betraktes som *prosedyrer med koblinger*, men med et høyere kognitivt krav enn de øvrige deloppgavene.

4.1.2 Hovedoppgave 2: Hoppekonkurranse for frosker

Hoppe-konkurranse for frosker:

Frosken MT arrangerer ny hoppekonkurranse.

Vinneren kåres nå etter to runder hvor begge runder sees i sammenheng for å kåre vinneren. Frosken kommer like langt på begge rundene, det er inndeling i hopp og skritt som er forskjellig.

Ellers gjelder samme regel som før: *alle hopp en frosk hopper er like lange – og alle skritt en frosk tar er like lange.*

Vinneren er den frosken som har det lengste hoppet.

PaddePers resultater: Etter 4 hopp og 11 skritt *forover*, lander han på samme sted som når han hopper 5 hopp og 4 skritt *forover*.

FroskeLurs resultater: Etter 3 hopp og 6 skritt *forover*, lander han på samme sted som når han hopper 4 hopp *framover* og tar 2 skritt *bakover*.

MTs resultater: Etter 2 hopp og 13 skritt *forover*, lander han på samme sted som når han hopper 4 hopp *framover* og 5 skritt *bakover*.

Figur 2: Hovedoppgave 2 om froskenes hoppekonkurranse

Beskrivelse

Den andre hovedoppgaven ble arbeidet med i undervisningsøktene på tirsdag (to økter på 90 minutter), og tok utgangspunkt i en hoppekonkurranse for frosker. Oppgaven kan sees på som en kontekstuell fortsettelse av arbeidet med kombinasjonskartet (se kap 4.1.1). Dette siden kombinasjonskartet omhandlet å kombinere ulike gjerdelengder for å gjerde inn en bane hvor det skulle foregå en hoppekonkurranse for frosker, og at denne oppgaven omhandler selve hoppekonkurransen. Oppgaven forteller at froskene hoppet to runder hver, og at de landet på eksakt samme plass i begge rundene. Antall hopp og skritt var imidlertid ulikt i de to forsøkene. Oppgaven oppgir også hvor mange hopp og skritt de ulike froskene hadde i sine to forsøk. Basert på denne informasjonen måtte elevene selv finne en måte å løse følgende muntlig formulerte problem: «hvilken av de tre froskene har det lengste enkelthoppet?», det vil si flest skritt i hvert hopp.

Analyse av oppgavens struktur

Andre hovedoppgave inneholder ikke et skriftlig formulert spørsmål, men læreren presenterte muntlig i undervisningsøktene at oppgaven innebærer å finne ut hvilken frosk som har det ene lengste hoppet i hoppekonkurransen. Dette betyr at oppgavens formulering gir styring til hva elevene skal finne ut, og gjør at oppgavens start kan betraktes som lukket. Oppgaven har et fasitsvar: Frosken MT har flest skritt i hvert av sine hopp (9 skritt), noe som medfører at oppgaven har en lukket slutt. Opplysningene som gis i oppgaven åpner likevel for flere mulige løsningsmetoder. Elevene kan eksempelvis prøve seg frem, bruke tegninger eller sette hoppene og skrittene opp som likninger (dette var metoder vi observerte at elevene brukte). At oppgaven har en lukket start og slutt, samtidig som elevene har flere valgmuligheter for fremgangsmåte, gjør at oppgaven kan betraktes til å være det Hashimoto og Becker (1999) kaller *open-middled*, som innebærer at oppgaven kan løses på flere ulike måter.

Informasjonen elevene får i oppgaven kan karakteriseres som mer abstrakt enn informasjonen elevene får i hovedoppgave 1 (se kap 4.1.1). Oppgaven inneholder ikke isolerte tall elevene må forholde seg til, men presenterer antall hopp og skritt til tre frosker. Dette, og at det bare er ett formulert problem i oppgaven, gjør oppgaven kompleks. I tillegg er likninger en naturlig måte å løse oppgaven på, allerede fra starten. Dette kan gjøre oppgaven vanskeligere for elevene å tolke i starten av oppgaveløsningen. Oppgaven kan, med bakgrunn i at den er vanskeligere å komme i gang med, betraktes til å ha mindre grad av det Sullivan m.fl. (2015) kaller *low floor*, sammenlignet med oppgavene tilknyttet kombinasjonskartet. Elevene må derfor bruke lenger tid for å komme i gang med oppgaven. Det er lite rom for å finne ut mer enn det selve oppgaven spør elevene om, siden det ikke er rene tall, men hopp og skritt, det arbeides med. Oppgaven kan derfor betraktes til å inneholde mindre grad av det Sullivan m.fl. (2015) kaller *high ceiling*, sammenlignet med oppgavene fra hovedoppgave 1.

Analyse av oppgavens utfordring

Som vist i analysen av oppgavens struktur, inneholder denne hovedoppgaven ingen føringer for hvilken strategi elevene skal benytte seg av for å finne svarene. Dette betyr at elevene kan velge hvilke strategier de vil bruke i oppgaveløsingen. Franke m.fl. (2007) viser at dette er ett kjennetegn ved utfordrende oppgaver. Ved at elevene kan løse oppgaven ved å prøve seg frem, tegne eller sette opp som likninger, inneholder denne oppgaven derfor en viss grad av utfordring. Et annet kjennetegn på utfordring er, ifølge Franke m.fl. (2007), at elevene må forklare sine løsningsstrategier og svar. Oppgaven ber ikke elevene eksplisitt om å forklare hvordan de har tenkt, men i presentasjonene av oppgaven presiserte læreren at elevene måtte formulere forklaringer til sine løsningsstrategier. Læreren la på denne måten opp til at elevene skulle forklare.

Betrakter vi oppgaven ut fra Smith og Stein (1998) sitt rammeverk for kognitiv utfordring, kan oppgaven sees på som å *gjøre matematikk*, som er en kategori av oppgaver som befinner seg innenfor *høyere kognitive krav*. Siden oppgaven er kompleks og ikke vektlegger en spesifikk prosedyre, må elevene bruke lang tid på å utforske, tolke og forstå hvordan oppgaven kan løses. Smith og Stein (1998) vektlegger at oppgaver som handler om å *gjøre matematikk* ofte innebærer at elevene blir usikre på om svaret de har kommet frem til er rett, eller om løsningsstrategien som er brukt virker. Ut fra våre observasjoner av elevenes arbeid, spurte mange elever læreren om svaret de hadde kommet frem til var rett eller galt. Dette kan være et resultat av at de arbeidet med hopp og skritt, fremfor rene tall. En slik søken etter bekreftelse kan tyde på at elevene befant seg i det Stillman m.fl. (2009) omtaler som utkanten av sin komfortsone. Læreren bekreftet eller avkreftet sjelden slike spørsmål, men sa i stedet at elevene måtte begrunne hvorfor de mente at svaret var rett eller galt. At læreren i presentasjonene av oppgaven formidlet at elevene måtte forklare sine metoder og svar, i stedet for å bekrefte eller avkrefte dem, bidrar til at oppgaven opprettholder sitt kognitive krav i det Stein og Smith (1998) kaller implementeringsfasen.

4.1.3 Hovedoppgave 3: Vannproblemet

Beskrivelse

Tredje hovedoppgave er kalt «vannproblemet» og elevene arbeidet med oppgaven på onsdag og torsdag (til sammen 4 økter på 45 minutter). Oppgaven tok utgangspunkt i en film som viste en lekk vannkrann, hvor det dryppet vann ned i en vask der troppen var igjen. Vasken ble gradvis fylt med vann. Elevene fikk i oppgave å finne ut hvor lang tid det ville ta før vasken ble helt full. Undervisningsøktene knyttet til denne oppgaven startet, etter elevene hadde sett filmen, med en idémyldring knyttet til hvilken informasjon de måtte ha for å kunne løse problemet. Etter en stund fikk elevene nok informasjon til at de kunne sette i gang med oppgaveløsningen. Vasken rommet 11,3 liter vann, og det dryppet 0,1 liter per 10. minutt. At elevene fikk denne informasjonen var nødvendig for å løse oppgaven, og kan derfor betraktes som selve oppgaveteksten, og ikke som en forenkling av problemet. Basert på opplysningene måtte elevene selv finne strategier for å komme frem til svaret på oppgaven.

Analyse av oppgavens struktur

Oppgaven om vannproblemet ble formulert muntlig, og som et konkret spørsmål: «Hvor lang tid tar det før vasken blir full?». Formuleringen gir klar styring for hva elevene skal finne ut, og oppgaven kan derfor betraktes til å ha en lukket start. Basert på opplysningene elevene fikk presentert, har oppgaven bare ett mulig svar (18 timer og 50 minutter). Oppgaven har derfor også en lukket slutt. Selv om oppgaven formuleres av læreren, får elevene selv velge hvilke strategier de vil bruke for å løse den. Oppgaven kan derfor betraktes som det Hashimoto og Becker (1999) kaller *open-middled*, som innebærer at oppgaven kan løses på flere ulike måter. Elevene kan velge å bruke enklere strategier, eksempelvis å stegvis addere 0,1 desiliter til de kommer til 11,3 liter, og deretter se hvor mange minutter dette tilsvarer. Elevene kan også bruke mer avanserte eller effektive strategier, eksempelvis å først finne ut at 0,6 liter fylles på 60 minutter og deretter regne seg oppover til 11,3 liter (begge disse strategiene ble observert). At elevene kan bruke enklere strategier, bidrar til en lavere inngangsterskel til oppgaven. Dette indikerer at oppgaven har det Sullivan m.fl. (2015) kaller *low floor*. At elevene kan bruke mer effektive og avanserte strategier, innebærer at oppgaven har det Sullivan m.fl. (2015) kaller *high ceiling*.

Analyse av oppgavens utfordring

Oppgavens åpenhet gjør at den kan løses på flere ulike måter, og ved hjelp av flere ulike representasjoner, som ifølge Franke m.fl. (2007) er to kjennetegn ved utfordrende oppgaver. Oppgaven kan også tolkes som sammensatt, siden elevene kan løse oppgaven ved hjelp av flere ulike steg. Informasjonen elevene vet, er at vasken rommer 11,3 liter og at vasken drypper 0,1 liter per 10. minutt. At måleenheten er liter og tidsenheten er minutter, åpner for å begynne å se på hvor mange minutter det tar å fylle 11,3 liter. Selv om 1130 minutter også er et riktig svar, vil det være mer hensiktsmessig å oppgi svaret i timer og minutter. Neste steg i oppgaveløsningen kan derfor innebære å gjøre om minuttene til timer og minutter. At elevene kan løse oppgaven i slike faser, og eventuelt velge å være tilfreds med å ha svaret i minutter, bidrar også til at oppgaven kan løses på flere ulike måter, som er et kjennetegn ved utfordrende oppgaver.

Oppgaven kan betraktes ut fra Smith og Stein (1998) sitt rammeverk for kognitiv utfordring. Ved at oppgaven presenteres uavhengig av de andre undervisningsøktene, henger ikke oppgaven sammen med et spesifikt tema. Oppgaven kan derfor sees på som en enkeltstående problemløsningsøkt der elevene selv må utforske oppgaven for å komme frem til hensiktsmessige løsningsstrategier. Dette peker mot det Smith og Stein (1998) kaller å *gjøre matematikk*, som innebærer at elevene må analysere og utforske oppgaven for å forstå matematiske konsepter, prosesser og sammenhenger. En naturlig måte å løse oppgaven på, er likevel å bruke kjente prosedyrer innenfor addisjon og multiplikasjon. Om oppgavetypen *prosedyrer med koblinger* skriver Smith og Stein (1998) blant annet: «Although general procedures may be followed, they cannot be followed mindlessly» (s. 348). At oppgaven krever utforsking for å komme i gang med, men samtidig er mulig å løse ved bruk av regneoperasjoner som er kjent for elevene, gjør at oppgaven kan betraktes som en mellomting av det Smith og Stein (1998) kaller *gjøre matematikk* og det de kaller *prosedyrer med koblinger*, som begge befinner seg innenfor *høyere kognitive krav*.

4.1.4 Oppsummering og diskusjon av oppgavene

Tabell 1 illustrerer hvordan oppgavenes struktur og kognitive krav er analysert.

Tabell 1: Oppgaveanalyse

Hoved-oppgave	**Deloppgave**	**Type åpenhet**	**Low floor - high ceiling**	**Oppgavetype**	**Kognitiv utfordring**
1	1	Open-ended	Stor grad	Prosedyrer med koblinger	Høyere
	2, 3 og 4	Open-middled	Vesentlig grad	Prosedyrer med koblinger	Høyere
	5 og 6	Open-middled	Vesentlig grad	Prosedyrer med koblinger	Høyere
2	*	Open-middled	Mindre grad	Gjøre matematikk	Høyere
3	*	Open-middled	Stor grad	Prosedyrer med koblinger / gjøre matematikk	Høyere

Tabellen viser at alle oppgavene stiller det Smith og Stein (1998) kaller *høyere kognitive krav* til elevene, siden de alle kan karakteriseres som *prosedyrer med koblinger* eller *gjøre matematikk*. Oppgavenes kognitive utfordring gjør at elevene i større grad må forstå og forklare oppgavene eller problemene, i stedet for å bare anvende prosedyrer. Alle oppgavene, med unntak av deloppgave 1, er tolket til det Hashimoto og Becker (1999) kaller *open-middled*, som innebærer at oppgavene kan løses på flere mulige måter. Deloppgave 1 er tolket som *open-ended*, siden oppgaven har en åpenhet som tillater flere riktige svar. Første og tredje deloppgave i hovedoppgave 1 er analysert til *prosedyrer med koblinger* siden læreren ber elevene om forklaring, selv om oppgaven i utgangspunktet ikke gjør det. Franke m.fl. (2007) sier at utfordrende oppgaver er oppgaver som kan løses på flere ulike måter, og som kan involvere flere representasjoner. Det betyr at oppgaver som er utfordrende, og oppgaver som er det Hashimoto og Becker (1999) kaller *open-middled*, til en viss grad overlapper hverandre. De ulike hoved- og deloppgavene innebærer ulik grad av det Sullivan m.fl. (2015) kaller *low floor - high ceiling*. Oppgavenes innslag av *low floor* gjør at elever som befinner seg på ulikt matematisk nivå kan arbeide med samme oppgave helt fra start. Det bidrar også til at elevene kommer lett i gang med oppgavene. *High ceiling* sikrer at elevene kan arbeide med oppgavene over et lengre tidsrom, eksempelvis ved å finne mer avanserte mønstre eller sammenhenger. Det innebærer også at mønstrene kan forklares på ulike matematisk nivåer, og ved hjelp av ulike representasjoner.

Ifølge Smith og Stein (2011) foregår gode undervisningsøkter med basis i utfordrende oppgaver. Oppgavene fra undervisningsøktene er generelt kognitivt utfordrende, og kan løses på flere ulike måter. At oppgavene kan løses på flere måter kan påvirke de matematiske samtalene ved å legge til rette for at elevene kan utvikle forskjellige strategier det kan samtales om. Lærernes grep knyttet til oppgavene er først og fremst utvelgelsen av slike åpne og utfordrende oppgaver. Et annet grep er knyttet til lærernes presentasjoner av oppgavene, blant annet ved å ikke forenkle oppgavene ved å gi elevene strategier eller prosedyrer for å løse dem. Deloppgave 1 og 3 i hovedoppgave 1 omformes i stedet av læreren til å bli mer kognitivt utfordrende ved at elevene blir fortalt at mønstrene skal forklares, til tross for at forklaring ikke er en del av oppgaveteksten.

4.2 Samtalegrep

I dette delkapittelet presenteres og analyseres utdrag fra det transkriberte datamaterialet knyttet til dialogen i klasserommet. Fokuset er rettet mot samtalegrep lærerinformantene benyttet hyppigst i samtalene med elevene. Kapitlet er delt inn i fire underkapitler som viser våre hovedfunn innenfor undersøkelsesfaktoren samtalegrep.

I utdragene nummereres de ulike deltakernes utsagn, og hver nye uttalelse gis et nytt nummer. Hvert utdrag starter på ny nummerering. Lærerens utsagn er markert med «L». Alle navn som brukes er fiktive, og viser elevenes utsagn. Dialogen er transkribert på normalisert språk. Pauser i dialogen (ventetid) på 0,5-1,0 sekund er markert med to prikker (..) og pauser fra 1-3 sekunder er markert med tre prikker (…).

4.2.1 Åpne spørsmål

Et av de første samtalegrepene som utmerket seg i kodingen var lærernes bruk av åpne spørsmål. Først presenteres og analyseres eksempler knyttet til tre typer åpne spørsmål, før vi diskuterer samtalegrepet opp mot relevant forskningslitteratur.

Eksempel 1: Åpne spørsmål med retning

Det første eksemplet er hentet fra onsdag økt 2 der klassen jobbet med tredje hovedoppgave (vannproblemet). Læreren har vist elevene filmen av kranen som drypper.

1. L: Filmen stopper jo her. Så vi er jo nødt til å få litt kjøtt på beinet. Hvor lang tid tar det før vasken er full? Hvordan i all verden kan vi finne ut det? (…) Må vi vite noe da? (…) Sonja?
2. Sonja: Hvor mye det drypper hver dag.
3. L: Hvor mye det drypper hver dag, for eksempel. Det kunne vært gunstig å vite. Hvis vi skal tippe da (..) Hvor lang tid? Hvis vi tipper helt random? (..)
4. Sonja: Kanskje en dag eller to?
5. L: Kanskje en dag eller to.
6. Harald: 32 minutter og 56 sekunder.
7. L: Okei. Det var jo (..) veldig sprik i tippingen her. Hva tipper du da? (ser på Knut)
8. Knut: 3 dager.
9. L: Okei, et par dager (..) Okei da, hvis vi skal klare å regne det ut da. Så (..) Hva var det du sa, Sonja? Hva er vi nødt til å vite?
10. Sonja: Hvor mye det drypper hver dag.

Hvis vi ser på lærerens første spørsmål i linje 1, «hvor lang tid tar det før vasken er full?», legger vi merke til at læreren ikke kommer med tilleggsinformasjon i spørsmålet, men ber om forslag fra elevene basert på oppgaven slik den er formulert. Når læreren videre spør «må vi vite noe da?» styres samtalen mot behovet for informasjon, noe som fører til at Sonja foreslår at man må vite hvor mye det drypper hver dag. Spørsmålet gjør at Sonja retter fokus mot tidsbegrepet, som handler om å vite mengde per tidsenhet. Selv om Sonjas valg av tidsenhet i dette tilfellet er lite hensiktsmessig å bruke, viser responsen at hun har begynt å tenke på hvordan oppgaven kan løses. Læreren spør i linje 3 «hvor lang tid? Hvis vi tipper helt random?». Læreren ber i dette spørsmålet elevene om å estimere. Selv om dette spørsmålet styrer samtalen mot tid, er spørsmålet likevel åpent siden elevene kan foreslå hva de selv tror, samtidig som læreren ikke gir elevene hint. Ved at læreren i linje 9 spør «hva er vi nødt til å vite?» styres samtalen tilbake til behovet for mer informasjon. Spørsmålet er likevel i høyeste grad åpent, siden læreren ikke presenterer tilleggsinformasjon for elevene.

Eksemplet viser at lærerens bruk av *åpne spørsmål med retning* bidrar til at samtalen styres mot hva elevene bør se på, i dette tilfellet behovet for mer informasjon og estimering av hvor lang tid det vil ta før vasken er full. Selv om spørsmålene gir styring, er de likevel åpne siden læreren ikke presenterer tilleggsinformasjon eller hint, og siden elevene kan velge mellom flere ulike svar. I vårt datamateriale ble *åpne spørsmål* ofte brukt på disse måtene, og førte til at innholdet i samtalene omhandlet elevenes egne tanker og ideer i møte med oppgavene, samtidig som det gav retning for samtalen.

Eksempel 2: Helt åpne spørsmål

Eksemplet er hentet fra onsdag økt 1 der elevene utforsket oppgaven om vannproblemet (hovedoppgave 3) i læringspar. Læreren kommer i eksemplet bort til et nytt læringspar.

1. L: Har dere noen tanker, jenter?
2. Åse: Det er jo (…) Det er vertfall plass til 11,3 liter på en vask. Drypper (..) Det blir vel 0,1 gange 10 da?
3. L: Okei, på 10 minutter, så drypper det 0,1 liter (..)

I første linje spør læreren: «Har dere noen tanker, jenter?». Lærerens spørsmål fører til at Åse gjentar noe av informasjonen fra oppgavens formulering, og spør læreren om de kan multiplisere 0,1 med 10.

Hvis vi ser på lærerens spørsmål i linje 1 legges det ingen føringer for hva svaret skal være, og spørsmålet inneholder heller ingen tilleggsinformasjon eller hint. I motsetning til forrige eksempel gir ikke dette spørsmålet styring til hva elevene skal se på eller svare. Elevene kan fortelle om sine umiddelbare tanker. At spørsmålet fører til at Åse sier hva hun tenker, viser at *helt åpne spørsmål* kan føre til at læreren får innsikt i elevenes tanker og ideer ved at elevene beskriver dem. *Åpne spørsmål* ble i betydelig grad brukt på denne måten i vårt datamateriale, særlig mens elevene arbeidet med oppgavene.

Eksempel 3: Åpne spørsmål med generalisering

Følgende eksempel er hentet fra mandag økt 2 der læringsparene arbeider med første deloppgave i kombinasjonskartet. Olav har funnet et mønster der han leser av siste siffer i tallene i de ulike feltene. Han leser fra høyre til venstre i kombinasjonskartet.

1. Olav: At det slutter på 0, 4, 8, 2, 6 (..)
2. L: Finner du igjen mønsteret overalt, eller?
3. Olav: Det gjelder ikke alle, bare bortover.
4. L: Hmm, interessant! Hva kan det komme av?

I linje 1 presenterer Olav et mønster de har funnet. Læreren responderer med et spørsmål hvor hun spør om mønsteret gjelder i hele tabellen, eller om de bare finner det på én plass. Olav svarer i linje 3 at de bare har funnet dette mønsteret bortover (vannrett) i tabellen. Læreren uttrykker i linje 4 at hun synes mønsteret er interessant og spør videre om elevene vet hva dette (mønsteret) kan komme av.

Spørsmålet vi har kodet som *åpent spørsmål med generalisering* stilles i linje 2: «Finner du igjen mønsteret overalt, eller?». Vi legger merke til at spørsmålet er rettet direkte mot elevens utsagn, noe som fører til at samtalen fokuserer på elevenes egen idé. Spørsmålet er åpent siden læreren ikke legger føringer for hva svaret skal være, ikke gir tilleggsinformasjon, og ikke gir hint. Eleven må dermed selv vurdere hva han skal svare. Ved flere anledninger ble *åpne spørsmål* brukt på denne måten i vårt datamateriale, og fungerte for å undersøke om elevene kunne generalisere sine funn, spesielt i arbeidet med kombinasjonskartet.

Diskusjon av åpne spørsmål

I datamaterialet forekommer hovedkategorien *åpne spørsmål* 90 ganger. Felles for de tre typene *åpne spørsmål* er at læreren ikke gir tilleggsinformasjon eller hint til hva elevene skal svare, eller til hvilke metoder de skal bruke. Eksempel 1 viser hvordan *åpne spørsmål med retning* gir styring for hva elevene skal se på og hva samtalen skal fokuseres mot. Eksempel 2 viser hvordan *helt åpne spørsmål* kan bidra til at læreren får innsikt i elevenes tanker og ideer. Eksempel 3 viser hvordan *åpne spørsmål med generalisering* også kan bidra til at læreren får innsikt i elevenes tenkning eller i deres argument. Typisk ble *hva* og *hvordan* brukt som spørreord i denne kategorien, noe som ofte resulterte i at elevene beskrev sine tanker, tolkninger, ideer og metoder.

Hovedkategorien vi har kalt *åpne spørsmål* kan sees i sammenheng med det Drageset (2014) kaller *open progress details*, som innebærer åpne eller delvis åpne spørsmål der formålet er å få innsikt i hvordan eleven tenker og løser eller generaliserer mønstre og løsningsstrategier. *Open progress details* tar ifølge Drageset (2014) sikte på å drive prosessen fremover uten å peke ut en retning, noe som i vårt datamateriale synliggjøres ved bruk av *helt åpne spørsmål* der elevene kan svare generelt om sine tanker og ideer (eksempel 2). At *open progress details* handler om å drive prosessen fremover uten å peke ut retning, skiller seg imidlertid fra det vi har kalt *åpne spørsmål med retning*, der læreren styrer samtalen mot behovet for mer informasjon (eksempel 1). Å gi slik retning til samtalen kan være på grensen til å være en føring, men siden disse spørsmålene likevel innebærer flere mulige svar, er de fortsatt åpne. *Åpne spørsmål med generalisering* gir også en viss retning, og Drageset (2014) skildrer heller ikke *åpne spørsmål med generalisering* som en måte å stille åpne spørsmål på, slik vårt tredje eksempel illustrerer. Slik skiller *åpne spørsmål med retning* og *åpne spørsmål med generalisering* seg fra Drageset (2014) sin kategori, og viser at det er mulig å gi retning for samtalen uten å presentere tilleggsinformasjon eller hint som forenkler oppgaven for elevene. Vår skildring av tre typer *åpne spørsmål* omhandler derfor flere typer *åpne spørsmål* sammenlignet med kategorien *open progress details*, også de som gir en viss styring for samtalen.

Drageset (2014) ser *open progress details* i sammenheng med den overordnede kategorien *progressing*, som handler om å drive samtalen fremover. I alle våre tre eksempler fører lærerens bruk av *åpne spørsmål* til at samtalene drives fremover. Dette skjer særlig med de *åpne spørsmålene* som gir en viss styring, enten inn mot oppgaven som skal løses eller mot et fokus på generalisering. De *åpne spørsmålene* som forekommer er derfor ikke så generelle at hva som helst kan være svar på spørsmålet. Spørsmålene må nødvendigvis styres mot et fokus, og i vårt datamateriale er dette fokuset ofte elevenes egne tanker og ideer knyttet til oppgavene.

Ved bruk av *åpne spørsmål med retning* og *åpne spørsmål med generalisering* rettes derfor fokuset mot elevenes tenkning og strategier, og ikke på lærerens foretrukne strategi eller løsning. Dette kan sees i sammenheng med det Wood (1998) kaller *focusing*, som innebærer veiledende spørsmål som fokuserer på elevens egen tenkning, utsagn eller strategi. Lærerens bruk av *åpne spørsmål* kan derfor fungere som en slags kognitiv katalysator som orienterer elevenes tanker mot oppgaven som skal løses.

Disse måtene å føre samtaler på minner om det Truxaw og DeFranco (2008) kaller for *dialogic communication*, et kommunikasjonsmønster som har til hensikt å belyse alle deltakernes matematiske tanker og ideer. Gjennom bruk av *åpne spørsmål* løfter læreren frem elevenes tankegang ved å ikke legge føringer for hvilken metode som skal brukes eller for hva svaret skal bli. Samtalen tar på denne måten i større grad utgangspunkt i elevenes tanker og ideer, noe som kan bidra til et mer dialogisk kommunikasjonsmønster.

4.2.2 Be om forklaring

Et samtalegrep som tydelig utmerket seg i kodingsprosessen var *be om forklaring*. I dette underkapitlet presenteres og analyseres fire eksempler der lærerinformantene ber om forklaring. Til slutt diskuteres funnene opp mot forskningslitteratur.

Eksempel 1: Hvorfor

Eksemplet under er hentet fra onsdag økt 2. Elevene arbeider med vannproblemet (hovedoppgave 3), og Solfrid beskriver hva læringsparet har kommet frem til.

1. Solfrid: Og da tok vi hvor mange timer (..) For vi må (..) Hvis vi (..) Først så ganget vi det med 10.
2. L: Okei, hvorfor det?
3. Solfrid: Fordi vi vet at vi vertfall må ha over 6 liter.

I andre linje spør læreren *hvorfor* læringsparet valgte å multiplisere med 10. Lærerens spørsmål fører til at Solfrid formulerer en forklaring som starter med «fordi …».

Eksemplet viser at lærerens bruk av spørreordet *hvorfor* fører til at eleven formulerer en forklaring ut fra beskrivelsen av hva de har gjort. Forklaringen formuleres som en begrunnelse som starter med «fordi …». Forklaringene elevene formulerte på bakgrunn av spørreordet *hvorfor* var ofte formulert som en begrunnelse for egen tankegang, metode eller svar. Oftest dreide forklaringen seg om å begrunne valg av løsningsmetode. I tilfellene der elevene formulerte begrunnelser ble som regel ordet «fordi» brukt.

Andre måter dette spørreordet ble brukt på var: «hvorfor er det sånn?», «hvorfor blir det det?», «hvorfor ikke?», «hvorfor gjorde dere det?» og «hvorfor det?». Alle disse formuleringene med bruk av spørreordet *hvorfor* resulterte i at elevene formulerte forklaringer i form av begrunnelser.

Eksempel 2: Hvordan

Utdraget er hentet fra tirsdag økt 1. Elevene utforsker oppgaven om froskenes hoppekonkurranse.

1. L: Men hvordan har dere funnet FroskeLur nå?
2. Sara: Okei, okei. Så (..) hvert hopp er 8 skritt, så hvis det er 3 her, da blir det 8, 16, 24.

I linje 1 spør læreren *hvordan* læringsparet har funnet hoppene og skrittene til FroskeLur. Lærerens spørsmål fører til at Sara forklarer hva de har gjort for å komme frem til svaret.

Dette eksemplet viser en annen type forklaring enn forrige eksempel. I stedet for å begrunne fremgangsmåten, beskriver Sara hva de har gjort for å komme frem til et svar. Lærerens bruk av spørreordet *hvordan* førte ofte til beskrivelser av løsningsmetoder. Spørreordet *hvordan* førte likevel også noen ganger til at elevene både beskrev metoden og begrunnet hvorfor de hadde brukt den.

Andre måter spørreordet hvordan ble brukt var: «hvordan har du fått til å forklare det da?», «hvordan oppdaget du det?», «hvordan har dere tenkt?», «hvordan fikk du til det?», «hvordan har du kommet frem til det?», «hvordan kan du være sikker på det?» og «hvordan gjorde dere det?». Alle disse ulike formuleringene førte til at elevene formulerte forklaringer, oftest i form av beskrivelser, men også noen ganger som begrunnelser.

Eksempel 3: Kommando

Det tredje eksemplet er hentet fra onsdag økt 2. Elevene har utforsket vannproblemet (hovedoppgave 3). Jens og Marita har fått beskjed om å komme frem til tavlen.

1. L: Forklar da.
2. Jens: Vi tok jo det (…) Vi tok 0,1 liter gange 10 (..) Som da er 1 liter. Og det er 100 minutter.

I første linje sier læreren «forklar da». Lærerens utsagn fører til at Jens formulerer en forklaring for deres svar ved å beskrive metoden de har brukt.

Eksemplet viser at læreren ber om forklaring på en direkte måte. Lærerens utsagn er formulert som en *kommando*, heller enn et spørsmål, og resulterer i at eleven formulerer en forklaring i form av beskrivelse av løsningsmetode. I noen tilfeller resulterte også slike kommandoer til at elevene formulerte begrunnelser for hvorfor løsningsmetoden fungerte.

Andre varianter av slike kommandoer inneholdt også spørreord, selv om de ikke ble formulert som spørsmål: «da må du forklare hvorfor det blir sånn», «vis hvordan du vet det», «overbevis meg om det», «si hvordan du har kommet frem til det», «fortell meg hva dere har gjort da», «fortell meg hva dere har gjort feil da», «fortell meg hvorfor det er slik» og «det må du forklare meg». Også disse formuleringene førte til at elevene formulerte en forklaring, oftest ved å beskrive egen løsningsmetode og tankegang, selv om elevene i noen tilfeller også begrunnet sine strategier.

Eksempel 4: Skrive ned forklaring

Det fjerde eksemplet er hentet fra mandag økt 2 der elevene arbeidet med kombinasjonskartet (hovedoppgave 1). Samtalen omhandler deloppgave 1 der elevene skulle finne mønstre.

1. L: Men hva hvis jeg går til høyre da? På skrå oppover til høyre?
2. Gunn: Da blir det 8 pluss 6 (..)
3. L: Bra! Husk å skriv ned forklaringen deres (..)

I første linje spør læreren hva som skjer dersom man går på skrå oppover til høyre i kombinasjonskartet. Dette fører til at Gunn formulerer en forklaring i form av en beskrivelse av endringen ved å si «da blir det 8 pluss 6». Læreren anerkjenner forklaringen ved å si «Bra!» etterfulgt av en påminnelse om å *skrive ned* forklaringen.

Eksemplet illusterer at læreren fokuserer på en skriftlig forklaring, så vel som en muntlig forklaring. Lærerne bad ofte elevene, gjennom ulike formuleringer underveis i deres arbeid, om å skrive ned forklaringene. Oppfordringene om å skrive ned ble oftest formulert som kommandoer: «skriv ned hvorfor det er slik», «du må hvertfall skrive det ned», «dere må skrive hvorfor det er sånn», «skriv det opp slik at jeg kan forstå hva dere har gjort» og «skriv ned mønsteret». Disse variantene av *skriv ned* førte ofte til at elevene skrev ned en skriftlig forklaring som de kunne bruke senere. Innholdet i de skriftlige forklaringene kan ikke analyseres siden vi ikke har skriftlig datamateriale fra undervisningsøktene.

Diskusjon av be om forklaring

Kategorien *be om forklaring* er kodet totalt 137 ganger i løpet av 9 timer med observasjonsdata, og er den kategorien av utvalgte samtalegrep som forekommer hyppigst i vårt datasett. Det første eksemplet viser at spørreordet *hvorfor* ofte fører til en begrunnelse av valg av metode eller strategi. Andre eksempel viser at spørreordet *hvordan* fører til en beskrivelse som noen ganger etterfølges av en begrunnelse. Eksempel 3 viser hvordan lærerne ber elevene forklare muntlig uten bruk av spørreord. I stedet gir lærerne elevene beskjed om hva de skal gjøre, noe vi har kalt *kommando*. Eksempel 4 viser at lærerne også ber elevene *skrive ned* sine forklaringer, noe som også fremstilles som en form for kommando.

Både beskrivelser og begrunnelser betraktes i denne sammenheng som forklaringer. Vår brede definering av forklaringer baseres blant annet på Kilpatrick m.fl. (2001) sin definisjon av delkompetansen *adaptive reasoning*, som strekker seg fra deduktiv bevisførsel, til mer intuitive forklaringsformer. Forskere konkluderer ofte med at elever sliter med forklaringer frem til de er 12 år (ibid.). Likevel hevder Kilpatrick m.fl. (2001) at barn helt ned i 4-5 årsalderen ofte kan beskrive hva de har gjort eller hva de har tenkt. Vår oppfatning av forklaringer innebærer derfor både beskrivelser og begrunnelser. Likevel er vi enige med Niss og Jensen (2002), som hevder at begrunnelser arter seg på et høyere matematisk nivå enn beskrivelser.

Tabell 2: Oversiktstabell for be om forklaring

Type forklaring	**Spørreord/kommando**	**Antall**
Muntlig, umiddelbar	Hvorfor	66
	Hvordan	60
	Kommando: forklar, forklare, forklaring	25 (gjelder bare varianter av forklar)
Skriftlig, til senere	Kommando: skrive ned forklaring	9

Tabell 2 viser totalt antall ganger de eksemplifiserte spørreordene og kommandoene brukes innenfor kategorien *be om forklaring*. Flere ganger brukes ulike spørreord og/eller kommandoer sammen, noe som gir høyere totalsum enn 137. Lærernes bruk av *be om forklaring* innebærer også å be om en umiddelbar forklaring (eksempel 1-3) eller ved å be elevene formulere en forklaring til senere ved å skrive det ned (eksempel 4).

Bruk av spørreordet *hvorfor* forutsetter at eleven har formulert et svar, beskrevet en løsningsmetode eller foretatt en aktiv handling. Bruk av spørreordet *hvorfor* tar derfor utgangspunkt i det eleven selv har gjort, noe som bidrar til å fokusere samtalen rundt elevens egne tanker, ideer, strategier og svar. Wood (1998) skriver at *focusing* handler om å fokusere på elevenes egne spesifikke strategier eller svar. Ved at bruk av spørreordet *hvorfor* fører til at elevene begrunner hvorfor de har valgt en strategi, hvorfor den fungerer eller hvorfor de har fått det svaret de har fått, fokuserer læreren dermed på elevenes tenkning. Bruk av spørreordet *hvordan* skjer ofte før bruk av *hvorfor* i tid. Spørreordet *hvordan* fører oftest til at elevene formulerer en beskrivelse av løsningsmetoden de har brukt for å komme frem til svaret, men fører enkelte ganger også til at elevene, på eget initiativ, i tillegg formulerer en begrunnelse. Bruk av spørreordet *hvordan* fører likevel til at elevene forklarer hvordan de selv kom frem til et svar eller hvordan de brukte en strategi, og dreier seg derfor også om det Wood (1998) kaller *focusing*.

Alle formene av *be om forklaring* fører til at elevene beskriver eller begrunner sine fremgangsmåter, metoder, strategier og svar. *Be om forklaring* har derfor flere likhetstrekk med samtalegrepet Kazemi og Hintz (2014) kaller *reasoning*, som handler om å få elevene til å forklare sin tankegang og fremgangsmåte. Også Drageset (2014) omtaler en lignende handling han kaller *justification*, som vi betrakter som en grundig form for det Kazemi og Hintz (2014) kaller *reasoning*. Ifølge Drageset (2014) handler *justification* om at læreren ber elevene forklare hvorfor de har kommet frem til svaret og hvorfor løsningsstrategien fungerte for å finne det. Læreren er dermed ikke fornøyd med bare en beskrivelse av hva eleven har gjort (ibid.). Varianten av *be om forklaring* der lærerne bruker spørreordet *hvorfor*, ligner derfor på kategorien Drageset (2014) kaller *justification*, mens de andre variantene av *be om forklaring* har likhetstrekk med det Kazemi og Hintz (2014) kaller *reasoning*.

Ut fra de hyppige forekomstene av *be om forklaring* er det tydelig at lærerne har stort fokus på at elevene skal forklare. Forskningslitteraturen vektlegger forklaringer som en viktig del av skolematematikken. Blant annet hevder Smith og Stein (2011) at noe av det viktigste i matematiske samtaler er at læreren legger til rette for at elevene får forklare sine strategier og svar. Elevene kan på denne måten bli bevisst hvordan de selv tenker, samt øve seg i å forklare egen tankegang (ibid.). Dette poenget presiseres også av Kilpatrick m.fl. (2001) som bruker begrepet *adapitve reasoning*, som omhandler at elevene skal være i stand til å formulere en gyldig matematisk forklaring begrunnet i logikk og refleksjon. Niss og Jensen (2002) bruker begrepet *resonnmentkompetanse* som handler om at elevene skal kunne gi, samt følge andres matematiske resonnment. Begge disse delkompetansene vektlegger forklaringer som viktig. Franke m.fl. (2007) skriver at forklaringer utfordrer elevene, og sier at når læreren ber om forklaring fra elevene får han eller hun innsikt i elevens matematiske tenkning, noe som kan være med å avdekke misoppfatninger i elevens forståelse, og dermed støtte elevens utvikling av matematisk forståelse.

Samtalegrepets hyppighet kan sees opp mot det Schoenfeld (1992) sier om gjentakende spørsmål. Schoenfeld (1992) viste at dersom et spørsmål stilles ofte nok vil det kunne føre til at eleven bevisst formulerer et svar til det forventede spørsmålet, før det stilles. Dette bidrar til en form for selvovervåking i oppgaveløsningen. På samme måte kan den hyppige bruken av *be om forklaring* føre til at elevene tenker ut en forklaring til neste gang lærerne spør, og dermed påvirke hvordan elevene tenker når de jobber med matematikk. Begrepet Newman (1990) kaller *appropriation* kan også brukes for å beskrive en slik prosess. *Appropriation* kan i skolesammenheng dreie seg om at en elev prøver noe, får tilbakemelding fra læreren, og justerer sitt neste forsøk basert på interaksjonen med læreren. Prosessen pågår over tid, og eleven tilpaser gradvis sine forsøk til lærerens (eller omgivelsenes) forventninger. I en lignende prosess vil lærernes hyppige bruk av *be om forklaring* kunne føre til at elevene erfarer at lærerne forventer at svar og strategier skal forklares. I tillegg vil flere runder med *be* *om forklaring* etter hverandre kunne føre til at elevene justerer det matematiske språket og forklaringenes tydelighet. Også det Yackel og Cobb (1996) kaller sosiale normer vil kunne påvirkes av hyppige forespørsler om forklaring. At lærerne ofte ber elevene forklare sin tenkning, kan for eksempel bidra til en sosial norm om at elevene skal beskrive og begrunne strategiene de velger å bruke.

4.2.3 Spesifikke spørsmål

Et annet samtalegrep som utmerket seg i kodingsprosessen var lærernes bruk av *spesifikke spørsmål*. I dette underkapitlet presenteres og analyses tre eksempler på *spesifikke spørsmål*, etterfulgt av en diskusjon opp mot relevant forskningslitteratur. Alle de tre eksemplene er hentet fra de fire øktene der elevene arbeidet med vannproblemet, men utsagnene i eksemplene kommer fra forskjellige elever.

Eksempel 1: Belyse detaljer

Eksemplet viser eleven Gunnar som er i gang med en forklaring på hvordan de har gjort om 1130 minutter til timer og minutter.

1. Gunnar: Vi begynte med å ta 60 minus 1130.
2. L: Hvor mange minutter er det når du har tatt vekk 60 minutter?
3. Gunnar: 1070 minutter.
4. L: Ja, og da satte du på at da hadde du brukt 1 time. Og det fortsatte du med til du kom til?
5. Gunnar: Til 18 timer og 50 minutter.

I linje 2 spør læreren hvor mange minutter læringsparet hadde igjen etter å ha trukket fra 60 minutter. Gunnar svarer 1070 minutter. I linje 4 oppsummerer læreren metoden Gunnar har brukt, og avslutter med å stille et nytt spørsmål knyttet til forklaringen: «Og det fortsatte du med til du kom til?». Gunnar svarer 18 timer og 50 minutter.

Hvis vi ser på lærerens to spørsmål, tar de begge utgangspunkt i elevens pågående forklaring. Lærerens spørsmål i linje 2 fører til at detaljer i Gunnars forklaring belyses: Klassen får vite svaret på 1130-60, samtidig som det tydeliggjøres at det er minutter det er snakk om. Selv om Gunnar til å begynne med ikke bruker ordet «minutter» i sin forklaring, spør læreren likevel om antall minutter han står igjen med. Dette fører til at Gunnar svarer «1070 minutter». Når læreren i linje 4 spør hva Gunnar kom frem til ved å bruke denne strategien videre, svarer Gunnar med å bruke både timer og minutter som benevning i svaret. Gunnar bruker dermed et mer presist matematisk språk enn i linje 1, som fører til at detaljer i forklaringen belyses. Eksemplet viser hvordan lærerens bruk av *spesifikke spørsmål* kan føre til å belyse detaljer i elevens pågående forklaring.

Eksempel 2: Fokus på språket

I følgende eksempel er Sverre i gang med å forklare en strategi for å løse oppgaven.

1. L: Så hva finner du ut da, sa du?
2. Sverre: 0,6 per time
3. L: 0,6 hva for noe? Elefanter? (..)
4. Sverre: 0,6 liter per time.

I linje 2 sier Sverre at de har funnet ut at vasken fylles opp med «0,6 per time». Læreren spør i linje 3: «0,6 hva for noe? Elefanter?». Sverre gjentar deretter svaret sitt, men inkluderer nå enheten «liter».

Lærerens spørsmål i linje 3 fører til at Sverre legger til enhet til svaret i linje 4. Lærerens bruk av *spesifikke spørsmål* gjør dermed Sverres forklaring og matematiske språk mer presist. Eksemplet illustrerer også hvordan bruk av *spesifikke spørsmål* kan bidra til å fremheve detaljer i elevens forklaring. Ved at språket blir mer presist, avdekkes flere detaljer. *Spesifikke spørsmål* ble ofte brukt på denne måten i situasjoner der elevene brukte et upresist språk og der viktige detaljer ikke ble nevnt av eleven.

Eksempel 3: Bremse forklaring

I følgende eksempel forklarer Patrik forklarer hvordan han og en medelev har løst oppgaven.

1. Patrik: 1 desiliter ganget med 10 ble 1 liter. Så ganget vi også det med 10, som da ble (..) 10 liter er 100 desiliter. Så tok vi den ene literen vi har og (blir avbrutt).
2. L: Oi, nå gikk det litt fort her. Vi begynner litt på nytt igjen (..) du tok den ene desiliteren du hadde (..) for det du viste, det var at 0,1 liter var 1 desiliter?
3. Patrik: Ja, så ganget vi med 10 og da fikk vi 1 liter.

I linje 2 forteller læreren Patrik at forklaringen gikk for fort. Læreren stiller deretter Patrik et spørsmål knyttet til den pågående forklaringen, som Patrik svarer på.

Lærerens spørsmål i linje 2 er spesifikt, siden Patrik kan svare ja eller nei, og ved at det er rettet mot elevens forklaring. Lærerens spørsmål kommer som en konsekvens av at læreren mente forklaringen gikk for fort, noe som synliggjøres av at læreren sier «Oi, nå gikk det litt for fort her». Lærerens bruk av *spesifikke spørsmål* fungerer dermed for å bremse Patriks forklaring. *Spesifikke spørsmål* ble ofte brukt i slike sammenhenger. Bruk av *bremse forklaring* kan bidra til at forklaringen blir tydeligere, og at flere klarer å henge med på den pågående forklaringen.

Diskusjon av spesifikke spørsmål

I vårt datamateriale er kategorien *spesifikke spørsmål* kodet 86 ganger. Eksempel 1 viser hvordan lærerens bruk av *spesifikke spørsmål* fører til at detaljer i elevens forklaring synliggjøres. Eksempel 2 viser hvordan *spesifikke spørsmål* kan føre til at elevene bruker et mer presist matematisk språk i sine forklaringer. Eksempel 3 illustrerer at *spesifikke spørsmål* også kan bidra til å bremse elevenes forklaringer. Våre analyser viser at lærerne ofte bruker *spesifikke spørsmål* underveis i elevenes forklaringer. Denne kategorien er dermed tett knyttet til kategorien *be om forklaring*. *Spesifikke spørsmål* tar imidlertid utgangspunkt i elevens pågående forklaring, og kommer derfor ofte etter *be om forklaring* i tid. Dette kan være én av grunnene til at vi finner flest eksempler på *spesifikke spørsmål* sent i undervisningsøktene. En annen forskjell på de to kategoriene er spørsmålenes struktur: *Spesifikke spørsmål* er nettopp mer spesifikke enn spørsmålene i *be om forklaring*. Tendensen i klasserommene var at lærerne gikk åpent ut og bad om forslag (*åpne spørsmål*) og forklaringer (*be om forklaring*), og etter hvert brukte *spesifikke spørsmål* for å belyse detaljer, presisere språket og senke farten i forklaringen.

Kategorien *spesifikke spørsmål* kan knyttes til det Drageset (2014) kaller *enlighten details*, som handler om at læreren stopper opp og retter fokuset mot detaljer i elevens utsagn eller forklaring. *Spesifikke spørsmål* som bremser elevenes forklaringer illustrerer dette (eksempel 3). *Spesifikke spørsmål* vil derfor, i likhet med *enlighten details*, kunne bidra til innsikt i elevens tenkemåte, samt kunne bidra til å gjøre forklaringene mer tilgjengelige for de andre deltakerne i klasserommet. Vår kategori *spesifikke spørsmål* kan også sees i sammenheng med det Drageset (2014) kaller *closed progress details.* Denne kategorien kjennetegnes ved at læreren stiller lukkede spørsmål knyttet til sin forklaring. Forklaringen foregår dermed i flere steg, og kan føre til at elevene klarer å følge tankerekken bak forklaringen (ibid.). I eksempel 1 arter elevens forklaring seg stegvis. Våre varianter av *spesifikke spørsmål* skiller seg likevel fra kategorien Drageset (2014) kaller *closed progress details* på ett vesentlig punkt. I vårt datamateriale er det elevene som fører samtalen, mens læreren bryter inn med spesifikke spørsmål underveis. *Closed progress details* skjer ifølge Drageset (2014) ved at læreren snakker, stopper opp og stiller elevene lukkede spørsmål til det læreren selv er i gang med å formidle. Tankerekken er dermed lærerens, ikke elevenes.

Chapin m.fl. (2009) argumenterer for at matematikken må gjøres mer tilgjengelig og meningsfull for elevene. Ved å bruke *spesifikke spørsmål* underveis i elevenes forklaringer har læreren mulighet til å bremse forklaringen slik at alle kan følge med, og la elevene selv belyse detaljer som er viktig for matematikkens mening. De *spesifikke spørsmålene* kan, som vist i eksempel 1 og 2, også legge til rette for at elevene bruker et språk som er matematisk presist og som gir mening.

Bruk av *spesifikke spørsmål* kan indikere at lærernes fokus er rettet mot elevenes ideer og strategier. Ved å stille *spesifikke spørsmål* får eleven hjelp eller veiledning til å formulere sine forklaringer, og tilbakemelding på om forklaringen er god nok. Elevene får på denne måten øving i hvordan man skal snakke om matematikk, og hvordan matematikk bør formuleres, noe blant andre Niss og Jensen (2002) omtaler som viktige kompetanser, både innenfor *tankegangskompetanse* og *resonnementskompetanse*. *Spesifikke spørsmål* fungerer også for å få med detaljer (steg) i forklaringene som elevene selv ikke belyser. Dette kan bidra til at eleven får en bedre struktur på forklaringen, og kan gjøre det lettere for læreren og resten av klassen å følge forklaringen.

På samme måte som gjentatt bruk av *be om forklaring* kan føre til at det Yackel og Cobb (1996) kaller sosiale normer påvirkes, vil også gjentatt bruk av *spesifikke spørsmål* kunne påvirke det Yackel og Cobb (1996) kaller sosiomatematiske normer, som blant annet handler om en felles oppfatning om hva som er forskjellig, sofistikert, effektiv eller elegant matematikk. Ved at læreren ofte stiller *spesifikke spørsmål* underveis i elevenes forklaringer, vil sosiomatematiske normer om hva som anses som en akseptabel matematisk forklaring kunne formes, blant annet ved at elevene stadig må formulere seg med et mer presist språk.

4.2.4 Gjenta elevenes utsagn

Det fjerde samtalegrepet som utmerket seg i kodingen var lærernes bruk av *gjenta elevenes utsagn*. I dette underkapitlet presenteres og analyseres tre måter lærerne brukte dette samtalegrepet på. Etterpå ser vi funnene opp mot relevant forskningslitteratur.

Eksempel 1: Oppsummere løsning

Første eksempel er hentet fra mandag økt 1. Elevene har arbeidet med oppgaven om kombinasjonskart (hovedoppgave 1).

1. Marianne: Eeee (..) det kan være 8 ganger 3 er lik 24 (..) og 4 ganger 6 er 24.
2. L: Okei. Så du tenker at når vi går fire bortover (mot venstre), så har vi tatt bort 4 seksere (..) at 4 seksere er 24, og at det blir det samme som å gå 3 oppover? Som er 3 åttere, som er 24?
3. Marianne: Mhm.

I linje 1 presenterer Marianne en forklaring på et mønster i kombinasjonskartet. Læreren gjentar i linje 2 Mariannes utsagn, samtidig som hun legger til informasjon. Læreren formulerer gjentakelsen som et spørsmål om det er slik Marianne tenker. Dette blir bekreftet av Marianne i linje 3.

Mariannes utsagn i linje 1 kan tolkes som en forklaring på det aktuelle mønsteret det samtales om. Når læreren gjentar hele forklaringen, og samtidig legger til informasjon, blir forklaringen mer utfyllende. At læreren gjentar hele forklaringen gjør at gjentakelsen fremstår som en oppsummering av det Marianne sa, og eksemplifiserer hvordan våre lærerinformanter bruker varianten *oppsummere løsning*. Dette samtalegrepet ble ofte brukt mot slutten av undervisningen, slik som i dette eksemplet. I sekvensene der *oppsummere løsning* ble brukt på en slik måte, med tillegg av informasjon, blir gjentakelsen ofte formulert som et spørsmål til eleven som uttalte seg. *Oppsummere løsning* fører til at elevens forklaring fremheves og tydeliggjøres.

Eksempel 2: Stegvis gjentakelse

Følgende eksempel er hentet fra mandag økt 1. Fredrik forklarer hvordan han beveget seg i kombinasjonskartet for å finne et mønster.

1. Fredrik: Så gikk jeg her (peker)
2. L: En til venstre.
3. Fredrik: Opp (peker deretter til venstre)
4. L: Og en ny en til venstre?
5. Fredrik: Ja
6. L: Hvor mange gikk du opp da?
7. Fredrik: Jeg gikk 4 opp.
8. L: Så egentlig 4 opp og 2 til venstre, bare at du tok 1 til venstre, 4 opp og 1 til venstre?
9. Fredrik: Ja

I linje 1 sier Fredrik «så gikk jeg her», og peker hvor han gikk. Dette gjentar læreren mer presist ved å si «en til venstre». Videre forklarer Fredrik at han gikk opp, og peker deretter til venstre. Dette gjentar læreren med å spørre «og en ny til venstre?». Dette bekreftes av Fredrik i linje 5. Videre stiller læreren i linje 6 et *spesifikt spørsmål* til forklaringen (se underkapittel 4.2.3). Fredrik svarer at han gikk 4 opp. I linje 8 oppsummerer læreren hele fremgangsmåten Fredrik har forklart, formulert som et spørsmål. Denne oppsummeringen bekrefter Fredrik i linje 9.

Dette eksemplet illustrerer hvordan lærerens korte og direkte gjentakelse kan være med å belyse detaljer i elevens forklaring. Slike korte og direkte gjentakelser av elevenes utsagn har vi kalt *stegvis gjentakelse*. Eksemplet viser at læreren gjentar elevens utsagn ved å bruke et mer presist språk. Dette kan føre til at elevens videre forklaring blir tydeligere, noe som skjer ved at Fredrik sier «opp» i linje 3, etter å ha sagt «her» i linje 1. Dette kan være en konsekvens av lærerens omformulerte gjentakelse i linje 2. Denne måten å *gjenta elevenes utsagn* på var typisk mot slutten av undervisningsøktene, samtidig som den også forekom enkelte ganger i oppgaveløsingen. I dette eksemplet gjentar dermed læreren elevens utsagn underveis i forklaringen ved bruk av *stegvis gjentakelse*, samt at hun i linje 8 *oppsummerer løsningen* (se forrige eksempel).

Eksempel 3: Direkte gjentakelse

Følgende eksempel er hentet fra onsdag økt 2. Tonje og Erling arbeider med vannproblemet (hovedoppgave 3).

1. Tonje: 100 minutter er 1 time og 40 minutter.
2. L: Og 100 minutter er 1 time og 40 minutter.
3. Erling: Ja, okei. Og så tok vi 1 time gange 11, som da er 11 timer.

I linje 1 presenterer Tonje en del av elevenes forklaring. I linje 2 ser vi at læreren gjentar nøyaktig det samme som Tonje sier. Deretter fortsetter Erling, den andre eleven, på elevenes forklaring.

Lærerens gjentakelse i linje 2 er ordrett det eleven har sagt. Dette er kodet til *direkte gjentakelse*, og fører i eksemplet til at læringsparet fortsetter sin forklaring. *Direkte gjentakelse* var typisk underveis i elevenes forklaringer, og forekom særlig underveis i oppgaveløsningen. *Direkte gjentakelse* førte til at elevenes utsagn ble fremhevet. Denne varianten av *gjenta elevenes utsagn* forekom hyppigst underveis i oppgaveløsingen, men også enkelte ganger mot slutten av undervisningen.

Diskusjon av gjenta elevenes utsagn

I vårt datamateriale forekommer kategorien *gjenta elevenes utsagn* 122 ganger, og er den kategorien av samtalegrep vi har kodet nest mest. Eksempel 1 illustrerer hvordan lærerens bruk av *oppsummere løsning* kan bidra til å løfte elevenes tanker frem og gjøre forklaringen tydeligere. Eksempel 2 viser hvordan læreren ved bruk av *stegvis gjentakelse* gjentar steg i elevens pågående forklaring med utgangspunkt i det matematiske språket. Eksempel 3 illustrerer hvordan læreren ordrett gjentar elevens utsagn, noe som fører til at elevene fortsetter sin forklaring. I eksempel 1 og 2 velger læreren å omformulere elevens utsagn og formulerer gjentakelsen som et spørsmål eleven kan bekrefte eller avkrefte. Våre analyser viser at samtalegrepet *gjenta elevenes utsagn* brukes underveis eller på slutten av en elevs forklaring. *Gjenta elevenes utsagn* er derfor tett knyttet til kategorien *be om forklaring*. *Gjenta elevenes utsagn* fokuserer imidlertid i større grad på detaljene i forklaringene. På denne måten kan vi også se en sterk kobling til samtalegrepet *spesifikke spørsmål*. Forskjellen er at ved å *gjenta elevenes utsagn* kan læreren omformulere det eleven sier for å gjøre det tydeligere, mens de to øvrige samtalegrepene fokuserer på å la eleven selv tydeliggjøre detaljer i sin forklaring.

Samtalegrepet *gjenta elevenes utsagn* kan sees i sammenheng med det Kazemi og Hintz (2014) kaller *revoicing*, som handler om at læreren gjentar det en elev har sagt, og som har til hensikt å oppklare, forsterke eller fremheve en idé eller en strategi. *Revoicing* kan forekomme både som ordrett og omformulert gjentakelse. *Oppsummere løsning*, *stegvis gjentakelse* og *direkte gjentakelse* kan sees på som spesifikke måter av slik gjentakelse. Videre kan *oppsummere løsning* sees opp mot kategorien Drageset (2014) kaller *recap*, som innebærer at læreren trekker sammen informasjon og peker på hva som er viktig i forklaringen. *Recap* bidrar ifølge Drageset (2014) til å gjøre elevens idé tydeligere og mer tilgjengelig for resten av klassen. Eksempel 1 viser hvordan lærerens bruk av *oppsummere løsning* fører til at elevens idé tydeliggjøres, både ved at den blir gjentatt og ved at den omformuleres. At læreren legger til informasjon gjør at forklaringen blir mer forståelig. Eksempel 2 med *stegvis gjentakelse* kan sees i sammenheng med det Drageset (2014) kaller *notice*, som handler om å gjenta viktige elementer fra dialogen, og i noen tilfeller, legge til informasjon med hensyn på et tydeligere matematisk språk. Den *stegvise gjentakelsen* fører i vårt eksempel til at eleven formulerer seg med et stadig mer presist språk.

Franke m.fl. (2007) skildrer *revoicing* som et viktig verktøy for utvikling av det matematiske språket. Ved at læreren gjentar elevenes utsagn med et mer presist matematisk språk, vil elevens ideer og språklige utvikling kunne styrkes. Ved at kategorien *gjenta elevenes utsagn* ligner på *revoicing* vil den ha mange av de samme fordelene, og vil kunne medvirke til å styrke det Niss og Jensen (2002) kaller *tankegangskompetanse* og *resonnementkompetanse* og det Kilpatrick m.fl. (2001) kaller *adaptive reasoning*. Franke m.fl. (2007) viser at en annen fordel med *revoicing* er at det kan føre til at elevene betrakter seg selv som viktige bidragsytere i matematikk, siden det er elevenes egne forklaringer som er i sentrum for samtalen, og som gjentas av læreren. Dette vil også kunne være gjeldende for kategorien *gjenta elevenes utsagn* der lærernes gjentakelse nettopp tar utgangspunkt i elevenes utsagn, blant annet ved at læreren formulerer gjentakelsen i *oppsummere løsning* som et spørsmål om det var slik eleven tenkte. Dette kan bidra til at eleven fortsatt opplever den omformulerte forklaringen som sin egen.

4.2.5 Sammenhengen mellom samtalegrepene

Våre kategorier av samtalegrep forekommer ofte i rekkefølgen de er presentert ovenfor. Lærerne bruker i oppstarten *åpne spørsmål* for å få elevene til å begynne å tenke på oppgaven som skal løses. Disse spørsmålene kan stilles med eller uten retning, eller for få elevene til å generalisere mønstre. I de innledende fasene med oppgaveløsning brukes også *åpne spørsmål* mye. Videre i oppgaveløsningen forekommer *be om forklaring* stadig hyppigere. Dette kan tyde på at elevene utvikler ideer og kommer frem til svar underveis. På bakgrunn av forklaringene elevene kommer med, stiller lærerne ofte *spesifikke spørsmål*, som bidrar til å bremse forklaringene, belyse detaljer og veilede elevene til å bruke et mer presist matematisk språk. Tidlig i oppsummeringsfasene av undervisningsøktene forekommer også disse syklusene med *be om forklaring* og *spesifikke spørsmål* hyppig. I oppsummeringsfasene forekommer kategorien *gjenta elevenes utsagn* ofte, både ved bruk av *stegvis gjentakelse* og ved å *oppsummere løsning*, enten ordrett eller omformulert.

Alle de fire kategoriene med samtalegrep fokuserer på elevenes forklaringer. Først ved at læreren bruker *åpne spørsmål* slik at elevenes tankegang gjøres eksplisitt, så ved å *be om forklaring*, som fører til innsikt i hva elevene har gjort eller i deres begrunnelser for valg av strategi eller metode. Videre brukes *spesifikke spørsmål* til å veilede elevenes forklaringer, og til slutt brukes kategorien *gjenta elevenes utsagn* til å belyse det sentrale i forklaringene, og gjøre dem mer tilgjengelige for de andre deltakerne.

Tabell 3 viser hvor hyppig de utvalgte samtalegrepene ble brukt. Rekkefølgen i tabellen kommer av den oppdagede tendensen i hvordan og når samtalegrepene brukes som beskrevet over. Tabellen oppsummerer også variantene av de ulike samtalegrepene og hva samtalegrepene fører til.

Tabell 3: Samtalegrepenes varianter

Samtalegrep	**Varianter**	**Hva fører det til?**	**Antall ganger kodet**
Åpne spørsmål	Helt åpne, med retning, med generalisering	Innsikt i elevenes tankegang, fokus på generalitet	90
Be om forklaring	Hvorfor, hvordan, kommando, umiddelbar, senere	Innsikt i, eller begrunnelse for, elevenes løsningsstrategi	137
Spesifikke spørsmål	Belyse detaljer, fokus på språk, bremse forklaring	Innsikt i, og veiledning av, elevenes forklaringer	86
Gjenta elevenes utsagn	Oppsummere løsning, stegvis gjentakelse, direkte gjentakelse	Elevenes forklaringer løftes frem og tydeliggjøres	122

4.3 Undervisningsorganisering og samtalestruktur

I de følgende underkapitlene presenteres og analyseres de mest fremtredende grepene lærerinformantene brukte for å organisere undervisningen og for å strukturere samtalene. Vi ser også funnene opp mot relevant forskningslitteratur. Grepene tas i ulike faser av undervisningsøktene.

4.3.1 Idémyldring

I undervisningsøktenes oppstart ble elevene alltid introdusert for oppgave og arbeidsform. Elevene ble i dobbeløktene (90 minutter) organisert i lyttekrok, mens i enkeltøktene (45 minutter) satt elevene parvis ved pultene. Etter at oppgavene hadde blitt presentert igangsatte lærerne en sekvens med *idémyldring* knyttet til hva som måtte til for å løse oppgavene. Denne sekvensen foregikk i helklasse, og lærerne spurte elevene om hva de tenkte om oppgaven, og om de hadde noen tanker om hvordan oppgaven kunne løses. Idémyldringen ble styrt av lærerne ved bruk av samtalegrepet *åpne spørsmål* hvor elevene fikk fronte egne tanker og ideer knyttet til oppgaven (se kap. 4.2.1). Bruken av *åpne spørsmål* førte til at lærerne ikke presenterte strategier. I stedet fikk elevene selv komme med forslag til hvordan oppgaven kunne løses. Lærerne belyste og fremhevet deretter forslagene og ideene som kunne hjelpe til å løse oppgaven. Lærerne la på denne måten til rette for at elevene selv kunne finne løsningsstrategier, svar og forklaringer på oppgavene. Idémyldringen førte til at samtalenes fokus ble rettet mot det de skulle arbeide med. Tiden som gikk til oppstart med idémyldring var omtrent 15 minutter i de lengste øktene og 8 minutter i de korte øktene.

Lærernes bruk av idémyldring står i kontrast til det dominerende *IRE*-mønsteret som skildres av Franke m.fl. (2007). I stedet for at læreren stiller lukkede spørsmål der elevene må gjette seg frem til hva læreren mener er rett, stiller læreren *åpne spørsmål* som bidrar til innsikt i elevenes egne tenkemåter. At lærerne ikke presenterer en fremgangsmåte eller prosedyre for å løse oppgaven, men heller lar elevene formulere sine egne ideer knyttet til oppgaven, er også i kontrast til det Truxaw og DeFranco (2008) kaller *deduktive klasserom*. I stedet tyder oppstart med idémyldring på at undervisningsøktene vi har observert foregår i det Truxaw og DeFranco (2008) kaller *induktive klasserom*, der oppgaven presenteres først og der elevene får tolke og utforske etterpå. Stein og Smith (1998) skriver at hvordan lærere presenterer oppgaver for elevene kan være med på å senke oppgavenes kognitive krav ved at lærerne foreslår hvordan oppgavene kan løses. At lærerne benytter seg av idémyldring, heller enn å forenkle oppgaven ved å presentere foretrukne strategier, bidrar til at oppgavens kognitive krav opprettholdes.

4.3.2 Vedvarende bruk av læringspar

Etter at lærerne hadde introdusert oppgave og arbeidsform fikk elevene utforske oppgavene i *læringspar*. Elevene var organisert i læringspar omtrent 20 minutter i enkeltøktene og cirka 45 minutter i dobbeløktene. Lærerinformantene begrunnet bruk av læringspar i intervjuet, og uttrykte at de hadde et ønske om at elevene skulle diskutere og formulere matematiske ideer sammen. Videre argumenterte de for viktigheten av å fokusere på utvikling av det matematiske språket. Lærerinformantenes oppfatning var at dersom elevene skulle lære det matematiske språket, måtte de også bruke det. De mente også at læringsutbyttet kunne økes ved at elevene fikk argumentere og forklare til hverandre. I utforskingsfasen, mens elevene satt i læringspar, gikk læreren rundt til alle elevene, og brukte flere minutter hos hvert par. Læreren var også innom samme par flere ganger i samme økt, og fikk i disse besøkene innsikt i elevenes tankegang ved å bruke samtalegrepet *åpne spørsmål*. Videre utfordret læreren elevene ved å *be om forklaring* til det de presenterte for læreren, og fikk dermed innsikt i, og begrunnelse for, elevenes løsningsmetoder. Forklaringene ble videre veiledet ved at læreren brukte *spesifikke spørsmål* underveis i forklaringene.

Chapin m.fl. (2009) argumenterer for at *parsamtaler* er et produktivt samtaleformat som innebærer at elevene organiseres parvis i sekvenser på 3-5 minutter, og Kazemi og Hintz (2014) presenterer *turn-and-talk* som et samtalegrep der elevene snur seg til sidemannen og diskuterer i kortere omganger. Det som ifølge Chapin m.fl. (2009) gjør samtaleformatet produktivt er blant annet at elevene får delt sine tanker muntlig i paret og at de kan bygge på hverandres forståelse. Også i elevenes presentasjoner av svar og fremgangsmåter hviler det en trygget ved at elevene har kommet frem til noe sammen, noe som ifølge Chapin m.fl. (2009) bidrar til at de våger å fronte sine ideer. Våre lærerinformanter benyttet seg av en mer *vedvarende bruk av læringspar* enn det Chapin m.fl. (2009) og Kazemi og Hintz (2014) beskriver, siden elevene var organisert i parene gjennom hele utforskingsfasen. Vedvarende bruk av læringspar tjente likevel det samme formålet som *parsamtaler* og *turn-and-talk*, bare over lenger tid. I tillegg førte vedvarende bruk av læringspar til at elevene fikk god tid til å formulere solide forklaringer, snakke matematikk og forklare til hverandre.

Lærernes besøk hos de ulike læringsparene kan sees på som det Smith og Stein (2011) kaller *monitoring*, som handler om å overvåke elevenes oppgaveløsning for å få innsikt i hvordan elevene tenker. Ved å bruke *åpne spørsmål* og *be om forklaring* fikk lærerne vite hva elevene tenkte om oppgavene. Ved å bruke *spesifikke spørsmål* kunne lærerne veilede elevenes forklaringer. Siden bruk av *åpne spørsmål* og *be om forklaring* vanligvis kom før *spesifikke spørsmål* i tid, kan vi si at lærerne først overvåket elevene, og deretter veiledet deres forklaringer. Ved at lærerne i veiledningen brukte disse samtalegrepene, tok veiledningen utgangspunkt i elevenes egne ideer. Ved at lærerne brukte lang tid hos hvert par, ble denne overvåkingen og veiledningen grundig. At lærerne brukte grepet *vedvarende bruk av læringspar*, står i sterk kontrast til de tradisjonelle oppfatningene av matematikk. Lesh og Zawojewski (2007) hevder at en vanlig oppfatning er at elevene sitter stille på egne plasser og regner oppgaver for seg selv. I læringspar får elevene samarbeide og diskutere, noe som bryter med de tradisjonelle oppfatningene. At lærerne tok seg god tid til overvåking og veiledning hos læringsparene, gjør at det oppstår flere interaksjoner med hvert par. Schoenfeld (1992) skriver at lærernes gjentakende spørsmål kan føre til at elevene utvikler vaner for oppgaveløsningen, for eksempel ved at de i større grad overvåker sin egen tenkning når læreren til stadighet ber elevene forklare. Den lange tiden hos hvert par, og de mange interaksjonene, vil kunne legge til rette for å stille slike spørsmål som belyser, tydeliggjør og utfordrer elevenes tenkning.

4.3.3 Læringsplakat

Mens elevene arbeidet i læringsparene ble de bedt om å formulere skriftlige forklaringer på en *læringsplakat*. Dette var et blankt A3-ark uten linjer eller ruter hvor elevene skrev ned tanker og strategier. Hvert læringspar ble tildelt ett ark. Læringsplakaten hjalp elevene å huske, samt systematisere, strategiene de brukte i oppgaveløsingen. Siden alle elevene arbeidet med samme hovedoppgave, kunne de ulike parene sammenligne strategier og løsninger ved å bruke læringsplakatene de selv hadde utviklet. Plakatene skulle henges opp i klasserommet slik at elevene kunne studere hverandres arbeid. Dette ble i klassen kalt for *gallery walk* og *mattekongress* (begreper fra Fosnot-metodikken).

Lærernes bruk av læringsplakat tyder på at lærerne også fokuserte på skriftlige forklaringer. Forklaringer vektlegges blant annet av Smith og Stein (2011) og Chapin m.fl. (2009) som noe av det viktigste i matematikkfaget, og Kilpatrick m.fl. (2001) fronter *adaptive reasoning* som en viktig del av elevenes helhetlige matematiske kompetanse. At forklaringene skal skrives ned sier noe om statusen forklaringer har i de observerte klasserommene, og antyder at elevenes ideer er viktige og skal tas vare på. Kazemi og Hintz (2014) sier det er viktig at elevene blitt sett på som *sense makers*, som innebærer at elevene må erfare at deres matematiske arbeid faktisk betyr noe. Ved at elevene blir bedt om å skrive ned sine ideer, strategier og forklaringer, formidler lærerne at elevenes arbeid er viktig. At elevene arbeider på ark i stedet for i skrivebok gjør også at det ikke er mulig å bla tilbake i skriveboka for å se på prosedyrer som har blitt brukt tidligere. Elevene må utforske oppgavene fra starten av, uten å bli presentert for strategier først. At elevene selv må tolke og utforske oppgavene for å komme i gang med dem, kan ifølge Smith og Stein (1998) føre til at oppgavene stiller høyere kognitive krav.

4.3.4 Strategisk utvelgelse og kobling i helklassediskusjon

I slutten av undervisningsøktene ble arbeidet fra læringsparene alltid oppsummert i en helklassediskusjon. Elevene ble i dobbeløktene samlet i lyttekrok, mens de ble sittende parvis ved pultene i enkeltøktene. Denne sekvensen varte i cirka 15 minutter, både i enkelt- og dobbeløktene. Noe av det mest interessante med denne fasen av undervisningen var at elevene kom frem til tavlen og presenterte sine svar og strategier for medelevene, med utgangspunkt i *læringsplakatene* de hadde utviklet i læringsparene.

Spesielt i enkeltøktene var det systematikk i rekkefølgen læringsparene presenterte i. Elevenes ulike tempo i oppgaveløsningen, og at noen av parene ikke ble ferdig med oppgaven, åpnet for at læreren kunne systematisere løsningene og forklaringene slik at den samlede presenterte forklaringen besto av innspill fra alle læringsparerene. Lærernes grep med å velge ut og bestemme rekkefølgen på presentasjonene er kalt *strategisk utvelgelse*. Bruk av *strategisk utvelgelse* var ikke like tydelig i dobbeløktene, da klassen i to av øktene hadde flere deloppgaver de arbeidet med, og mangfoldet av strategier og svar derfor var enda større. Dette resulterte i disse øktene til at alle fikk presentere noe, uten at det var særlig observerbar systematikk i rekkefølgen. Ved enkelte anledninger ble det, både i enkelt- og dobbeløktene, presentert et mønster, en strategi eller et svar uten at elevene som presenterte kunne formulere en forklaring. Da henvendte læreren som ledet undervisningen seg til et læringspar han eller hun visste hadde en forklaring, slik at samtalen kunne fortsette. At læreren henvendte seg til andre elever, i stedet for å formulere forklaringen selv, tyder på at elevenes deltakelse verdsettes.

Presentasjonene av strategiene og løsningene ble i helklassediskusjonen påvirket av læreren med ulike samtalegrep og strukturelle grep. Først brukte læreren *be om forklaring* for å få elevene til å dele sin forklaring. Deretter ble forklaringen veiledet med bruk av *spesifikke* *spørsmål* og *gjentakelse av elevens utsagn*. På slutten koblet læreren sammen de ulike løsningsstrategiene elevene presenterte. Dette grepet har vi kalt *kobling av strategier og svar*, og ble gjort ved at læreren sammenlignet strategiene og viste til forskjeller og likheter i dem. Elevene fikk blant annet se at to ulike strategier, eller ulik rekkefølge i løsningsprosessen, kunne resultere i samme løsning. Ved flere anledninger observerte vi at elevene så disse sammenhengene. For eksempel kommenterte et læringspar at de innså at de hadde brukt en tungvint strategi, sammenlignet med et annet læringspar. Dette til tross for at de hadde kommet frem til samme svar.

At elevene blir valgt ut til å presentere sine strategier og svar i helklassediskusjonen kan betraktes i lys av praksisen Smith og Stein (2011) kaller *selecting*, som innebærer at læreren, på bakgrunn av praksisen *monitoring*, velger ut hvilke læringspar som skal få presentere sitt arbeid. Denne utvelgelsen kan ifølge Smith og Stein (2011) også gjennomføres strategisk ved bruk av *sequencing*, som er nyttig når rekkefølgen på elevenes presentasjoner er vesentlig for målet med samtalen. Lærernes bruk av *strategisk utvelgelse* kan derfor sies å forene praksisene Smith og Stein (2011) kaller *selecting* og *sequencing*. *Strategisk utvelgelse* ble særlig observert i enkeltøktene ved at elevene som hadde kommet kortere i oppgaveløsningen presenterte tidlig, mens elevene som hadde kommet lenger fikk presentere senere. Dette førte til at alle fikk delta i helklassediskusjonen. At lærerne mot slutten av helklassediskusjonen foretok *koblinger av strategier og svar* kan sees opp mot praksisen Smith og Stein (2011) kaller *connecting*, som omhandler en form for sammenkobling der ideer og strategier knyttes sammen og danner et nettverk av strategier som kan føre til at elevene ser sammenhengene mellom ulike måter å løse oppgavene på.

Chapin m.fl. (2009) skildrer helklassediskusjon som det mest produktive samtaleformatet, og peker på at andre samtaleformater, eksempelvis parsamtaler, fungerer som en forberedelse til helklassediskusjonen. I helklassediskusjonen får elevene ta del i hverandres ideer ved at de presenterer for hverandre. Chapin m.fl. (2009) argumenterer for at dette kan bidra til mer produktive matematiske samtaler og en dypere matematiske forståelse ved at elevene får innsikt i hvordan flere ulike metoder kan resulterer i samme løsning, og at de kan velge den metoden som passer best for dem selv. Ved at lærerne foretok *strategiske utvelgelser* og *kobling av strategier og svar* i helklassediskusjonene, ble samtalene styrket ved at elevene fikk forklare egne ideer på sitt eget matematiske nivå, samtidig som de fikk innsikt i andre elevers fremgangsmåter.

4.3.5 Oppsummering av undervisningsorganisering og samtalestruktur

Alle undervisningsøktene foregikk i faste rammer: En *oppstartsfase* der lærerne presenterte oppgaven for elevene i helklasse, en *utforskingsfase* der elevene arbeidet i læringspar og en *oppsummeringsfase* der elevene igjen ble organisert i helklasse. Grepene lærerne benyttet seg av i disse fasene er oppsummert i tabell 4.

Tabell 4: Grep for undervisningsorganisering og samtalestruktur

Fase	**Grep**	**Hva fører det til?**
Oppstart	Idémyldring med åpne spørsmål	Fokus på, og innsikt i, elevenes ideer
Utforsking	Vedvarende bruk av læringspar	Mange interaksjoner, grundig overvåking
	Læringsplakat	Fokus på skriftlige forklaringer, verdsetting av elevenes ideer
	Overvåking	Innsikt i elevenes tenkning
Oppsummering	Strategisk utvelgelse	Elevene bygger på hverandres ideer og forklaringer, alle får delta
	Kobling av strategier og svar	Fremheve likheter og forskjeller i forklaringer, innsikt i ulike metoder

At lærerne i oppstartsfasene benyttet seg av *idémyldring* som lot elevene komme med forslag og formulere ideer knyttet til oppgavene, førte til at fokuset ble rettet mot elevenes egne ideer og strategier. Dette peker mot mønstrene av spørsmål Wood (1998) kaller *focusing*, som innebærer å fokusere spørsmålene rundt elevens egen tankegang. I utforskingsfasene førte grepet *vedvarende bruk av læringspar* til mange interaksjoner mellom elevene, og mellom lærer og elev. Dette gjør at elevene får trent på flere viktige matematiske delkompetanser, blant annet det Niss og Jensen (2002) kaller *kommunikasjonskompetanse*. Lærerne foretok i læringsparene en grundig *overvåking* som bidro til innsikt i elevenes tenkning. Grepet *læringsplakat* fungerte for å rette fokus på skriftlige forklaringer og bidro til at elevenes forklaringer og ideer ble verdsatt slik at elevene kunne se på seg selv som det Kazemi og Hintz (2014) kaller *sense makers*. Lærernes overvåking i utforskingsfasen dannet grunnlaget for *strategiske utvelgelser* som kom til syne i oppsummeringsfasene der elevene fikk dele sine strategier og svar. Dette grepet førte til at elevene kunne bygge på hverandres ideer og forklaringer. Lærerne foretok også en *kobling* av elevenes strategier og svar i oppsummeringsfasen, som gjorde at elevene fikk innsikt og forståelse for de ulike løsningsmetodene. At lærerne først presenterte oppgavene med *idémyldring* der elevene selv fikk tolke oppgavene, og deretter med *vedvarende bruk av læringspar* lot elevene utforske oppgavene, førte til at undervisningsøktene artet seg som det Truxaw og DeFranco (2008) kaller *induktive* klasserom, som innebærer at læreren først presenterer oppgaven, og deretter lar elevene utforske egnede løsningsstrategier.

5 Drøfting

Analysekapitlet viser interessante funn knyttet til våre tre undersøkelsesfaktorer: oppgaver, samtalegrep og undervisningsorganisering og samtalestruktur. Disse er diskutert underveis i analysene, og kan betraktes som funn på *hvilke* grep lærerne gjør knyttet til de matematiske samtalene i klasserommet. I dette kapitlet presenteres funn på tvers av undersøkelsesfaktorene og vi drøfter *hvordan* grepene på tvers av de tre faktorene fungerer sammen for å styrke de matematiske samtalene.

5.1 Funn på tvers av analysene

Et viktig funn på tvers av våre tre analyser, er at lærernes ulike grep fokuserer på elevenes forklaringer. Forklaringer oppfattes i denne studien både som beskrivelser av løsningsmetode, og som begrunnelser for svar eller bruk av metoder. Forklaringer kan også innebære begge deler. Forklaringer som inneholder begrunnelser befinner seg, som Niss og Jensen (2002) påpeker, på et høyere matematisk nivå enn forklaringer som bare innebærer beskrivelser. Flere av de analyserte oppgavene ber elevene forklare. I oppgavene som ikke eksplisitt ber om forklaring, for eksempel deloppgave 1 i oppgaven om kombinasjonskart eller hovedoppgave 2, bruker lærerne samtalegrepet *be om forklaring* aktivt for å få elevene til å forklare hvordan de har tenkt og forklare sammenhengene de har oppdaget. I vårt datamateriale er kategorien *be om forklaring* kodet 137 ganger, og er det samtalegrepet som forekommer hyppigst. Grepet *skrive ned forklaring* og det strukturelle grepet *læringsplakat* viser et fokus på at elevene skal formulere skriftlige forklaringer, noe som tyder på at forklaringene er verdifulle og skal brukes videre. Lærerne organiserer i tillegg undervisningsøktene, og strukturerer samtalene, slik at elevene alltid får presentere og forklare egne strategier og svar i oppsummeringsfasene. På disse måtene vektlegger både grep knyttet til oppgavene, samtalegrepene, og undervisningsorganisering og samtalestruktur at elevene skal forklare sine løsningsmetoder og svar. Et slikt kontinuerlig fokus på forklaringer kan påvirke det Yackel og Cobb (1996) kaller sosiale og sosiomatematiske normer. At lærerne ofte ber elevene forklare sin tenkning, kan bidra til en sosial norm om at elevene skal beskrive og begrunne strategiene de velger å bruke. Bruk av samtalegrepet *spesifikke spørsmål* underveis i elevenes forklaringer kan påvirke sosiomatematiske normer om hva som anses som en akseptabel matematisk forklaring.

Et annet funn på tvers av undersøkelsesfaktorene er at lærernes ulike grep retter fokus mot elevenes ideer og strategier. Ved at lærerne velger oppgaver som er åpne og som kan løses på flere ulike måter, kan ulike strategier brukes og samtales om. Oppgavene som ble brukt i undervisningen har på ulike måter en struktur kjennetegnet av det Sullivan m.fl. (2015) kaller *low floor - high ceiling*, som innebærer at de har en lav inngangsterskel og er lette å komme i gang med, samtidig som de åpner for bruk av mer avanserte matematiske strategier. Dette gjør at alle elevene kan arbeide med samme oppgave, men likevel bruke ulike strategier og samarbeide på tvers av ulike matematiske nivåer. Lærernes bruk av *idémyldring* kombinert med samtalegrepet *åpne spørsmål* i oppstartsfasene signaliserer at det er elevene som skal tolke, utforske og oppdage strategier. Når elevene er i stand til å formulere ideer og svar knyttet til oppgavene, bruker lærerne samtalegrepene *be om forklaring* og *spesifikke spørsmål* for å få innsikt i bakgrunnen for elevenes matematiske tenkning. Ved at samtalegrepene retter fokus på det elevene sier og gjør, i stedet for lærerens måte å tenke på, kan elevene beskrive, bygge videre på eller begrunne egne strategier. I utforskingsfasene foretar lærerne en *strategisk utvelgelse* av elevene som skal få presentere sitt arbeid knyttet til oppgavene, noe vi har sett i sammenheng med praksisene Smith og Stein (2011) kaller *selecting* og *sequencing*. Etter presentasjonene i helklasse *kobler* også lærerne strategiene til hverandre, og til viktige matematiske ideer, noe som kan bidra til økt forståelse for hverandres strategier og for sammenhenger i matematikk. Dette har vi diskutert opp mot praksisen Smith og Stein (2011) kaller *connecting*. Slik fokuserer grepene knyttet til oppgavene, samtalegrepene, og undervisningsorganisering og samtalestruktur på elevenes egne tanker, ideer og strategier.

Fokuset lærerne har på at elevene skal forklare, og fokuset som rettes mot elevenes egne ideer og strategier, står i kontrast til *IRE*-mønsteret Franke m.fl. (2007) skildrer som dominerende i de fleste klasserom. Særlig skiller kommunikasjonsmønsteret i de observerte klasserommene seg fra fasen Franke m.fl. (2007) kaller *evaluation*, som innebærer at læreren vurderer om elevens svar er rett eller galt. Med utgangspunkt i elevenes svar ber ofte våre lærerinformanter om forklaring i stedet for å evaluere utsagnene. Dette fører til at elevene selv vurderer eller begrunner sine svar, i stedet for at lærerne gjør det. Kommunikasjonsmønstrene i de observerte klasserommene kan sees i sammenheng med det Wood (1998) kaller *focusing*, som innebærer at lærerne stiller veiledende spørsmål som fokuserer på strategiene og svarene eleven selv formulerer. Ved at lærerne velger oppgaver som kan løses på flere måter, legges det opp til at elevene kan oppdage, utforske og formulere løsningsstrategier selv, i stedet for å gjette seg frem til lærerens foretrukne måter å løse oppgaven på. Ved at lærerne ofte ber elevene forklare, fokuseres det på utsagnene elevene selv bringer inn i samtalen. Lærernes bruk av *strategisk utvelgelse* sikrer at alle elevene får delta i helklassediskusjonen. Dette fører til et større innslag av det Truxaw og DeFranco (2008) kaller *dialogic communication*, som innebærer kommunikasjon mellom flere, og mer likeverdige, deltakere. I de observerte klasserommene er det ikke bare lærerens utsagn som har verdi, men elevenes strategier og svar anses også som viktige. Dette tydeliggjøres blant annet ved hyppig bruk av samtalegrepet *gjenta elevenes utsagn* og grepet *læringsplakat*.

Grep innenfor undervisningsorganisering bidrar også til å styrke kommunikasjonsmønsteret og de matematiske samtalene. Ved at lærerne med grepet *idémyldring* velger å presentere oppgavene kort uten å gi tilleggsinformasjon, samt benytte grepet *vedvarende bruk av læringspar*, legges det til rette for at elevene får samtale lenge om oppgavene. Elevene samtaler også på tvers av læringsparene, siden oppgavenes struktur og undervisningens organisering tillater det. Elevene får derfor, gjennom mange interaksjoner med hverandre og med lærerne, trent på det Niss og Jensen (2002) kaller *kommunikasjonskompetanse*, *tankegangskompetanse* og *resonneringskompetanse*, og på det Kilpatrick m.fl. (2001) kaller *adaptive reasoning*. Alle disse delkompetansene er viktig for elevenes helhetlige matematikkforståelse. Måten lærerne organiserer undervisningen på, med utforsking allerede i oppstarten, kan sees i sammenheng med det Truxaw og DeFranco (2008) kaller *induktive klasserom*, som er klasserom der elevene i større grad får tolke og utforske oppgaver og finne egne strategier, i stedet for at læreren tolker og presenterer disse for elevene. Ifølge Truxaw og DeFranco (2008) fordrer *induktive klasserom*, i større grad enn *deduktive klasserom*, det Hiebert og Lefevre (1986) kaller konseptuell eller helhetlig begrepsforståelse i matematikk. At lærerne organiserer undervisningen *induktivt* vil dermed kunne styrke utviklingen av en mer helhetlig matematikkforståelse ved at elevene får oppdage, utforske og prøve ut selvutviklede strategier, samt at de får delt tankene, ideene og strategiene sine i helklasse.

Ifølge Franke m.fl. (2007) avhenger produktiviteten i matematiske samtaler særlig av at elevene får tenke selv, formulere og forklare for å skape mening, og Peressini og Knuth (2000) sier at produktive matematiske samtaler setter elevenes tanker i sentrum, hvor de får presentere og forklare sitt arbeid for medelevene. Grepene lærerne gjør, og de eksemplifiserte sammenhengene mellom dem, viser hvordan grep knyttet til oppgaver, samtalegrep, og undervisningsorganisering og samtalestruktur kan styrke de matematiske samtalene og gjøre dem mer produktive. For å oppsummere innebærer lærernes grep å velge ut åpne og kognitivt utfordrende oppgaver og å bruke *idémyldring*, *læringspar* og *læringsplakat*. I tillegg bruker lærerne spesifikke samtalegrep som fokuserer samtalene mot elevenes egen tenkning og mot forklaringer. Lærernes *overvåking*, *strategiske utvelgelse* og *kobling av strategier og svar* gjør at elevenes ideer og forklaringer løftes frem som viktige. Resultatet er at elevene får beskrive og begrunne gjennom hele undervisningsøkten, både overfor læreren og for hverandre. På denne måten styrker grepene de matematiske samtalene.

5.1.1 Betydningen av grepenes samspill

Funnene på tvers viser at grepene virker sammen for å styrke de matematiske samtalene. Dette kan tyde på at endringer i, eller fravær av, ett grep kan påvirke andre grep og føre til at de matematiske samtalene arter seg annerledes. Trolig vil ikke valg av åpne og kognitivt utfordrende oppgaver alene bidra til produktive samtaler. Hvis lærere, i stedet for å bruke *idémyldring* med *åpne spørsmål*, i oppstarten presenterer strategiene elevene skal bruke i oppgaveløsningen, vil ikke lenger samtalene i læringspar omhandle elevenes egne strategier, og det *induktive* mønsteret vil kunne brytes. Trolig vil elevenes forklaringer ut fra samtalegrepet *be om forklaring* ligne på hverandre, og i stor grad innebære elementer fra lærerens presentasjon fra starten. Resultatet vil kunne bli at samtalene orienteres mot lærerens strategier i stedet for elevenes, og i større grad omhandle det Wood (1998) kaller *funneling*, som innebærer at lærerens serier med spørsmål leder elevene inn på lærerens foretrukne løsningsstrategier og svar.

Samtalegrepene synes også å påvirke samtalestrukturen. Dersom lærerne ikke bruker *åpne spørsmål* og *be om forklaring* i *overvåkingen* og *spesifikke spørsmål* veiledningen av elevenes arbeid, vil de trolig være dårligere rustet til å foreta *strategiske utvelgelser* og *kobling av strategier og svar* i helklassediskusjonen, siden de vil ha mindre innsikt i elevenes løsningsmetoder. Vi har tidligere argumentert for at *koblingen* lærerne gjør er et viktig grep i oppsummeringsfasen ettersom det kan gjøre at elevene ser sammenhenger mellom flere løsningsmetoder og forklaringsmåter, og dermed kan styrke elevenes helhetlige forståelse. Hvis lærerne ikke får innsikt i elevenes strategier gjennom samtalegrepet *be om forklaring*, og ikke belyser detaljer i forklaringene med *spesifikke spørsmål*, er det nærliggende å tro at slike koblinger blir mindre produktive. De ulike måtene grepene påvirker hverandre på, viser at matematiske samtaler er komplekse og at lærere bør reflektere over flere aspekter for å styrke dem.

6 Konklusjon

I denne masteroppgaven har vi undersøkt forskningsspørsmålet «Hvilke grep gjør to engasjerte lærere på mellomtrinnet knyttet til de matematiske samtalene i klasserommet, og hvordan styrker grepene samtalene*?*». I løpet av datainnsamlingen utmerket det seg tre faktorer vi valgte å undersøke nærmere: 1) oppgaver, 2) samtalegrep og 3) undervisningsorganisering og samtalestruktur. Vi har gjort funn innenfor hver undersøkelsesfaktor som viser *hvilke* grep lærerne gjør knyttet til de matematiske samtalene. Våre funn på tvers av analysene viser *hvordan* grepene sammen kan styrke samtalene i klasserommet. Tabell 5 oppsummerer lærernes grep.

Tabell 5: Lærernes grep

Lærernes grep		
Oppgaver	**Samtalegrep**	**Organisering og struktur**
Valg av oppgaver med åpen struktur Valg av oppgaver med høyere kognitive krav Presentere oppgaven uten hint eller tilleggsinformasjon	Åpne spørsmål Be om forklaring Spesifikke spørsmål Gjenta elevenes utsagn	Idémyldring Vedvarende bruk av læringspar Læringsplakat Overvåking Strategisk utvelgelse Kobling av strategier og svar

I oppgaveanalysen fant vi at lærerne velger oppgaver som generelt har en åpen struktur og som stiller høyere kognitive krav til elevene. Et annet grep er at lærerne ikke presenterer tilleggsinformasjon eller gir elevene hint til hvordan oppgavene kan løses. Disse grepene gjør at elevene kan utforske de samme oppgavene lenge, og på ulike matematiske nivåer. At oppgavene kan løses på ulike måter, danner grunnlaget for samtaler om elevenes ulike løsningsmetoder og svar.

Knyttet til lærernes dialog med elevene utmerket det seg fire samtalegrep: *åpne spørsmål, be om forklaring, spesifikke spørsmål* og *gjenta elevenes utsagn*. Samtalegrepene bidrar til å fremheve og få innsikt i elevenes tankegang, ideer, strategier, svar og forklaringer.

Funn innenfor tredje undersøkelsesfaktor viser at grepet *idémyldring* fører til fokus på, og innsikt i, elevenes ideer. *Vedvarende bruk av læringspar* bidrar til mange interaksjoner mellom elevene og mellom lærer og elever. Bruk av *læringsplakat* retter fokuset mot skriftlige forklaringer og signaliserer at elevenes ideer er verdifulle. Lærerne strukturerer de matematiske samtalene ved bruk av *strategisk utvelgelse* på bakgrunn av en grundig *overvåking*. Dette lar elevene bygge på hverandres ideer og forklaringer, samtidig som alle elevene får delta i de matematiske samtalene. Til slutt *kobles* elevenes ulike strategier og svar til hverandre og til matematiske ideer, noe som kan bidra til at elevene ser sammenhenger i matematikk.

Funnene på tvers viser at alle grepene retter fokus på elevenes tanker, ideer, strategier og forklaringer. Ved bruk av *idémyldring* og *åpne spørsmål* fokuserer lærerne på elevenes egne forslag og ideer. I utforskingsfasene får elevene i *læringspar* selv utvikle strategier som er egnet til å løse oppgavene, mens lærerne *overvåker* elevene i arbeidet. Flere av oppgavene ber elevene forklare, og i arbeidet med de oppgavene som ikke gjør det, bruker lærerne samtalegrepet *be om forklaring*. I veiledning av elevenes forklaring, brukes *spesifikke spørsmål* for å belyse detaljer i forklaringene. Lærerne gir heller ikke tilleggsinformasjon eller hint i presentasjonene av oppgavene, noe som gjør at elevene selv kan finne egnede strategier. I oppsummeringsfasene er det elevenes strategier og forklaringer som *kobles* med utgangspunkt i *læringsplakaten*, blant annet ved at lærerne vektlegger forskjeller og likheter og *gjentar elevenes utsagn*.

Funnene på tvers illustrerer hvordan ulike grep kan fungere sammen. Vi har drøftet at grep innenfor én undersøkelsesfaktor ikke uten videre styrker de matematiske samtalene. Dette aktualiserer grundig planlegging av produktive matematiske samtaler.

Lærernes grep skiller seg fra våre tidligere erfaringer med skolematematikk. At lærerne våger å bryte med de tradisjonelle kommunikasjonsmønstrene som dominerer dagens klasserom, viser deres vilje til utvikling av egen undervisningspraksis, og synliggjør deres engasjement knyttet til matematikkfaget.

Etter analysene av våre tre undersøkelsesfaktorer kan vi svare på vår problemstilling: «Hvilke grep gjør to engasjerte lærere på mellomtrinnet knyttet til de matematiske samtalene i klasserommet, og hvordan styrker grepene samtalene*?*». Lærernes grep knyttet til oppgavene er å velge oppgaver med åpen struktur og høyere kognitive krav, og å presentere dem uten hint eller tilleggsinformasjon. Lærerne benytter samtalegrepene *åpne spørsmål, be om forklaring, spesifikke spørsmål* og *gjenta elevenes utsagn* for å fremheve og få innsikt i elevenes tankegang, ideer, strategier, svar og forklaringer. Knyttet til undervisningsorganisering og samtalestruktur benytter lærerne seg av grepene *idémyldring*, *vedvarende bruk av læringspar, læringsplakat, overvåking, strategisk utvelgelse* og *kobling av strategier og svar*. Franke m.fl. (2007) hevder at produktiviteten i matematiske samtaler særlig avhenger av at elevene får tenke selv, formulere og forklare for å skape mening. Ved at grepene de to engasjerte lærerne gjør retter fokus på elevenes tanker, ideer, strategier og forklaringer, får elevene i stor grad tenke, formulere og forklare gjennom hele undervisningsøkten. Både til læreren og til hverandre. På disse måtene fører våre funn av lærernes grep til styrking av de matematiske samtalene i klasserommet.

6.1 Læringsutbytte

I arbeidet med denne oppgaven har vi lært hvordan styrking av de matematiske samtalene i klasserommet kan bidra til et mer balansert forhold mellom begrepskunnskap og prosedyrekunnskap. Ved å vektlegge elevenes egne tanker, ideer og forklaringer kan samtalene og undervisningen i større grad fokusere på at elevene skal forstå, i stedet for å bare gjøre, matematikk. Vi har sett hvordan grepene vi har trukket frem, og sammenhengene mellom dem, kan bidra til å bryte med de tradisjonelle kommunikasjonsmønstrene i, og de tradisjonelle oppfatningene om, matematikk. Og vi har sett at produktive matematiske samtaler ikke bare handler om å prate, men at det er avgjørende at samtalene lar elevene dele sine tanker, ideer, strategier og forklaringer. Slik kan elevene muligens oppleve matematikkfaget som meningsfylt og givende, noe som vil være i sterk kontrast til de dominerende oppfatningene om at matematikk handler om å sitte stille på egne plasser og regne oppgaver. Denne kunnskapen tar vi med oss ut i arbeidslivet, og vi håper og tror at denne oppgaven kan hjelpe oss som matematikklærere.

6.2 Videre forskning

Alle våre tre undersøkelsesfaktorer bør undersøkes nærmere. Andre lærere vil kunne bruke andre samtalegrep, velge andre typer oppgaver, og organisere undervisningen og strukturere samtalene annerledes, men likevel få til produktive matematiske samtaler i sine klasserom. Våre analyser av oppgavene fokuserer primært på oppgavenes struktur, kognitive krav og utfordring. Det vil også kunne være interessant å undersøke hvilken betydning oppgavenes kontekst har for de matematiske samtalene.

I denne oppgaven har lærernes grep vært i fokus. I observasjonene har vi blant annet sett på samtalene mellom lærerne og elevene. Samtalene som foregår mellom elevene uten at lærerne deltar vil imidlertid også være interessant å se på for å undersøke hvordan elevene samhandler og kommuniserer for å tolke og utforske oppgavene uten interaksjon med læreren.

Denne studien viser at grepene lærere tar kan påvirke samtalene. Videre forskning kan undersøke hvilke typer kompetanse lærere bør besitte for å planlegge og gjennomføre produktive matematiske samtaler.

Referanseliste

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The elementary school journal, 93*(4), s. 373-397.

Battista, M. S., Margaret S.; Boerst, Timothy; Sutton, John; Confrey, Jere; White, Dorothy; Knuth, Eric; Quander, Judith. (2009). Research in Mathematics Education: Multiple Methods for Multiple Uses. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 216-240.

Bjerkeli, K. (2017). *Kunsten å snakke matematikk: en kasusstudie om hvordan en flink lærer praktiserer den matematiske samtalen i klasserommet.* NTNU.

Bjørndal, C. R. (2012). *Det vurderende øyet: observasjon, vurdering og utvikling i undervisning og veiledning* (2. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Boaler, J. (2009). *The elephant in the classroom : helping children learn and love maths* (Rev. utg.). London: Souvenir.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology, 3*(2), s. 77-101.

Chapin, S. H., O'Connor, C. & Anderson, N. C. (2009). *Classroom discussions: using math talk to help students learn, grades K-6* (2. utg.). Sausalito, Calif: Math Solutions.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag.

Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics, 1*(1), 3-38.

Cohen, L., Manion, L., Morrison, K., Bell, R. C., Martin, S., McCulloch, G. & O'Sullivan, C. (2011). *Research methods in education* (7. utg.). London: Routledge.

Creswell, J. W. (2014). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4. utg.Research design). Los Angeles, California: SAGE.

Drageset, O. G. (2014). Redirecting, progressing, and focusing actions—a framework for describing how teachers use students' comments to work with mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 85*(2), 281-304. 10.1007/s10649-013-9515-1. Hentet fra https://doi.org/10.1007/s10649-013-9515-1

Eliassen, K. S. (2017). *En undervisning med elevtenkning i fokus. En kvalitativ studie om hvordan en dyktig lærer retter fokuset på å finne elevtenkning for videre læring i matematikk.* UiT Norges arktiske universitet.

Franke, M. L., Kazemi, E. & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (s. 225-256). Greenwich: Information Age.

Gold, R. L. (1958). Roles in Sociological Field Observations. *Social Forces, 36*(3), s. 217-223. 10.2307/2573808. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/2573808

Guba, E. G. & Lincoln, Y. S. (1982). Epistemological and methodological bases of naturalistic inquiry. *ECTJ, 30*(4), 233-252.

Guba, E. G. & Lincoln, Y. S. (1994). Competing paradigms in qualitative research. *Handbook of qualitative research, 2*(163-194), 105-117.

Hammer, D. (1997). Discovery learning and discovery teaching. *Cognition and instruction, 15*(4), s. 485-529.

Hashimoto, Y. & Becker, J. (1999). The open approach to teaching mathematics–Creating a culture of mathematics in the classroom: Japan. *Developing mathematically promising students*, 101-119.

Heaton, R. M. (2000). *Teaching Mathematics to the New Standard: Relearning the Dance* (15): Teachers College Press.

Herbal-Eisenmann, B. A. & Breyfogle, M. L. (2005). Questioning Our Patterns of Questioning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *10*(9), s. 484-489.
Herheim, R. (2016). Matematikk som magi - Hugsereglar og konsekvensar. I T. E. Rangnes & H. Alrø (Red.), *Matematikklæring for framtida: Festskrift til Marit Johnsen-Høines* (s. 129-146). Bergen: Caspar Forlag.
Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An Introductory Analysis*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Imm, K. & Stylianou, D. A. (2012). Talking mathematically: An analysis of discourse communities. *The Journal of mathematical behavior*, *31*(1), s. 130-148.
Johnsen-Høines, M. & Alrø, H. (2010). Trenger en å spørre for å være spørrende? *Fou I Praksis*(3), 79-96.
Kazemi, E. & Hintz, A. (2014). *Intentional Talk: How to Structure and Lead Productive Mathematical Discussions*. Portland: Stenhouse Publishers.
Kilpatrick, J. E., Swafford, J. E. & Findell, B. E. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington DC: National Academy Press.
Knuth, E. & Peressini, D. (2001). Unpacking the nature of discourse in mathematics classrooms. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *6*(5), 320.
Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M. & Rygge, J. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.
Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modeling. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, *2*, s. 763-804.
Lithner, J. (2006). *A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning*: Citeseer.
Lockhart, P. (2009). *A mathematician's lament: How school cheats us out of our most fascinating and imaginative art forms*: NY: Belevue Literary Press.
Mertens, D. (2004). An introduction to research. *D. Mertens, Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantiativ, qualitative, mixed methods*, 1-42.
Michaels, S. & O'Connor, C. (2015). Conceptualizing talk moves as tools: Professional development approaches for academically productive discussion. *Socializing intelligence through talk and dialogue*, 347-362.
NESH. (2016). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. Hentet fra https://www.etikkom.no/forskningsetiske-retningslinjer/Samfunnsvitenskap-jus-og-humaniora/a.-forskning-samfunn-og-etikk/ (26.01.2018)
Newman, D. (1990). Cognition, computing, and cooperation. *Cognition, computing, and cooperation*, s. 84-94.
Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (18): Undervisningsministeriets forlag.
Nosrati, M. & Wæge, K. (2014). En oppsummering av status for forskning på hva som kjennetegner god læring og undervisning innenfor matematikk. Hentet fra https://nettsteder.regjeringen.no/fremtidensskole/files/2014/05/Status-rapport-matematikksenteret.pdf (26.01.2018)
Nystrand, M. (1997). *Opening Dialogue: Understanding the Dynamics of Language and Learning in the English Classroom. Language and Literacy Series*: ERIC.
Patel, R. & Davidson, B. (2011). *Forskningsmetodikens grunder: Att planera, genomföra och rapportera en undersökning* (4. utg.). Lund: Studentlitteratur.
Percy, W. H., Kostere, K. & Kostere, S. (2015). Generic qualitative research in psychology. *The Qualitative Report*, *20*(2), s. 76-85.

Peressini, D. & Knuth, E. (2000). The role of tasks in developing: Communites of mathematical inquiry. *Teaching Children Mathematics*, *6*(6), 391.
Ponte, J. & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *An International Journal, 93*(1), 51-66. 10.1007/s10649-016-9681-z
Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Oslo: Universitetsforlaget.
Postholm, M. B. & Moen, T. (2009). *Forsknings- og utviklingsarbeid i skolen: En metodebok for lærere, studenter og forskere*. Oslo: Universitetsforlaget.
Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning, 334370*.
Schoenfeld, A. H. (2007). Method. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 69-107). Charlotte, NC: Information Age.
Schoenfeld, A. H. (2008). Research Methods in (Mathematics) Education. I L. D. English (Red.), *Handbook of international research in mathematics education* (2. utg., s. 467-519). New York: Routhledge.
Sherin, M. G. (2002). When Teaching Becomes Learning. *Cognition and Instruction, 20*(2), s. 119-150. 10.1207/S1532690XCI2002_1.
Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zdm, 29*(3), 75-80.
Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*(1), s. 20-26.
Smith, M. S. & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school, 3*(5), 344-350.
Smith, M. S. & Stein, M. K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
Steen-Olsen, T. (2010). Refleksiv forskningsetikk - den kritiske ettertanken. I T. Lund, M. B. Postholm & G. Skeie (Red.), *Forskeren i møte med praksis* (s. 97-113). Trondheim: Tapir akademisk forlag.
Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school, 3*(4), 268-275.
Stillman, G., Cheung, K.-C., Mason, R., Sheffield, L., Sriraman, B. & Ueno, K. (2009). Challenging Mathematics: Classroom Practices. I E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Red.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom* (s. 243-283). US: Springer.
Sullivan, P., Knott, L. & Yang, Y. (2015). The Relationships Between Task Design, Anticipated Pedagogies, and Student Learning. I A. Watson & M. Ohtani (Red.), *Task Design In Mathematics Education* (s. 83-114): Springer International Publishing.
Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitativ metode* (4. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.
Tjora, A. H. (2012). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (2. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.
Truxaw, M. P. & DeFranco, T. (2008). Mapping Mathematics Classroom Discourse and Its Implications for Models of Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(5), s. 489-525. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/40539312
Wood, T. (1998). Alternative patterns of communication in mathematics classes: Funneling or focusing. *Language and communication in the mathematics classroom*, s. 167-178.
Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), s. 458-477.
Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods* (3. utg. Applied social research methods series vol. 5). Thousand Oaks, California: Sage.

Vedlegg 1: Nivåer av kognitive krav i oppgaver

Levels of Demands

Lower-level demands (memorization):

- Involve either reproducing previously learned facts, rules, formulas, or definitions or committing facts, rules, formulas or definitions to memory
- Cannot be solved using procedures because a procedure does not exist or because the time frame in which the task is being completed is too short to use a procedure
- Are not ambiguous. Such tasks involve the exact reproduction of previously seen material, and what is to be reproduced is clearly and directly stated.
- Have no connection to the concepts or meaning that underlie the facts, rules, formulas, or definitions being learned or reproduced

Lower-level demands (procedures without connections):

- Are algorithmic. Use of the procedure either is specifically called for or is evident from prior instruction, experience, or placement of the task.
- Require limited cognitive demand for successful completion. Little ambiguity exists about what needs to be done and how to do it.
- Have no connection to the concepts or meaning that underlie the procedure being used
- Are focused on producing correct answers instead of on developing mathematical understanding
- Require no explanations or explanations that focus solely on describing the procedure that was used

Higher-level demands (procedures with connections):

- Focus students' attention on the use of procedures for the purpose of developing deeper levels of understanding of mathematical concepts and ideas
- Suggest explicitly or implicitly pathways to follow that are broad general procedures that have close connections to underlying conceptual ideas as opposed to narrow algorithms that are opaque with respect to underlying concepts
- Usually are represented in multiple ways, such as visual diagrams, manipulatives, symbols, and problem situations. Making connections among multiple representations helps develop meaning.
- Require some degree of cognitive effort. Although general procedures may be followed, they cannot be followed mindlessly. Students need to engage with conceptual ideas that underlie the procedures to complete the task successfully and that develop understanding.

Higher-level demands (doing mathematics):

- Require complex and nonalgorithmic thinking—a predictable, well-rehearsed approach or pathway is not explicitly suggested by the task, task instructions, or a worked-out example.
- Require students to explore and understand the nature of mathematical concepts, processes, or relationships
- Demand self-monitoring or self-regulation of one's own cognitive processes
- Require students to access relevant knowledge and experiences and make appropriate use of them in working through the task
- Require students to analyze the task and actively examine task constraints that may limit possible solution strategies and solutions
- Require considerable cognitive effort and may involve some level of anxiety for the student because of the unpredictable nature of the solution process required

These characteristics are derived from the work of Doyle on academic tasks (1988) and Resnick on high-level-thinking skills (1987), the *Professional Standards for Teaching Mathematics* (NCTM 1991), and the examination and categorization of hundreds of tasks used in QUASAR classrooms (Stein, Grover, and Henningsen 1996; Stein, Lane, and Silver 1996).

Vedlegg 2: Kombinasjonskart

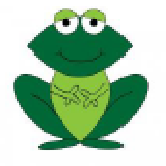
14	112														
13	104	110													
12	96	102	108												
11	88	94	100	106											
10	80	86	92	98	104	110									
9	72	78	84	90	96	102	108	114							
8	64	70	76	82	88	94	100	106	112						
7	56	62	68	74	80	86	92	98	104	110					
6	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102					
5	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106	112	118	124
4	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98	104	110	116
3	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108
2	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100
1	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92
0		6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Antall 8-ere

Antall 6-er

1. Finn mønster
2. Hvis skjer når du går opp to rader? Hvorfor økes tallene på kartet med 16?
3. Hva skjer hvis du flytter deg en rad oppover og så en kolonne til venstre?T
4. Hva skjer hvis du går to rader ned og hopper tre kolonner til høyre? Hvorfor blir det slik?
5. Tallet 30 finnes to ganger på kombinasjonskartet. Hva betyr det? Hvorfor er det sånn? Hva slags endringer finner sted mellom de to tallene?
6. Hvor finner du tallene 52 og 66? Hvorfor finner du dem der? Finner du igjen kombinasjonene dine fra plakatene du laget forrige time?

Vedlegg 3: Hoppekonkurranse for frosker

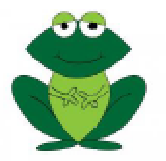

Hoppe-konkurranse for frosker:

Frosken MT arrangerer ny hoppekonkurranse.
Vinneren kåres nå etter to runder hvor begge runder sees i sammenheng for å kåre vinneren. Frosken kommer like langt på begge rundene, det er inndeling i hopp og skritt som er forskjellig.

Ellers gjelder samme regel som før; *alle hopp en frosk hopper er like lange - og alle skritt en frosk tar er like lange.*

Vinneren er den frosken som har det lengste hoppet.
Paddeper's resultater: Etter 4 hopp og 11 skritt *forover*, lander han på samme sted som når han hopper 5 hopp og 4 skritt *forover*.

Froskelur's resultater: Etter 3 hopp og 6 skritt *forover,* lander han på samme sted som når han hopper 4 hopp *framover* og tar 2 skritt



bakover.
MT's resultater: Etter 2 hopp og 13 skritt *framover*, lander han på samme sted som når han hopper 4 hopp *framover* og 5 skritt *bakover*

Vedlegg 4: Lærerens samtykkeskjema

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

«Masterstudie av undervisningspraksis»

Bakgrunn og formål

Vi studerer ved Universitetet i Tromsø, avd. lærerutdanningen. Våren 2018 skal vi gjennomføre et masterprosjekt i matematikkdidaktikk som omhandler matematikkundervisning i klasserommet.

Målet med masterprosjektet er å undersøke viktige aspekter ved klasseromsundervisning. Prosjektet søker å beskrive ulike grep læreren gjør i undervisningssituasjoner i matematikk.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Deltakelse i studien innebærer å bli observert i flere undervisningssituasjoner hvor hele klassen er til stede. Observasjonen innebærer video- og lydopptak, samt feltnotater. Prosjektet har en planlagt varighet på 8-12 undervisningstimer i matematikk.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Det er kun masterstudentene, Håkon Ottesen og Ådne Pedersen, samt veileder Ove Gunnar Drageset, som har tilgang til datamaterialet (video- og lydopptak).

Data som publiseres vil være anonymisert, og vil ikke kunne knyttes til enkeltdeltakere. Datamaterialet lagres på ekstern harddisk utilgjengelig for andre. Prosjektet skal etter planen avsluttes 15. mai 2018. Alt av datamateriale vil da bli fullstendig anonymisert, og video- og lydopptak vil bli slettet.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert fortløpende.

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med Håkon Ottesen på e-post haakonottesen92@gmail.com eller aadnepedersen1@gmail.com. Veileder kan kontaktes på ove.gunnar.drageset@uit.no.

Studien er godkjent av Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Lærers samtykkeskjema

Jeg bekrefter med dette at jeg har lest informasjonsskrivet og samtykker i å bli observert i 4-6 undervisningstimer.

Navn: ____

Jeg samtykker i at: (kryss av begge boksene)

☐ Å lede undervisning hvor det blir tatt lydopptak til transkribering og analyse. Anonymiserte sitater fra meg som lærer, der jeg ikke skal nevnes eller kunne identifiseres, vil brukes som data i forskningsprosjektet.

☐ Det tas videoopptak av meg som en del av matematikkundervisningen. Videoen kan brukes av forskerne til forskningsarbeidet. Videoen skal ikke offentliggjøres, og vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet.

Sted og dato: ____

Underskrift: ____

Tusen takk!

Vedlegg 5: Foreldres/foresattes samtykkeskjema

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

«Masterstudie av undervisningspraksis»

Bakgrunn og formål

Vi studerer ved Universitetet i Tromsø, avd. lærerutdanningen. Våren 2018 skal vi gjennomføre et masterprosjekt i matematikkdidaktikk som omhandler matematikkundervisning i klasserommet.

Målet med masterprosjektet er å undersøke viktige aspekter ved klasseromsundervisning. Prosjektet søker å beskrive ulike grep læreren gjør i undervisningssituasjoner i matematikk.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Deltakelse i studien innebærer å bli observert i flere undervisningssituasjoner hvor hele klassen er til stede. Observasjonen innebærer video- og lydopptak, samt feltnotater. Observasjonen har en planlagt varighet på 8-12 undervisningstimer i matematikk. Det er lærerens undervisningspraksis som er i fokus.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Det er kun masterstudentene, Håkon Ottesen og Ådne Pedersen, samt veileder Ove Gunnar Drageset, som har tilgang til datamaterialet (video- og lydopptak).

Data som publiseres vil være anonymisert, og vil ikke kunne knyttes til enkeltdeltakere. Datamaterialet lagres på ekstern harddisk utilgjengelig for andre. Prosjektet skal etter planen avsluttes 15. mai 2018. Alt av datamateriale vil da bli fullstendig anonymisert, og video- og lydopptak vil bli slettet.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert fortløpende.

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med Håkon Ottesen på e-post haakonottesen92@gmail.com eller Ådne Pedersen på aadnepedersen1@gmail.com. Veileder kan kontaktes på ove.gunnar.drageset@uit.no.

Studien er godkjent av Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Foreldres/foresattes samtykkeskjema

Jeg bekrefter med dette at jeg har lest informasjonsskrivet og samtykker i at mitt barn deltar i aktiviteter knyttet til forskningsprosjektet.

Barns navn/klasse: ____

Jeg samtykker i at: (kryss av begge boksene)

☐ Mitt barn deltar i undervisning hvor det blir tatt lydopptak til transkribering og analyse. Anonymiserte sitater fra barnet, der barnet ikke nevnes eller vil kunne identifiseres, vil brukes som data i forskningsprosjektet.

☐ Det tas videoopptak av barnet som en del av matematikkundervisningen. Videoen kan brukes av forskerne til forskningsarbeidet. Videoen skal ikke offentliggjøres, og vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet.

Sted og dato: ____

Underskrift forelder/foresatt: ____

Vennligst lever skjemaet til [lærer] raskest mulig.

Tusen takk!

Vedlegg 6: Godkjenning fra NSD

Ida Friestad Pedersen

9006 TROMSØ

Vår dato: 08.12.2017 Vår ref: 57515 / 3 / HJT Deres dato: Deres ref:

Vurdering fra NSD Personvernombudet for forskning § 31

Personvernombudet for forskning viser til meldeskjema mottatt 01.12.2017 for prosjektet:

57515	*En kvalitativ studie av kommunikasjon i klasserommet.*
Behandlingsansvarlig	*UiT Norges arktiske universitet, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Ida Friestad Pedersen*
Student	*Håkon Ottesen*

Vurdering

Etter gjennomgang av opplysningene i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon finner vi at prosjektet er meldepliktig og at personopplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet er regulert av personopplysningsloven § 31. På den neste siden er vår vurdering av prosjektopplegget slik det er meldt til oss. Du kan nå gå i gang med å behandle personopplysninger.

Vilkår for vår anbefaling

Vår anbefaling forutsetter at du gjennomfører prosjektet i tråd med:

- opplysningene gitt i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon
- vår prosjektvurdering, se side 2
- eventuell korrespondanse med oss

Vi forutsetter at du ikke innhenter sensitive personopplysninger.

Meld fra hvis du gjør vesentlige endringer i prosjektet

Dersom prosjektet endrer seg, kan det være nødvendig å sende inn endringsmelding. På våre nettsider finner du svar på hvilke endringer du må melde, samt endringsskjema.

Opplysninger om prosjektet blir lagt ut på våre nettsider og i Meldingsarkivet

Vi har lagt ut opplysninger om prosjektet på nettsidene våre. Alle våre institusjoner har også tilgang til egne prosjekter i Meldingsarkivet.

Vi tar kontakt om status for behandling av personopplysninger ved prosjektslutt

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

Ved prosjektslutt 15.05.2018 vil vi ta kontakt for å avklare status for behandlingen av personopplysninger.

Se våre nettsider eller ta kontakt dersom du har spørsmål. Vi ønsker lykke til med prosjektet!

Katrine Utaaker Segadal

Håkon Jørgen Tranvåg

Kontaktperson: Håkon Jørgen Tranvåg tlf: 55 58 20 43 / Hakon.Tranvag@nsd.no

Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Håkon Ottesen, haakonottesen92@gmail.com

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 57515

Formålet med studien er å undersøke kommunikasjonsmønsteret i klasserommet.

Utvalget informeres skriftlig om prosjektet og samtykker til deltakelse. Informasjonsskrivet er godt utformet.

Deler av utvalget i prosjektet er barn og unge, og det er foreldrene deres som samtykker til deltakelse. Likevel bør barna få informasjon om prosjektet som er tilpasset deres ordforråd. Det er også viktig at barna får informasjon om at de kan velge å ikke delta i prosjektet hvis de ønsker det, selv om foreldrene har samtykket.

Personvernombudet legger til grunn at forsker etterfølger UiT Norges arktiske universitet sine interne rutiner for datasikkerhet. Dersom personopplysninger skal lagres på mobile enheter, bør opplysningene krypteres tilstrekkelig.

Forventet prosjektslutt er 15.05.2018. Ifølge prosjektmeldingen skal innsamlede opplysninger da anonymiseres. Anonymisering innebærer å bearbeide datamaterialet slik at ingen enkeltpersoner kan gjenkjennes. Det gjøres ved å:
- slette direkte personopplysninger (som navn/koblingsnøkkel)
- slette/omskrive indirekte personopplysninger (identifiserende sammenstilling av bakgrunnsopplysninger som f.eks. bosted/arbeidssted, alder og kjønn)
- slette digitale lyd- og videoopptak

Personvernombudet legger til grunn at prosjektet klareres med skoleledelsen.