UiT Norges arktiske universitet

Fakultet for humaniora, samfunnsvitenskap og lærerutdanning
Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Elevers divergente og konvergente tenkning i matematikk

En kvantitativ analyse av kreativitet i elevbesvarelser

Frida Dalheim

Masteroppgave i matematikkdidaktikk LRU-3903, mai 2020

Sammendrag

Kreativitet er en sentral kompetanse i kunnskapsløftet som ble innført høsten 2020. Formålet med denne masteroppgaven er å få innblikk i elevers kreative tenkning i matematikk. Dette undersøkes ved å se på konvergent og divergent tenkning, som er to aspekter av kreativitet. Det undersøkes også i hvilken grad disse samsvarer. I tillegg undersøkes det om det er en sammenheng mellom divergent tenkning og måloppnåelse, samt konvergent tenkning og måloppnåelse.

Forskningsprosjektet er en kvantitativ studie, der det er utviklet en utforskende test som 374 elever fra 8 skoler i Troms har svart på. På testen har elevene svart på to konvergente oppgaver og tre divergente oppgaver. Dette er videre blitt analysert med korrelasjonsanalyser, effektstørrelser og ikke-parametriske tester.

Resultatene i oppgaven indikerer at elevene gjennomsnittlig skårer lavt både på divergent og konvergent tenkning. De indikerer også at det er ulike elever som gjør det bra på divergente og konvergente oppgaver. Samtidig kan det se ut som at elevenes konvergente og divergente tenkning har innvirkning på elevenes måloppnåelse. Den lave skåren innenfor både divergent og konvergent tenkning kan tyde på at kreativitet ikke blir ivaretatt i så stor grad i klasserom i Norge.

Forord

Denne masteroppgaven markerer avslutningen på min femårige lærerutdanning ved Universitetet i Tromsø. Studiet har vært lærerikt, utfordrende og spennende, og denne oppgaven har bidratt til mye læring og refleksjon som vil være nyttig å ta med seg ut i læreryrket.

Jeg vil takke mine medstudenter som har bidratt til fem fine og morsomme år. Videre vil jeg rette en stor takk til min veileder Per Øystein Haavold for konstruktive tilbakemeldinger, ditt engasjement i min oppgave, samt muligheten til å utarbeide min oppgave i forskningsprosjektet SUM. Uten deg hadde ikke denne masteroppgaven vært mulig.

Til slutt ønsker jeg å takke familie og venner for gode innspill underveis og støtten jeg har fått gjennom årene på studiet.

Tromsø, mai 2021

Frida Dalheim

Innholdsfortegnelse

Sammendrag iii

Forord v

1 Introduksjon 1

1.1 Bakgrunn for forskningsspørsmål 1

1.2 Forskningsspørsmål 2

1.3 Oppgavens oppbygning 3

2 Teoretisk grunnlag 5

2.1 Kreativitet 5

2.1.1 Kreativitetsbegrepet 5

2.2 Argumentasjon 9

2.2.1 Argumentasjon, resonnering og bevis i matematikk 9

2.2.2 Evaluering av argumentasjon i matematikk 10

2.3 Kreativitet konseptualisert som konvergent og divergent tenkning 12

2.4 Tidligere forskning 14

2.4.1 Divergent produksjon 14

2.4.2 Argumentasjon 15

3 Metode 17

3.1 Vitenskapsteoretisk perspektiv 17

3.2 Undersøkelsens kontekst 17

3.3 Utvalg og datainnsamling 18

3.3.1 Utvalg 18

3.3.2 Datainnsamling 20

3.4 Testen 20

3.4.1 Argumentasjonsoppgaver 20

3.4.2 Divergent produksjonsoppgaver 24

3.5 Dataanalyse ... 26
3.5.1 Argumentasjon ... 26
3.5.2 Divergent produksjon ... 31
3.6 Statistiske analyser ... 40
3.6.1 Deskriptiv statistikk ... 40
3.6.2 Korrelasjonsanalyser ... 41
3.6.3 Ikke-parametriske tester ... 42
3.6.4 Effektstørrelser ... 43
3.7 Metodisk drøfting ... 43
3.7.1 Validitet ... 43
3.7.2 Reliabilitet ... 44
3.8 Etikk ... 45
4 Resultater ... 47
4.1 Konvergerent og divergent tenkning ... 47
4.1.1 Elevenes konvergente tenkning ... 47
4.1.2 Elevenes divergente tenkning ... 49
4.2 Sammenheng mellom oppgavene ... 52
4.3 Samsvar mellom divergent og konvent tenkning ... 53
4.4 Matematisk kompetanses påvirkning på testen ... 54
4.4.1 Fordeling av elevenes argumentasjonskår og divergent produksjonskår ... 55
4.4.2 Gruppeforskjeller i divergent produksjon og argumentasjon ... 58
4.4.3 Forskjeller mellom måloppnåelse, argumentasjon og divergent produksjon ... 59
5 Diskusjon ... 61
5.1 Elevenes divergente og konvergente tenkning ... 61
5.1.1 Elevenes konvergente tenkning ... 61
5.1.2 Elevenes divergente tenkning ... 63

5.1.3 Samsvar mellom divergent og konvergent tenkning 65
5.2 Sammenheng mellom divergent tenkning, konvergent tenkning og måloppnåelse hos elever i matematikk 66
6 Avslutning 69
Referanseliste 71
Vedlegg A: Datainnsamlingsinstrumenter 75
A.1 Godkjenning fra NSD 75
A.2 Samtykkeskjema elever under 15 år 83
A.3 Samtykkeskjema elever over 15 år 85
A.4 Test gruppe 1 87
A.5 Test gruppe 2 92
Vedlegg B: Kategorisering av elevbesvarelser 95
B.1 Naiv empirisme 95
B.2 Avgjørende eksperiment 98
B.3 Generisk eksempel 101
B.4 Tankeeksperiment 104
Vedlegg C: Utregning av divergent produksjonskår 107

Figurliste

Figur 3.1: Oppgave 1, gruppe 1 21
Figur 3.2: Oppgave 1, gruppe 2. 22
Figur 3.3: Oppgave 3 i testen. 25
Figur 3.4: Oppgave 5 i testen. 26
Figur 3.5: Elevbesvarelse med argumentasjonsnivå naiv empirisme. 28
Figur 3.6: Elevbesvarelse med argumentasjonsnivå avgjørende eksperiment. 29
Figur 3.7: Elevbesvarelse med argumentasjonsnivå generisk eksempel. 30
Figur 3.8: Elevbesvarelse med argumentasjonsnivå tankeeksperiment. 30
Figur 3.9: Elevbesvarelse fra oppgave 3. 34
Figur 3.10: Elevbesvarelse fra oppgave 4. 35
Figur 3.11: Kategori 1: Vertikale og horisontale linjer. 36
Figur 3.12: Kategori 2: Kun vertikale eller horisontale linjer. 36
Figur 3.13: Kategori 3: Kun diagonaler. 36
Figur 3.14: Kategori 4: Vertikale linjer og diagonaler som deler underfigurer. 37
Figur 3.15: Kategori 5: Vertikale og horisontale linjer. Diagonaler. 37
Figur 3.16: Kategori 6: Vertikale og horisontale linjer. Diagonaler som må tegnes i underfigurer. 37
Figur 3.17: Kategori 7: Vertikale og horisontale linjer. Diagonaler i hele. Diagonaler i underfigurer. 37
Figur 3.18: Kategori 8: En rotasjon. 38
Figur 3.19: Kategori 9: To rotasjoner. 38
Figur 3.20: Kategori 10: Flere rotasjoner. 38
Figur 3.21: Elevbesvarelse oppgave 5. 39
Figur 4.1: Stolpediagram av antall elever som har oppnådd ulik argumentasjonskår. 49
Figur 4.2: Histogram med oversikt over fordelingen av elevenes div.skår. Per intervall inneholder 200 poeng. 51
Figur 4.3: Sammenheng mellom div.skår og argumentasjonskår. 53
Figur 4.4: Gjennomsnittlig divergent produksjon per argumentasjonskår. 53
Figur 4.5: Detrended normal Q-q plot av div.skåren. 56
Figur 4.6: Detrended normal Q-q plot av argumentasjonskåren. 56
Figur 4.7: Fordeling av gruppene ved standardisert div.skår. 57

Figur 4.8: Fordeling av gruppene ved standardisert argumentasjonskår. 57
Figur 4.9: Fordeling av måloppnåelse ved standardisert div.skår. 58
Figur 4.10: Fordeling av måloppnåelse ved standardisert argumentasjonskår. 58

Tabelliste

Tabell 3.1: Fordeling av karakterer. 19
Tabell 3.2: Fordeling av alder. 19
Tabell 3.3: Kategorier oppgave 3. 33
Tabell 3.4: Kategorier oppgave 4. 34
Tabell 4.1: Deskriptiv beskrivelse av oppgave 1. Elevenes resultater for gyldig konklusjon og argumentasjonsnivå, presentert ved gruppe 1, gruppe 2 og totalt. 47
Tabell 4.2: Deskriptiv beskrivelse av oppgave 2. Elevenes resultater for gyldig konklusjon og argumentasjonsnivå, presentert ved gruppe 1, gruppe 2 og totalt. 48
Tabell 4.3: Deskriptiv statistikk for fleksibilitet(F), originalitet(O) og divergent produksjon(DP) ved oppgave 3, 4, 5 og totalt. 50
Tabell 4.4: Andel elever som ikke har fått poeng på oppgave 3, 4 eller 5, og ingen poeng totalt. 51
Tabell 4.5: Pearsons korrelasjonskoeffesient for oppgave 3, 4, 5 og total div.skår. 52
Tabell 4.6: Spearmans rho for oppgave 1, 2 og total argumentasjonskår. 52
Tabell 4.7: Gjennomsnittlig argumentasjon- og div.skår fordelt på gruppe 1, 2 og totalt. 54
Tabell 4.8: Sammenheng mellom måloppnåelse og argumentasjonskår, samt måloppnåelse og div.skår. 54
Tabell 4.9: Presentasjon av gjennomsnittet(M) og standardavvik(SD) av divergent produksjo(DP) og argumentasjon(A) ved de ulike måloppnåelsene. 55
Tabell 4.10: Gruppenes median og kvartilbredde for argumentasjon- og div.skår. 59
Tabell 4.11: Gruppenes median og kvartilbredde for divergent produksjon og argumentasjon ved ulik grad av måloppnåelse. 59

1 Introduksjon

1.1 Bakgrunn for forskningsspørsmål

Hva som regnes som kunnskap er i kontinuerlig endring i dagens samfunn, både i arbeidslivet, vitenskapelige disipliner og på nye fremvoksende kunnskapsområder. På grunnlag av dette fremhever Ludvigsenutvalget at skolen må videreutvikles og fagene må fornyes, slik at elevenes potensiale kan realiseres. Dette er grunnlaget for at det i 2020 ble innført ny læreplan, kunnskapsløftet 2020. I NOU 2015:8 anbefalte Ludvigsenutvalget fire kompetanseområder som grunnlag for fornyelse av skolens innhold. En av disse er kompetanse i å utforske og skape, og inkluderer kompetanser som kritisk tenkning, problemløsning og kreativitet. Dette er kompetanser utvalget fremhever at skolen bør bidra til at elevene utvikler. Både det norske og internasjonale samfunnet er avhengig av mennesker som kan skape nye virksomheter, finne løsninger på krevende samfunnsutfordringer og bidra i arbeids- og samfunnslivet (NOU 2015: 8, 2015).

Kreativitet er en sentral kompetanse elevene bør ha i fremtiden, og er viktig innenfor de fleste fag og fagområder (NOU 2015: 8, 2015). Kreativitet er dermed også sentralt innenfor matematikk. Fra kunnskapsløftet kan vi se at ett av kjerneelementene i matematikk er utforskning og problemløsning, og slik Ludvigsenutvalget fremhever er kreativitet sentralt innenfor utforskning. Kreativitet kan sies å bestå av to komponenter; divergent og konvergent tenkning (Cropley, 2006). Divergent tenkning handler om å få flest mulige unike svar til et problem. Konvergent tenkning vil si å finne den beste løsningen til et problem og begrunne hvorfor dette er best. Konvergent tenkning kan sies å være overlappende med argumentasjon og resonnering, som er et annet kjerneelement i kunnskapsløftet.

Både divergent og konvergent tenkning vektlegger ulike kompetanser innenfor kreativitet, noe som medfører at man må ta hensyn til begge i arbeid med kreativitet. Schoenfeld (2007) skriver at vurdering i matematikk bør reflektere kunnskapen som er verdsatt i samfunnet. I Norge er skolematematikken dominert av et syn på matematikk som en samling av fakta som elevene skal tilegne seg gjennom gjentatt resonnement og hardt arbeid (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016). Det er dermed rimelig å anta at det som samlet sett vurderes i Norge er samlingen av fakta elevene har tilegnet seg. Dette kan indikere at når noe ikke er en klar samling av fakta, som f.eks. kreativitet, blir det ikke vurdert i like stor grad.

1.2 Forskningsspørsmål

I denne oppgaven ønsker jeg å se nærmere på elevers matematiske kreativitet. Som tidligere nevnt kan kreativitet defineres som konvergent og divergent tenkning. De to første forskningsspørsmålene går direkte på konvergent og divergent tenkning.

1) Hva kjennetegner konvergent tenkning hos elever?
2) Hva kjennetegner divergent tenkning hos elever?

For å undersøke disse forskningsspørsmålene tar elevene i utvalget en test som krever både konvergent og divergent tenkning. Divergent tenkning blir ofte sett på som et kjennetegn ved kreativ tenkning. Haylock (1997) foreslår blant annet at divergent produksjon kan brukes for å undersøke og gjenkjenne matematisk kreativitet. På testen vil derfor divergent tenkning bli vurdert gjennom divergent produksjon. Innenfor konvergent tenkning prøver man å finne den beste, eller mest passende, løsningen på en oppgave. Dette kan sies å være overlappende med argumentasjon og resonnering. Lithner (2008) definerer resonnering som en tankegang som blir benyttet for å produsere påstander og komme til konklusjoner i oppgaveløsning. Argumentasjon kan ses på som enhver teknikk som tar sikte på å overbevise andre om at resonnementet er korrekt (Hanna, 2014). Både resonnering og argumentasjon kan dermed være sentrale prosesser i arbeidet med å finne den beste løsningen. På testen vil dermed konvergent tenkning bli vurdert gjennom argumentasjon.

Tidligere forskning har i stor grad vurdert konvergent og divergent tenkning hver for seg. Divergent tenkning blir ofte sett i sammenheng med matematisk kreativitet, og blir vurdert etter flyt, fleksibilitet og originalitet (Se Haylock, 1997; Leikin, 2013). Konvergent tenkning har derimot blant annet blitt vurdert etter argumentasjonsnivå (Se Balacheff, 1988; Varghese, 2011). Som følge av dette kan det være interessant å se på hvordan disse to aspektene på kreativitet er relatert til hverandre, og om det er de samme elevene gjør det bra på begge. Dette har resultert i det tredje forskningsspørsmålet:

3) I hvilken grad er det en sammenheng mellom elevenes divergente og konvergente tenkning?

For å undersøke dette forskningsspørsmålet tas det utgangspunkt i testen. Argumentasjon vurderes etter gyldig konklusjon og hvilket argumentasjonsnivå elevene er på. Divergent produksjon vurderes etter flyt, fleksibilitet og originalitet. Videre vil sammenhengen mellom divergent og konvergent tenkning bli analysert ved korrelasjon.

Ludvigsenutvalget påpekte blant annet at kreativitet er en sentral kompetanse som kreves i fremtiden og bør inngå i skolen. Skolens vurderingspraksis bør dermed reflektere dette. Det finnes lite forskning på hvordan divergent og konvergent tenkning er ivaretatt i tradisjonell matematikkundervisning. Som tidligere nevnt kan det være rimelig å anta at det som vurderes er elevenes samling av faktakunnskaper. Vi vet lite om dette, og det vil derfor være interessant å se på hvordan måloppnåelse i skolematematikken henger sammen med divergent og konvergent tenkning. Dette fører til forskningsspørsmål fire og fem:

4) I hvilken grad er det en sammenheng mellom divergent tenkning og måloppnåelse hos elever i matematikk?
5) I hvilken grad er det en sammenheng mellom konvergent tenkning og måloppnåelse hos elever i matematikk?

Forskningsspørsmålene vil også her bli undersøkt med utgangspunkt i testen. Sammenhengen mellom divergent tenkning og måloppnåelse, samt konvergent tenkning og måloppnåelse, vil bli undersøkt gjennom ikke-parametriske tester og effektstørrelser.

1.3 Oppgavens oppbygning

Oppgavens teoretiske grunnlag blir presentert i kapittel 2, der begrepene kreativitet, argumentasjon, divergent tenkning og konvergent tenkning blir drøftet og avklart. Her vil det også være en begrepsavklaring knyttet til resten av oppgaven. I kapittel 3 blir oppgavens metodiske tilnærming redegjort for. Denne oppgaven er fra et postpositivistisk vitenskapssyn og det blir gjort kvantitative analyser. Kapittel 3 presenterer også hvordan datamaterialet er samlet inn og analysert. Resultatene fra analysen er presentert i kapittel 4. I kapittel 5 blir disse resultatene diskutert i lys av tidligere forskning og relevant teori.

2 Teoretisk grunnlag

2.1 Kreativitet

2.1.1 Kreativitetsbegrepet

Forskning på kreativitet er et voksende felt som med tiden har fått økende oppmerksomhet og egne tidsskrift. Gjennom de siste århundrene har kreativitetsforskning gjennomgått en stor forvandling. Historien startet med anerkjennelsen av at forskning utgjør en effektiv og praktisk måte man kan lære å forstå verden rundt oss på. Gjennom 1700- og 1800-tallet foregikk det mange debatter som førte til noen aksepterte og viktige skiller som dannet grunnlaget for våre nåværende ideer om kreativitet. For eksempel ble ideen om kreativitet separert fra det å være et geni, ha talent, originalitet og formell utdannelse. Samtidig ble også kreativitet skilt fra intelligens. Det å være et geni ble skilt fra det overnaturlige og ble sett på som et potensiale i ethvert individ. De siste 50 årene har forskning på kreativitet slått sammen interessen for kreative personer med empiriske metoder, der det har oppstått respekt for de entydige kreative så vel som for hverdagskreativitet (Kaufman & Sternberg, 2010). Historien viser at det har skjedd noen avgrensninger i forhold til hva som inngår i kreativitetsbegrepet. Til tross for dette har det gjennom tidene ikke eksistert en generell akseptert definisjon på hva kreativitet er.

I likhet med det historien til kreativitetsbegrepet kan vise oss, fremhever Sriraman (2005) at tidligere undersøkelser av forskningslitteratur viser at det ikke eksisterer en generell akseptert definisjon på hva kreativitet er. Dette medfører at kreativitet kan ses på flere måter. Noen mennesker assosierer kreativitet med oversiktlige og legendariske bidrag, mens andre ser på det som en dagligdags hendelse (Craft, 2002). En måte å se kreativitet på er hverdagskreativitet (lille C) og ekstraordinær kreativitet (store C), som gjerne fokuserer på personer og produkter (Sriraman & Haavold, 2017). Hverdagskreativitet er en adaptiv atferd som oppstår som følge av et behov for å forestille seg, produsere eller komme på noe nytt som ikke allerede eksisterer for individet i den spesifikke konteksten. Dette kan være måten en kokk inkluderer nye ingredienser i en oppskrift, som senere blir hyllet av familie og venner. Ekstraordinær kreativitet refererer til eksepsjonell kunnskap, ideer eller produkter som endrer oppfatningen vi har av verden. Ekstraordinær kreativitet kan være Freuds psykologi (Kaufman & Sternberg, 2010). Leikin (2013) omtaler dette som relativ og absolutt kreativitet.

Kreativitet kan også bli sett på gjennom de fire P'ene: prosess, produkt, person og place (sted). Teorier som fokuserer på den kreative prosessen har som mål å forstå naturen til de mentale mekanismene som oppstår når en person er involvert i kreativ tenkning eller kreative aktiviteter.

Teoriene som fokuserer på produkt-aspektet er gjerne de mest objektive tilnærmingene til kreativitet. Dette kan være kunstverk, oppfinnelser, publikasjoner og lignende, og er ofte ulike måter å måle kreativiteten på gjennom tildeling av betydelig kvantitativ objektivitet. Teorier som fokuserer på den kreative personen ser gjerne på trekk som en indikasjon eller kontraindikasjon for kreativt potensiale. Dette potensialet vil ofte avhenge av omgivelsene rundt stedet der en person bor (Kaufman & Sternberg, 2010).

Måtene man ser kreativitet på vil også variere etter forskjellige fagområder. Forskjellige fagområder og kontekster verdsetter ulike ting. Kreativitet vil dermed avhenge av den sosiale konteksten. Psykometriske teorier fokuserer i stor grad på at kreativitet kan måles. Samtidig vil for eksempel et evolusjonært syn se på kreativitet på en annen måte (Kaufman & Sternberg, 2010). I denne oppgaven vil kreativitet bli sett på gjennom produkt-aspektet, der det i hovedsak blir fokusert på hverdagskreativitet (lille C). Et kreativt svar på et gitt problem skal være nytt, innovativt eller uvanlig (Sriraman, 2005).

2.1.1.1 Kreativitet i matematikk

Som tidligere nevnt vil definisjonen på kreativitet avhenge av den sosiale konteksten. Matematikk er en slik sosial kontekst som kreativitet kan bedømmes innenfor. Hva som er kreativt i matematikk avhenger av hva som regnes som matematisk akseptert. Dette vil skille seg fra hva som regnes som kreativitet i musikk og litteratur.

I likhet med det overordnede kreativitetsbegrepet er det også flere ulike definisjoner på hva matematisk kreativitet er. Sriraman (2005) trekker frem at definisjonen varierer etter hvilket nivå du er på i matematikken. På et profesjonelt nivå kan man definere matematisk kreativitet som «(a) the ability to produce original work that significantly extends the body of knowledge, and/or (b) the ability to open avenues of new questions for other mathematicans» (Sriraman, 2005, s. 23). I skolematematikken kan matematisk kreativitet bli definert som:

> (a) the process that results in unusual (novel) and/or insightful solution(s) to a given problem or analogous problems, and/or (b) the formulation of new questions and/or possibilities that allow an old problem to be regarded from a new angle requiring imagination (Sriraman, 2005, s. 24)

I begge definisjoner går det igjen at kreative individer omformulerer problemer eller finner lignende problemer. Den største forskjellen ligger i hvilken kontekst det skjer i, og hvilket nivå individene er på. Begge definisjonene trekker også frem at kreative individer er forskjellige fra sine jevnaldrende, da de er sterkt uavhengige tenkere (Sriraman, 2005).

2.1.1.2 Evaluering av kreativitet

Kaufman og Sternberg (2010) fremhever flere metoder man kan benytte seg av for å evaluere kreativitet. Metodene som benyttes vil variere etter hvilket aspekt som vektlegges. Dersom vi f.eks. ser mot person-aspektet og mot å måle personlighetskorrelater, blir måleinstrumentene vanligvis designet gjennom å studere personer som allerede er ansett som kreative. Deretter blir deres felles egenskaper bestemt. Disse egenskapene blir så brukt som referanse for andre barn og voksne, under antagelsen om at individer som er sammenlignbare er disponert for kreativ presentasjon.

Haylock (1997) har foreslått to modeller for å undersøke og gjenkjenne matematisk kreativitet. Den første er gjennom å overkomme fiksering i problemløsningsoppgaver, der en bestemt kognitiv prosess kan være nødvendig for å oppnå suksess. Denne modellen fokuserer på prosess-aspektet i de fire P'ene, og har som mål å forstå og gjenkjenne de mentale mekanismene som oppnår når en person er involvert i kreativ tenkning. Her blir den kognitive prosessen forstått som karakteristisk til kreativ tenking. Elevene kan ha to typer fiksering: innholdsfiksering og algoritmisk fiksering. Ved innholdsfiksering blir tankegangen til elevene begrenset til et utilstrekkelig utvalg av elementer som kan bli brukt eller relatert til problemet. Tankegangen til elevene blir dermed begrenset til et for snevert område i matematikken til å kunne løse problemet. Dette kan f.eks. skje når elever blir bedt om å finne to tall som har en gitt sum og differanse. Elevene finner først to tall med summen 10 og differansen 4. Senere kan de bli bedt om å finne to tall med summen 10 og differansen 10. Elever med en innholdsfiksering vil da kunne ha vanskeligheter med å finne to tall, da de ekskluderer muligheten for at ett av de to tallene kan være null.

Algoritmisk fiksering innebærer at elevene forsetter å benytte seg av en algoritme de har erfart at har vært suksessfull, selv når denne ikke lenger er effektiv eller gyldig. Dette kan være en algoritme elevene har lært tidligere eller funnet selv. En elev med en algoritmisk fiksering vil ha vanskeligheter med å vike fra algoritmen de har lært, og kan dermed ha problemer med å løse en oppgave dersom denne algoritmen ikke lenger er gyldig (Haylock, 1997). Ifølge Balka (1974) er evnen til å kunne frigjøre seg fra etablerte tankemønstre for å kunne se ting på nye måter, et aspekt av kreativitet. Når elevene skal overkomme fiksering må de bryte med mentale sett og rigid tenking, slik Balka refererer til. Her vil man heller at elevene skal ha kognitiv fleksibilitet enn kognitiv fiksering. En elev som har overkommet kognitiv fiksering evner å bytte strategier og tenke utenfor boksen.

Den mest vanlige måten å analysere kreativitet på er gjennom divergent produksjon. Divergent produksjon har sin opprinnelse i arbeidet til amerikanske forskere som Torrance og Guilford på 50- og 60-tallet. Det er forankret i både assosiativ teori og Guilfords teori om «structure of intellect» (SOI). Torrance utviklet «test of Creative thinking» basert på Guilfords arbeid. Denne testen har bidratt til flere ulike divergent produksjonsoppgaver i flere sammenhenger, inkludert matematikkopplæring (Sriraman & Dickman, 2017). Haylock (1997) har tatt utgangspunkt i SOI og tilpasset divergent produksjon til matematikken.

Divergent produksjon er Haylock (1997) sin andre modell for å undersøke og gjenkjenne matematisk kreativitet. Den fokuserer på å sette kriterier for hvordan en oppgave skal indikere at kreativ tenkning har skjedd. Divergent produksjon handler om å gi elevene en åpen situasjon eller oppgave der de kan komme med så mange ulike løsninger som mulig. Ifølge Haylock (1997) finnes det tre kategorier av divergent produksjonsoppgaver i matematikken. Den første er problemløsning der elevene får et problem som har mange mulige løsninger, for så å bli bedt om å finne så mange ulike og interessante løsninger som mulig. Den andre kategorien er problemgenerering og innebærer at elevene får en situasjon de blir bedt om å finne så mange matematisk interessante spørsmål til som mulig. Disse spørsmålene skal kunne bli besvart ut fra situasjonen. Den tredje kategorien er redefinering og innebærer at elevene gjentatte ganger blir bedt om å redefinere elementer i en situasjon i form av matematiske egenskaper. En god divergent produksjonsoppgave bør inneholde følgende kriterier:

1) Elevenes svar må vise at et område av matematiske ideer har blitt brukt
2) Det må være minst 20 mulig og passende svar
3) Elevenes svar bør vise en konsistent tolkning av instruksjonen i oppgaven
4) Det bør være flere åpenbare svar som elevene kan finne
5) Det bør være et antall passende svar som kan oppnås av relativt få elever
6) De originale svarene må ikke være trivielle

I divergent produksjon blir elevenes løsninger evaluert gjennom flyt, fleksibilitet og originalitet. Dette er indikatorer på at det har skjedd kreativ tenkning (Haylock, 1997; Leikin, 2013). Det er dermed fokus på produkt-aspektet til de fire P’ene. Flyt kan bli målt av antall passende fremgangsmåter eller svar som er produsert for å løse et problem. På en skriftlig test vil dette være antall passende løsninger som eleven har kommet med. Fleksibilitet kan bli referert til som antall forskjellige kategorier av løsninger. For at to løsninger skal tilhøre forskjellige kategorier må de bruke løsningsstrategier som er basert på forskjellige representasjoner, egenskaper eller grener av matematikk. Originalitet blir vurdert etter hvor vanlig en løsning er, og hvor mange andre elever som benyttet seg av den samme løsningsstrategien. Gjennom disse tre indikatorene kan man komme frem til en divergent produksjonskår ved å multiplisere fleksibilitet og originalitet (Leikin, 2013; Sriraman & Haavold, 2017). Det er dog viktig å være bevisst på at elevenes løsninger kun er en indikator på kreativitet. Det er ikke en direkte måling da vi ikke kan vite hva elevene faktisk tenker.

2.2 Argumentasjon

2.2.1 Argumentasjon, resonnering og bevis i matematikk

Hanna (2014) viser til at begrepene argumentasjon, resonnering og bevis har dårlige definerte grenser, og ofte blir brukt om hverandre. Hva som er et bevis i matematikken avhenger av personen som definerer det (Hanna & Barbeau, 2002). Hersh (1998) skriver at et bevis er et argument som er avgjørende for at et foreslått resultat følger av akseptert teori. Rollen til et bevis er å verifisere en påstand. Et formelt bevis er entydig, inneholder formell notasjon, syntaks og er oppbygd av aksiomer. Uformelle bevis har gjerne en blanding mellom naturlig og formelt språk, og bruker kun avsnitt med eksplisitte formelle deduksjoner der det er passende (Hersh, 1998).

Andre definisjoner viser til at et bevis er en prosedyre, ikke et resultat, noe som medfører at et bevis i seg selv kan være gyldig selv om det går ut fra ugyldige premisser (Hanna & Barbeau, 2002). Harel og Sowder (2007) definerer bevis som et argument andre må akseptere. Bevisføringen blir dermed en sosial aktivitet, og etablerer sannhet for en person eller et samfunn. Denne definisjonen medfører at beviset sin mening, rolle, og måten det blir laget, verifisert og akseptert på vil variere fra person til person, og fra samfunn til samfunn.

Resonnering kan ha mange funksjoner i matematikk, inkludert verifisering, forklaring, systematisering, oppdagelse, kommunikasjon, utforskning og konstruksjon av teori (Yackel & Hanna, 2003). Begrepet resonnering blir for det meste brukt av matematikkforskere uten å definere hva det betyr. Det er en implisitt antagelse om at det er en universal enighet om hva begrepet betyr (Lithner, 2008). Hanna (2014) skriver at resonnering i vid forstand omhandler den vanlige menneskelige evnen til å gjøre slutninger, der det blant annet skilles mellom hverdagsresonnering og eksplisitt matematisk resonnering. Innenfor hverdagsresonnering kan man akseptere en påstand uten noe form for bevis, da den blir vurdert til å være selvinnlysende eller intuitivt troverdig. Eksplisitt matematisk resonnering har definerte regler for å komme frem til en gyldig konklusjon. Det må være en korrekt kjede av slutninger – dvs. at det konstrueres et bevis (Hanna, 2014).

Lithner (2008) definerer resonnering som en tankegang som blir benyttet for å produsere påstander og komme frem til konklusjoner i oppgaveløsning. Denne tankegangen er ikke nødvendigvis basert på formell logikk og er ikke begrenset til bevis. Konklusjonene kan være feil, så lenge det er noen fornuftige grunner til å støtte konklusjonen. Lithner sin definisjon har noen likheter med Hannas (2014) definisjon av hverdagsresonnering. Bevis spiller ikke en sentral rolle i noen av definisjonene, og begge er basert på fornuft. Lithner sin definisjon skiller seg dog ut da konklusjonen ikke nødvendigvis trenger å være korrekt. I motsetning til hverdagsresonnering så er bevis en sentral del av eksplisitt matematisk resonnering.

Argumentasjon består av flere prosesser, der de mest typiske er: utforskning av eksempler eller spesielle tilfeller, generering eller raffinering av antagelser og fremstillinger av argumenter for disse antagelsene. Argumentene trenger ikke nødvendigvis kvalifisere som bevis eller støtte utviklingen av bevis (Stylianides, Bieda & Morselli, 2016). Argumentasjon er likevel tett knyttet til både resonnering og bevis.

En grunnleggende definisjon på argumentasjon er at det inkluderer enhver teknikk som tar sikte på å overbevise andre om at resonnementet er korrekt. Dette innebærer også matematiske bevis som en del av prosessen mot å overbevise andre (Hanna, 2014). Resonnering kan ses på som det videste og minst definerte begrepet i dette delkapittelet. Argumentasjon kan ses på som en del av resonnering og inkluderer alle type teknikker for å finne ut om resonnementet er korrekt. Dette innebærer at et resonnement kan bestå av mange ulike argumenter, samt matematiske bevis som har som hensikt å overbevise andre gjennom å verifisere en påstand. Bevisføringen vil da ses på som en del av en sosial aktivitet, slik Harel og Sowder (2007) påpeker.

2.2.2 Evaluering av argumentasjon i matematikk

Argumentasjon kan undersøkes på mange måter. Toulmins argumentasjonsmodell er en av de mest kjente og brukte modellene for å undersøke argumentasjon i matematikkundervisning, og er utviklet for å rekonstruere argumenter i forskjellige felt (Hanna, 2014; Knipping & Reid, 2019). Modellen består av seks elementer som Toulmin karakteriserer som de viktigste komponentene i praktisk argumentasjon; påstand, fakta, forutsetninger, bevis, styrke og motbevis. Argumentasjonsmodellen inkluderer flere typer slutninger, både induktive og deduktive resonnement (Hanna, 2014). Toulmins argumentasjonsmodell ser i hovedsak på hva som skjer der og da i en muntlig, kvalitativ setting der man får med seg hele argumentasjonsrekken. I min oppgave ser jeg på et sluttprodukt, noe som medfører at Toulmins argumentasjonsmodell ikke er aktuell.

Bevisskjema er en mer teoribasert måte å se på matematisk argumentasjon, og har vært mye brukt innenfor matematikkdidaktiske studier for å klassifisere og vurdere kvaliteten på argumenter i matematikk. Bevisskjema handler om individets evne til å fjerne tvil hos seg selv og overbevise andre om gyldigheten til en påstand. Bevisskjema blir delt inn i tre kategorier: eksternt bevisskjema, empirisk bevisskjema og deduktivt bevisskjema. Hver av kategoriene representerer stadiet elevene er på i sin matematiske utvikling (Harel & Sowder, 2007). Harel og Sowder (2007) sitt begrepsskjema har et til dels stort fokus på bevis, og ikke like stort fokus på uformelle argumenter. Dette gjør at den ikke er så passende til å evaluere argumentasjon i skolematematikken.

Balacheff (1988) sin bevistaksonomi er mer rettet mot skolematematikken, og er basert på en studie om elevers tilnærming til matematiske bevis. I denne modellen er det elevens tilnærming til bevis i oppgaven som blir vurdert, ikke validiteten av utfallet (Varghese, 2011). Balacheff skiller mellom naiv empirisme, det avgjørende eksperiment, det generiske eksempel og tankeeksperiment. For å eksemplifisere de ulike kategoriene blir jeg til å benytte meg av oppgaven Balacheff (1988, s. 220) brukte i sin artikkel, der elevene skal finne en formel for antall diagonaler i en mangekant når de vet antall hjørner. Et bevis som kategoriseres som naiv empirisme inneholder noen få, tilfeldig valgte eksempler som ikke representerer helheten. Dette kan være ved at elevene finner formelen $f(n) = \frac{n}{2}$ og begrunner det ved at formelen passer for figur nummer 4, 6 og 8.

Det avgjørende eksperiment består også av konkrete eksempler, men skiller seg fra naiv empirisme da eleven mener at de valgte tilfellene ikke er altfor typisk. Eksemplene må oppfylle en hypotese og er valgt for å bekrefte eller avkrefte hypotesen. Avgjørende eksperiment kjennetegnes ofte av en argumentasjonsform som sier «*det virker her, derfor vil det fungere*». Et typisk elevsvar vil være at elevene kommer frem til en formel som de sjekker ut ved et spesielt tilfelle, f.eks. figur 7. Gjennom dette prøver de å forutsi utfallet, for så å teste samme formel for figur 15 der de konkluderer med at dersom det fungerer her så vil det alltid fungere.

Elevene ser da på figur 15 som et ikke altfor typisk tilfelle (Balacheff, 1988). Varghese (2011) påpeker at det er en vanskelig oppgave å skille mellom naiv empirisme og det avgjørende eksperiment, spesielt dersom man kun ser på sluttproduktet. Hovedforskjellen mellom naiv empirisme og det avgjørende eksperiment ligger i det spesifikke eksempelet som er valgt for å validere påstanden. Eksempelet som blir brukt i det avgjørende eksperiment er ofte basert på ekstreme tilfeller som er nøye utvalgt (Varghese, 2011).

Elevsvar innenfor det generiske eksempel inneholder tilfeller som ikke bare representerer seg selv, men som også er representativt for en hel klasse av tilfeller. Beviset har som hensikt å vise det generelle, men tar utgangspunkt i eksempler. I en slik argumentasjonsrekke kan elevene først ha kommet frem til en formel, f.eks. $f(n) = (n-3) + (n-3) + (n-4) + 2 + 1$, for så bevise dette gjennom å se på n-3. Her tar de utgangspunkt i et typisk eksempel på en mangekant når de argumenterer for løsningen sin (Balacheff, 1988).

Tankeeksperimentet kjennetegnes ved at eleven distanserer seg fra de spesielle eksemplene gjennom å benytte seg av logiske slutninger som har opphav i egenskaper og relasjoner som karakteriserer situasjonen. Egenskapene til objektene blir ikke lengre bevist gjennom tilfeller, men er formulert generelt. Et eksempel på tankeeksperiment er utsagnet «*Zn a polygon if there are x points there are automatically y diagonals for each point because in a boundary of the polygon there are two points which join it on: conclusion there are 3 which are the diagonals*» (Balacheff, 1988, s. 226). Balacheff understreker at elevene vil bevege seg frem og tilbake mellom induktiv og deduktiv resonnering, avhengig av oppgaven de gjør. En elev som er i stand til et tankeeksperiment i en situasjon kan gå tilbake til naiv empirisme i en annen (Varghese, 2011).

2.3 Kreativitet konseptualisert som konvergent og divergent tenkning

Hittil i denne oppgaven har kreativitet og argumentasjon stått isolert. Dette skillet kan sammenlignes med skillet mellom divergent og konvergent tenkning. Divergent tenkning blir ofte sett på som et kjennetegn ved kreativ tenkning, og blir gjerne evaluert gjennom divergent produksjon. Divergent tenkning handler om å produsere flere svar ut fra tilgjengelig informasjon, generere uvanlige ideer, knytte sammen ting på nye måter o.l. Det innebærer også at man ser det kjente i nytt lys og fra skiftende perspektiver. Ved divergent tenkning produseres løsninger som kanskje aldri har eksistert før, og løsningene er ofte nye, uvanlige eller overraskende. Løsningene trenger dog ikke å være nye og/eller uvanlige innenfor matematikksamfunnet, men kan også være nye og uvanlige for personen som produserer kunnskapen (Cropley, 2006).

Divergent tenkning alene er ikke tilstrekkelig for å evaluere kreativitet. Vi må også vurdere svar og prosesser, dermed er konvergent tenkning også viktig. Cropley (2006) fremhever at kreativitet inneholder to hovedkomponenter: oppdagelsen av noe nytt via divergent tenkning, og evaluering av det nye gjennom konvergent tenkning. Dette innebærer at man også må evaluere kreative produkter og prosesser opp mot hva som er akseptert innenfor et bestemt felt. Matematisk kreativitet må dermed forholde seg til matematiske regler og rammer.

Konvergent tenkning blir ikke alltid forbundet med kreativitet. Haylock (1987) har blant annet koblet konvergent tenkning sammen med en snever tankegang som er avhengig av rutineprosesser. De siste årene har det blitt økende anerkjennelse av at den faktiske kreative produksjonen ikke kun stammer fra divergent tenkning alene, men også krever konvergent tenkning (Cropley, 2006).

Tabach og Levenson (2018) skriver at konvergent tenkning finner sted når man strever etter å finne en logisk løsning på et problem, der man søker etter å forstå sammenhengen mellom eksisterende kunnskaper og problemet man står overfor (Tabach & Levenson, 2018). Konvergent tenkning har som mål å få den beste, eller den mest passende, løsningen til et klart definert spørsmål, i motsetning til divergent tenkning som vil ha så mange løsninger som mulig. Typiske prosesser innenfor konvergent tenkning er å være logisk, gjenkjenne det kjente, anvende nye teknikker og samle informasjon. Konvergent tenkning er også nært knyttet til kunnskap: på den ene siden innebærer det manipulering av eksisterende kunnskap ved hjelp av standard prosedyrer, mens på den andre siden så er hovedresultatet økt kunnskap (Cropley, 2006). I arbeid med konvergente oppgaver skal deltakeren vanligvis utdype en enkelt ide, uten å avvike fra selve ideen. Det vil typisk være én gyldig løsning, men det vil ikke nødvendigvis bare være en måte å gjøre det på (Tabach & Levenson, 2018).

I denne oppgaven blir matematisk kreativitet sett på som konvergent og divergent tenkning. Divergent tenkning blir evaluert ved Haylock (1997) sin definisjon om divergent produksjon med tilhørende oppgavetyper. Her blir elevenes divergente tenkning evaluert ved å sette noen kriterier for hva et kreativt produkt er. I min oppgave vil elevbesvarelsene være kreative produkter, og oppgaven vil dermed ha et produkt-aspekt. For å vurdere et kreativt produkt på en oppgave som krever divergent tenkning kan man se på hvor mange løsninger elevene har funnet, hvor mange strategier de har brukt for å oppnå løsningene, samt hvor mange andre elever som har brukt den samme løsningen. Elevenes besvarelser vil dermed kunne vurderes ut fra flyt, fleksibilitet og originalitet (Haylock, 1997; Leikin, 2013). Videre i oppgaven vil jeg veksle mellom begrepene divergent tenkning og divergent produksjon. Divergent produksjon er det som måles, og er en indikator på divergent tenkning.

Konvergent tenkning blir sett på som argumentasjon, der elevene må ha korrekt løsning på oppgaven og kunne argumentere for dette. Balacheff (1988) har utviklet en bevis-taksonomi der elevenes bevisføring blir analysert ved å klassifisere elevenes argumentasjonsnivå. I evaluering av elevenes konvergente tenkning kan man dermed se på argumentasjonen til elevene. Innenfor dette vil jeg veksle mellom begrepene konvergent tenkning og argumentasjon, der argumentasjon blir målt og er en indikator på konvergent tenkning.

2.4 Tidligere forskning

2.4.1 Divergent produksjon

Sriraman og Haavold (2017) utførte en litteraturstudie der de blant annet så på sammenhengen mellom prestasjon i matematikk og divergent produksjon. De fant at det i mange studier er rapportert om en signifikant sammenheng mellom prestasjon i matematikk og divergent produksjon (se f.eks. Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou, 2013; Mann, 2005; Walia, 2012). Dette kommer også frem i en studie fra Haavold (2018). Han undersøkte forholdet mellom matematisk kompetanse og divergent produksjon ved å se på i hvilken grad måloppnåelse påvirker divergent produksjon, og fant en moderat sammenheng. Han fant at elevene på 11. trinn skårer signifikant bedre enn elevene på 8. trinn på divergent produksjon. I tillegg indikerer resultatene at elever med høy måloppnåelse på 8. trinn viser mer divergent produksjon enn elever med høy måloppnåelse på 11. trinn.

En annen studie som har vist at divergent produksjon er assosiert med prestasjon i matematikk er fra Tabach og Friedlander (2013). De så på mulige sammenhenger mellom divergent produksjon og matematisk kompetanse. Utvalget deres besto av 76 elever fra 4. til 9. klasse på samme skole. Nivået av divergent produksjon økte fra 4. til 7. trinn, falt ved 8. trinn, for så å øke igjen. En forklaring på dette kan ifølge Tabach og Friedlander (2013) være at nesten alle elevene ved 8. trinn løste oppgaven algebraisk, da algebra var et stort fokus dette trinnet. På 9. trinn økte antall ulike løsningsmetoder igjen. Funnene indikerer at antall løsningsmetoder øker med alderen. I tillegg tyder alle tre indikasjoner (flyt, fleksibilitet og originalitet) på at nivået av divergent produksjon øker med alderen. Funnene førte Tabach og Friedlander (2013) til å anta at en økning i matematisk kompetanse også har potensialet til å heve nivået av divergent produksjon.

2.4.2 Argumentasjon

Stylianides et al. (2016) utførte en litteraturstudie med mål om å gjennomgå og reflektere over større forskningsutviklinger i PME-samfunnet innenfor bevis og argumentasjon. Ett av temaene de undersøkte var forskning på elevers oppfatninger og læring. Her fant de blant annet at elever ofte tyr til empiriske argumenter, og ikke ser nytten i deduktive argumenter. Dette kommer frem i en studie fra Askevold og Lekaus (2018), der de har analysert dialoger om brøk fra 33 5. og 6. klassinger i to ulike klasserom. De fant at mange av elevene i 5. klasse benyttet seg av argumenter som var støttet av visuelle representasjoner av brøker, mens 6. trinn benyttet seg av mer regelbundne tilnærminger. Dette støttes også av Healy og Hoyles (2000) som studerte bevisoppfatningene til 14-15 år gamle elever, og fant at mange elever produserte empiriske argumenter. NAEP har også funnet at de fleste elevene tilsynelatende tyr til empirisk argumentasjon (Harel & Sowder, 2007).

Flere av studiene Stylianides et al. (2016) gjennomgikk illustrerte også at elever kan ha forestillinger som hindrer at produksjonen av et overbevisende argument eller bevis blir vellykket. Buchbinder og Zaslavsky (2013) fant blant annet at selv om mange elever anerkjente begrensningene til empiriske argumenter, så hadde de en tendens til å tro at en påstand var sann helt til noe annet var bevist og tyr derfor til empiriske argumenter. Elever kan dermed ha sofistikerte bevisoppfatninger, samtidig som deres evne til å produsere bevis ikke er like robust. Dette støttes av Healy og Hoyles (2000) som utførte en intervjustudie som avslørte at mange av elevene var klar over at de ikke produserte bevis, men var ikke i stand til å produsere mer formelle argumenter. Knuth, Choppin og Bieda (2009) fant lignende resultater for elever i 6-8. klasse.

3 Metode

3.1 Vitenskapsteoretisk perspektiv

Denne oppgaven er basert på et postpositivistisk vitenskapssyn, som nyanserer den tradisjonelle forestillingen om en absolutt kunnskapssannhet. Her anerkjennes det at forskeren aldri er helt nøytral og objektiv, men at det likevel finnes en verden utenfor oss selv som vi bør etterstrebe å undersøke så presist som mulig. Det foreligger også en antagelse om at utfallet vil bli bestemt av årsakene, da postpositivismen har en deterministisk filosofi (Creswell, 2014).

Postpositivismen er reduksjonistisk, da hensikten er å bryte ideer ned til mindre, målbare segmenter. Dette innebærer at det er en antagelse om at man kan måle abstrakte begreper og sette en verdi på dem. Postpositivistiske studier blir derfor ofte benyttet innenfor kvantitativ forskning, der problemstillingene blir belyst mer objektivt gjennom å undersøke forholdet mellom variabler. Som følge av antagelsen om at variablene er målbare kan nummererte data bli analysert ved å bruke statistiske analyser (Creswell, 2014). I denne oppgaven blir det forsøkt å måle og sette verdi på de abstrakte begrepene divergent og konvergent tenkning. Dette gjøres ved å analysere en test gjennom divergent produksjon og Balacheffs bevis-taksonomi. Det er dermed passende å utføre denne studien kvantitativt.

Analysene fører til at det blir utviklet kunnskap som er formet av data, bevis og rasjonale betraktninger. Kunnskapen er basert på nøye observasjoner og målinger av en objektiv verden, noe som medfører at måleinstrumentene spiller en essensiell rolle. Det blir aldri funnet en absolutt sannhet. Kunnskap er bare en formodning da bevismateriale alltid vil være feilbar og ufullkommen. I et postpositivistisk syn er forskning prosessen med å produsere påstander, for så å redefinere eller forkaste dem dersom andre påstander er sterkere berettiget (Creswell, 2014). Forskerne beviser ikke en hypotese, de forsøker å falsifisere den (Postholm & Jacobsen, 2018). Forskningen søker også å utvikle sanne og relevante uttalelser som kan beskrive årsakssammenhengen eller forklare situasjonen (Creswell, 2014).

3.2 Undersøkelsens kontekst

Denne undersøkelsen er en del av forskningsprosjektet SUM (Haavold & Blomhøj, 2019). SUM står for sammenheng gjennom undersøkende matematikkundervisning, og har et overordnet tema om sammenheng i utdanning. Formålet med SUM er at det skal bidra til å utvikle barn og unges læring og motivasjon for matematikk gjennom hele skoleløpet. Dette skal skje ved å integrere undersøkende matematikkundervisning gjennom hele skoleløpet.

SUM-prosjektet har blant annet samlet inn tester og spørreundersøkelser. Dette har foregått over to forskjellige datainnsamlinger. Begge datainnsamlingene har samlet inn spørreundersøkelser og tester fra ca. samme elevgruppe. Første datainnsamling fant sted høsten 2020, mens andre datainnsamling fant sted våren 2020. I denne undersøkelsen er det datamaterialet fra andre datainnsamling som benyttes. Denne oppgaven vil dermed være en tverrsnittstudie.

3.3 Utvalg og datainnsamling

3.3.1 Utvalg

Det totale datagrunnlaget i andre datainnsamling av SUM-prosjektet består av 485 elever, der 424 elever svarte på testen. Det er imidlertid kun 374 av 485 elever som danner datagrunnlaget i denne oppgaven, da ikke alle elevene oppfyller de utvalgte kriteriene for å være en del av utvalget. Alderen til elevene er mellom 10 til 19 år. Elevene over 19 år er fjernet fra utvalget som følge av at de ikke har fullført videregående skole på normert tid eller har utenlandsk bakgrunn. Elever med skolebakgrunn utenfor Norge er også fjernet da de gjorde sammenligningsgrunnlaget svakt. For å være en del av utvalget må elevene også ha svart på testen våren 2020, samt ha oppgitt måloppnåelse i matematikk.

De 374 elevene i utvalget kommer fra 8 skoler i Troms. Elevene går fra 5. til 13. trinn og er med i undersøkelsen som følge av at lærerne deres er med i forskningsprosjektet SUM (Haavold & Blomhøj, 2019). Det er totalt 47,3 % gutter (N=177) og 52,7 % jenter (N=197) i utvalget. 19,8 % av elevene går på barneskole (N=74), 47,9 % går på ungdomsskole (N=179) og 32,4 % går på videregående skole (N=121).

Elevene er delt inn i to grupper etter hvilken test de tok. Gruppe 1 består i hovedsak av elever fra 5. til 7. trinn og inneholder 120 elever. Gruppe 2 består av 254 elever fra 8. til 13. trinn. I utgangspunktet fikk mellomtrinnet en test som var tilpasset deres matematiske nivå, mens elevene i gruppe to fikk en test som var tilpasset ungdomsskolen og oppover. En mindre gruppe elever på 8. trinn fikk dog testen som var beregnet på mellomtrinnet. Årsaken var at denne gruppen elever besvarte testen for ungdomsskole og oppover ved første datainnsamling høsten 2020, og vi ønsket å bruke denne elevgruppen som kalibreringsgruppe. Det vil si at den samme elevgruppen besvarte begge testene for å se i hvor stor grad dette slo ut på elevenes testskår. Dette er dog utenfor denne undersøkelses forskningsspørsmål, og vil beskrives nærmere i senere undersøkelser. I denne oppgaven er det kun elevenes testskår ved andre datainnsamling som undersøkes.

Elevene på barneskolen har ikke karakter i matematikk, og har som følge av dette oppgitt om de har lav-, middels- eller høy måloppnåelse. Ved datainnsamlingen våren 2020, som er grunnlaget for denne oppgaven, har alle elever på ungdomsskolen fått karakterer. Elevene på ungdomsskolen har derfor oppgitt karakteren sin. Elevenes karakterer er basert på selvrapportering, men ble også verifisert av lærere.

Tabell 3.1:
Fordeling av karakterer.

Karakter	Frekvens	Prosent
1	2	0,5 %
2	26	7 %
3	64	17,1 %
4	100	26,7 %
5	71	19 %
6	35	9,4 %
Lav	3	0,8 %
Middels	42	11,2 %
Høy	31	8,3 %

Tabell 3.2:
Fordeling av alder.

Alder	Frekvens	Prosent
10	6	1,6 %
11	50	13,4 %
12	24	6,4 %
13	50	13,4 %
14	60	16 %
15	67	17,9 %
16	50	13,4 %
17	40	10,7 %
18	22	5,9 %
19	5	1,3 %

3.3.2 Datainnsamling

I forbindelse med SUM har elevene besvart en test og et spørreskjema. Testen ble utført i elevenes klasserom med deres egen matematikklærer til stede, og varte i 45 minutter. Den ble utført i elevenes vante rammer. I forkant av testen ble elevene informert om at oppgavene kunne føles uvante sammenlignet med det som står i læreboken. Det finnes mange måter man kan løse oppgavene på og noen av dem krever flere svar. Testen ble gjennomført uten hjelpemidler.

Spørreskjemaet ble utført i Nettskjema og er utformet av SUM-prosjektet. I denne oppgaven er det kun benyttet bakgrunnsvariabler fra spørreskjemaet. Disse bakgrunnsvariablene er: alder, kjønn, skole og måloppnåelse. Måloppnåelse er selvrapportert fra elevene, men ca. 1/3 av elevene ble kontrollert med læreren deres.

Elevene fikk informasjon om at besvarelsene deres vil bli brukt i forskningsprosjektet SUM og i masteroppgaver. Samtykkeskjemaet ble gjennomgått med alle elevene, der elever under 15 år måtte ha samtykke fra foreldre. Elevene ble også informert om at de kunne trekke samtykket på et senere tidspunkt dersom de ønsket.

3.4 Testen

Testen består av 6 oppgaver, der to omhandler argumentasjon, tre er rettet mot divergent produksjon og en handler om å forklare hva som ligger i et matematisk begrep. Det er bare oppgavene som omhandler argumentasjon og divergent produksjon som er analysert i denne undersøkelsen.

3.4.1 Argumentasjonsoppgaver

Oppgave 1

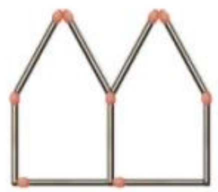
I oppgave 1 skal elevene generalisere fra noen eksempler til en mer allmenngyldig konklusjon. Når man generaliserer trekker man slutninger som er basert på felles egenskaper. Tabach og Levenson (2018) skriver at konvergent tenkning finner sted når man skal finne en logisk løsning på et problem og søker å forstå sammenhengen mellom eksisterende kunnskaper og problemet man står overfor. Generaliseringsprosessen kan ses i sammenheng med denne definisjonen, da begge fokuserer på å se sammenhenger.

Denne oppgaven er ute etter ett riktig svar og krever at elevene utdyper en enkelt ide, uten å avvike fra den. Dette samsvarer med Tabach og Levenson (2018) sin beskrivelse av en typisk konvergent oppgave. Oppgaven ber elevene begrunne løsningen sin, og er nivådifferensiert for de to gruppene. I evalueringen av denne oppgaven ser jeg på elevenes argumentasjon og gyldigheten av konklusjonen.

Gruppe 1

Oppgaven til gruppe 1 viser to fyrstikkhus som er satt sammen, og består av tre deloppgaver, se figur 3.1. Elevene skal først tegne hvordan det ser ut når fire fyrstikkhus er satt sammen, for så finne ut hvor mange fyrstikker ti fyrstikkhus består av. Deretter skal elevene prøve å lage et uttrykk eller en oppskrift som beskriver hvordan man kan finne ut hvor mange fyrstikker det er hvis man vet antall hus.

Oppgave 1.
Figuren viser to fyrstikkhus som er satt sammen.



a) Tegn hvordan det ser ut når fire fyrstikkhus er satt sammen.

b) Hvor mange fyrstikker er det når ti fyrstikkhus er satt sammen?

c) Kan du lage et uttrykk eller en oppskrift som sier hvor mange fyrstikker det er hvis man vet hvor mange hus det er? Vis og forklar hvordan du kom frem til svaret ditt.

***Figur 3.1**:*
Oppgave 1, gruppe 1.

Når elevene løser oppgaven må de finne forholdet mellom antall fyrstikker og fyrstikkhus. For hvert fyrstikkhus som blir lagt til de eksisterende fyrstikkhusene trengs det fire fyrstikker. Her er det viktig at elevene er bevisst på at det første fyrstikkhuset består av 5 fyrstikker, da fyrstikkhusene deler en vegg. Dette mønsteret må elevene generalisere, og det kan bli uttrykt algebraisk slik:

$$y = 1 + 4x$$

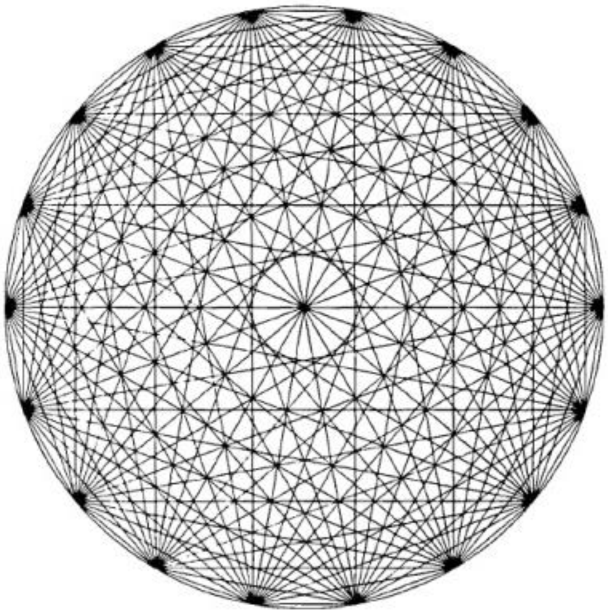
Der y er antall fyrstikker og x er antall fyrstikkhus.

Gruppe 1 består i hovedsak av elever på mellomtrinnet. Dersom man tar dette i betraktning er det ikke forventet at så mange elever oppgir dette uttrykket som løsning, da de mest sannsynlig ikke har så stor kunnskap om uttrykk med variabler. Det er heller forventet at elevene beskriver forholdet med ord, slik jeg gjorde overfor.

Gruppe 2

Oppgave 1.

I denne figuren er det 18 punkter på sirkelen. Alle punktene er knyttet sammen med rette linjer.



a) Tegn hvordan figuren vil se ut med fire punkter på sirkelen. Hvor mange rette linjer er det i figuren?

b) Hvor mange rette linjer er det når det er n punkter på sirkelen? Vis og forklar hvordan du kom frem til svaret ditt.

Figur 3.2:
Oppgave 1, gruppe 2.

Oppgaven til gruppe 2 presenterer et bilde av en sirkel med 18 punkter, der alle punktene er knyttet sammen med rette linjer, se figur 3.2. Oppgaven består av to deloppgaver. Elevene blir først bedt om å tegne hvordan figuren vil se ut med fire punkter på sirkelen og oppgi hvor mange rette linjer det er i figuren. Deretter skal elevene prøve å lage et uttrykk for hvor mange rette linjer det er når det er *n* punkter på sirkelen.

For å løse oppgaven må elevene identifisere forholdet mellom antall punkter og antall rette linjer. Hvert punkt har rette linjer som fester det til de andre punktene på sirkelen. Punktet kan ikke ha en linje til seg selv. For hvert punkt det blir trukket en linje fra, så er det en linje mindre som kan trekkes. Det er også viktig å tenke på at en linje går frem og tilbake mellom to punkter, og kan dermed risikere å bli telt to ganger i et uttrykk. Elevene kan generalisere dette mønsteret slik:

$$N = \frac{n(n-1)}{2}$$

Der N er antall rette linjer ved *n* antall punkter på sirkelen. Dette er bare et eksempel på et løsningsforslag.

Oppgave 2

I oppgave 2 blir elevene bedt om å argumentere for en påstand om brøk, samt vurdere om den alltid er sann, av og til er sann eller aldri er sann. Også her må elevene forstå sammenhengen mellom eksisterende kunnskaper og oppgaven de skal løse.

I likhet med oppgave 1 er denne oppgaven også ute etter ett svar, og er nivådifferensiert for gruppene. Den ber også elevene begrunne løsningene sine.

Gruppe 1

Elevene i denne gruppen fikk presentert påstanden: *Hvis vi ganger teller og nevner i en brøk med det samme tallet, så får vi en brøk som har høyere verdi*. Elevene fikk også tre svaralternativer som de skulle krysse av for; dette er alltid sant, dette er aldri sant og dette er av og til sant.

For å løse denne oppgaven må elevene benytte seg av eksisterende kunnskaper og se sammenhenger mellom dem og oppgaven de står overfor. Dette er eksisterende kunnskaper om likeverdige brøker, der elevene bør vite at likeverdige brøker har samme verdi, selv om de har forskjellige tall i teller og nevner.

Påstanden kan formuleres som en ulikhet:

$$\frac{a}{b} > \frac{a * x}{b * x}$$

Utsagnet vil aldri være sant, da verdien alltid er lik på høyre og venstre side av likhetstegnet slik ulikheten illustrerer.

Gruppe 2

Elevene i gruppe 2 fikk presentert påstanden: *Hvis vi legger til det samme tallet i både teller og nevner i en brøk, så får vi en brøk med større verdi*. De fikk også beskjed om å vurdere om utsagnet alltid er sant, aldri er sant eller er sant av og til.

Påstanden kan formuleres som en ulikhet:

$$\frac{a}{b} < \frac{a + x}{b + x}$$

For å løse denne oppgaven kan man undersøke ulikheten for ulike verdier av a, b og x. For eksempel kan man anta at a, b, x > 0.

$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$$

$$a(b+x) < b(a+x)$$

$$ab + ax < ab + bx$$

$$ax < bx$$

$$a < b$$

Dette gir oss at når a, b, x >0 så er a mindre enn b, og er gyldig. Det gir oss også at ulikheten er ugyldig dersom a er større enn b. Dette fører til at påstanden av og til er sann. Elevene kan komme frem til lignende konklusjonen gjennom å vurdere påstanden for ulike verdier av a, b og x.

3.4.2 Divergent produksjonsoppgaver

I oppgaver som omhandler divergent produksjon blir elevene bedt om å komme med så mange ulike løsninger som mulig. Dette blir elevene også bedt om i oppgave 3, 4 og 5. Haylock (1997) presenterte tre ulike kategorier av divergente produksjonsoppgaver i matematikken: problemløsning, problemgenerering og redefinering.

Oppgave 3

Oppgave 3.

I denne oppgaven skal du ta utgangspunkt i bildet nedenfor. Start med å tenke over om du kan finne noe i bildet som handler om matematikk. Prøv å legge merke til så mye som du kan.

Lag så mange matematikkoppgaver som du kan til bildet. Du trenger ikke løse oppgavene.

Figur 3.3:
Oppgave 3 i testen.

I denne oppgaven får elevene presentert et bilde av ishavskatedralen og området rundt, og blir bedt om å lage så mange matematikkoppgaver de kan til bildet. Det blir presisert at oppgavene skal omhandle matematikk og at elevene ikke trenger å løse dem. Dette er et klassisk eksempel på en problemgenerering-oppgave, der elevene får en situasjon de blir bedre om å finne så mange matematisk interessante spørsmål til som mulig.

Oppgave 4

Oppgave 4 samsvarer med Haylock (1997) sin tredje kategori, redefinering, der elevene blir bedt om å redefinere elementer i en situasjon i form av matematiske egenskaper. I oppgaven får elevene en liste med tall, der de blir bedt om å lage så mange ulike mengder som mulig. En mengde er en samling av tall fra lista, og elevene kan bruke hvert tall i flere mengder. Hver mengde skal inneholde flere enn to tall. Elevene får oppgitt eksemplene:

(2, 3, 5, 7) Alle tallene er primtall.

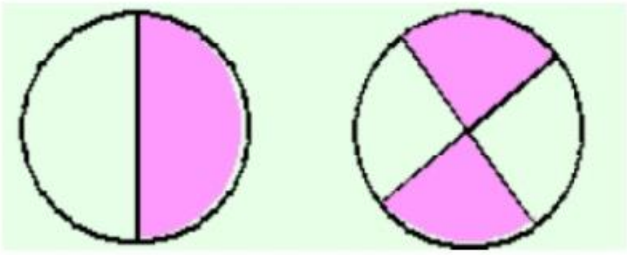
(15, 51, 60, 150) Summen av hvert siffer i tallet er 6.

De ulike mengdene spiller på ulike matematiske egenskaper, og gjennom dette vil elevene måtte tenke nytt om den samme tallmengden flere ganger.

Oppgave 5

Oppgave 5.

En sirkel kan deles i like store deler på mange forskjellige måter. For eksempel:



I denne oppgaven skal du dele inn et kvadrat i like store deler. Prøv å dele kvadratet inn i like store deler på så mange forskjellige måter som mulig.

Figur 3.4:
Oppgave 5 i testen.

I oppgave 5 blir elevene bedt om å dele et kvadrat inn i like store deler på så mange forskjellige måter som mulig. Dette er en problemløsningsoppgave der elevene blir bedt om å finne så mange ulike løsninger som mulig. For å løse denne oppgaven må elevene vurdere ulike måter å dele kvadratet inn på, samt vurdere når de ulike delene er like store.

3.5 Dataanalyse

For å analysere testene har jeg benyttet meg av rammeverkene til Leikin (2013) og Balacheff (1988). Det er også benyttet kategorisering fra første datainnsamling, som er justert og tilpasset datamaterialet som benyttes i denne oppgaven.

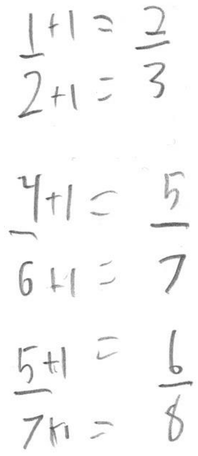
3.5.1 Argumentasjon

I oppgave 1 og 2 er formålet at elevene skal produsere bevis. Dette er i stor grad uformelle bevis. Harel og Sowder (2007) knytter bevis og argumentasjon sammen ved å definere et bevis som et argument andre må akseptere. Både oppgave 1 og 2 blir vurdert etter Balacheff (1988) sin bevis-taksonomi, der elevene kan få poeng mellom 0 til 4 for argumentasjonsnivået. I Balacheffs taksonomi er det elevenes tilnærming til bevis i oppgaven som blir vurdert. Dette medfører at gyldigheten til konklusjonen ikke blir vurdert i poengskåringen etter Balacheffs bevis-taksonomi. Som følge av dette vil elevene i tillegg få poeng ut fra gyldigheten til svarene deres.

I oppgave 1 kan elevene totalt få fire poeng for korrekt svar, og opptil fire poeng for argumentasjonsnivå. Nivådifferensieringen mellom de to gruppene fører til ulik poenggiving for de ulike deloppgavene. Gruppe 1 kan få ett poeng for riktig svar i deloppgave a, ett poeng for riktig svar i deloppgave b, og opptil to poeng for riktig svar i deloppgave c. I deloppgave 1c ble det gitt ett poeng for svar som var delvis korrekt og var på rett vei, og to poeng for svar som var helt korrekt. I testen til gruppe 2 er det mulig å få opptil to poeng i hver deloppgave. I deloppgave 1a fikk elevene ett poeng for korrekt tegnet figur og ett poeng for korrekt antall linjer på figuren. I deloppgave 1b ble det gjort samme vurdering som for gruppe 1 i deloppgave 1c, der delvis korrekt svar ga ett poeng og helt korrekt svar ga 2 poeng. Elevenes argumentasjonsnivå ble vurdert av besvarelsen i deloppgave 1c hos gruppe 1, og fra deloppgave 1b hos gruppe 2. Totalt kunne elevene få 8 poeng i oppgave 1, uavhengig av gruppe.

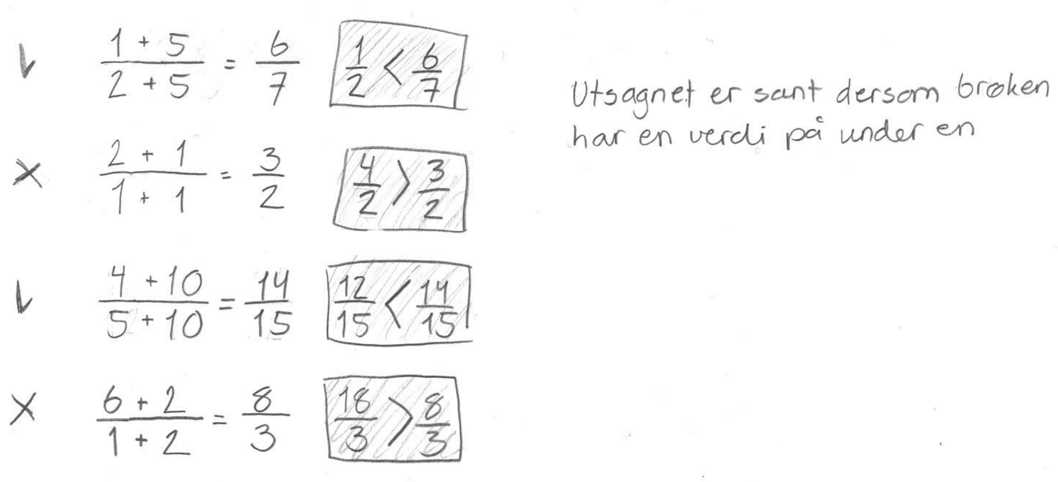
I oppgave 2 kan elevene få ett poeng for korrekt svar, og opptil fire poeng for argumentasjonsnivå. Totalt 5 poeng. For å regne ut total argumentasjonskår ble elevenes poeng fra begge oppgaver slått sammen.

Elevene som har fått 0 poeng for argumentasjon jf. Balacheffs bevis-taksonomi har enten ikke svart på oppgaven, har et fraværende argumentasjonsnivå eller har ikke svart på det oppgaven ber om. Siden korrekt svar ble atskilt fra argumentasjon kan elevene få poeng for argumentasjonsnivå selv om de har feil svar. De kan også få poeng for korrekt svar, uten å få poeng for argumentasjonsnivå. Elevbesvarelser som ble kategorisert til naiv empirisme fikk tildelt 1 poeng. Besvarelsene inneholdt gjerne få, tilfeldige eksempler der det ikke virket som det lå en spesifikk tankegang bak, se figur 3.5 for eksempel.



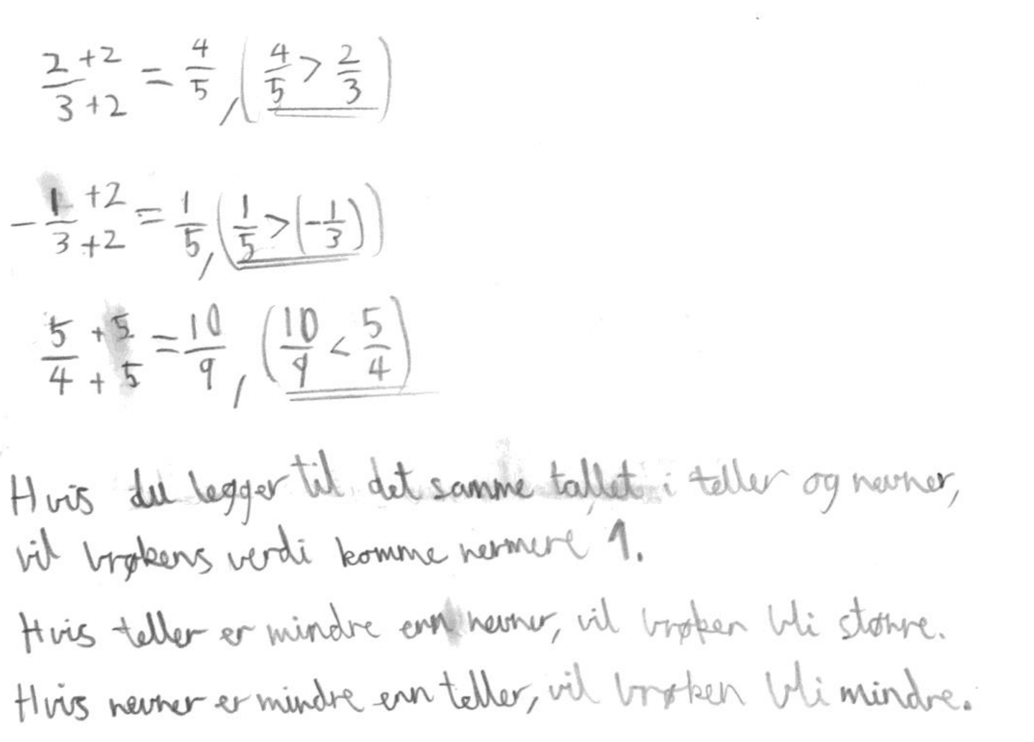
***Figur 3.5**:*
Elevbesvarelse med argumentasjonsnivå naiv empirisme.

Elevene fikk tildelt to poeng for svar som ble kategorisert som avgjørende eksperiment. Avgjørende eksperiment består også av konkrete eksempler, men skiller seg fra naiv empirisme da eksemplene ofte er basert på ekstreme tilfeller som er nøye utvalgt. Argumentasjonen følger ofte formen *«det virker her, derfor vil det fungere»* eller *«det funker her, men ikke her, dermed funker det av og til»*. Besvarelsene mangler generell argumentasjon og gyldighetsområdet er ikke diskutert (Balacheff, 1988). Varghese (2011) påpeker at det kan være vanskelig å skille mellom naiv empirisme og avgjørende eksperiment, spesielt om man kun ser på sluttproduktet slik jeg gjør i denne oppgaven. I analyseprosessen ble det derfor definert at avgjørende eksperiment inneholdt noe mer enn bare eksempler. Besvarelsene inneholder noen form for forklaring og utvelgelsen av eksemplene er mer bevisst, selv om de ikke dekker helheten. Figur 3.6 er et eksempel på en elevbesvarelse som er kategorisert som avgjørende eksperiment. Eksemplene i denne besvarelsen, sammenlignet med besvarelsen i figur 3.5, virker til å være mer bevisst, da besvarelsen inneholder brøker som både er større og mindre enn 1. Besvarelsen inneholder også en slags hypotese.



Figur 3.6:
Elevbesvarelse med argumentasjonsnivå avgjørende eksperiment.

Elevbesvarelser innenfor generisk eksempel fikk tildelt 3 poeng, og inneholdt en mer generell argumentasjon samtidig som det fortsatt ble benyttet konkrete eksempler. I samarbeid med veileder ble det i analysearbeidet bestemt at elevbesvarelser innenfor generisk eksempel måtte dekke helheten. Dersom elevbesvarelsene ikke dekket helheten ble de kategorisert som avgjørende eksperiment. I tillegg til å dekke helheten måtte det være noen form for generalisering. Et eksempel på generiske eksempel kan ses i figur 3.7. Denne besvarelsen dekker helheten da den både inneholder ekte og uekte brøker. Elevbesvarelsen i figur 3.6 inneholder dog også ekte og uekte brøker. Det som skiller disse besvarelsene er at besvarelsen i figur 3.7 i tillegg inneholder en generell argumentasjon, selv om den tar utgangspunkt i eksempler.



$$\frac{2+2}{3+2} = \frac{4}{5}, \left(\frac{4}{5} > \frac{2}{3}\right)$$

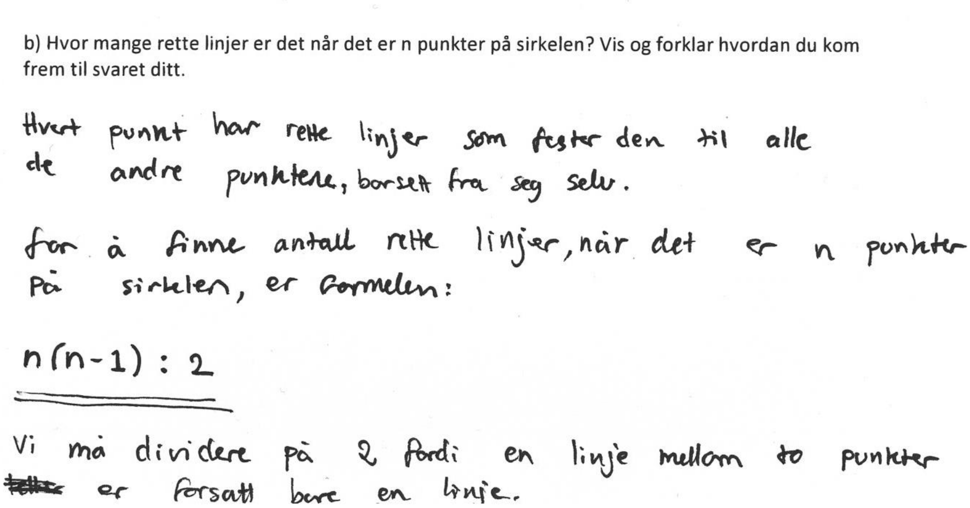
$$-\frac{1+2}{3+2} = \frac{1}{5}, \left(\frac{1}{5} > \left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$\frac{5+5}{4+5} = \frac{10}{9}, \left(\frac{10}{9} < \frac{5}{4}\right)$$

Hvis du legger til det samme tallet i teller og nevner, vil brøkens verdi komme nærmere 1.
Hvis teller er mindre enn nevner, vil brøken bli større.
Hvis nevner er mindre enn teller, vil brøken bli mindre.

Figur 3.7:
Elevbesvarelse med argumentasjonsnivå generisk eksempel.

For å få 4 poeng for argumentasjon måtte elevene være på argumentasjonsnivået tankeeksperiment. Her vil ikke lenger egenskapene til objektene være bevist gjennom tilfeller, men vil være generelt formulert. Dette vil si at elevene må være helt frigjort fra eksempler, samtidig som de fortsatt må dekke helheten, slik figur 3.8 er et eksempel på.



b) Hvor mange rette linjer er det når det er n punkter på sirkelen? Vis og forklar hvordan du kom frem til svaret ditt.

Hvert punkt har rette linjer som fester den til alle de andre punktene, borsett fra seg selv.

For å finne antall rette linjer, når det er n punkter på sirkelen, er formelen:

$n(n-1) : 2$

Vi må dividere på 2 fordi en linje mellom to punkter er fortsatt bare en linje.

Figur 3.8:
Elevbesvarelse med argumentasjonsnivå tankeeksperiment.

For flere eksempler på de ulike argumentasjonsnivåene, se Vedlegg B.

3.5.2 Divergent produksjon

Oppgave 3, 4 og 5 er analysert med Leikin (2013) sitt rammeverk. Det tar utgangspunkt i at elevene kan få en divergent produksjonskår (videre omtalt som div.skår) basert på tre indikatorer på divergent tenkning; flyt, fleksibilitet og originalitet.

Flyt ble beregnet gjennom antall korrekte løsninger elevene produserte, og blir videre betegnet ved N for antall. Fleksibilitet handler om at man benytter ulike matematiske ideer eller strategier for å løse et problem, og kan bli referert til som antall forskjellige kategorier av løsninger (Haylock, 1997; Leikin, 2013).

Hver gang en elev har et svar innenfor en ny kategori får den 10 poeng. Det første svaret vil dermed alltid gi 10 poeng. Dersom eleven benytter seg av en strategi som ligner en annen strategi eleven allerede har brukt, men har en annen representasjon, vil eleven få tildelt 1 poeng. Hvis eleven produserer en løsning som benytter seg av samme strategi og representasjon får den 0,1 poeng. Ved benyttelse av samme strategi er det de samme generelle egenskapene som ligger til grunn for besvarelsene, og det er samme metode som er brukt for å få frem løsningene. Samme representasjon vil si at det så å si er samme løsning, bare i ulik form. Se eksempler under «kategorier fra elevenes besvarelser» for konkretisering av hvordan fleksibilitetspoengene ble regnet ut. For å regne ut fleksibilitetskåren ble alle fleksibilitetspoengene summert sammen for alle oppgavene som omhandlet divergent produksjon.

Originalitet vurderes etter hvor mange andre elever som har benyttet seg av den samme kategorien. Dersom flere enn 40 % av elevene har benyttet seg av den samme kategorien vil alle elevene med besvarelser i denne kategorien få 0,1 poeng. Hvis mellom 15 og 40 % av elevene har benyttet seg av en kategori, vil disse elevene få 1 poeng. Dersom under 15 % av elevene har benyttet seg av en kategori vil disse få 10 poeng. Det ble regnet ut originalitetspoeng for alle kategoriene elevene hadde svar i. Dette ble igjen summert sammen slik at elevene fikk originalitetspoeng på hver oppgave. Den totale originalitetskåren er summen av alle originalitetspoengene til eleven.

For å finne div.skåren til elevene fant jeg produktet av fleksibilitetskåren og originalitetskåren. I arbeidet med å beregne elevenes div.skår ble det først utarbeidet kategorier som elevene hadde brukt i besvarelsene sine.

Kategorier fra elevenes besvarelser

Som nevnt innledningsvis er det blant annet benyttet kategorisering fra første datainnsamling i analyseringen. Dette gjelder for oppgave 3 og 4. Oppgave 4 er lik både i første og andre datainnsamling. Oppgave 3 er en problemgenereringsoppgave, der de to datainnsamlingene har forskjellige bilder. Selv om kategoriene fra første datainnsamling er benyttet, så har kategoriene blitt endret og tilpasset mitt datamateriale. Dersom et elevsvar ikke passet inn i en kategori, ble kategorien enten justert eller så ble det opprettet en ny kategori. I oppgave 5 er det laget egne kategorier. Kategoriene i oppgave 3, 4 og 5 er basert på elevenes besvarelser, da det ikke er en gitt løsningsmengde på svarene.

Oppgave 3 og 4

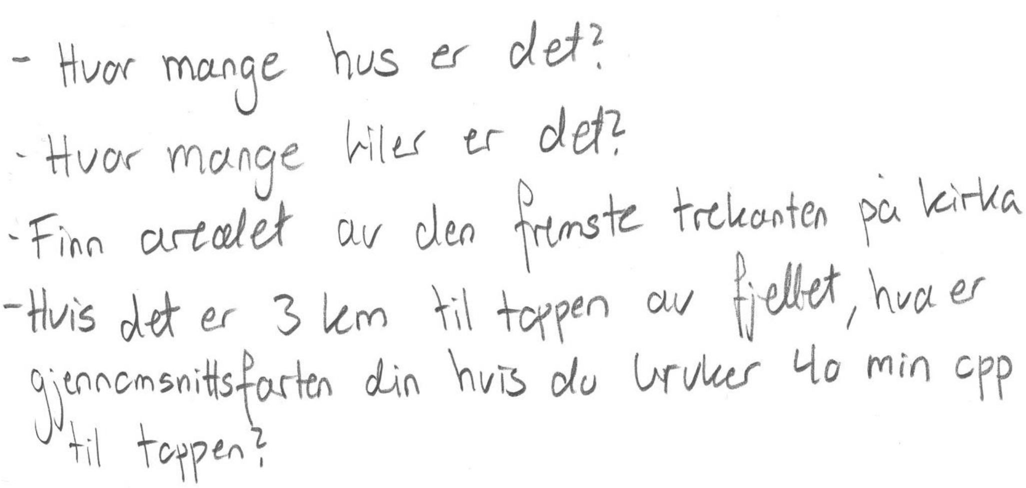
Elevenes besvarelser i oppgave 3 og 4 ble først sortert etter matematisk tema. Når alle besvarelsene var analysert ble det opprettet større kategorier som var basert på hovedideene til elevene. To ideer som ble identifisert i oppgave 4 var gangetabellen og kvadrattall. Disse ble senere slått sammen til kategorien multiplisitet, da både gangetabellen og kvadrattall er to nærliggende ideer som begge baseres på multiplikasjon.

Elevenes besvarelser i oppgave 3 er kategorisert til 13 kategorier, og er presentert i tabell 3.3. Elevenes besvarelser i oppgave 4 er kategorisert til 8 kategorier, og er presentert i tabell 3.4.

Tabell 3.3:
Kategorier oppgave 3.

Kategori	Forklaring
Antall	Spørsmål som omhandler en mengde. F.eks. hvor mange biler kan du se på bildet?
Geometrisk utregning	Spørsmål som omhandler areal, volum og omkrets. F.eks. hva er arealet til ishavskatedralen?
Geometrisk figur	Spørsmål som handler om geometriske figurer. F.eks. hvor mange trekanter består ishavskatedralen av, eller hvilke geometriske figurer ser du i bildet?
Lengde	Spørsmål som er preget av avstandsmål. F.eks. høyde på ishavskatedralen.
Formel	Spørsmål hvor man skal lage en formel eller beskrive utviklingen av mønster identifisert i bildet. F.eks.: Medlemmer i kirka får billigere inngang. Medlemmene betaler 100 kroner fast i mnd, og betaler 10 kr i inngang hver gang de er i kirka. Lag et uttrykk som representerer dette.
Andel	Kategorien er slått sammen av spørsmål som handler om brøk, prosent og forhold. F.eks. hvor mange prosent av bilene på bildet er blå?
Tid	Spørsmål som handler om tid. F.eks. hvor lenge må bilene vente på grønt lys?
Sannsynlighet	Spørsmål som handler om sannsynlighet. F.eks. hva er sannsynligheten for at det kommer en rød bil?
Målestokk	Forholdstall i bildet. F.eks. f.eks. dersom 1 cm på bildet er 1 meter i virkeligheten, hvor høy er ishavskatedralen?
Kroner	Spørsmål som knyttes til kjøp og salg. F.eks. hvis det koster 20 kr å komme inn i ishavskatedralen, og 20 personer betaler inngang. Hvor mye tjener de?
Fart	Beregning av fart. F.eks. hvor fort kjører du om du bruker 1 minutt fra bensinstasjonen til lyskrysset?
Koordinat	Spørsmål som omhandler koordinat på bildet, f.eks. hvilket koordinat ligger det hvite huset på?
Konstruksjon	Spørsmål som omhandler konstruksjon. F.eks. kan en oppgave be leseren om å konstruere den fremste trekanten i ishavskatedralen.

I arbeidet med å beregne fleksibilitetspoeng ble kategoriene benyttet til å definere ulike strategier. Kategorier og strategier er dermed to sammenfallende begreper.



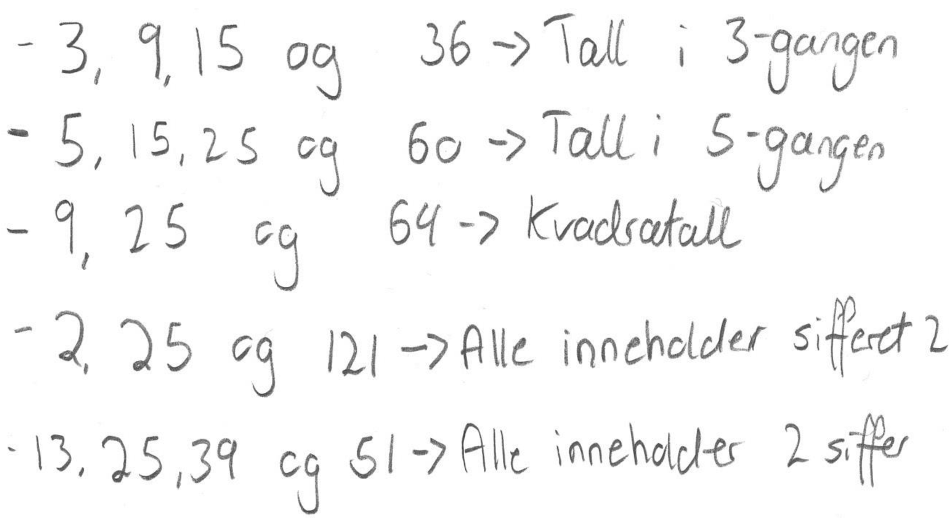
***Figur 3.9**:*
Elevbesvarelse fra oppgave 3.

I elevbesvarelsen fra oppgave 3 er det benyttet flere kategorier. De to første løsningene baseres på kategorien antall. Begge løsningene omhandler hvor mye det er av et objekt. Som følge av at det eneste som endres er hvilket objekt det blir spurt om, regnes dette for å være samme representasjon. Den første løsninger vil få 10 poeng da det er en ny kategori, mens den andre løsningen vil få 0,1 poeng som følge av at det er basert på samme strategi og representasjon som den første løsningen. Den tredje løsningen benytter seg av en ny kategori da det spørres om en geometrisk utregning, og tildeles derfor 10 poeng. Den siste løsningen baseres også på en ny kategori, fart, og tildeles derfor også 10 poeng. Totalt vil eleven få 30,1 fleksibilitetspoeng for denne oppgaven.

Tabell 3.4:
Kategorier oppgave 4.

Kategori	Forklaring
Multiplisitet	Mengder som er definert ved gangetabellen, delelighet, kvadrattall, produkt av sifre i taller osv.
Sum	Mengder som er definert ved at summen av sifrene i et tall er et spesifikt tall, eller summen av to tall blir det tredje i en mengde.
Økning	Mengder som er definert ved at tallene øker eller minker med en regularitet.
Par, odd og primtall	Mengder som er definert ved at alle tallene i mengden enten er et par, odd eller primtall.
Speiltall	To tall som kan speiles og bli hverandre
Under / over en verdi	Alle tall over eller under en spesifikk verdi
Siffer	Mengder som inkluderer et siffer, siffer i et tall har en verdiplassering eller antall siffer tallet inneholder.
Tallrekker	Mengder som defineres ved at de inneholder tall som er en del av en spesifikk tallrekke, slik som f.eks. fibonacci, pi eller palindromtall.

Elevbesvarelsene fra oppgave 4 inneholder også ulike kategorier. De tre første mengdene i figur 3.10 kjennetegnes ved at de er definert ved multiplisitet og bygger på de samme generelle egenskapene. Den første mengden vil gi 10 fleksibilitetspoeng da det er en løsning innenfor ny kategori. Deretter kan vi se at de to første mengdene fokuserer på samme representasjon, da begge er basert på gangetabellen. Mengde nummer to får dermed 0,1 poeng. Den tredje mengden benytter seg derimot av en annen representasjon, da den fokuserer på kvadrattall istedenfor gangetabellen, og får derfor 1 poeng. De tre første mengdene får dermed 11,1 fleksibilitetspoeng.


- 3, 9, 15 og 36 -> Tall i 3-gangen
- 5, 15, 25 og 60 -> Tall i 5-gangen
- 9, 25 og 64 -> Kvadratall
- 2, 25 og 121 -> Alle inneholder sifferet 2
- 13, 25, 39 og 51 -> Alle inneholder 2 siffer

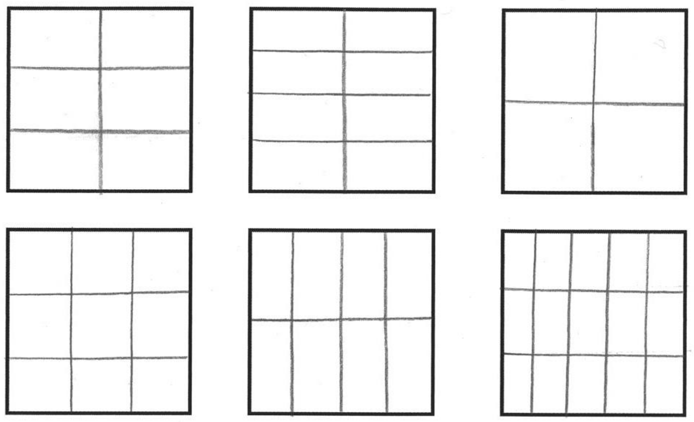
***Figur 3.10**:*
Elevbesvarelse fra oppgave 4.

Begge de siste mengdene fokuserer på kategorien siffer. Mengde nummer 4 vil gi 10 fleksibilitetspoeng da det benyttes en ny kategori. De to mengdene fokuserer dog ikke på samme aspekt av siffer. Mengde nummer 4 fokuserer på at tallet inneholder et bestemt siffer, mens mengde nummer 5 fokuserer på at tallet skal inneholde to siffer. Det spiller ingen rolle hvilken verdi sifrene har. De to mengdene har dermed ulik representasjon, og mengde nummer 2 får dermed 1 poeng. De to siste mengdene gir 11 fleksibilitetspoeng, og totalt vil eleven få 22,1 fleksibilitetspoeng av denne besvarelsen.

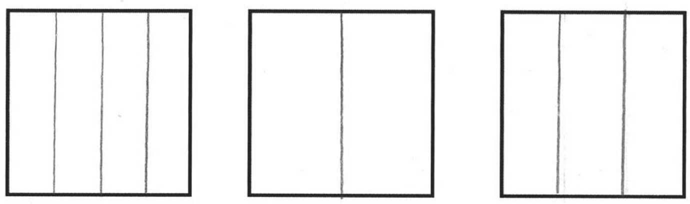
Oppgave 5

I oppgave 5 ble elevenes figurer tegnet opp underveis i analyseringen. I noen tilfeller inngikk det flere figurer i samme figur. Dette gjaldt når figurene kunne roteres og/eller speiles inn i eksisterende figurer, samt når det var en videreutvikling av et bestemt mønster. For at figurene skulle bli akseptert måtte alle delene i kvadratet være like store. Når alle besvarelsene var analysert, ble det også her opprettet større kategorier basert på elevenes matematiske ideer.

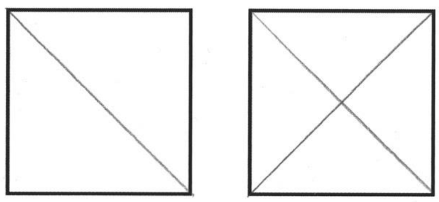
I arbeidet med kategoriseringen av oppgave 5 ble det satt opp to temaer: Rette linjer og ikke-rette linjer. Det er totalt 10 kategorier, der 7 faller inn under rette linjer og 3 faller inn under ikke-rette linjer. I den videre inndelingen av kategorier under de to temaene er det sett på følgende kriterier: diagonaler, vertikale og horisontale linjer, rotasjoner og ting som skjer i underfigurer. Med underfigurer menes figurer som ikke utfyller hele kvadratet, men som fortsatt er med på å dele det inn i like store deler. Kategoriene vil bli beskrevet og illustrert under. Illustrasjonene er tegnet for hånd, og er dermed ikke helt presise. De illustrerer likevel elevenes matematiske ideer i besvarelsene.



Figur 3.11:
Kategori 1: Vertikale og horisontale linjer.

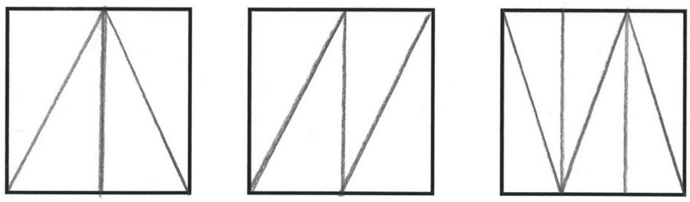


Figur 3.12:
Kategori 2: Kun vertikale eller horisontale linjer.

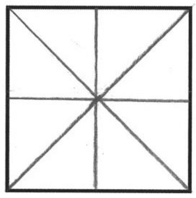


Figur 3.13:
Kategori 3: Kun diagonaler.

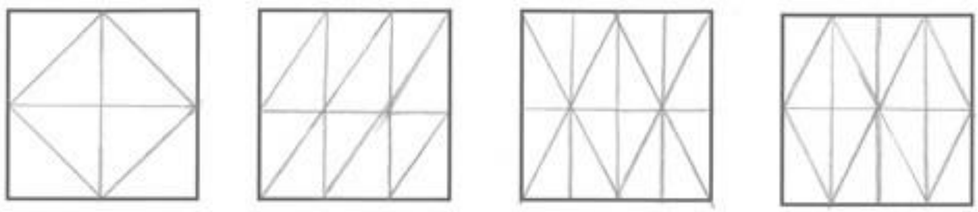
De tre første kategoriene fokuserer kun på rette linjer i hovedfiguren. Figur 3.11 viser kategori 1 som består av figurer som både inneholder vertikale og horisontale linjer. Kategori 2 defineres ved at figurene enten inneholder vertikale eller horisontale linjer, se figur 3.12. Figurene i kategori 3 består kun av diagonaler slik figur 3.13 illustrerer. Den første figuren inneholder én diagonal, mens den andre inneholder to. Dette er eksempler på to ulike representasjoner innenfor samme strategi i oppgave 5.



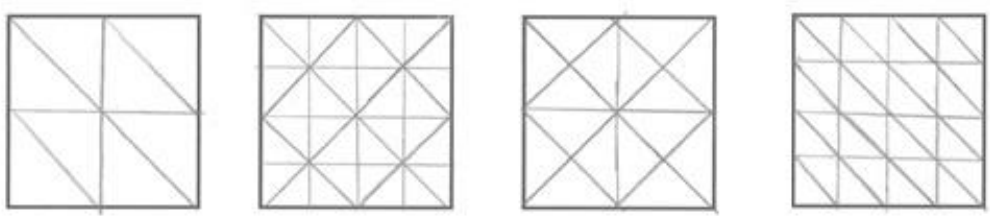
Figur 3.14:
Kategori 4: Vertikale linjer og diagonaler som deler underfigurer.



Figur 3.15:
Kategori 5: Vertikale og horisontale linjer. Diagonaler.



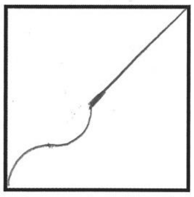
Figur 3.16:
Kategori 6: Vertikale og horisontale linjer. Diagonaler som må tegnes i underfigurer.



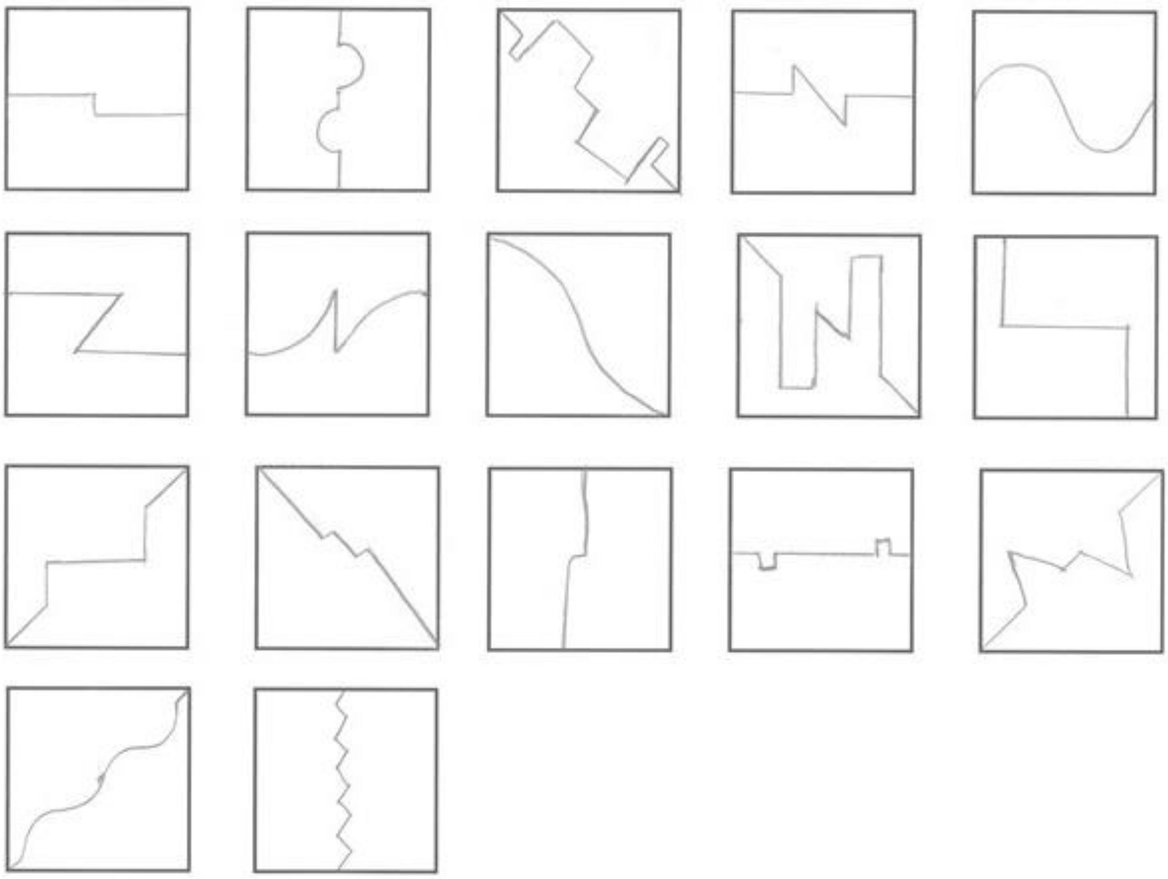
Figur 3.17:
Kategori 7: Vertikale og horisontale linjer. Diagonaler i hele. Diagonaler i underfigurer.

Figur 3.14 viser kategori 4. Figurene i denne kategorien inneholder både vertikale linjer og diagonaler som deler hovedfiguren inn i underfigurer. Kategori 5 består av figurer som både har vertikale og horisontale linjer, samt diagonaler, se figur 3.15. Kategori 6 er en videreutvikling av kategori 5, der alle figurene fortsatt inneholder diagonaler, vertikale og horisontale linjer. Mens diagonalene var i hovedfiguren i kategori 5, så er de i underfiguren i kategori 6. Figurene blir dermed delt inn i inn i flere deler gjennom vertikale og horisontale linjer. Disse mindre delene blir igjen delt av diagonaler, se figur 3.16 for illustrasjon. Kategori

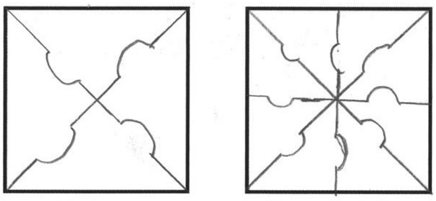
7 er også en videreutvikling av kategori 6, der det i tillegg til å være diagonaler i underfigurene, også er hele diagonaler i hovedfiguren, se figur 3.17.



Figur 3.18:
Kategori 8: En rotasjon.

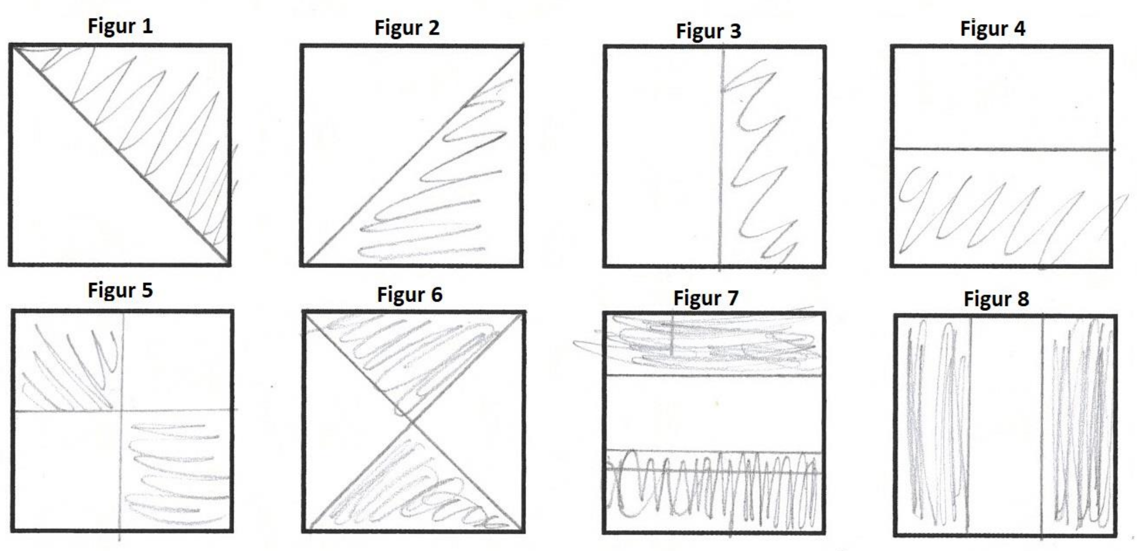


Figur 3.19:
Kategori 9: To rotasjoner.



Figur 3.20:
Kategori 10: Flere rotasjoner.

Kategoriene for ikke-rette linjer er definert etter antall rotasjoner, der kategori 8 inneholder én rotasjon, kategori 9 inneholder to rotasjoner og kategori 10 inneholder flere rotasjoner. Se figur 3.18, 3.19 og 3.20.



Figur 3.21:
Elevbesvarelse oppgave 5.

Elevbesvarelsen til oppgave 5, se figur 3.21, er analysert til å inneholde 3 ulike kategorier. Figur 1, 2 og 6 tilhører alle kategori 3, da de kun består av diagonaler i hovedfiguren. Figur 1 og 2 har samme representasjon, da de kun består av en diagonal. Det eneste som er endret er retningen på diagonalen. Figur 1 får dermed 10 poeng da det er første løsning i ny kategori. Figur 2 får 0,1 poeng som følge av samme representasjon. Figur 6 baserer seg også på diagonaler, men har består av to diagonaler. Det er dermed samme strategi, men ulik representasjon, og får 1 fleksibilitetspoeng.

Figur 3, 4, 7 og 8 baserer seg også på samme kategori; kun horisontale eller vertikale linjer. Også her kan vi se at figur 3 og 4 har samme representasjon, da de består av en linje. Det eneste som skiller dem er om linjen er vertikal eller horisontal. Figur 3 tildeles dermed 10 poeng da det er første figur i ny kategori, mens figur 4 får 0,1 poeng. Figur 7 består av en ny representasjon, da den inneholder to linjer og får dermed 1 poeng. Figur 7 og 8 inneholder samme representasjon, der det eneste som skiller dem er om linjene er vertikal eller horisontal. Figur 8 får dermed 0,1 poeng. Figur 5 er analysert til å inneholde både vertikale og horisontale linjer, og tilhører dermed kategori 1. Dette er en ny kategori, og figur 5 tildeles derfor 10 poeng. Totalt vil denne besvarelsen gi eleven 32,3 fleksibilitetspoeng.

Oppgave 3, 4 og 5 består av et stort antall kategorier. Haylock (1997) skrev blant annet at elevenes løsninger i en god divergent oppgave bør demonstrere at et område av matematiske ideer har blitt brukt. Det store antallet kategorier viser at elevene har brukt ulike matematiske ideer. Antall kategorier viser også at det er minst 20 mulige og passende svar på oppgavene, samt at elevene viser en konsistent tolkning av instruksene i oppgaven. Dette er i samsvar med Haylock (1997) sin definisjon av en god divergent produksjonsoppgave.

3.6 Statistiske analyser

Datamaterialet i denne undersøkelsen er av kvantitativ natur. Det blir derfor brukt statistiske analyser for å beskrive observasjonene som er gjort, og trekke statistiske slutninger.

IBM SPSS versjon 27 er blitt benyttet for å utføre analysene.

3.6.1 Deskriptiv statistikk

Deskriptiv statistikk er en systematisk beskrivelse av størrelsen og sammensetning av en populasjon (Bjørnstad, 2018). I denne oppgaven blir det benyttet median, gjennomsnitt, standardavvik, kvartilbredde, minimums- og maksimumsverdi for å beskrive responsen til elevene på testen.

Gjennomsnitt er et statistisk mål for sentraltendens og sier noe om hvordan verdiene er sentrert, og hva som er det typiske svaret i en fordeling. Gjennomsnittet er følsomt for ekstreme verdier, og kan dermed gi et feilaktig bilde av datasettet. Spesielt høye verdier vil trekke gjennomsnittet opp, slik at det ikke lenger er et uttrykk for det typiske. Median er et annet mål for sentraltendens som i likhet med gjennomsnitt viser det typiske i en fordeling. Medianen følger et annet prinsipp, og er verdien vi finner i midten av et rangert datamateriale. Dette medfører at den ikke er like følsom for ekstreme verdier, slik gjennomsnittet er (Johannessen, 2009; Postholm & Jacobsen, 2018).

Minimumsverdi, maksimumsverdi, standardavvik og indre kvartilbredde er alle mål for spredning, og sier noe om hvor stor variasjon det er i fordelingen. Minimumsverdien er den laveste verdien i fordelingen og maksimumsverdien er den høyeste verdien. Standardavviket sier noe om i hvilken grad verdiene avviker fra gjennomsnittet. Ved et lavt standardavvik er verdiene konsentrert rundt gjennomsnittet og betegnes som lav spredning. Høyt standardavvik viser at variablene avviker mye fra gjennomsnittet og har stor spredning (Postholm & Jacobsen, 2018).

Kvartiler blir brukt for å redusere feiltolkninger av dataenes spredning når det er enkelte observasjoner som enten er svært små eller svært store. Når datamaterialet ikke er normalfordelt benyttes det også som et mål på spredning. For å finne kvartilene må man først rangere dataene i stigende rekkefølge, for så å dele dem inn i like store deler. Første kvartil er grensen mellom første og andre fjerdedel. Andre kvartil er grensen mellom andre og tredje fjerdedel, og er det samme som medianen. Tredje kvartil er grensen mellom tredje og fjerde firedel. For å finne indre kvartilbredde beregner man differansen mellom første og tredje kvartil. Kvartilbredden representerer de midtre 50 % i datamaterialet.

3.6.2 Korrelasjonsanalyser

For å se om det er sammenheng mellom elevenes konvergente og divergente tenkning blir det benyttet korrelasjonsanalyser. Argumentasjonskår er opprinnelig en ordinalvariabel da verdiene har en logisk rangering i tillegg til å være gjensidig utelukkende. Den har imidlertid mange verdier, og kan dermed likevel behandles som en kontinuerlig variabel. Div.skår er også en kontinuerlig variabel, da verdiene kan klassifiseres og rangeres. For å undersøke sammenhengen mellom elevenes tenkning blir jeg til å benytte meg av Pearsons r.

Pearsons r undersøker den lineære relasjonen mellom to variabler. Dette medfører at selv om det ikke blir påvist signifikant korrelasjon i analysen, så blir ikke andre sammenhenger utelukket da mange samvariasjoner ikke er lineære. Det vil bare indikere at det ikke er en lineær sammenheng mellom variablene. Johannessen (2009) skriver at man i samfunnsvitenskapelige undersøkelser kan ha en tommelfingerregel om at Pearsons r opp til 0,20 er svak samvariasjon, 0,30-0,40 er moderat og over 0,50 er sterk.

Det er også benyttet korrelasjonsanalyser for å undersøke sammenhengen mellom oppgavene i testen. Pearsons r passer best til kontinuerlige variabler som sklir gjennom en skala, slik som f.eks. temperatur gjør. Pearsons r blir dermed benyttet til å undersøke sammenhengen mellom oppgavene om divergent produksjon, da div.skåren «sklir» gjennom en slik skala. Argumentasjonskåren er som tidligere nevnt opprinnelig en ordinalvariabel, og som følge av dette blir spearmans rho benyttet til å se på sammenhengen mellom argumentasjonsoppgavene. Spearmans rho er basert på verdien til den relative rangeringen av observasjonene, ikke de observerte verdiene. Den er derfor spesielt godt egnet for blant annet analyse av ordinalvariabler og variabler som ikke er normalfordelt (Aarø, 2007).

3.6.3 Ikke-parametriske tester

I denne oppgaven blir ikke-parametriske tester benyttet for å se om det er sammenheng mellom elevenes divergente tenkning og måloppnåelse, samt deres konvergente tenkning og måloppnåelse. Ikke-parametriske tester blir vanligvis brukt når man studerer populasjoner som ikke er normalfordelt, og ser om grupper er forskjellige mht. avhengige variabler. I denne oppgaven blir Kruskal-Wallis H test og Mann-Whitney U test benyttet, som begge er ikke-parametriske tester. Begge testene følger de samme betingelsene; gruppene må være uavhengige og datamaterialet kan ikke være normalfordelt (Siegel, 1956; UiO, u.å.; Aarø, 2007).

Elevene er blitt delt inn i to grupper, og er i tillegg skilt etter hvilken måloppnåelse de har. Gruppene er uavhengige av hverandre, da elevene ikke kan være i begge gruppene samtidig. Elevene kan også bare ha en grad av måloppnåelse. Dette fører til at elevene ikke kan påvirke resultatene i to grupper samtidig. Gruppene er dermed uavhengig av hverandre og oppfyller det første kravet for ikke-parametriske tester. Fra kapittel 4.4.1 kan vi også se at datamaterialet oppfyller kravet om å ikke være normalfordelt, da verken div.skåren eller argumentasjonskåren er normalfordelt.

Kruskal-Wallis H test har blitt benyttet for å undersøke om det er en signifikant forskjell mellom elevenes konvergente tenkning og gradene av måloppnåelse, samt deres divergente tenkning og gradene av måloppnåelse. Kruskal-Wallis H test er passende for å undersøke forskjellene i måloppnåelse da argumentasjon- og div.skåren kan ses på som kontinuerlige variabler, og måloppnåelse som en ordinalvariabel. Denne testen vil dog kun antyde om det er signifikant forskjell mellom minst to grader av måloppnåelse. Den sier ikke noe om hvor denne forskjellen ligger. Det er derfor behov for en test som viser hvor den eventuelle forskjellen ligger, og i denne oppgaven er Mann-Whitney U test anvendt for å si noe om dette. Det blir da sammenlignet to grader av måloppnåelse om gangen, der gruppe og måloppnåelse er kategoriske variabler, og div.skår og argumentasjonskår er kontinuerlige (Siegel, 1956; UiO, u.å.).

Mann-Whitney U test blir i tillegg benyttet for å undersøke forskjeller i gruppenes respons på testen. Dersom fordelingene i de ulike gruppene har lik form kan man benytte seg av Mann-Whitney U test for å sammenligne medianene til den avhengige variabelen og den uavhengige variabelen. Dersom fordelingen i gruppene har ulik form kan man kun sammenligne rangert gjennomsnitt. Når man benytter seg av Mann-Whitney U test bør man også benytte median og kvartiler som deskriptive mål for de ulike gruppene (UiO, u.å.).

3.6.4 Effektstørrelser

Signifikanstesting forteller oss lite om hvor betydningsfullt et resultat egentlig er, noe som har ført til økt oppmerksomhet rundt effektstørrelser. Effektstørrelser brukes for å uttrykke sammenhengen mellom to variabler, og beregnes vanligvis i tillegg til signifikanstesten. Det er et objektivt mål for en observert effekt (Kleven, 2013). I denne oppgaven blir effektstørrelser benyttet i forbindelse med Mann-whitney U test for å undersøke i hvor stor grad gruppe og måloppnåelse kan forklare resultatet. Effektstørrelser blir beregner med η^2.

3.7 Metodisk drøfting

3.7.1 Validitet

Validitet handler om gyldigheten til en studie, der man blant annet ser på gyldigheten til slutningene (Postholm & Jacobsen, 2018). Cohen, Morrison og Manion (2007) fremhever at validiteten i kvantitative studier kan bli forbedret ved gjennomtenkt datainnsamling, riktig bruk av instrumenter og passende behandling av datamaterialet.

Innenfor validitet finner man indre og ytre validitet. Indre validitet omhandler to forhold; årsak-virkningsforhold og begrepsvaliditet (Postholm & Jacobsen, 2018). I denne oppgaven blir det blant annet studert om divergent og konvergent tenkning blir påvirket av måloppnåelse. En slutning innenfor årsak-virkningsforhold kan være at elever med høy måloppnåelse gjør det bra på argumentasjonsoppgavene som følge av at de har høy måloppnåelse. Høy måloppnåelse er da årsaken til at elevene gjør det bra på argumentasjonsoppgavene. Som følge av at dette er en tverrsnittsundersøkelse vil det være vanskelig å si noe om kausale forhold. Resultatene kan tilsi at det er en samvariasjon mellom f.eks. høye resultater på argumentasjonsoppgavene og høy måloppnåelse, og kan tyde på årsaks-virkningsforhold. Vi vet dog ikke hvilken retning årsakvirkningen går. I tillegg kan det være andre faktorer som påvirker resultatet, slik som medfødte talenter.

Begrepsvaliditet viser om vi har målt det vi sier eller tror vi har målt. Den er knyttet til operasjonaliseringen av begrepene divergent og konvergent tenkning, der det er funnet noen indikatorer som kan måle begrepene (Postholm & Jacobsen, 2018). Begge oppgavene som omhandler konvergent tenkning er analysert med Balacheffs (1988) bevis-taksonomi, som er et utprøvd instrument for å vurdere elevenes tilnærming til argumentasjon. Dette er med på å styrke begrepsvaliditeten. Divergent tenkning er også analysert med et eksisterende og utprøvd rammeverk. I tillegg representerer divergent produksjonsoppgavene tre ulike oppgavetyper, noe som er med på å måle begrepet ved flere indikatorer. For å styrke begrepsvaliditeten ytterligere kunne det vært flere oppgaver av hver oppgavetype.

Ytre validitet handler om i hvilken grad resultatet kan overføres til andre populasjoner og situasjoner (Cohen et al., 2007). Postholm og Jacobsen (2018, s. 240) fremhever at «den statistisk «riktige» måten å trekke et utvalg på er å ta et tilfeldig utvalg fra en liste over alle som inngår i populasjonen». I min oppgave ville dette si å trekke et tilfeldig utvalg fra alle elever fra 5-13. trinn i Norge. Alle elevene i min undersøkelse er fra Troms. Dette er med på å begrense i hvilken grad resultatene mine kan generaliseres, da det ikke er et tilfeldig utvalg fra hele Norge. Elevene går imidlertid på 8 forskjellige skoler, noe som kan medføre at elevene har erfart svært ulik undervisning. Som følge av dette kan en tenke seg at resultatene mine kan generaliseres i større grad, enn om det bare var elever fra noen få, sammenlignbare skoler.

3.7.2 Reliabilitet

Cohen et al. (2007) skriver at reliabilitet i kvantitativ forskning egentlig er et synonym for pålitelighet, konsistens og reproduserbarhet over tid, instrumenter og grupper av respondenter. For at forskningen skal være pålitelig må det demonstreres at dersom den blir utført på en lignende gruppe respondenter, i en lignende kontekst, vil man finne lignende funn.

Datamaterialet i denne oppgaven består i hovedsak av tester. Cohen et al. (2007) påpeker at det er et stort spekter av faktorer som kan påvirke reliabiliteten på tester. Dette er faktorer som tiden på dagen og skoleåret testen blir utført, temperaturen i rommet, eksamensnerver, mengden gjetting av svar fra elevene, grad av formalitet i testsituasjonen og den opplevde viktigheten av testen. I forkant av testen ble elevene informert om at resultatet ikke ville ha noen betydning for deres videre karakter i matematikk. Dette kan være med å påvirke responsen på testen, både positivt og negativt. Elevene kan f.eks. våge å prøve seg på nye, ukjente løsningsmetoder. Det kan dog også føre til at elevene ikke gjør sitt beste og ikke forsøker å løse alle oppgavene.

Måten testen blir rettet på er også med på å påvirke reliabiliteten. Cohen et al. (2007) nevner at et vanlig problem knyttet til dette er inkonsistent vurdering. Dette kan være at man er streng i de tidlige stadiene av rettingen, for så å bli mildere i de senere stadiene. For å motvirke dette ble 100 tester gjennomgått, før det ble satt klare retningslinjer for hvordan ulike besvarelser skulle bedømmes. Deretter ble alle besvarelsene gjennomgått på nytt etter disse retningslinjene.

Både Balacheff og Leikin sine rammeverk gir rom for tolkning, noe som medfører at ulike personer kan komme frem til ulike konklusjoner i analyseringen av testene. For å styrke reliabiliteten ble ca. 50 besvarelser gjennomgått med veileder for å sikre at vi tolket besvarelsene likt ihht. Balacheff sitt rammeverk. Noen besvarelser ble også dobbeltsjekket med en annen forsker fra SUM-prosjektet.

Kapittel 3.5 beskriver i detalj hvordan analyseringen av testene er gjort, og inneholder eksempler. I tillegg er det lagt ved flere eksempler i vedlegg B. Dette er med på å styrke reliabiliteten, da det klargjør hvordan jeg har tolket Balacheff og Leikin sine rammeverk. Som følge av den detaljerte beskrivelsen av analyseringen vil andre forskere ha større mulighet til å finne lignende funn som jeg har gjort.

Reliabiliteten kan også bli påvirket av at elevenes måloppnåelse er selvrapportert, da det ikke er garantert at alle elevene har oppgitt korrekt måloppnåelse. For å veie opp for dette har ca. 1/3 av elevenes selvrapporterte måloppnåelse blitt kontrollert med deres respektive lærere.

3.8 Etikk

Denne oppgaven er en del av SUM-prosjektet (Haavold & Blomhøj, 2019), og er dermed omfattet av prosjektet sin godkjenning fra NSD, se vedlegg A.

Datamaterialet i denne oppgaven inneholder personopplysninger, som navn, alder, skole og måloppnåelse. I forskning som inneholder slike opplysninger er det viktig at deltakerne gir et informert samtykke. Dette skal være informert, fritt og uttrykkelig, slik at forskningsdeltakerne kan samtykke basert på at de har fått informasjon om prosjektets formål og metode. Forskningsdeltakerne må også ha kompetanse til å sette seg inn i hvilke konsekvenser opplysningene kan føre til (Cohen et al., 2007). I forkant av testen fikk elevene informasjon om formål og hvordan opplysningene blir behandlet og oppbevart. De fikk også informasjon om at deltagelsen var frivillig og at de når som helst kunne trekke seg. Dette ble også gjennomgått muntlig før testen ble utført. Elevene under 15 år måtte i tillegg ha samtykke fra foresatte, se vedlegg A.2. I arbeidet med analyseringen ble elevopplysningene anonymisert. Dette medfører at ingen elevopplysninger er gjenkjennbare, samt at testresultatene ikke kan spores til en spesifikk elev.

Som følge av at denne oppgaven er basert på tester, påpeker Cohen et al. (2007) at det kan oppstå muligheter for uetisk praksis. Dette kan f.eks. skje gjennom omfanget og måtene elevene har blitt forberedt på testen, der noen elever kan ha blitt bedre forberedt enn andre eller ved at noen elever får en fordel. Dette ble unngått gjennom å avklare på forhånd hvilken informasjon og hjelp elevene skulle få i forkant og underveis i testen.

4 Resultater

4.1 Konvergerent og divergent tenkning

4.1.1 Elevenes konvergente tenkning

Konvergent tenkning er vurdert etter Balacheffs bevis-taksonomi. Dersom eleven ikke har gyldig konklusjon og/eller et fraværende argumentasjonsnivå vil den få 0 poeng. 1-4 poeng representerer naiv empirisme, avgjørende eksperiment, generisk eksempel og tankeeksperiment slik beskrevet i kapittel 5.3.1.

Tabell 4.1:
Deskriptiv beskrivelse av oppgave 1. Elevenes resultater for gyldig konklusjon og argumentasjonsnivå, presentert ved gruppe 1, gruppe 2 og totalt.

		Totalt		Gruppe 1		Gruppe 2	
	Poeng	%	N	%	N	%	N
Korrekt svar	0	18,4	69	4,2	5	25,2	64
	1	29,9	112	45,0	54	22,8	58
	2	32,1	120	20,8	25	37,4	95
	3	9,4	35	14,2	17	7,1	18
	4	10,2	38	15,8	19	7,5	19
Argumentasjonsnivå	0	64,7	242	34,2	41	79,1	201
	1	13,1	49	27,5	33	6,3	16
	2	2,9	11	5,8	7	1,6	4
	3	10,7	40	15,8	19	8,3	21
	4	8,6	32	16,7	20	4,7	12

Tabell 4.1 og 4.2 presenterer hvor mange elever som har korrekt svar, samt fordelingen av de ulike argumentasjonsnivåene i oppgave 1 og 2. Av tabell 4.1 ser vi at det er forskjell mellom de to gruppene når det kommer til poeng for argumentasjonsnivå og korrekt svar. I gruppe 1 er det kun 4,2 % av elevene som ikke har fått poeng for korrekt svar, mens i gruppe 2 er det 25,2 %. Det er også en høy andel elever i gruppe 2 som ikke har fått poeng for argumentasjonsnivå, mens hos gruppe 1 er den betydelig lavere.

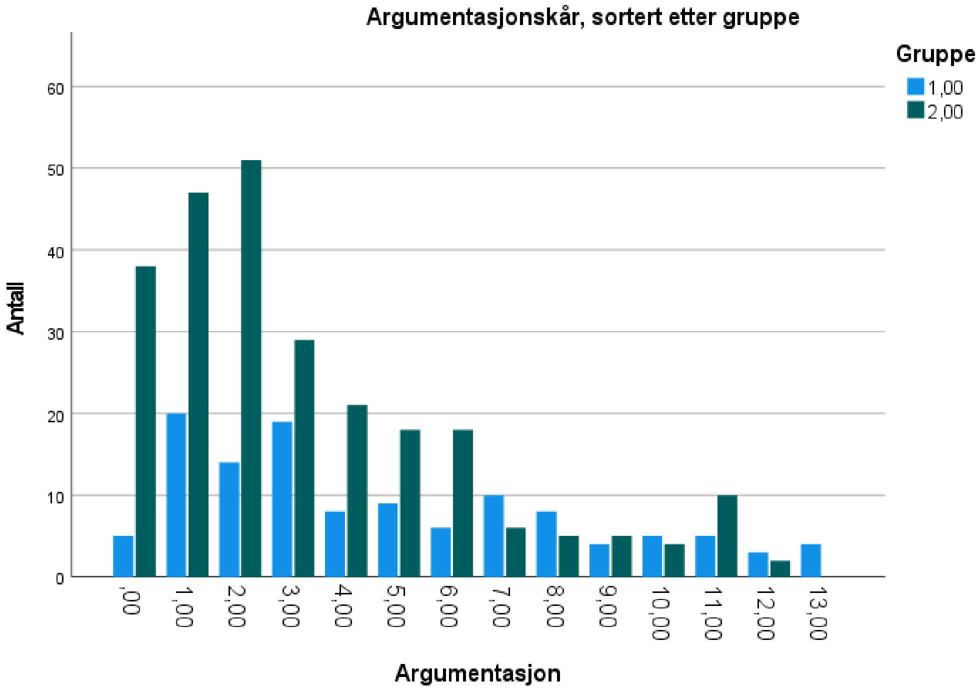
Totalt sett har flest elever har oppnådd nivået naiv empirisme og færrest har oppnådd nivået avgjørende eksperiment. I gruppe 1 er det en større andel elever som har oppnådd tankeeksperiment, sammenlignet med generisk eksempel. Det er dog fortsatt få elever som har oppnådd tankeeksperiment. I gruppe 2 er det færre elever, sammenlignet med gruppe 1, som har oppnådd tankeeksperiment.

Tabell 4.2:
Deskriptiv beskrivelse av oppgave 2. Elevenes resultater for gyldig konklusjon og argumentasjonsnivå, presentert ved gruppe 1, gruppe 2 og totalt.

		Totalt		Gruppe 1		Gruppe 2	
	Poeng	%	N	%	N	%	N
Korrekt svar	0	63,9	239	59,2	71	66,1	168
	1	36,1	135	40,8	49	35,9	86
Argumentasjonsnivå	0	50,8	190	49,2	59	51,6	131
	1	22,7	85	24,2	29	22,0	56
	2	15,8	59	13,2	16	16,9	43
	3	7,0	26	6,7	8	7,1	18
	4	3,7	14	6,7	8	2,4	6

Fra tabell 4.2 kan vi se at over halvparten av elevene ikke har fått poeng for gyldig konklusjon i oppgave 2. Rundt halvparten av elevene har heller ikke fått poeng for argumentasjonsnivå. Det er færre elever som har fått poeng for korrekt svar, enn for argumentasjonsnivå. Flest elever har oppnådd argumentasjonsnivået naiv empirisme, mens færrest elever har oppnådd tankeeksperiment.

Figur 4.1 presenterer argumentasjonskåren for de ulike gruppene. Argumentasjonskåren er basert på summen av poengene fra oppgave 1 og 2. Det er totalt mulig å oppnå 13 poeng. Argumentasjonskåren har en median på 3, gjennomsnitt på 3.74, standardavvik på 3,66 og en indre kvartilbredde på 5. Dette indikerer at det er stor spredning.



Figur 4.1:
Stolpediagram av antall elever som har oppnådd ulik argumentasjonskår.

Ut fra figur 4.1 kan man si at det er en skjevfordeling mot høyre, der flest elever er sentrert rundt de lave poengskårene. Det en dog en del observasjoner som er langt unna toppen. I gruppe 1 er det flest elever som har oppnådd 1 i argumentasjonskår, og færrest som har oppnådd 12. I gruppe 2 er det flest som har fått 2 i argumentasjonskår og færrest som har fått 12. Det er kun elever fra gruppe 1 som har fått full skår. Det er noen variasjoner i fordelingen, men den har likevel tilnærmet lik form hos begge gruppene. Argumentasjonskåren vil bli benyttet videre i analysen.

4.1.2 Elevenes divergente tenkning

Div.skåren er regnet ut som produktet av fleksibilitet- og originalitetskåren fra oppgave 3, 4 og 5, se vedlegg C for utregning. I tabell 4.3 finner vi en oversikt over minimums- og maksverdiene innenfor fleksibilitet, originalitet og divergent produksjon, samt gjennomsnitt, median og standardavvik for oppgave 3, 4 og 5. De totale skårene fra alle tre oppgavene blir også presentert.

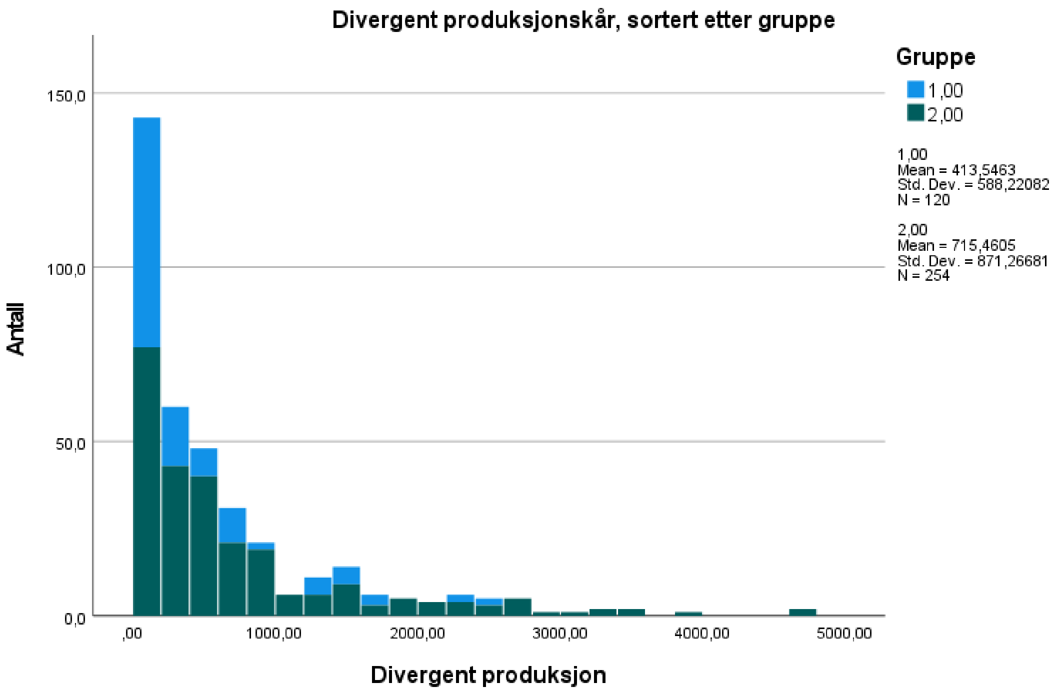
Tabell 4.3:
Deskriptiv statistikk for fleksibilitet(F), originalitet(O) og divergent produksjon(DP) ved oppgave 3, 4, 5 og totalt.

Variabel	Oppgave	Min	Maks	Gjennomsnitt	Median	SD
Fleksibilitet	3	0,00	72,00	19,20	20,00	12,44
	4	0,00	44,30	14,75	20,00	12,18
	5	0,00	87,50	43,11	43,00	15,71
	Totalt	0,00	161,50	77,07	76,10	28,09
Originalitet	3	0,00	41,10	5,09	1,00	7,08
	4	0,00	20,10	3,02	2,00	4,10
	5	0,00	42,10	6,34	0,40	9,60
	Totalt	0,00	72,60	14,44	12,30	14,04
Divergent produksjon	3	0,00	2584,20	159,01	22,28	299,96
	4	0,00	575,90	75,33	40,00	120,84
	5	0,00	3535,00	384,26	17,68	676,37
	Totalt	0,00	4670,20	618,59	355,42	803,24

Fra tabell 4.3 kan vi se at elevene viser mest fleksibilitet på oppgave 5, både når det kommer til maksimumsverdi og gjennomsnitt. Eleven med høyest fleksibilitetskår i oppgave 5 fikk totalt 87,50 poeng. Dette tilsvarer at eleven brukte 8 unike kategorier av løsninger, 7 løsninger som lignet på en tidligere løsning og fem løsninger som var identisk med en tidligere brukt strategi. Den totale gjennomsnittskåren for fleksibilitet er 77,07 og innebærer at elevene i snitt benyttet seg av 7 unike kategorier av løsninger, 7 løsninger som lignet på en tidligere løsning og omtrent en løsning som var identisk med en tidligere løsning. Medianen ligger rundt gjennomsnittet i alle oppgavene. Dette, sett i sammenheng med at standardavviket er ca. 1/3 så stort som det totale gjennomsnittet, tyder på at det ikke er så stor spredning fra gjennomsnittet blant elevene.

Gjennomsnittet tyder på at elevene viser mest originalitet på oppgave 5, men fra tabell 4.3 kan vi se at standardavviket er større enn gjennomsnittet. Medianen på oppgave 5 er også den minste blant de tre oppgavene. Dette tilsier at det er stor spredning fra gjennomsnittet blant elevene. Den gjennomsnittlige originalitetskåren er 14,44. Dette vil si at elevene i snitt hadde én løsning som mindre enn 15 % av elevene brukte, fire løsninger som mellom 15 og 40 % av elevene brukte og rundt 4 løsninger som flere enn 40 % av elevene brukte. Eleven som var mest original hadde en skår på 42,10 poeng, noe som tilsvarer at fire løsninger ble brukt av mindre enn 15 %, to løsninger ble benyttet av mellom 15 og 40 % og en løsning ble brukt av flere enn 40 % av elevene.

I snitt viser elevene mest divergent produksjon i oppgave 5. Dette er en dobling fra det nest største gjennomsnittet i oppgave 3. Det er en stor differanse mellom den største totale div.skåren på 4670,20 til det totale gjennomsnittet på 618,59. Medianen er betydelig mindre enn gjennomsnittet, og standardavviket er høyere enn gjennomsnittet. Dette antyder at det er veldig stor spredning blant div.skårene elevene har oppnådd, noe som også kan ses i figur 4.2. Div.skåren er i likhet med argumentasjonskåren skjevfordelt mot høyre.



Figur 4.2:
Histogram med oversikt over fordelingen av elevenes div.skår. Per intervall inneholder 200 poeng.

Tabell 4.4:
Andel elever som ikke har fått poeng på oppgave 3, 4 eller 5, og ingen poeng totalt.

	Totalt		Gruppe 1		Gruppe 2	
Oppgave	%	N	%	N	%	N
3	14,4	54	18,3	22	12,6	32
4	31,3	117	37,5	45	28,3	72
5	4,0	15	1,7	2	5,1	13
Alle	0,8	3	0,8	1	0,8	2

Tabell 4.4 presenterer andel elever som ikke har fått poeng på oppgave 3, 4 og 5. Den viser at det er flest elever som ikke har fått poeng på oppgave 4, og at oppgave 5 er den oppgaven flest elever har fått poeng på. Dette gjelder både for gruppe 1 og 2. Totalt sett er det svært få elever som ikke har fått poeng på noen av oppgavene.

4.2 Sammenheng mellom oppgavene

Tabell 4.5 viser at korrelasjonen mellom de enkelte oppgavene som går på divergent produksjon er svak, men statistisk signifikant. Alle samvariasjonene er positive, noe som vil si at når den ene variabelen øker vil den andre også øke. Den svake korrelasjonen indikerer at det ikke er gitt at en elev som gjør det bra på en av divergent produksjonsoppgavene skal gjøre det bra på alle. Resultatene tyder dermed på at det er ulike elever som har vist størst divergent produksjon på de ulike oppgavene. Både oppgave 3 og 4 har en svak mot moderat korrelasjon til den totale div.skåren, mens oppgave 5 har en meget sterk korrelasjon til den totale div.skåren. Dette kan skyldes at elevene i gjennomsnitt får høyest div.skår på oppgave 5. Alle de tre oppgavene har statistisk signifikant korrelasjon til den totale div.skåren.

Tabell 4.5:
Pearsons korrelasjonskoeffesient for oppgave 3, 4, 5 og total div.skår.

	DP3	DP4	DP5
DP4	0,13**		
DP5	0,10*	0,20**	
DP	0,48**	0,37**	0,91**

* = sig. 0,05-nivå, ** = sig. 0,01-nivå

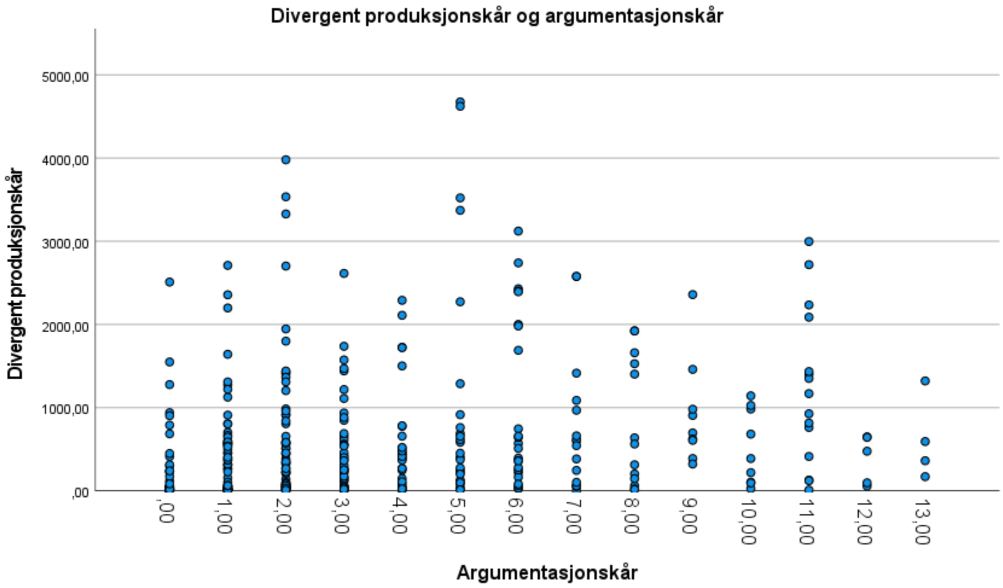
Tabell 4.6:
Spearmans rho for oppgave 1, 2 og total argumentasjonskår.

	A1	A2
A2	0,44**	
A	0,90**	0,75**

** = sig. 0,01-nivå

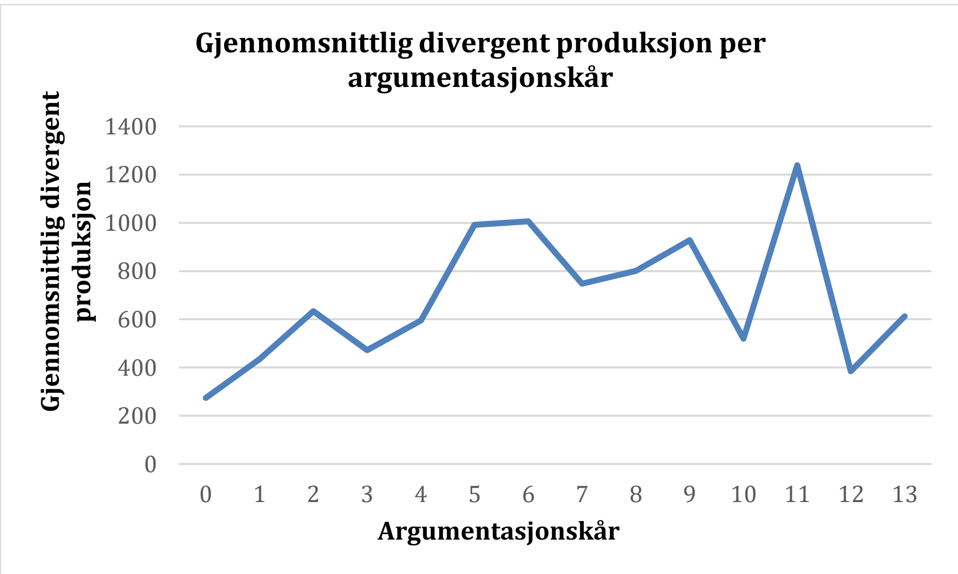
Tabell 4.6 viser at oppgave 1 og 2 har en moderat, statistisk signifikant korrelasjon. Dette kan indikere at det i moderat grad er de samme elevene som gjør det bra på oppgavene om argumentasjon. Oppgave 1 er den oppgaven som har størst sammenheng med den totale argumentasjonskåren, da den har en meget sterk korrelasjon. Oppgave 2 har også en sterk korrelasjon med den totale argumentasjonskåren.

4.3 Samsvar mellom divergent og konvent tenkning



Figur 4.3:
Sammenheng mellom div.skår og argumentasjonskår.

Figur 4.3 viser at det ikke er lineær samvariasjon mellom argumentasjonskår og div.skår. I figur 4.4 presenteres gjennomsnittet av divergent produksjon ved de ulike argumentasjonskårene. Dette er for å se på trenden blant elevene. Figuren viser også at det ikke er en lineær samvariasjon. Det kan i stor grad ses samme utvikling her som i figur 4.3, der gjennomsnittet av divergent produksjon øker i takt med argumentasjonskåren opp til div.skår 5. Figur 4.4 skiller seg imidlertid fra figur 4.3 ved at elevene med argumentasjonskår på 11 har høyest gjennomsnittlig div.skår.



Figur 4.4:
Gjennomsnittlig divergent produksjon per argumentasjonskår.

Div.skåren og argumentasjonskåren har en korrelasjonskoeffisient på 0,214 ($p < 0,001$). Samvariasjonen er positiv, men som følge av at Pearsons r er 0,214 vil korrelasjonen mellom de to variablene være ansatt som svak.

4.4 Matematisk kompetanses påvirkning på testen

Tabell 4.7 antyder at det er forskjell mellom gruppene både når det kommer til argumentasjonskår og div.skår. Gruppe 1 får i snitt ca. 1,5 poeng mer for argumentasjon enn elevene i gruppe 2. Når det kommer til divergent produksjon ser det derimot ut som at gruppe 2 gjør det best. Fra tabell 4.8 ser det ut til at både argumentasjonskåren og div.skåren øker i takt med måloppnåelsen. Tabell 4.8 indikerer også at det er stor spredning innenfor de ulike måloppnåelsene. Disse sammenhengene vil bli undersøkt videre.

Tabell 4.7:
Gjennomsnittlig argumentasjon- og div.skår fordelt på gruppe 1, 2 og totalt.

	Argumentasjonskår			
Gruppe	N	Gjennomsnitt	Median	SD
Gruppe 1	120	4,84	4,00	3,60
Gruppe 2	254	3,22	2,00	2,96
Totalt	374	3,74	3,00	3,27
	Divergent produksjonskår			
Gruppe	N	Gjennomsnitt	Median	SD
Gruppe 1	120	413,55	126,39	588,22
Gruppe 2	254	716,46	431,53	871,21
Totalt	374	618,59	355,42	803,24

Tabell 4.8:
Sammenheng mellom måloppnåelse og argumentasjonskår, samt måloppnåelse og div.skår.

	Argumentasjonskår			
Måloppnåelse	N	Gjennomsnitt	Median	SD
Lav	31	1,06	1,00	1,29
Middels	206	2,90	2,00	2,67
Høy	137	5,50	5,00	3,54
	Divergent produksjonskår			
Måloppnåelse	N	Gjennomsnitt	Median	SD
Lav	31	415,19	56,88	799,10
Middels	206	539,32	272,30	739,45
Høy	137	783,80	517,08	870,66

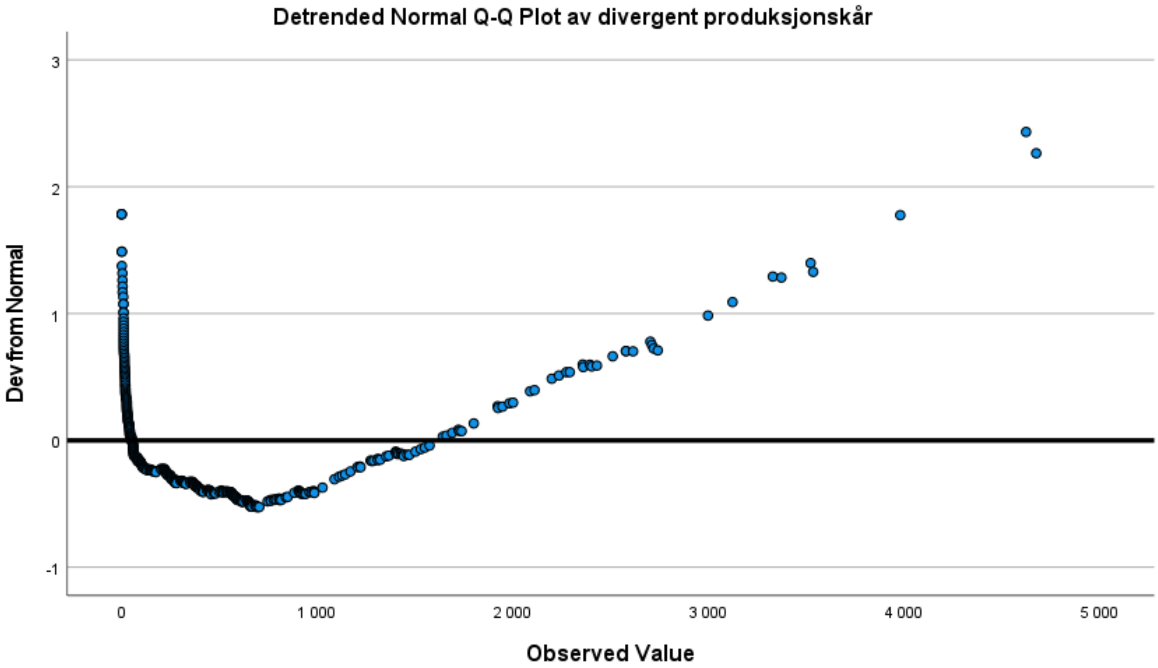
For å undersøke hvilken påvirkning elevenes måloppnåelse har på deres divergente og konvergente tenkning ser jeg på forskjeller mellom de to gruppene og i måloppnåelse. I forkant av dette er divergent produksjon og argumentasjon blitt omgjort til standardiserte variabler (z-verdier), der ZA er argumentasjonskår og ZDP er div.skår. Måloppnåelse er delt inn i tre nivåer, der karakteren 1 og 2 tilsvarer lav, 3 og 4 tilsvarer middels, og 5 og 6 tilsvarer høy måloppnåelse. I tabell 4.9 blir gjennomsnittet og standardavviket ved de ulike måloppnåelsene presentert.

Tabell 4.9:
Presentasjon av gjennomsnittet(M) og standardavvik(SD) av divergent produksjo(DP) og argumentasjon(A) ved de ulike måloppnåelsene.

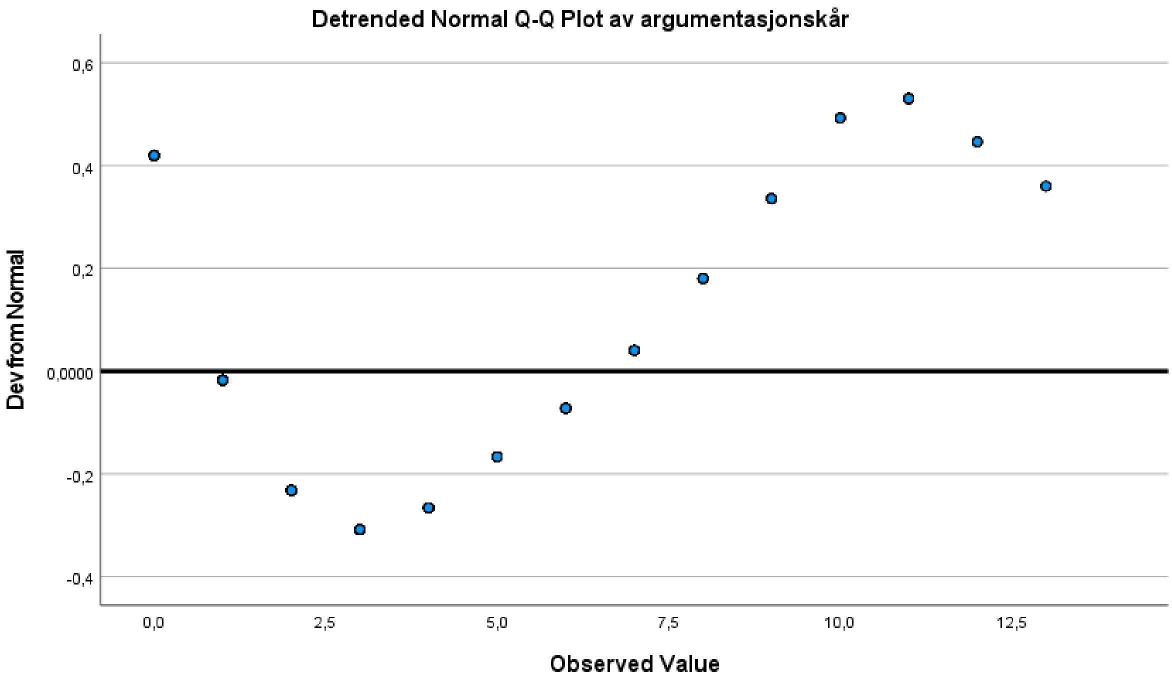
Måloppnåelse	N	ZDP		ZA	
		M	SD	M	SD
Lav	31	-0,25	0,99	-0,82	0,39
Middels	206	-0,10	0,92	-0,23	0,82
Høy	137	0,21	1,08	0,54	1,08
Totalt	374	0	1	0	1

4.4.1 Fordeling av elevenes argumentasjonskår og divergent produksjonskår

De videre undersøkelsene benytter seg av Kruskal-Wallis H test og Mann-whitney U test. Som nevnt i kapittel 3.6.3 krever begge testene at datamaterialet ikke er normalfordelt. Både div.skåren og argumentasjonskåren er skjevfordelt mot høyre, se figur 4.1 og 4.2. Dette antyder at verken div.skåren eller argumentasjonskåren er normalfordelt. Tester utført i SPSS, blant annet Q-q plot støtter dette, da det er tydelige avvik mellom normalfordelingen og dataene, se figur 4.5 og 4.6.

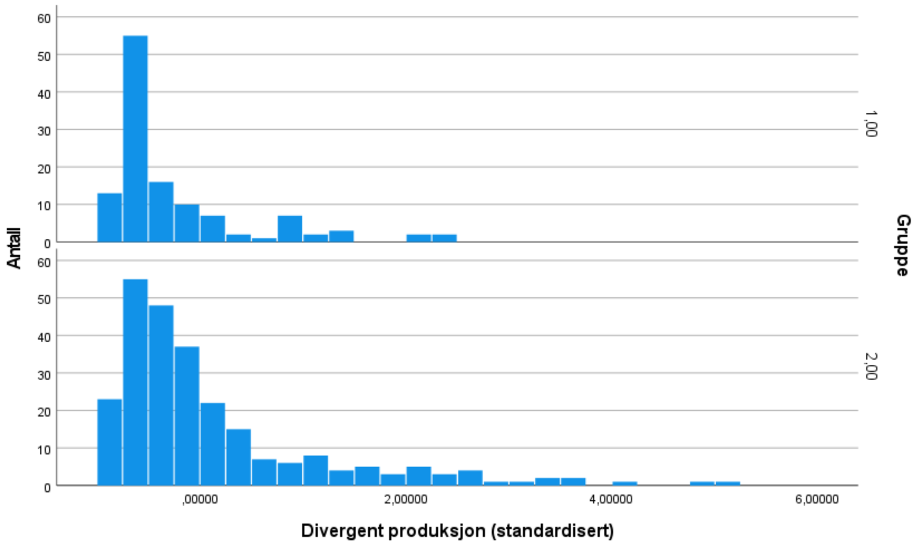


Figur 4.5:
Detrended normal Q-q plot av div.skåren.

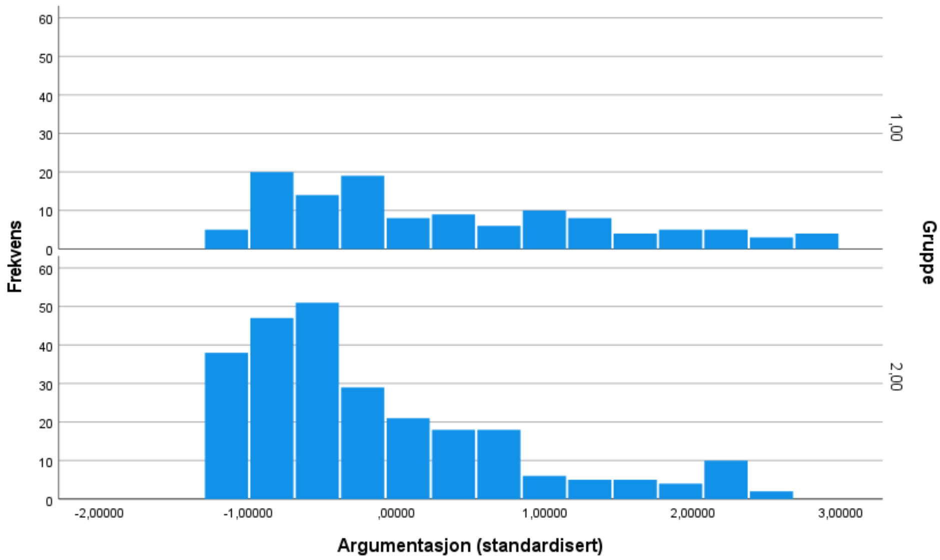


Figur 4.6:
Detrended normal Q-q plot av argumentasjonskåren.

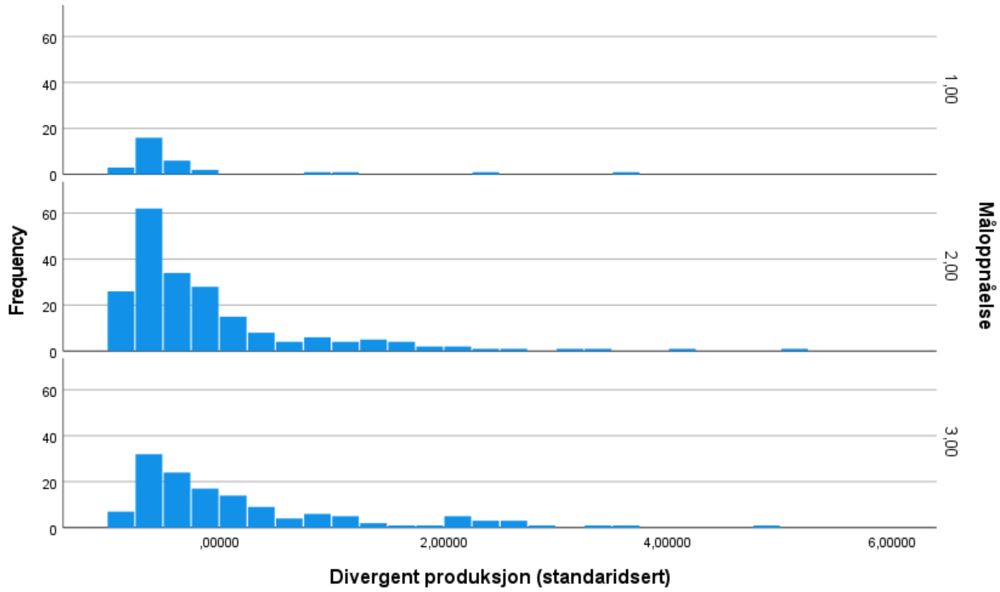
Figur 4.7 og 4.8 viser at fordelingen av elevenes argumentasjonskår og div.skår ved gruppene, virker til å ha en lik fordeling. Det samme gjelder for figur 4.9 og 4.10 som viser elevenes argumentasjonskår og div.skår ved måloppnåelse. Som følge av dette vil variablenes median bli sammenlignet og rapportert i den videre analysen.



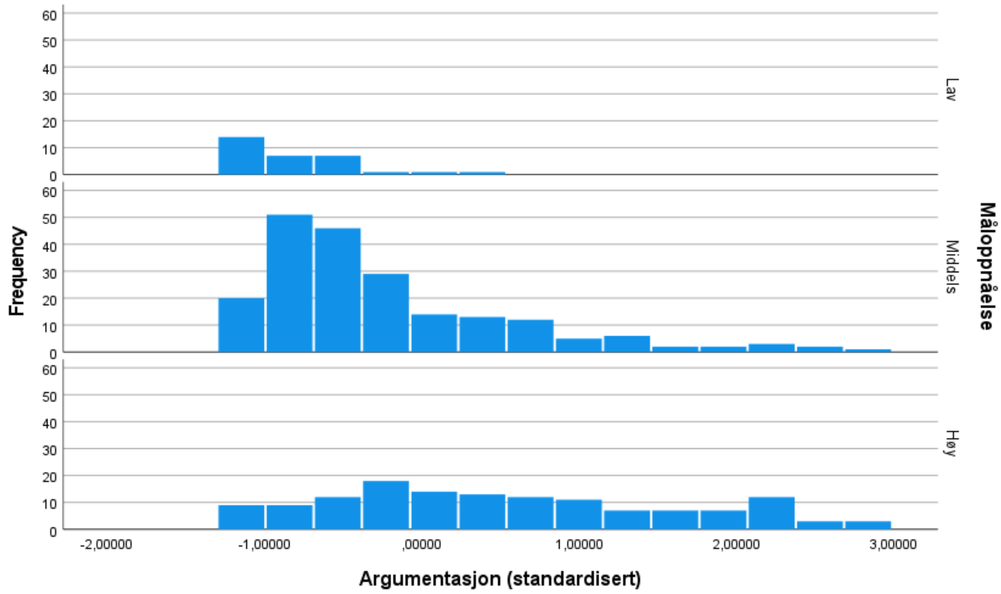
Figur 4.7:
Fordeling av gruppene ved standardisert div.skår.



Figur 4.8:
Fordeling av gruppene ved standardisert argumentasjonskår.



Figur 4.9:
Fordeling av måloppnåelse ved standardisert div.skår.



Figur 4.10:
Fordeling av måloppnåelse ved standardisert argumentasjonskår.

4.4.2 Gruppeforskjeller i divergent produksjon og argumentasjon

Tabell 4.10 presenterer gruppenes median og indre kvartilbredde for div.skår og argumentasjonskår.

Tabell 4.10:
Gruppenes median og kvartilbredde for argumentasjon- og div.skår.

	ZDP		ZA	
Gruppe	Mdn[a]	IQR[b]	Mdn	IQR
1	-0,61	0,39	0,79	1,53
2	-0,23	1,02	-0,53	1,22

[a] Median
[b] Indre kvartilbredde

Mann-Whitney U testen viser signifikant forskjell (U = 11 334,50, p = 0,001) mellom gruppene når det kommer til divergent produksjonskår. Fra tabell 4.10 kan vi se at gruppe 2 har høyere median enn gruppe 1. Mann-Whitney U testen viser også signifikant forskjell (U = 11 065,60, p = 0,001) mellom de to gruppene når det kommer til argumentasjonskår. Her har gruppe 2 lavere median enn gruppe 1. Dette kan antyde at elevene i gruppe 2 viser høyere divergent produksjon, men argumenterer på et lavere nivå enn elevene i gruppe 1.

For å kunne si noe om hvor store forskjellene er mellom de ulike gruppene beregner jeg effektstørrelse ved η^2. Beregningen av effektstørrelsene viser at 4,3 % av variasjonen i div.skåren, og 5 % av argumentasjonskåren, kan forklares av hvilken gruppe elevene er i. Dette kan indikere at forskjellen mellom gruppe 1 og 2 er størst når det kommer til argumentasjon.

4.4.3 Forskjeller mellom måloppnåelse, argumentasjon og divergent produksjon

Kruskal-Wallis H test viser at det er signifikant forskjell mellom minst to av måloppnåelsene for både argumentasjon- (H = 77,20, df = 2, p < 0,001) og div.skårene (H = 20,316, df = 2, p < 0,001). Vi vet at det er forskjeller, men vet ikke hvor forskjellene er. Forskjellene blir derfor videre undersøkt med Mann-Whitney U tester.

Tabell 4.11:
Gruppenes median og kvartilbredde for divergent produksjon og argumentasjon ved ulik grad av måloppnåelse.

	ZDP		ZA	
Gruppe	Mdn[a]	IQR[b]	Mdn	IQR
Lav	-0,70	0,45	-0,84	0,62
Middels	-0,43	0,80	-0,53	0,92
Høy	-0,13	1,06	0,38	1,53

[a] Median
[b] Indre kvartilbredde

Mann-Whitney U testen viser at det ikke er signifikante forskjeller i div.skårene til elevene som har lav og middels måloppnåelse (U = 2597.5, p = 0,094). Det ble funnet signifikante forskjeller i div.skårene til elevene med lav og høy måloppnåelse (U = 1192.5, p = 0,001), samt elevene med middels og høy måloppnåelse (U = 10855.5, p = 0,001). Div.skåren ser ut til å stige med måloppnåelsen, noe som kan indikere at elevenes divergente produksjon øker med graden av måloppnåelse, se tabell 4.11.

Det ble funnet signifikante forskjeller mellom lav og middels måloppnåelse (U = 1567.5, p = 0,001), lav og høy måloppnåelse (U = 488, p = 0,001) og middels og høy måloppnåelse (U = 7941, p = 0,001) for argumentasjonskårene. Tabell 4.11 viser at elevene med høy måloppnåelse har en median som er over gjennomsnittet av argumentasjonskårene. Elevene med lav og middels måloppnåelse har medianer som er under gjennomsnittet av argumentasjonskårene. Dette indikerer at elevene med høy måloppnåelse argumenterer på et høyere nivå enn elevene med lav og middels måloppnåelse.

For å kunne si noe om hvor store forskjellene er mellom de ulike gradene av måloppnåelse beregnes det også her effektstørrelse ved η^2. Beregningen viser at forskjellen mellom middels og høy måloppnåelse forklarer 3,8 % av variasjonen i div.skåren, mens forskjellen mellom lav og høy måloppnåelse forklarer 8,7 %. Dette kan antyde at forskjellen i div.skåren er størst mellom lav og høy måloppnåelse, samt at den øker med grad av måloppnåelse. Effektstørrelsene er ikke så store, noe som kan indikere at forskjellene mellom de ulike gradene av måloppnåelse og div.skåren ikke er så store.

Fra effektstørrelsen mellom lav og middels måloppnåelse kan vi se at forskjellen forklarer 9,1 % av variasjonen i argumentasjonskåren. Forskjellen mellom middels og høy måloppnåelse forklarer 14 %, og forskjellen mellom lav og høy måloppnåelse forklarer 27 % av variasjonen i argumentasjonskåren. I likhet med effektstørrelsene for div.skåren, er også effektstørrelsene for argumentasjonskåren økende med grad av måloppnåelse, der den største forskjellen er mellom lav og høy måloppnåelse. Når det kommer til argumentasjonskåren er effektstørrelsene større enn for div.skåren. Dette kan antyde at forskjellene mellom de ulike gradene av måloppnåelse og argumentasjonskåren er større, enn for de ulike gradene av måloppnåelse og div.skåren.

5 Diskusjon

Denne oppgaven består av fem forskningsspørsmål med hensikt å få innblikk i elevenes divergente og konvergente tenkning. Under vil hovedfunnene fra disse forskningsspørsmålene bli presentert og diskutert i sammenheng med tidligere forskning og relevant teori.

5.1 Elevenes divergente og konvergente tenkning

5.1.1 Elevenes konvergente tenkning

Ett av forskningsspørsmålene i denne oppgaven går på hva som kjennetegner konvergent tenkning hos elever. Konvergent tenkning har stor spredning blant elevene, der flest elever er sentrert rundt de lave argumentasjonskårene.

I oppgave 1 er det en prosentvis større andel elever fra gruppe 2, sammenlignet med gruppe 1, som ikke har fått poeng for korrekt konklusjon. Det er også en høy andel elever i gruppe 2 som ikke har fått poeng for argumentasjonsnivå (79,1 %), mens hos gruppe 1 er andelen betydelig lavere (34,2 %). Testen var nivådifferensiert for de to gruppene, noe som kan forklare hvorfor gruppe 2 totalt sett fikk færre poeng enn gruppe 1. De store forskjellene indikerer at elevene i gruppe 1 fant oppgave 1 enklere enn elevene i gruppe 2. Som følge av nivådifferensieringen krevde gruppe 2 sin test mer forkunnskaper. Begge testene ba elevene lage ett uttrykk, men der gruppe 1 i større grad kunne beskrive uttrykket sitt med ord, var det hos gruppe 2 forventet at uttrykket skulle inneholde n. Dersom elevene ikke vet hva n står for kan det være vanskelig å svare på oppgaven.

En annen forklaring på forskjellene mellom gruppe 1 og 2 kan være at elevene i gruppe 2 ikke så verdien i å prøve å løse oppgavene. Elevene ble informert om at testen ikke ville ha betydning for dem i ettertid, noe som kan ha påvirket innsatsen. Oppgavene kan også ha virket vanskelig, slik at elevene ikke orket å prøve å løse dem. Elevene ble også gitt et begrenset tidsrom til å løse oppgavene, så noen elever kan ha prioritert å gjøre andre oppgaver istedenfor.

Oppgave 2 skiller seg betydelig fra oppgave 1, da det er minimale forskjeller i poenggivingen mellom gruppene. Dette kan indikere at nivådifferensieringen er bedre i oppgave 2. I oppgave 2 får en større andel elever poeng for argumentasjonsnivå enn for korrekt svar. Dette kan være som følge av at korrekt svar og argumentasjonsnivå ble atskilt i analysen, der elevene ikke måtte ha korrekt svar for å få argumentasjonspoeng. Dette illustrerer at dersom oppgaver kun vurderes etter korrekt svar, risikerer man å gå glipp av elevenes argumentasjonsnivå. Ved å vurdere elevenes argumentasjon, i tillegg til korrekt svar, kan læreren få en annen innsikt i elevenes tankesett. Flere elever vil da få muligheten til å vise sin matematiske kompetanse, samtidig som læreren ytterligere kan veilede elevene i utviklingen av sin matematiske kompetanse. Dette blir også påpekt av Varghese (2011).

Dersom vi ser oppgave 1 og 2 opp mot hverandre er det en større andel elever som har fått poeng for oppgave 1. Dette kan være en indikator på at oppgave 2 ble ansett som vanskeligere enn oppgave 1. Det kan dog være lettere å oppnå poeng i oppgave 1 da den består av flere deloppgaver og dermed flere muligheter til å få poeng. I oppgave 2 var det kun én mulighet til å få poeng utenom argumentasjonsnivå. En annen mulig forklaring kan være at flere elever prøvde å løse oppgave 1, enn oppgave 2.

Oppgave 1 viser en skjevfordeling mellom de to gruppene på argumentasjonsnivået tankeeksperiment, der gruppe 1 har en høyere andel. Dette kan være en konsekvens av at oppgave 1 er nivådifferensiert, og muligens enklere for gruppe 1. Til tross for dette er det kun en liten andel elever som har oppnådd tankeeksperiment, noe som tyder på at elevene generelt sett argumenterer på et lavt nivå. Det er flere elever i gruppe 1 som har oppnådd tankeeksperiment enn avgjørende eksperiment og generisk eksempel. Den lave andelen elever som har oppnådd avgjørende eksperiment kan ses i sammenheng med vanskeligheten med å skille mellom naiv empirisme og avgjørende eksperiment slik Varghese (2011) påpekte. Selv om det er gjort en konsistent tolkning, som beskrevet i kapittel 3.5.1, kan dette ha påvirket andel elever som har oppnådd argumentasjonsnivået avgjørende eksperiment.

I oppgave 2 ser vi at et fåtall elever har oppnådd tankeeksperiment, samt at antall elever minker med argumentasjonsnivået. Dette er et mer forventet resultat, da Balacheff (1988) påpeker at høyere argumentasjonsnivå krever mer sofistikert tankevirksomhet. Et flertall av elevene tyr til empiriske begrunnelser og argumenterer på lavt nivå, både i oppgave 1 og 2. Dette er i tråd med litteratur på feltet, som viser at de fleste elevene tilsynelatende tyr til empiriske argumenter (Askevold & Lekaus, 2018; Buchbinder & Zaslavsky, 2013; Knuth et al., 2009; Stylianides et al., 2016). Flere studier har også funnet at elever ikke er i stand til å produsere mer formelle argumenter. Buchbinder og Zaslavsky (2013) fant blant annet at mange elever hadde en tendens til å tro at en påstand var sann helt til noe annet var bevist. Elevene kan da ha en forestilling som hindrer produksjonen av mer formelle argumenter, og tyr dermed til empiriske argumenter. Flere studier viser dog at elevene kan ha sofistikerte bevisoppfatninger, selv om de tyr til empirisk argumentasjon (Healy & Hoyles, 2000; Stylianides et al., 2016).

Forskningsfunnene til Buchbinder og Zaslavsky (2013), samt Healy og Hoyles (2000), kan være med å forklare hvorfor et flertall av elevene argumenterer på et lavt nivå. Harel og Sowder (2007) fremhever at dette kan stamme fra mangel på mulighet til å delta i bevisfremmende aktiviteter. Elevene kan være vant til å kun oppgi hvordan de regner ut svaret, ikke argumentere for det. Dette kan medføre at de ikke vet hva som kreves for at et svar skal være begrunnet. Elevene bør ifølge Porteous (1986) oppmuntres til å undersøke forholdet i en oppgave selv, for så å bringe frem egne grunner eller bevis for generelle uttalelser. Porteous (1986) skriver også at det først er når en elev har utarbeidet et bevis for seg selv, at han er overbevist om sannheten i en uttalelse. Det kan dermed være fordelaktig at elevene får erfaring med hvordan de begrunner og argumenterer for en løsning.

5.1.2 Elevenes divergente tenkning

Et annet forskningsspørsmål i denne oppgaven går på hva som kjennetegner elevenes divergente tenkning. I likhet med elevenes konvergente tenkning er det stor spredning blant den divergente tenkningen, der flest elever er sentrert rundt de lave div.skårene. Mellom de tre divergent produksjonsoppgavene er det svak korrelasjon. Det er dermed ikke gitt at en elev som gjør det bra på en av oppgavene skal gjøre det bra på alle, og det kan antyde at det er ulike elever som har vist størst divergent produksjon på de ulike oppgavene. De tre divergent produksjonsoppgavene er utformet for å dekke Haylock (1997) sine tre oppgavetyper. Det er dermed ikke forventet at det skal være en perfekt lineær sammenheng mellom dem. Den store variasjonsbredden kombinert med lav korrelasjon indikerer at elevenes divergente tenkning er oppgavespesifikk. I vurderingssammenheng vil dette kunne være utfordrende, da det gjør det vanskelig å vurdere oppgavene rettferdig.

I snitt viser elevene mest divergent produksjon i oppgave 5. Det er også denne oppgaven de viser mest fleksibilitet og originalitet på. Elevene viser i snitt minst divergent produksjon i oppgave 4, der de også viser minst fleksibilitet og originalitet. Dette kan ses i sammenheng med at flest elever har svart på oppgave 5 og færrest elever har svart på oppgave 4. En mulig forklaring på dette kan være at enkeltelever ikke forsøkte å løse oppgave 4. Oppgave 4 er en redefineringsoppgave der elevene skal redefinere en tallmengde i form av felles egenskaper. En annen mulig forklaring på hvorfor elevene gjør det dårlig på denne oppgaven kan være at de har en kognitiv fiksering. Dersom elevenes tankegang er begrenset til et snevert område i matematikken kan det være vanskelig å redefinere mengden slik at det blir flere mengder med ulike egenskaper. Elevene har da en innholdsfiksering. Elevene kan også ha en algoritmisk fiksering der de finner en algoritme som løser problemet og velger å utføre denne mange ganger. De vil da ende opp med flere svar som inneholder samme strategi og representasjon, og viser dermed lite fleksibilitet. Dette vil også kunne påvirke originalitetskåren (Haylock, 1997).

I de tre divergent produksjonsoppgavene ble det ble opprettet ulikt antall kategorier (13 i oppgave 3, 8 i oppgave 4 og 10 i oppgave 5). Desto flere kategorier oppgavene har, jo flere fleksibilitet- og originalitetspoeng kan elevene potensielt oppnå. Som følge av at det er færre kategorier i oppgave 4, sammenlignet med oppgave 5, kan dette antyde at oppgave 4 ikke ga like stor mulighet til å vise fleksibilitet og originalitet som oppgave 5. Dette illustrerer at opprettelsen av kategoriene kan ha konsekvenser for elevenes målte divergente produksjon. Dersom det hadde vært andre kriterier til grunn for kategoriene kunne dette ført til et annet resultat. Dette er også en medvirkende grunn til at det kan være vanskelig å vurdere divergent tenkning rettferdig.

Totalt sett viser elevene en relativt lav gjennomsnittlig div.skår. En mulig forklaring på dette kan være at elevene ikke prøvde å svare på oppgavene. En annen mulig forklaring kan være hvordan divergent tenkning blir fokusert på i klasserommet. Chamberlin og Moon (2005) fremhever at betydningen av divergent tenkning i skolematematikken kan minimeres, da den ikke formelt blir vurdert på standardiserte tester. Dette støttes av Sternberg (2017) som påpeker at det er begrenset hva standardiserte tester måler, og at problemer som krever divergent tenkning utilsiktet blir utelatt ved bruk av dem. Standardiserte tester oppmuntrer til en type læring og tenkning som fokuserer på hvem som har riktig og feil svar. Dette kan medføre at divergent tenkning blir nedprioritert i skolen.

Elevene vil da også få begrenset erfaring med Haylock (1997) sine tre divergente oppgavetyper. Bonotto og Dal Santo (2015) fremhever at problemløsning ofte består av at elevene løser oppgaver de blir gitt av læreren. Dette medfører at elevene kun har oppgaven med å løse problemene, mens lærerne må lage dem. Forskning (f.eks. Bonotto & Dal Santo, 2015) viser at det er minst like viktig å utvikle evnen til å lage oppgaver, som å utvikle evnen til å løse dem. For å utvikle elevenes divergente tenkning vil det derfor være sentralt å la de ta del i slike problemgenereringsoppgaver. Bonotto og Dal Santo (2015) påpeker også at dersom elevene får slike aktiviteter over tid, så kan læreren vurdere endringer og forbedringer over tid.

5.1.3 Samsvar mellom divergent og konvergent tenkning

Kreativitet er blitt definert til å inneholde både konvergent og divergent tenkning. Videre blir det undersøkt i hvilken grad det er en sammenheng mellom disse. Figur 4.3 viser at det ikke er en lineær samvariasjon mellom argumentasjons- og div.skåren. Korrelasjonskoeffisienten til elevenes konvergente og divergente tenkning er 0,214, $p<0,001$. Dette er en svak, positiv samvariasjon. Sak og Maker (2005) fant en moderat, positiv korrelasjon ($r=0,49$, $p<0,01$) mellom konvergent og divergent tenkning, noe som indikerer at når elevene har en høy skår på divergente oppgaver vil de også ha en høy skår på konvergente oppgaver. Mitt resultat avviker noe fra denne studien, da jeg bare fant en svak, positiv korrelasjon. En forklaring på avviket kan blant annet være at noen av elevene i mitt utvalg kanskje ikke orket å prøve og løse alle oppgavene, da de visste at dette ikke ville påvirke deres videre vurdering i matematikk.

Mellom oppgavene som går på divergent produksjon er det svak korrelasjon. Dette kan indikere at det er ulike elever som har vist størst divergent produksjon på de ulike oppgavene. Det er en moderat korrelasjon mellom argumentasjonsoppgavene. Dette kan indikere at det er noen av de samme elevene som gjør det bra på disse oppgavene. Det er dog også ulike elever som gjør det bra. Disse funnene kan tyde på at elevene ikke presterer på likt nivå på alle oppgavene som krever konvergent og divergent tenkning. Det varierende prestasjonsnivået i oppgavene kan føre til et sviktende sammenligningsgrunnlag, som igjen kan påvirke sammenhengen og forklare mitt avvikende resultat.

Den svake sammenhengen mellom elevenes divergente og konvergente tenkning kan også forklares av at elevene har en fiksert tankegang, slik Haylock (1997) refererer til. I konvergent tenkning vil man finne den beste løsningen til et spørsmål, samtidig som man søker å forstå sammenhengen mellom eksisterende kunnskaper og problemet man står overfor (Tabach & Levenson, 2018). Det kan være utfordrende å se sammenhenger dersom eleven har en innholdsfiksering, da tankegangen deres er begrenset til et utilstrekkelig utvalg av elementer relatert til problemet. Det kan likevel tenkes at elever med innholdsfiksering kan ha lettere for å få poeng i konvergente oppgaver, da det bare kreves ett svar. Elever med snever tankegang kan møte på større utfordringer i divergente oppgaver. Elevene finner kanskje løsninger som gjelder for ett område i matematikken, men kan ha problemer med å relatere løsningene til andre områder.

De konvergente oppgavene ligner mer på tradisjonelle oppgaver enn de divergente oppgavene. Elever med en algoritmisk fiksering kan klare å løse de konvergente oppgavene dersom de får algoritmen til å passe inn. Dette kan medføre at de kan gjøre det bra på de konvergente oppgavene, selv om de har en kognitiv fiksering. I de divergente oppgavene vil elever med en algoritmisk fiksering kunne møte på større utfordringer, da de ikke lenger kan benytte seg av de samme algoritmene slik jeg diskuterte i kapittel 5.1.2.

Funnet av at divergent og konvergent tenkning i liten grad samsvarer kan være med på å forme den videre matematikkundervisningen. Den svake korrelasjonen indikerer at ulike elever gjør det bra på divergente og konvergente oppgaver. Den viser dog også at det er flere elever som gjør det bra både på divergente og konvergente oppgaver. Likevel kan det være hensiktsmessig å legge opp til samarbeid mellom elevene der de kan lære av hverandre. Her kan det også være hensiktsmessig å ha en gjennomtenkt fordeling av elever på gruppene, slik at elevene kan bidra med både divergent og konvergent tenkning. Gjennom kunnskaper om elevenes konvergente og divergente tenkning kan læreren også få en viss innsikt i elevenes kognitive fiksering og kognitive fleksibilitet. Dette kan være med å forme og påvirke elevenes videre læringen.

5.2 Sammenheng mellom divergent tenkning, konvergent tenkning og måloppnåelse hos elever i matematikk

De siste forskningsspørsmålene i denne oppgaven undersøker i hvor stor grad det er sammenheng mellom konvergent tenkning og måloppnåelse, samt divergent tenkning og måloppnåelse. Når det kommer til konvergent tenkning er gruppe 1 signifikant forskjellig fra gruppe 2, der gruppe 2 har en lavere median. Dette indikerer at elever på lavere klassetrinnene argumenterer bedre enn elever på høyere klassetrinn. Dette er avvikende i forhold til Balacheff (1988) sin teori, der han fremhever at høyere argumentasjonsnivå krever høyere matematisk kompetanse. I kapittel 5.1.1 drøftet jeg hvorfor en betydelig større andel elever fra gruppe 1 hadde fått poeng for korrekt svar og argumentasjonsnivå på testen. Denne nivådifferensieringen kan være en grunn til hvorfor mine funn avviker, da elevenes matematiske kompetanse allerede er tatt hensyn til. En annen mulig forklaring kan være at færre elever i gruppe 2 forsøkte å løse de konvergente oppgavene, og dermed fikk lavt argumentasjonsnivå. Effektstørrelsen for argumentasjonskåren mellom gruppene er kun 5 %, noe som også kan indikere at det ikke er så store forskjeller mellom gruppenes argumentasjonskår.

Mann-Whitney U testen viste en signifikant forskjell mellom gruppenes divergente tenkning, der gruppe 2 har høyere median enn gruppe 1. Dette indikerer at elever på høyere klassetrinn viser mer divergent produksjon enn elever på lavere klassetrinn, noe som samsvarer med Tabach og Friedlander (2013) sine funn. Beregning av effektstørrelsen viste at 4,3 % av variasjonen i div.skåren kan forklares av hvilken gruppe elevene tilhører. Dette indikerer at det ikke er så store forskjeller i div.skåren mellom de to gruppene.

Mann-Whitney U testen viste også at det er signifikante forskjeller mellom de ulike måloppnåelsene for både divergent og konvergent tenkning. Medianen for både div.skåren og argumentasjonskåren stiger med grad av måloppnåelse, noe som indikerer at elevenes måloppnåelse øker med deres grad av konvergent og divergent tenkning. Dette resultatet støttes av effektstørrelsene som øker med grad av måloppnåelse. Som følge av at måloppnåelse sier noe om elevenes matematiske kompetanse, så kan resultatet også antyde at elevenes konvergente og divergente tenkning har innvirkning på elevenes matematiske kompetanse. Dette samsvarer med Haavold (2018) sine funn.

Ifølge Sriraman og Haavold (2017) har ikke elever med lav måloppnåelse tilstrekkelig matematisk kunnskap og ferdigheter til å demonstrere divergent og konvergent tenkning i matematikk. Dette kan forklare hvorfor elevene med lav måloppnåelse viser mindre divergent og konvergent tenkning enn elevene med høy måloppnåelse. Dette støttes av Meissner (2000) og Sheffield (2009) som påstår at matematisk kunnskap er en viktig forutsetning for divergent og konvergent tenkning, da det kreves solid innholdskunnskap for å knytte sammen forskjellige konsepter og typer informasjon. Denne koblingen fører til at man kan se divergent, konvergent tenkning og intelligens som relaterte begreper, der elever som gjør det bra på typiske intellektuelle oppgaver også gjør det bra på konvergente og divergente oppgaver (Haavold, Sriraman & Lee, 2020). Haavold (2018) fremhever at konvergent og divergent tenkning ser ut til å øke med alderen til elevene, og mener at dette kan indikere at matematisk kompetanse er en nødvendig, men ikke tilstrekkelig forutsetning for matematisk kreativitet.

Effektstørrelsene mellom måloppnåelsene og div.skåren indikerer at det ikke er så store forskjeller mellom de ulike gradene av måloppnåelse. Elevenes divergente tenkning øker med måloppnåelsen, men ikke så mye. Effektstørrelsene mellom måloppnåelse og argumentasjonskåren er høyere enn mellom måloppnåelse og div.skåren. Dette kan indikere at elevenes konvergente tenkning påvirker måloppnåelsen mer enn deres divergente tenkning. Effektstørrelsene antyder dog at det også er andre faktorer som kan forklare sammenhengene. Haylock (1997) påpeker blant annet at elever med lik måloppnåelse kan vise enorme forskjeller i prestasjonen når det kommer til oppgaver som er laget for å avsløre matematisk kreativitet. Elevenes måloppnåelse kan begrense mulighetene deres til å overkomme fiksering, men er ikke med på å bestemme dette. Haylock (1987) har også funnet at elever med høy måloppnåelse har størst mulighet for å overkomme fiksering, og vise fleksibel tenkning. På den andre siden er det også et signifikant antall elever med høy måloppnåelse som skårer veldig lavt på divergent og konvergent tenkning i matematikk. Dette tyder på at det er andre faktorer som påvirker elevenes måloppnåelse, slik som f.eks. medfødte talenter.

Resultatene i denne oppgaven peker på at det er en sammenheng mellom måloppnåelse, divergent produksjon og argumentasjon, der divergent og konvergent tenkning ser ut til å øke med grad av måloppnåelse. Dette antyder at elever må kunne matematikk for å gjøre det bra på oppgaver som omhandler konvergent og divergent tenkning. Denne oppgaven har ikke studert om denne sammenhengen gjelder motsatt vei, der konvergent og divergent tenkning utvikler den matematiske kompetansen. Det er imidlertid en mulighet for at dette er tilfelle. Flere forskere (Kattou et al., 2013; Leikin, 2007; Mann, 2005) har understreket at divergent og konvergent tenkning er en forutsetning for utvikling av matematisk kompetanse. Sett i lys av diskusjonen i kapittel 5.1.3, vil det å overkomme kognitiv fiksering kunne bidra til å utvikle elevenes matematiske kompetanse.

I undervisningssammenheng vil det dermed være viktig at lærere tar hensyn til konvergent og divergent tenkning, samt gir elevene mulighet for å utvikle mer kreative tilnærminger til matematikk. Skolematematikken i Norge er dominert av tradisjonell undervisning og et syn på at matematikk er en samling av fakta som elevene skal tilegne seg gjennom gjentatt resonnement og hardt arbeid (Bergem et al., 2016). Dette kan gi lite rom for argumentasjon og divergent produksjon i undervisningen. Konvergent og divergent tenkning blir ofte sett på som en aktivitet utenfor læreplanen og er ofte separert fra den daglige matematikkundervisningen (Sriraman & Haavold, 2017). Dette vil sannsynligvis ikke utvikle elevenes kreative tilnærminger til matematikk, og kan forklare hvorfor et flertall av elevene skårer lavt på konvergent og divergent tenkning. Haavold et al. (2020) fremhever undersøkelsesbasert matematikkundervisning som en måte å assistere elevene til å utvikle mer kreative tilnærminger til matematikk. Ved å ha et slik fokus i matematikkundervisningen vil også det tradisjonelle synet på skolematematikk som dominerer i Norge, bli utfordret.

6 Avslutning

Denne oppgaven hadde som formål å få innblikk i å undersøke elevenes konvergente og divergente tenkning, og prøvde å besvare følgende fem forskningsspørsmål:

1) Hva kjennetegner konvergent tenkning hos elever?
2) Hva kjennetegner divergent tenkning hos elever?
3) I hvilken grad er det en sammenheng mellom elevenes divergente og konvergente tenkning?
4) I hvilken grad er det en sammenheng mellom divergent tenkning og måloppnåelse hos elever i matematikk?
5) I hvilken grad er det en sammenheng mellom konvergent tenkning og måloppnåelse hos elever i matematikk?

For å kunne besvare disse forskningsspørsmålene ble det analysert 374 tester med fokus på konvergent og divergent tenkning. Konvergent tenkning ble evaluert ved å se på elevenes argumentasjon på to argumentasjonsoppgaver, der Balacheff (1988) sin bevis-taksonomi ble benyttet for å evaluere elevenes argumentasjonsnivå. Divergent tenkning ble evaluert gjennom tre divergent produksjonsoppgaver, der det ble sett på flyt, fleksibilitet og originalitet i elevenes besvarelser (Leikin, 2013).

Elevene viser i hovedsak lavt argumentasjonsnivå i de konvergente oppgavene, der andel elever minker med argumentasjonsnivået. En mulig forklaring på dette kan være elevenes manglende muligheter til å delta i bevisfremmende aktiviteter (Harel & Sowder, 2007), som kan medføre at de ikke vet hvordan de argumenterer for et svar. Det foreslås derfor at læreren legger opp undervisningen slik at elevene får erfaring med argumentasjon. Fra vurderingen av de konvergente oppgavene kommer det også frem at læreren risikerer å gå glipp av elevenes argumentasjon, dersom den bare vurderer om svaret er riktig. Gjennom å vurdere mer enn kun korrekt svar kan dermed flere elever få mulighet til å vise sin matematiske kompetanse.

De divergente oppgavene viser at elevene totalt sett har en relativ lav gjennomsnittlig divergent produksjonskår. En mulig grunn til dette kan være at divergent tenkning ofte blir nedprioritert i skolen, spesielt ved at det utilsiktet blir utelatt fra standardiserte tester (Sternberg, 2017). Det foreslås derfor å la elevene ta del i divergente produksjonsoppgaver. Vurdering av elevenes divergente produksjonsbesvarelser kan være utfordrende, blant annet da funnene indikerer at elevenes divergente tenkning er oppgavespesifikk. Bonotto og Dal Santo (2015) påpeker imidlertid at dersom elever får ta del i slike aktiviteter over tid, så kan læreren vurdere endringer og forbedringer over tid. Dette kan være med på å sikre mer rettferdig vurdering.

Funnene indikerer at det i liten grad er en sammenheng mellom divergent og konvergent tenkning. Selv om det er noen elever som gjør det bra på begge typer oppgaver, så kan funnene også tolkes som at det er ulike elever som gjør det bra på de forskjellige oppgavetypene. Den lave sammenhengen forklares blant annet av at elevene ikke presterer på likt nivå på alle oppgavene som krever konvergent og divergent tenkning. En annen mulig forklaring kan være at elevene har en kognitiv fiksering. Med bakgrunn i disse resultatene ble det foreslått at det kan være hensiktsmessig å gjennomføre gruppearbeid med en gjennomtenkt fordeling ut fra elevenes respektive styrker, slik at elevene kan lære fra hverandre.

Resultatene antyder også at elevenes divergente og konvergente tenkning har innvirkning på deres måloppnåelse. Effektstørrelsene mellom divergent tenkning og måloppnåelse indikerer dog at det ikke er så store forskjeller mellom de ulike gradene av måloppnåelse. Effektstørrelsene mellom måloppnåelse og konvergent tenkning var høyere enn mellom divergent tenkning og måloppnåelse, noe som kan indikere at konvergent tenkning påvirker måloppnåelsen i noe større grad. Dette er ikke undersøkt mer i denne oppgaven, og kan være spennende å se på i videre studier. Effektstørrelsene indikerer også at det er andre faktorer som kan forklare sammenhengen mellom divergent, konvergent tenkning, og måloppnåelse. Det blir blant annet trukket frem at det å ha høy kompetanse ikke nødvendigvis er et kjennetegn på å være kreativ. På bakgrunn av dette kan det videre også være interessant å se på hvilke andre faktorer som påvirker elevenes matematiske kompetanse. Det kan også være spennende å undersøke om matematisk kreativitet påvirker den matematiske kompetansen.

Ludvigsenutvalget trakk frem kreativitet som en sentral kompetanse elevene bør ha i fremsiden, og at skolen bør bidra til at elevene utvikler kreativitet. Den lave gjennomsnittlige argumentasjon- og divergent produksjonskåren kan antyde at konvergent og divergent tenkning ikke blir ivaretatt i tradisjonell matematikkundervisning i så stor grad. Som følge av at både kreativitet og argumentasjon er sterkt vektlagt i kunnskapsløftet 2020, bør også undervisning- og vurderingspraksisen speile dette.

Referanseliste

Askevold, G.-A. & Lekaus, S. (2018). Mathematical argumentation in pupils' written dialogues. I *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving* (s. 155-170): Springer.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *Mathematics, teachers and children*, 216-235.

Balka, D. S. (1974). Using research in teaching: Creative ability in mathematics. *The Arithmetic Teacher*, *21*(7), 633-636.

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag-Resultater og analyser fra TIMSS 2015*. Oslo, Norway: Universitetsforlaget.

Bjørnstad, J. (2018). Statistikk. Hentet fra https://snl.no/statistikk

Bonotto, C. & Dal Santo, L. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving, and creativity in the primary school. I *Mathematical problem posing* (s. 103-123): Springer.

Buchbinder, O. & Zaslavsky, O. (2013). *Inconsistencies in students' understanding of proof and refutation of mathematical statements.* Foredrag holdt ved Proceedings of PME 37.

Chamberlin, S. & Moon, S. (2005). Model-eliciting activities: An introduction to gifted education. *Journal of Secondary Gifted Education*, *17*(1), 37-47.

Cohen, L., Morrison, K. & Manion, L. (2007). *Research methods in education* (6th ed. utg.). London: Routledge.

Craft, A. (2002). *Creativity and early years education*. London: Continuum Publications.

Creswell, J. W. (2014). *Research design : qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4th ed.; International student ed. utg.Research design). Los Angeles, Calif: SAGE.

Cropley, A. (2006). In Praise of Convergent Thinking. *Creativity research journal*, *18*(3), 391-404. DOI: 10.1207/s15326934crj1803_13

Hanna, G. (2014). Mathematical proof, argumentation, and reasoning. *S. Lerman (red), Encyclopedia of mathematics education*, 404-408. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_102

Hanna, G. & Barbeau, E. (2002). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM : The International Journal on Mathematics Education*, *40*(3), 345-353. 10.1007/s11858-008-0080-5

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 805-842.

Haylock, D. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school chilren. *Educational studies in mathematics*, *18*(1), 59-74.

Haylock, D. (1997). Recognising mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM : The International Journal on Mathematics Education*, *29*(3), 68. 10.1007/s11858-997-0002-y

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for research in mathematics education*, *31*(4), 396-428.

Hersh, R. (1998). What is mathematics, really? *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *6*(2), 13-14.

Haavold, P. Ø. (2018). An investigation of the relationship between age, achievement, and creativity in mathematics. *The Journal of Creative Behavior*, *54*(3), 555-566.

Haavold, P. Ø. & Blomhøj, M. (2019). *Coherence through inquiry based mathematics education.* Foredrag holdt ved Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.
Haavold, P. Ø., Sriraman, B. & Lee, K. H. (2020). Creativity in Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 145-154.
Johannessen, A. (2009). *Introduksjon til SPSS : versjon 17* (4. utg. utg.). Oslo: Abstrakt forl.
Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *Zdm*, *45*(2), 167-181.
Kaufman, J. C. & Sternberg, R. J. (2010). *The Cambridge handbook of creativity* (Cambridge handbooks in psychology). Cambridge: Cambridge University Press.
Kleven, T. A. (2013). Effektstørrelse. Hentet fra https://www.uio.no/studier/emner/uv/iped/PED4010/h13/effektstorrelse%5B1%5D.pdf
Knipping, C. & Reid, D. A. (2019). Argumentation analysis for early career researchers. I G. Kaiser & N. Presmeg (Red.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (s. 3-31): Springer International Publishing.
Knuth, E., Choppin, J. & Bieda, K. (2009). Middle school students' production of mathematical justifications. I D. Stylianou, M. Blanton & E. Knuth (Red.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (s. 153-170). New York: Routledge.
Leikin, R. (2007). *Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks.* Foredrag holdt ved Proceedings of the Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.
Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight1. *Psychology science*, *55*(4), 385.
Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational studies in mathematics*, *67*(3), 255-276.
Mann, E. L. (2005). *Mathematical creativity and school mathematics: Indicators of mathematical creativity in middle school students*: University of Connecticut.
Meissner, H. (2000). *Creativity and mathematics education.* Foredrag holdt ved meeting of the International Congress on Mathematics Education, Tokyo, Japan.
NOU 2015: 8. (2015). *Fremtidens skole - Fornyelse av fag og kompetanser*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/da148fec8c4a4ab88daa8b677a700292/no/pdfs/nou201520150008000dddpdfs.pdf
Porteous, K. (1986). *Children's appreciation of the significance of proof*. Foredrag holdt ved Psychology in Mathematics Education conference, London.
Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen* (Forskningsmetode). Oslo: Cappelen Damm akademisk.
Sak, U. & Maker, C. (2005). Divergence and Convergence of Mental Forces of Children in Open and Closed Mathematical Problems. *International Education Journal*, *6*(2), 252-260.
Schoenfeld, A. H. (2007). Issues and Tensions in the Assessment of Mathematical Proficiency. I A. H. Schoenfeld (Red.), *Assessing mathematical proficiency* (s. 3-16): Cambridge University Press.
Sheffield, L. J. (2009). Developing mathematical creativity–Questions may be the answer. I R. Leikin, A. Berman & B. Koichy (Red.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (s. 87-100). Rotterdam: Sence Publishers.
Siegel, S. (1956). *Nonparametric statistics for the behavioral sciences*. Tokyo: McGraw Hill.
Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *Journal of Secondary Gifted Education*, *17*(1), 20-36.

Sriraman, B. & Dickman, B. (2017). Mathematical pathologies as pathways into creativity. *ZDM*, *49*(1), 137-145.

Sriraman, B. & Haavold, P. (2017). Creativity and giftedness in mathematics education: A pragmatic view. *First compendium for research in mathematics education. Reston: National Council of Teachers of Mathematics*.

Sternberg, R. J. (2017). School mathematics as a creative enterprise. *ZDM*, *49*(7), 977-986.

Stylianides, A. J., Bieda, K. N. & Morselli, F. (2016). Proof and Argumentation in Mathematics Education Research. 315-351. 10.1007/978-94-6300-561-6_9

Tabach , M. & Friedlander, A. (2013). School mathematics and creativity at the elementary and middle-grade levels: how are they related? *ZDM*, *45*(2), 227-238.

Tabach, M. & Levenson, E. (2018). Solving a task with infinitely many solutions: Convergent and divergent thinking in mathematical creativity. I N. Amado, S. Carreira & K. Jones (Red.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving: A focus on technologi, creaticity and affect* (s. 219-242). Cham: Springer International Publishing. Hentet fra https://doi.org/10.1007/978-3-319-99861-9_10

UiO. (u.å.). Bivariate analyser: Analyse av sammenhengen mellom to variabler. Hentet fra https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/STK1000/h16/ttest-mww.pdf

Varghese, T. (2011). Considerations concerning Balacheff's 1988 taxonomy of mathematical proofs. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 7*(3), 181-192.

Walia, P. (2012). Achievement in relation to mathematical creativity of eighth grade students. *Indian Streams Research Journal, 2*(2), 1-4.

Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. I J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Red.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (s. 227-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Aarø, L. E. (2007). *Fra spørreskjemakonstruksjon til multivariat analyse av data: En innføring i survey-metoden*: Research Centre for Health Promotion/Griegakademiet, Universitet i Bergen.

Vedlegg A: Datainnsamlingsinstrumenter

A.1 Godkjenning fra NSD

NSD

Per Øystein Haavold

9006 TROMSØ

Vår dato: 06.09.2017 Vår ref: 54660 / 3 / LAR Deres dato: Deres ref:

Tilbakemelding på melding om behandling av personopplysninger

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 06.06.2017.
Meldingen gjelder prosjektet:

54660	*SUM - Sammenheng gjennom Undersøkende Matematikkundervisning*
Behandlingsansvarlig	*UiT Norges arktiske universitet, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Per Øystein Haavold*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 31.12.2020, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Dersom noe er uklart ta gjerne kontakt over telefon.

Vennlig hilsen

Marianne Høgetveit Myhren

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no

Lasse André Raa

Kontaktperson: Lasse André Raa tlf: 55 58 20 59 / Lasse.Raa@nsd.no
Vedlegg: Prosjektvurdering

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 54660

SAMARBEIDSSTUDIE
Prosjektet er en internasjonal samarbeidsstudie. UiT Norges arktiske universitet er behandlingsansvarlig institusjon for den norske delen. Personvernombudet forutsetter at ansvaret for behandlingen av personopplysninger er avklart mellom institusjonene. Vi anbefaler at det inngås en avtale som omfatter ansvarsfordeling, ansvarsstruktur, hvem som initierer prosjektet, bruk av data og eventuelt eierskap.

INFORMASJON OG SAMTYKKE
Utvalget informeres skriftlig om prosjektet og samtykker til deltakelse. Informasjonsskriv og samtykkeerklæring, slik de foreligger i reviderte utgaver av 24.08.2017 og 05.09.2017, er godt utformet.

Det foreligger imidlertid et avvik mellom prosjektslutt oppgitt i meldeskjema og i informasjonsskrivene. Personvernombudet legger til grunn at sistnevnte stemmer, og har derfor endret prosjektslutt til 31.12.2020.

BARN I FORSKNING
Deltakelse i forskning skal alltid være frivillig for barnet selv om foreldrene samtykker på barnets vegne. Dette innebærer at barnet bør få tilpasset informasjon og at forsker må få barnets aksept under datainnsamlingen. I tråd med dette, bør den som foretar datainnsamlingen ha tilstrekkelig kompetanse til å tilpasse fremgangsmåten slik at barnets behov ivaretas.

BARN I FORSKNING
Personvernombudet vurderer at ungdommer som har fylt 15 år kan samtykke selv til å delta i dette prosjektet, så lenge de får tilpasset informasjon om prosjektet, og at det sørges for at de forstår at deltakelse er frivillig og at de når som helst kan trekke seg dersom de ønsker det. Det forutsettes at forsker følger retningslinjer for den enkelte skole.

DATASIKKERHET
Personvernombudet legger til grunn at forsker etterfølger UiT Norges arktiske universitet sine interne rutiner for datasikkerhet.

PUBLISERING AV PERSONOPPLYSNINGER
Det oppgis at indirekte identifiserende personopplysninger kan bli publisert. Personvernombudet legger til grunn at det i så fall foreligger eksplisitt samtykke fra den enkelte til dette. Vi anbefaler dessuten at deltakerne gis anledning til å lese igjennom egne opplysninger og godkjenne disse før publisering.

PROSJEKTSLUTT
Forventet prosjektslutt er 31.12.2020. Ifølge prosjektmeldingen skal innsamlede opplysninger da anonymiseres.

Anonymisering innebærer å bearbeide datamaterialet slik at ingen enkeltpersoner kan gjenkjennes. Det gjøres ved å:

- slette direkte personopplysninger (som navn/koblingsnøkkel)
- slette/omskrive indirekte personopplysninger (identifiserende sammenstilling av bakgrunnsopplysninger som f.eks. bosted/arbeidssted, alder og kjønn)

NSD NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

SUM: Coherence through inquiry based mathematics teaching

Referansenummer

363390

Registrert

08.02.2021 av Per Øystein Haavold - per.oystein.haavold@uit.no

Behandlingsansvarlig institusjon

UiT – Norges Arktiske Universitet / Fakultet for humaniora, samfunnsvitenskap og lærerutdanning / Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Per Øystein Haavold, per.oystein.haavold@uit.no, tlf: 47409395

Type prosjekt

Forskerprosjekt

Prosjektperiode

01.05.2017 - 31.10.2021

Status

11.03.2021 - Vurdert

Vurdering (1)

11.03.2021 - Vurdert

BAKGRUNN
Behandlingen av personopplysninger ble opprinnelig meldt inn til NSD 06.06.2017 (NSD sin ref: 54660) og vurdert under personopplysningsloven som var gjeldende på det tidspunktet.
08.02.2021 meldte prosjektleder inn en endring av prosjektet som bestod i en utsettelse av prosjektslutt til 31.12.2021.

Det er vår vurdering at behandlingen/hele prosjektet vil være i samsvar med den gjeldende personvernlovgivningen, så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 11.03.2021 med vedlegg.

Behandlingen kan fortsette.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema
Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31.12.2021. Opprinnelig prosjektslutt var 31.12.2020.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet har innhentet samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger.

Vår vurdering er at prosjektet la opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det var en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Samtykket vurderes som gyldig også etter gjeldende personvernregelverk.

Lovlig grunnlag for behandlingen er den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at behandlingen av personopplysninger følger prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte har fått tilfredsstillende informasjon og har samtykket til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger er samlet inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen som de registrerte mottok var tilstrekkelig/godt utformet under personopplysningsloven som var gjeldende på det tidspunktet.
Det vurderes at informasjonen også er tilstrekkelig for å innhente et informert samtykke og oppfylle informasjonsplikten etter nytt personvernregelverk. Informasjonen oppfyller krav til form, jf. personvernforordningen art. 12.1, og mangler kun informasjon om nye rettigheter og kontaktopplysninger til institusjonens personvernombud for å oppfylle alle krav til innhold, jf. art. 13.
Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til videre med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Gry Henriksen
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

A.2 Samtykkeskjema elever under 15 år

UiT
NORGES
ARKTISKE
UNIVERSITET

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

"SUM: Coherence through inquiry based mathematics teaching"

Bakgrunn og formål
Målet med dette prosjektet er å bidra til utvikling av barn og unges matematikklæring og motivasjon for matematikk gjennom å integrere perioder med utforskende undervisning i matematikkundervisningen fra barnehage til universitet. Disse utviklingsaktivitetene skal foregå gjennom tre skoleår. Prosjektet drives av forskningsgruppen Matematikkdidaktikk ved UiT Norges arktiske universitet, institutt for lærerutdanning og pedagogikk med støtte fra Norsk forskningsråd.

Utvalget er rekruttert gjennom Norges arktiske studentsamskipnad, Troms fylkeskommune og Tromsø kommune. Hver deltakende skole/barnehage har valgt 2 – 4 lærere / barnehagelærere til å delta i prosjektet.

Hva innebærer deltakelse i studien?
Et fokusområde for prosjektet vil være overganger der det erfaringsmessig er utfordringer knyttet til elevers motivasjon og matematikklæring:

Barnehage => Barneskole => Ungdomstrinn => Videregående skole => Universitet

For hver av disse overgangene dannes en gruppe lærere/pedagoger og to forskere. Deltakerne i en gruppe arbeide sammen med å utvikle, gjennomføre (i lærernes egne klasser) og evaluere 3 utforskende undervisningsforløp av en varighet på 5-10 skoletimer. Disse undervisningsforløpene skal være i overensstemmelse med relevante læreplanmål på de aktuelle klassetrinnene.

Forskerne i gruppa vil samle inn data gjennom både klasseromsobservasjoner, lyd- og bildeopptak, intervjuer og spørreskjema til lærere og elever samt faglige tester for å dokumentere elevenes faglige utvikling.

Hva skjer med informasjonen om deg?
Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Det er bare medlemmer i forskningsgruppen som har tilgang til datamaterialet. Alt datamateriale lagres i låsbare skap ved UiT Norges arktiske universitet.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 31.12.2020. Etter dette blir datamaterialet anonymisert og videomaterialet slettet. Dersom det er gitt tillatelse til korte sekvenser til bruk i undervisning og konferanser vil disse bli lagret ved UiT.

Kontaktinformasjon.
Per Øystein Haavold e-post: per.oystein.haavold@uit.no tlf. 77645587
Postboks 6050 Langnes, N-9037 Tromsø / 77 64 40 00 / postmottak@uit.no / uit.no / org.nr. 970 422 528

UiT

NORGES
ARKTISKE
UNIVERSITET

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli fjernet, med mindre de allerede er brukt i publikasjoner.

Det er hentet inn tillatelse av skolens rektor og de aktuelle ansatte til å gjennomføre undersøkelsen. Prosjektet er også meldt inn til Norsk samfunnsvitenskapelige datatjeneste (NSD) som ivaretar personvernet i forskning ved Universitetet i Tromsø.

Dersom har spørsmål til studien, ta kontakt med Per Øystein Haavold epost per.oystein.haavold@uit.no. I studentprosjekt må også kontaktopplysninger til veileder/daglig ansvarlig påføres.

Samtykke til deltakelse i studien

Elevens navn: ____

□ Jeg samtykker i at bilder, lyd og korte videosekvenser der eleven deltar kan bli brukt i undervisning og presentasjoner. Dette innebærer også deltakelse i prosjektet.

□ Jeg samtykker i deltakelse i prosjektet.

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å delta

----
(Signert av foresatte, dato)

Kontaktinformasjon.
Per Øystein Haavold e-post: per.oystein.haavold@uit.no tlf. 77645587
Postboks 6050 Langnes, N-9037 Tromsø / 77 64 40 00 / postmottak@uit.no / uit.no / org.nr. 970 422 528

A.3 Samtykkeskjema elever over 15 år

UiT
NORGES ARKTISKE UNIVERSITET

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

"SUM: Coherence through inquiry based mathematics teaching"

Bakgrunn og formål
Målet med dette prosjektet er å bidra til utvikling av barn og unges matematikklæring og motivasjon for matematikk gjennom å integrere perioder med utforskende undervisning i matematikkundervisningen fra barnehage til universitet. Disse utviklingsaktivitetene skal foregå gjennom tre skoleår. Prosjektet drives av forskningsgruppen Matematikkdidaktikk ved UiT Norges arktiske universitet, institutt for lærerutdanning og pedagogikk med støtte fra Norsk forskningsråd.

Utvalget er rekruttert gjennom Norges arktiske studentsamskipnad, Troms fylkeskommune og Tromsø kommune. Hver deltakende skole/barnehage har valgt 2 – 4 lærere / barnehagelærere til å delta i prosjektet.

Hva innebærer deltakelse i studien?
Et fokusområde for prosjektet vil være overganger der det erfaringsmessig er utfordringer knyttet til elevers motivasjon og matematikklæring:

Barnehage => Barneskole => Ungdomstrinn => Videregående skole => Universitet

For hver av disse overgangene dannes en gruppe lærere/pedagoger og to forskere. Vi ønsker at det er med 2 lærere/pedagoger fra skole/barnehage. Deltakerne i disse gruppene vil, så langt det lar seg gjøre, følges over alle de tre periodene 17/18, 18/19 og 19/20. Hver av disse periodene skal deltakerne i en gruppe arbeide sammen med å utvikle, gjennomføre (i lærernes egne klasser eller barnehager) og evaluere 3 utforskende undervisningsforløp av en varighet på 5-10 skoletimer eller tilsvarende i barnehage. Disse undervisningsforløpene skal være i overensstemmelse med relevante læreplanmål på de aktuelle klassetrinnene eller mål fra Rammeplan for barnehage.

Forskerne i gruppa vil samle inn data gjennom både klasseromsobservasjoner, lyd- og bildeopptak, intervjuer og spørreskjema til lærere/pedagoger og elever/barnehagebarn, samt faglige tester for å dokumentere elevenes faglige utvikling.

Hva skjer med informasjonen om deg?
Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Det er bare medlemmer i forskningsgruppen som har tilgang til datamaterialet. Alt datamateriale lagres i låsbare skap ved UiT Norges arktiske universitet.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 31.12.2020. Etter dette blir datamaterialet anonymisert og videomaterialet slettet. Dersom det er gitt tillatelse til korte sekvenser til bruk i undervisning og konferanser vil disse bli lagret ved UiT.

Kontaktinformasjon.
Per Øystein Haavold e-post: per.oystein.haavold@uit.no tlf. 77645587
Postboks 6050 Langnes, N-9037 Tromsø / 77 64 40 00 / postmottak@uit.no / uit.no / org.nr. 970 422 528

UiT

NORGES
ARKTISKE
UNIVERSITET

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli fjernet, med mindre de allerede er brukt i publikasjoner.

Dersom du ønsker å delta eller har spørsmål til studien, ta kontakt med Per Øystein Haavold epost per.oystein.haavold@uit.no. I studentprosjekt må også kontaktopplysninger til veileder/daglig ansvarlig påføres.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i studien

□ Jeg samtykker i at bilder, lyd og korte videosekvenser kan bli brukt i undervisning og presentasjoner. Dette innebærer også deltakelse i prosjektet.

□ Jeg samtykker i deltakelse i prosjektet.

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å delta

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

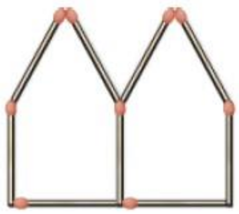
Kontaktinformasjon.
Per Øystein Haavold e-post: per.oystein.haavold@uit.no tlf. 77645587
Postboks 6050 Langnes, N-9037 Tromsø / 77 64 40 00 / postmottak@uit.no / uit.no / org.nr. 970 422 528

A.4 Test gruppe 1

Vedlegget viser oppgave 1 til 5 i testen elevene i gruppe 1 responderte på.

Oppgave 1.

Figuren viser to fyrstikkhus som er satt sammen.



a) Tegn hvordan det ser ut når fire fyrstikkhus er satt sammen.

b) Hvor mange fyrstikker er det når ti fyrstikkhus er satt sammen?

c) Kan du lage et uttrykk eller en oppskrift som sier hvor mange fyrstikker det er hvis man vet hvor mange hus det er? Vis og forklar hvordan du kom frem til svaret ditt.

Oppgave 2.

I denne oppgaven skal du vurdere om et utsagn er alltid sant, aldri sant, eller av og til sant.

Utsagn: Hvis vi ganger teller og nevner i en brøk med det samme tallet, så får vi en brøk som har høyere verdi.

Velg en av påstandene

Dette er alltid sant ◯

Dette er aldri sant ◯

Dette er av og til sant ◯

Vis og forklar du kom frem til svaret ditt.

Oppgave 3.

I denne oppgaven skal du ta utgangspunkt i bildet nedenfor. Start med å tenke over om du kan finne noe i bildet som handler om matematikk. Prøv å legge merke til så mye som du kan.

Lag så mange matematikkoppgaver som du kan til bildet. Du trenger ikke løse oppgavene.

Oppgave 4.

Under ser du en liste av tall. I denne oppgaven skal du ta utgangspunkt i denne lista og lage mengder av tall som har noen felles egenskaper.

En mengde er her en samling av tall fra lista. Lag så mange slike mengder som mulig. Du kan bruke hvert tall i flere mengder. Hver mengde skal ha flere enn to tall.

Her kan du være kreativ å lage så mange og forskjellige mengder som mulig. Forklar hva som kjennetegner hver mengde du har laget.

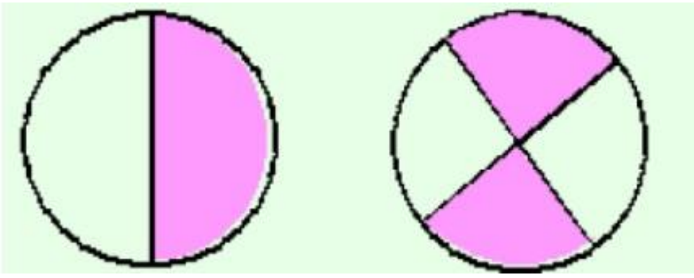
2, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17, 25, 36, 39, 49, 51, 60, 64, 79, 91, 97, 119, 121, 125, 136, 143, 150

For eksempel: (2, 3, 5, 7). Alle tallene er primtall.

For eksempel: (15, 51, 60, 150). Summen av hvert siffer i tallet er 6.

Oppgave 5.

En sirkel kan deles i like store deler på mange forskjellige måter. For eksempel:



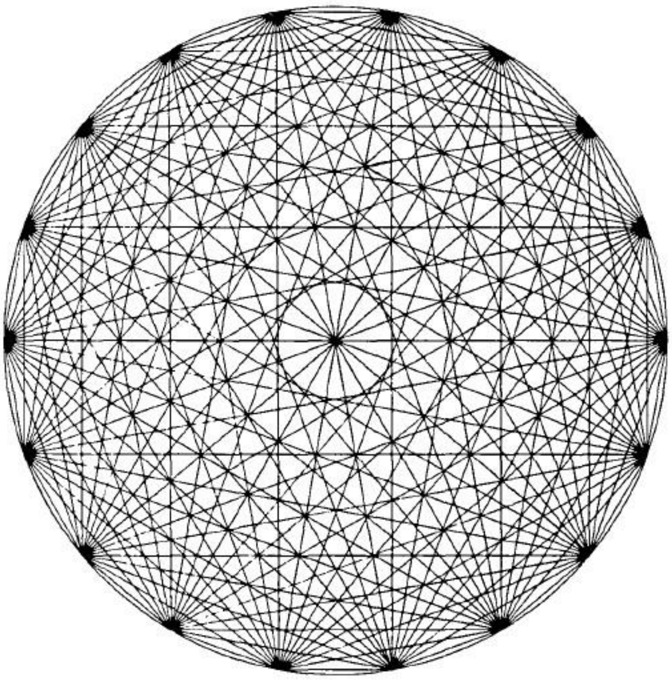
I denne oppgaven skal du dele inn et kvadrat i like store deler. Prøv å dele kvadratet inn i like store deler på så mange forskjellige måter som mulig.

A.5 Test gruppe 2

Vedlegget viser oppgave 1 og 2 i testen elevene i gruppe 2 responderte på. Oppgave 3, 4 og 5 er identisk med oppgavene i vedlegg A.4.

Oppgave 1.

I denne figuren er det 18 punkter på sirkelen. Alle punktene er knyttet sammen med rette linjer.



a) Tegn hvordan figuren vil se ut med fire punkter på sirkelen. Hvor mange rette linjer er det i figuren?

b) Hvor mange rette linjer er det når det er n punkter på sirkelen? Vis og forklar hvordan du kom frem til svaret ditt.

Oppgave 2.

I denne oppgaven skal du vurdere om et utsagn er alltid sant, aldri sant, eller av og til sant.

Vis og forklar hvordan du kom frem til svaret ditt.

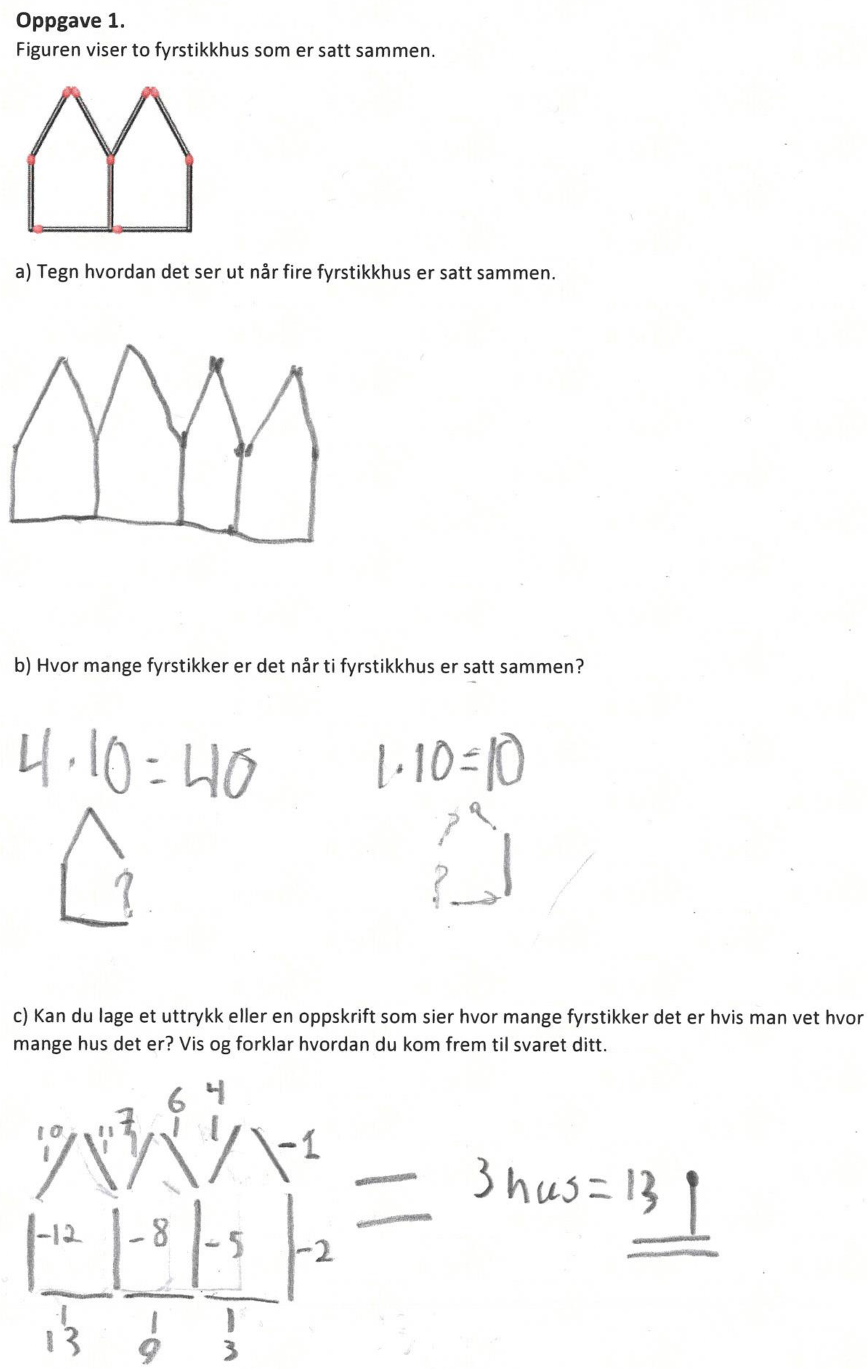
Utsagn: Hvis vi legger til det samme tallet i både teller og nevner i en brøk, så får vi en brøk med større verdi.

Vedlegg B: Kategorisering av elevbesvarelser

Vedlegget viser kategoriseringen av elevbesvarelser på konvergente oppgaver, jf. Balacheffs bevis-taksonomi.

B.1 Naiv empirisme

Eksempel på elevbesvarelse fra gruppe 1, kategorisert til naiv empirisme.



Oppgave 1.
Figuren viser to fyrstikkhus som er satt sammen.

a) Tegn hvordan det ser ut når fire fyrstikkhus er satt sammen.

b) Hvor mange fyrstikker er det når ti fyrstikkhus er satt sammen?

$4 \cdot 10 = 40$ $1 \cdot 10 = 10$

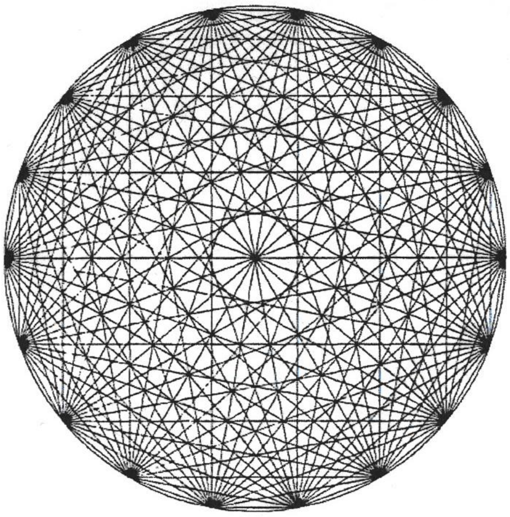
c) Kan du lage et uttrykk eller en oppskrift som sier hvor mange fyrstikker det er hvis man vet hvor mange hus det er? Vis og forklar hvordan du kom frem til svaret ditt.

= 3 hus = 13

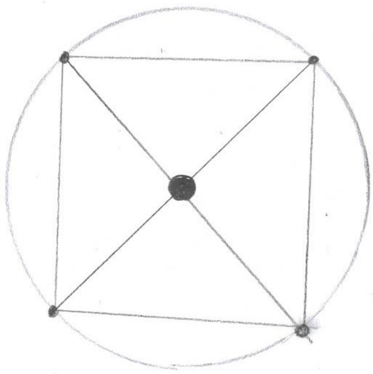
Eksempel på elevbesvarelse fra gruppe 2, kategorisert til naiv empirisme.

Oppgave 1.

I denne figuren er det 18 punkter på sirkelen. Alle punktene er knyttet sammen med rette linjer.



a) Tegn hvordan figuren vil se ut med fire punkter på sirkelen. Hvor mange rette linjer er det i figuren?



det er 8 rette linjer i figuren

b) Hvor mange rette linjer er det når det er n punkter på sirkelen? Vis og forklar hvordan du kom frem til svaret ditt.

$n = 4 \cdot 2 = 8$

det er dobbelt så mange rette linjer som punkter.

Eksempel på elevbesvarelse fra gruppe 1, kategorisert til naiv empirisme.

Oppgave 2.

I denne oppgaven skal du vurdere om et utsagn er alltid sant, aldri sant, eller av og til sant.

Utsagn: Hvis vi ganger teller og nevner i en brøk med det samme tallet, så får vi en brøk som har høyere verdi.

Velg en av påstandene

Dette er alltid sant ☒

Dette er aldri sant ○

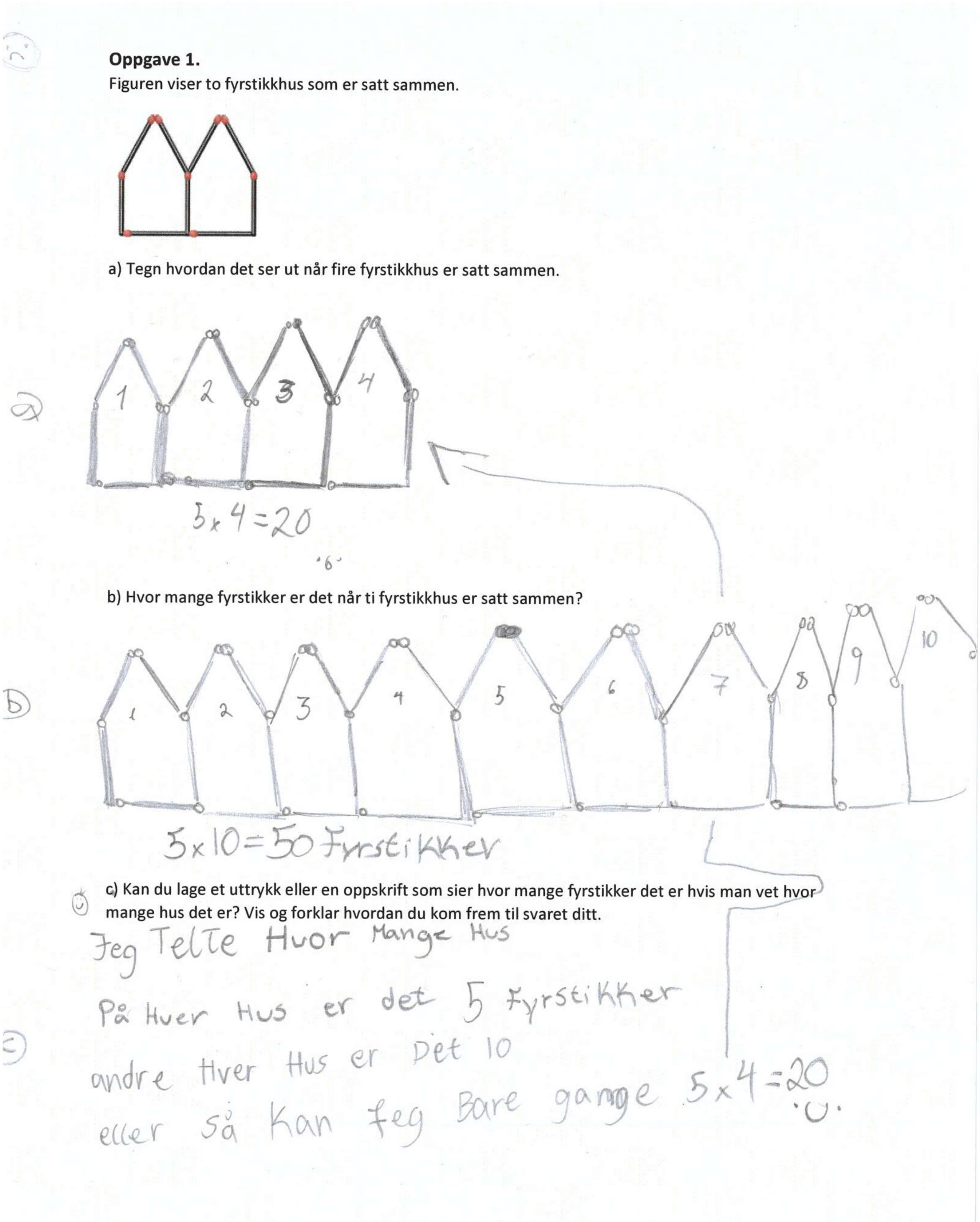
Dette er av og til sant ○

Vis og forklar du kom frem til svaret ditt.

f.eks: $\frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \underline{\underline{\frac{12}{15}}}$

B.2 Avgjørende eksperiment

Eksempel på elevbesvarelse fra gruppe 1, kategorisert til avgjørende eksperiment.



Oppgave 1.

Figuren viser to fyrstikkhus som er satt sammen.

a) Tegn hvordan det ser ut når fire fyrstikkhus er satt sammen.

1 2 3 4

5x4=20

b) Hvor mange fyrstikker er det når ti fyrstikkhus er satt sammen?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

5x10=50 Fyrstikker

c) Kan du lage et uttrykk eller en oppskrift som sier hvor mange fyrstikker det er hvis man vet hvor mange hus det er? Vis og forklar hvordan du kom frem til svaret ditt.

Jeg Telte Hvor Mange Hus

På Hver Hus er det 5 Fyrstikker

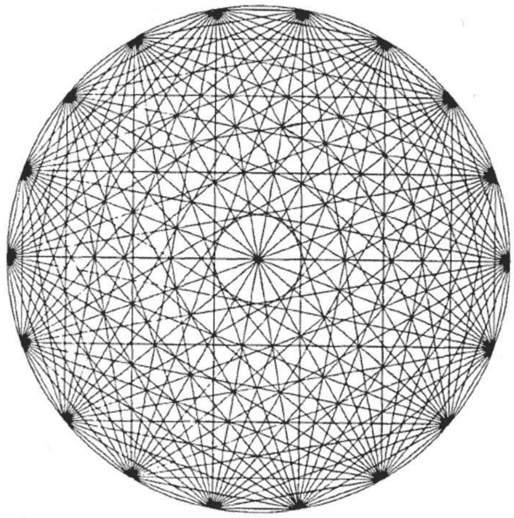
andre Hver Hus er Det 10

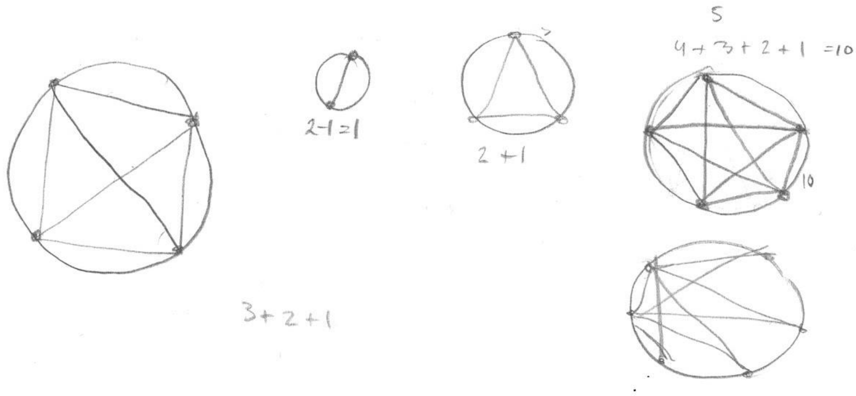
eller så Kan Jeg Bare gange 5x4=20

Eksempel på elevbesvarelse fra gruppe 2, kategorisert til avgjørende eksperiment.

Oppgave 1.

I denne figuren er det 18 punkter på sirkelen. Alle punktene er knyttet sammen med rette linjer.





$f(n)=(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)$ = antall linjer

Jeg prøvde å lage flere sirkler med 2, 3, 4, 5 og 6 prikker og for hver prikk man tegner linjer fra, så er det en linje mindre, helt til siste prikk hvor det bare er én linje å tegne

Eksempel på elevbesvarelse fra gruppe 1, kategorisert til avgjørende eksperiment.

Oppgave 2.

I denne oppgaven skal du vurdere om et utsagn er alltid sant, aldri sant, eller av og til sant.

Utsagn: Hvis vi ganger teller og nevner i en brøk med det samme tallet, så får vi en brøk som har høyere verdi.

Velg en av påstandene

Dette er alltid sant ○

Dette er aldri sant ☒

Dette er av og til sant ○

Vis og forklar du kom frem til svaret ditt.

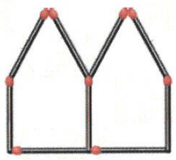
hvis du feks har: $\frac{2 \cdot 8}{2 \cdot 8} = \frac{16}{16}$ eller $\frac{9 \cdot 2}{10 \cdot 2} = \frac{18}{20}$

B.3 Generisk eksempel

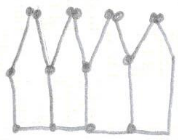
Eksempel på elevbesvarelse fra gruppe 1, kategorisert til generisk eksempel.

Oppgave 1.

Figuren viser to fyrstikkhus som er satt sammen.



a) Tegn hvordan det ser ut når fire fyrstikkhus er satt sammen.

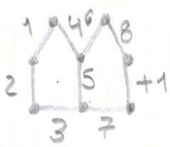


b) Hvor mange fyrstikker er det når ti fyrstikkhus er satt sammen?

Det er 41 fyrstikker når ti fyrstikkhus er satt sammen.

c) Kan du lage et uttrykk eller en oppskrift som sier hvor mange fyrstikker det er hvis man vet hvor mange hus det er? Vis og forklar hvordan du kom frem til svaret ditt.

Ett fyrstikkhus har fire fyrstikker.
Gang 4 med hvor mange hus det er og legg på 1 til slutt for å få med den siste veggen.



8+1=9

9 fyrstikker på 2 hus.

Eksempel på elevbesvarelse på oppgave 1 fra gruppe 2, kategorisert til generisk eksempel.

Summen av linjer i en sirkel med n punkter blir

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\dots+\underbrace{(n-(n-1))}_{1}+(n-n)$$

Hvis man tenker på det baklengst blir da summen:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i$$

Altså er summen av de naturlige tallene opp til n-1 lik antall linjer i sirkelen.

Hvis du feks. har n=4 punkter og tegner linjer fra hvert enkelt punkt vil du først ha 3 muligheter (n-1), så vil du ha 2 muligheter (n-2), så til slutt bare én (n-3), og i det siste punktet vil du ha null muligheter.

Det vil altså være $\sum_{i=1}^{n-1} i$ linjer i en sirkel med n punkter.

Eksempel på elevbesvarelse fra gruppe 1, kategorisert til generisk eksempel.

Oppgave 2.

I denne oppgaven skal du vurdere om et utsagn er alltid sant, aldri sant, eller av og til sant.

Utsagn: Hvis vi ganger teller og nevner i en brøk med det samme tallet, så får vi en brøk som har høyere verdi.

Velg en av påstandene

Dette er alltid sant ◯

Dette er aldri sant ⊗

Dette er av og til sant ◯

Vis og forklar du kom frem til svaret ditt.

Hvis man ganger teller og nevner med samme tall vil tallene endre seg, men vil altid ha samme verdi.

$$\frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{3}{15}$$

$$\frac{3 : 3}{15 : 3} = \frac{1}{5}$$

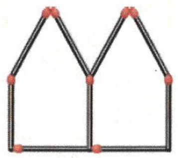
Samme verdi bare forskjellige tall.

B.4 Tankeeksperiment

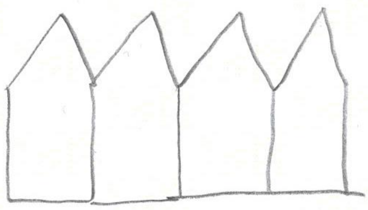
Eksempel på elevbesvarelse fra gruppe 1, kategorisert til tankeeksperiment.

Oppgave 1.

Figuren viser to fyrstikkhus som er satt sammen.



a) Tegn hvordan det ser ut når fire fyrstikkhus er satt sammen.



b) Hvor mange fyrstikker er det når ti fyrstikkhus er satt sammen?

$4x + 1$

$10 \cdot 4 + 1 = \underline{41}$ 41 fyrstikker i 10 fyrstikkhus

c) Kan du lage et uttrykk eller en oppskrift som sier hvor mange fyrstikker det er hvis man vet hvor mange hus det er? Vis og forklar hvordan du kom frem til svaret ditt.

Et hus har 5 fyrstikker, mens hvert hus som legges til har 4. Da er det antall hus ganger 4, pluss den 5. fyrstikken på hus 1.

$\underline{4x + 1}$

Eksempel på elevbesvarelse fra gruppe 1, kategorisert til generisk eksempel.

Oppgave 2.

I denne oppgaven skal du vurdere om et utsagn er alltid sant, aldri sant, eller av og til sant.

Utsagn: Hvis vi ganger teller og nevner i en brøk med det samme tallet, så får vi en brøk som har høyere verdi.

Velg en av påstandene

Dette er alltid sant ○

Dette er aldri sant ⊗

Dette er av og til sant ○

Vis og forklar du kom frem til svaret ditt.

Hvis du ganget teller og nevner utvider man den bare. Brøken får altså ikke høyere verdi!

Vedlegg C: Utregning av divergent produksjonskår

I kapittel 3.4.2 er det beskrevet hvordan divergent produksjonspoengene ble beregnet ved produktet av fleksibilitetskåren og originalitetskåren. Utregningen blir oppsummert i formlene under, der DP=divergent produksjon, F=fleksibilitet, O=originalitet, i=løsning og N=antall løsninger.

$$DP = F \times O = \sum_{i=1}^{N} F_i \times \sum_{i=1}^{N} O_i$$

$$\text{der } \mathrm{F_i} = \begin{cases} 10, & \text{Ny kategori} \\ 1, & \text{Samme kategori, ulik representasjon} \\ 0.1, & \text{Samme kategori, samme representasjon} \end{cases}$$

$$der\ O_i = \begin{cases} 10, & \text{Andel svar} < 15\ \% \\ 1, & 15\ \% \leq \text{Andel svar} \leq 40\ \% \\ 0.1, & \text{Andel svar} > 40\ \% \end{cases}$$

For å regne ut den totalt divergent produksjonskåren ble div.skåren til oppgave 3, 4 og 5 summert sammen.