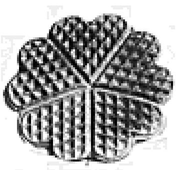
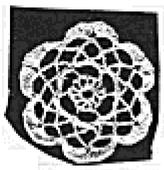
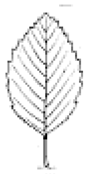
EUREKA
Digital
11-2008

SYMMETRI

John Perander
Høgskolen i Tromsø, AFL

EUREKA DIGITAL 11-2008
ISSN 0809-8360
ISBN: 978-82-7389-137-2

Forord

Dette essay om *symmetri* henvender seg ikke bare til lærere i grunnskolen. Jeg har forsøkt å gjøre stoffet så tilgjengelig som mulig for enhver leser. Essayet har da blitt mer omfattende i sidetall enn det ville blitt med mer utstrakt bruk av matematikk.

Til vanlig oppfatter en symmetri for en figur slik at det finnes en linje eller plan som kan dele figuren i to likt utseende deler som er hverandres speilbilder (bilateral symmetri). En mer generell oppfatting av symmetri utvider dette begrepet. I tillegg til speiling vil da også dreiing (rotasjon) bli nyttet.

Etter en kort innledning tar en for seg begrepet symmetri, både for plane figurer og i en viss grad også for romlige legemer. Hovedvekten er lagt på å beskrive symmetri i plane ornamenter og mønstre, slik en ser det i emblemer, bånd og tapeter. Det er gitt anvisninger på aktiviteter som er aktuelle i undervisningssammenheng. Siste del er knyttet til bruk av datamaskin for frembringelse av mønstre. Det er gitt prosedyrer og program i programmeringsspråket Norlogo til det formålet.

Det vises til litteraturlisten for mer detaljerte studier av emnet.

Tromsø lærerhøgskole, januar 1991

John Perander

Manuskriptet *Symmetri* av min pensjonerte kollega John Perander, ble første gang tilrettelagt og publisert av undertegnede på Internett i 1999. Det brukes nå flere steder i landet i forbindelse med matematikkurser i lærerutdanningen, og gjøres herved tilgjengelig i vår skriftserie Eureka digital.

Høgskolen i Tromsø, november 2008

Steinar Thorvaldsen
(førsteamanuensis)

Innledning
Vi bruker ordet "symmetri" i mange sammenhenger. Oftest mener vi da at det er en viss balanse eller likevekt tilstede i de ting vi omtaler. Fysikeren kan tenke på at det er balanse mellom høyre- og venstredreiinger i partikler, at mengde av positive og negative ladninger er like, at visse indre egenskaper i rom og materie bevares tross ytre forandringer. Kjemikeren kan tenke på balansen i orienteringen av atomer i et molekyl, biologen på den radiære balansen i planter og dyr, eller den to-deling en har av kroppen, f.eks. i høyere dyrearter (bilateral balanse).

Komponisten streber etter struktur og balanse i musikken, både i det tematiske og bearbeidete innhold. Selve notebildet kan ofte ha en visuell, ornamental balanse. Den bildende kunstner eller håndverker snakker om likevekt i fargevalg og plasseringer, eller gjentar elementer til et balansert hele i et ornament eller et mønster.

I matematikk brukes symmetribegrepet i mange emner. I motsetning til daglig bruk av begrepet 'symmetri' kan vi her for hvert emne gi et presist innhold i begrepet. Allment kan vi si at i matematikk har vi symmetri når vi ved forandringer som har med bytte av symboler for størrelser, eller visse bevegelser av symboler (f.eks. den tegnete figur for det abstrakte begrepet 'kvadrat') ikke forandrer noe på resultatet. F.eks. vil bytte av symbolene x og y i likningen $x^2 + y^2 = 25$ ikke forandre likningen. Dreier du et kvadrat (eg. det tegnete kvadrat) 90 grader om kvadratets midtpunkt, forandres ikke kvadratets plassering - "kvadratet faller i seg selv".
Når ting ikke forandres under ytre påvirkninger, snakker vi om **invarians**. Invarians blir derfor et av stikkordene når vi snakker om symmetri. Et annet stikkord er **gjentakelse (iterasjon)**. En helhet bygges da opp av en enhet ved systematisk å gjenta denne et antall ganger. Gjentakelsen skjer da ved bestemte prosesser. La oss se på et kvadrat.

Symmetriene i kvadratet. Symmetribegrepet
Roterer du kvadratet (fig. 1) 90^o (90 grader) om midtpunktet O, faller kvadratet i seg selv (inntar sin gamle plass). Det samme skjer om du dreier 180^o, 270^o, 360^o eller 0^o. Det samme skjer også om du speiler kvadratet i et speil plassert langs en linje gjennom midtpunktene av motstående sider, eller langs en linje gjennom motstående hjørner (diagonalene). Vi har altså invarians, i den forstand at resultatet, nemlig plasseringen av kvadratet i planet ikke forandres. Helheten er invariant. Men punktene i kvadratet, både på omkretsen og inne i kvadratet, skifter plass, bortsett fra midtpunktet, og bortsett fra når du dreier 0^o eller 360^o. I det siste tilfellet vil også alle punktene falle i seg selv.

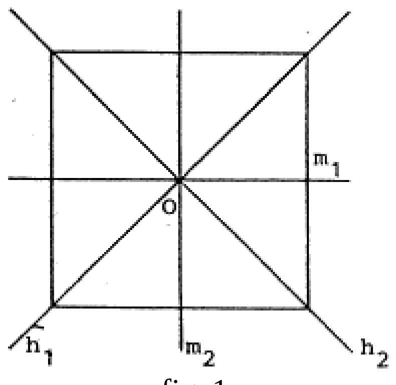


fig. 1

I fig. 2. har vi gitt et linjestykke AE. Vi vil la dette være det elementet (motivet) som vi ved gjentakelse vil bruke for å lage et kvadrat med sidelengde lik den dobbelte lengden av linjestykket. Vi har tegnet inn to linjer som skal være en diagonallinje h og den horisontale midtlinjen m i kvadratet. Linjene danner en vinkel på 45^o med hverandre, og skjærer hverandre i punktet O. Vi speiler nå linjestykket AE om h og får AF. Vi speiler så den figuren vi nå har, bestående av AE og AF om m og får linjestykkene ED og DG. Speiler vi resultatet om h, får vi i tillegg FB og BH. En ny speiling om m vil gi kvadratet ABCD. De to prosessene, speilingene om m og h, kan altså skape (generere) kvadratet.

Du kan **se** denne genereringen slik: Plassér to speil, langs linjene m og h, slik at de møtes i O. Se inn i speilvinkelen. Du vil da se kvadratet!
Du kan skape kvadratet av motivet AE på flere alternative måter. Her er en av av disse: Speil om h slik at du får AF, drei så 90^o om O, i klokkeretningen, f.eks., drei på nytt 90^o og nok en gang 90^o. Du har nå kvadratet. Prosessene nå er altså speiling om h og rotasjon 90^o om 0.

Den minste delen du kan bruke for å bygge kvadratet er halvparten av kvadratsiden, og ikke hele siden.

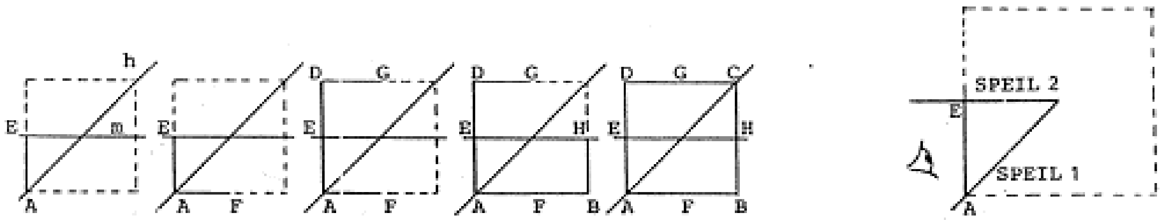


fig. 2

Dette essay om symmetri handler om geometrisk symmetri slik vi har sett det i eksemplet med kvadratet i fig. 1. En figur har symmetri dersom det finnes prosesser vi kan utføre slik at figuren som helhet bevarer sin plassering. Det er nettopp disse prosessene som er symmetriene i figuren! Symmetri er da et dynamisk begrep, siden det er en prosess som utføres.

Vi har sett at prosessen kan være rotasjon (dreiing) eller speiling. Vi skal senere se at vanlig **parallellforskyvning** (i skolen kalt forskyvning) også kan være en prosess som gjør en figur invariant. Det er klart at en parallellforskyvning ikke kan være en slik prosess for en figur av endelig utstrekning, siden en slik forskyvning fører figuren til en ny posisjon. Men i figurer med uendelig utstrekning kan forskyvning gi invarians. I tillegg har vi nok en prosess som kan være en symmetri - **glidespeiling**. Denne vil vi behandle senere.

Disse prosesser vil vi betegne som **bevegelser**. Det er åpenbart når det gjelder parallellforskyvning og rotasjon. Parallellforskyvning og rotasjon er nettopp de menneskelige bevegelsesmåter. Men også speiling er en menneskelig aktivitet, og vi legger også den inn i begrepet 'bevegelse'.

Med en symmetri i en figur mener vi en bevegelse som gjør at figuren er invariant, det vil si at den har den samme posisjon etter at bevegelsen er utført. Annerledes uttrykt: Figuren faller i seg selv.

Denne definisjonen av geometrisk symmetri er presis og kan anvendes utenom matematikk. Og det er selve anvendelsen innen ornamental kunst som er det sentrale her. Anvendelse betyr at vi kan analysere en figur for å finne symmetriene i den, og gi anvisninger på hvordan vi ved syntese kan skape ornamentale design og mønstre med basis i et gitt grunndesign, slik vi har skapt kvadratet i fig. 2.

La oss gå tilbake til kvadratet i fig. 1 og presisere symmetriene der. Vi har sett at visse rotasjoner om O får kvadratet til å falle i seg selv. Disse rotasjonene er da symmetrier i kvadratet. La oss velge klokkeretningen som dreieretning. Du kan da dreie kvadratet 90, 180, 270 eller 360 grader. Dette er symmetrier. Dreier du 0^o, har du også en symmetri. Denne symmetrien er den samme som den symmetrien dreiing 360^o gir. Årsaken til det er at alle punktene i kvadratet får samme posisjon ved de to dreiingene. Vi velger da å bruke 0^o for å beskrive denne symmetrien. De andre dreiingene vil gi forskjellige omplasseringer av punktene. Det er nok å studere hjørnenes omplassering for å se det. Vi symboliserer rotasjon med stor, fet **R**. Symbolene for rotasjonssymmetriene i kvadratet kan da velges til $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_{90}$, $\mathbf{R}_{180}$ og $\mathbf{R}_{270}$.

De speilingene som er symmetrier er speilingene om linjene m_1, m_2, h_1 og h_2. Vi bruker da symbolene $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{H}_1$ og $\mathbf{H}_2$ om disse symmetriene. (Legg merke til at symbolet m_1 er et statisk symbol, som bare betegner en linje, mens $\mathbf{M}_1$ er et dynamisk symbol, som betegner prosessen "speiling om m_1").

I fig. 3. er tegnet de 8 resultater av symmetriene. Legg merke til hjørnenes omplasseringer.

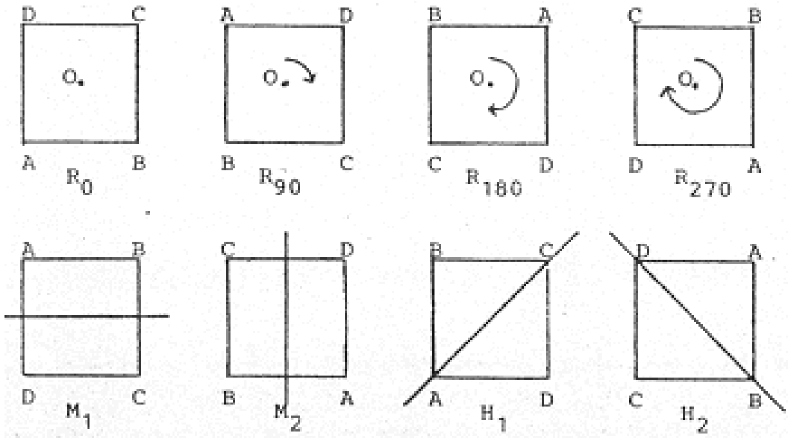


fig. 3

Rotasjonene kan utføres med et konkret kvadrat slik at hjørnene får plasseringene slik som i fig. 3. Du kan ikke konkret utføre speilingene ved å bevege kvadratet mens det ligger i planet. Men du kan løfte kvadratet ut av planet, snu det passende, og legge det tilbake på plass med baksiden opp slik at hjørnene får de plasseringene de skal ha.

Om kvadratet dreies 90^o i klokkeretningen, så får punktene i kvadratet samme plassering som når du dreier 270^o mot klokken. Disse rotasjonene gir da bare 2 uttrykk for den samme symmetrien (analogt med at 2+3 og 4+1 er to måter å symbolisere samme tall på). Tilsvarende gir som nevnt rotasjonene 0^o og 360^o den samme symmetrien.
$\mathbf{R}_0$ er spesiell. Det er den symmetrien der alle punkter er **fikspunkter**, det vil si de faller i seg selv. Denne symmetrien er den **uekte** symmetrien (identitetssymmetrien). En slik symmetri har alle figurer, uansett hvor usymmetrisk figuren ser ut. Vi regner likevel den uekte symmetrien med i tallet på symmetrier, slik at kvadratet da har 8 symmetrier - 4 rotasjoner og 4 speilinger.

Dette eksemplet, der vi har analysert kvadratets symmetrier, gir oss en arbeidsmetodikk for en slik analyse generelt. Har vi en figur i planet med **endelig** utstrekning, søker vi etter de rotasjoner og de speilinger som får figuren til å falle i seg selv. Andre bevegelser enn de som rotasjoner og speilinger forårsaker, kan ikke gi symmetrier for en endelig figur.
Rotasjonene finnes ved først å finne det eventuelle midtpunktet i figuren. Når figuren dreies, med midtpunktet som sentrum, vil vi finne de vinkler som gir symmetriene.
Speilingene finnes ved å finne det knippet av linjer gjennom midtpunktet der hver linje er en speilakse. "Likhet" mellom to figurer kan være så mangt. Nærmest ligger det å si at to figurer er like når de er kongruente, det vil si at de kan dekke hverandre. Men vi kan også snakke om at 2 figurer er like i formen uten å være like i størrelse (likeformete figurer). To figurer kan være like med hensyn til areal, uten at formen er den samme. Her er det viktig å være klar over hva det ligger i "likhet" med hensyn til symmetri. Figurene i fig. 4 ser ganske forskjellige ut. De 3 første er dog symmetrilike. Alle 3 har et midtpunkt. Det er 4 rotasjoner som gir symmetrier, med de samme vinkler som kvadratet, og det er 4 speilinger som gir symmetrier. Knippet av speilakser er det samme, og det samme som i kvadratet. Disse 3 figurene er altså symmetrilike med kvadratet. Den siste figuren avviker. Den har rettnok et midtpunkt, og den har 4 rotasjonssymmetrier som i kvadratet, men har ingen speilsymmetrier.

Merk: Mange av figurene som er brukt her er kopier av utskrifter laget med datamaskin i programmeringsspråket LOGO. Utskriftene til printeren vil forstyrre proporsjonene noe, slik at f.eks. et kvadrat vil være noe flatklemt.

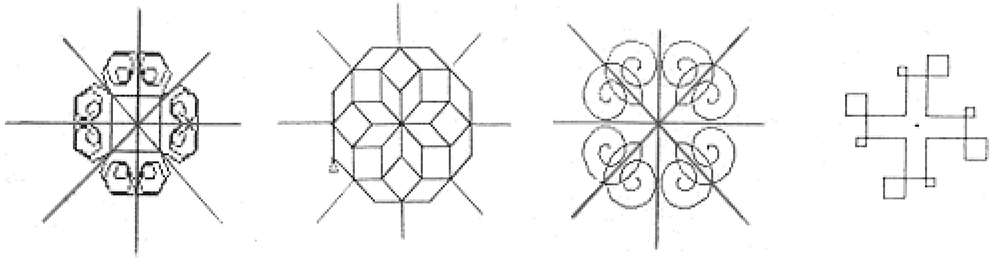


fig. 4

Det er et faktum, at dersom en figur har nøyaktig 4 rotasjonssymmetrier, så må rotasjonene være på 0^o, 90^o, 180^o og 270^o om et midtpunkt i figuren, altså de samme symmetrier som kvadratet har. Videre, om en figur har nøyaktig 4 speilsymmetrier, så må speilaksene være orientert slik som i kvadratet. De må skjære hverandre i midtpunktet, og to naboakser må danne en vinkel på 45^o med hverandre.

Har en figur et visst antall med speilsymmetrier, f.eks. 5, så må den også ha 5 rotasjonssymmetrier. Har en figur speilsymmetri, så må den også ha rotasjonssymmetri. Men det motsatte gjelder ikke. En figur kan nemlig ha bare rotasjonssymmetrier.

Emblemer

Med et 'emblem' vil vi her mene et plant ornament med endelig utstrekning. Fig. 5 viser et utvalg av naturlige og artistiske ornamenter. Du vil sikkert klare å finne de rotasjoner og eventuelle speilinger som er symmetriene for hvert av disse emblemer. Du vil også kunne se hvilke som er symmetrilike med hverandre.

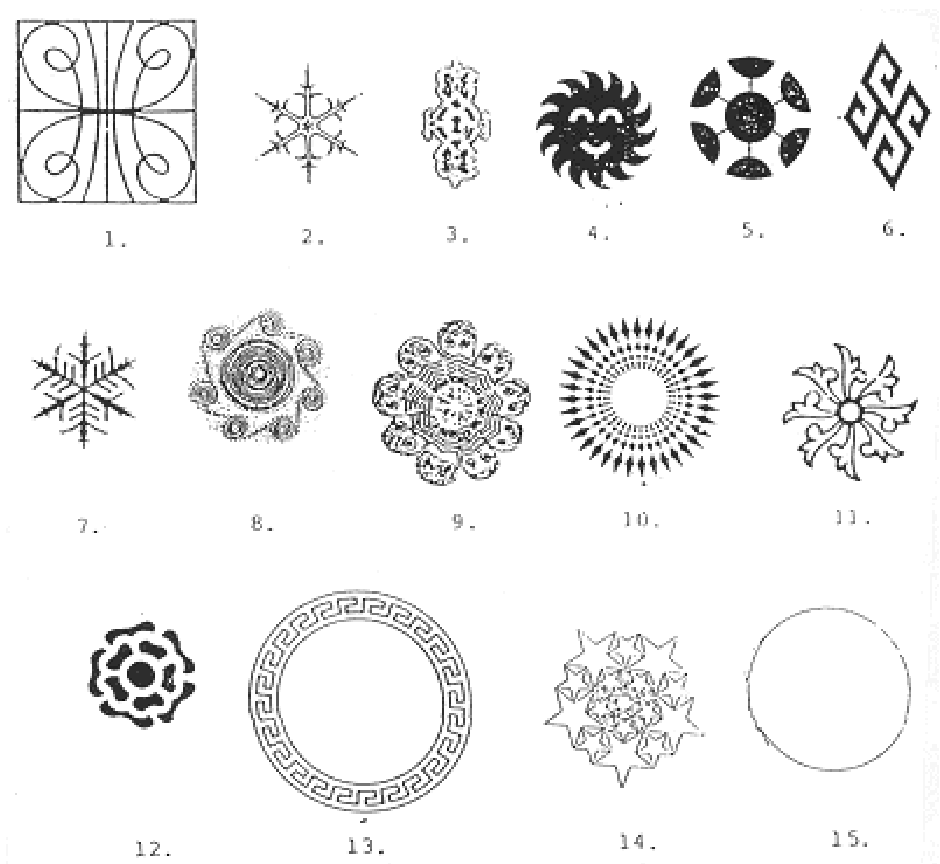


fig. 5

Vi vil i det følgende strukturere analysen av emblemer ved å bruke 2 sett med figurer, såkalte mal-figurer, som basis. Disse figurene (fig. 6) er alle bygget opp av et usymmetrisk, enkelt element (motiv). Motivet har form som en speilvendt **L**.

(1) **C - symmetriene**

C - figurenes symmetrier er rotasjoner. Speilsymmetrier mangler. Ta figuren $\mathbf{C}_6$, f.eks. Den har 6 rotasjonssymmetrier. Du kan dreie 0, 60, 120, 180, 240 eller 300 grader for å få figuren til å falle i seg selv. Midtpunktet i figuren er rotasjonssentrum. Symbolet $\mathbf{C}_n$ betyr en figur med n haker, og da med n rotasjonssymmetrier. Du kan da dreie 0, $360^o/n$, $2 \cdot 360^o/n$,... osv. for å få figuren til å falle i seg selv.
Symbolet C kommer av cyclic - ring eller sirkel.

(2) **D - symmetriene**

D - figurene har både rotasjons- og speilsymmetrier, like mange av hver. Figuren $\mathbf{D}_6$ har 6 rotasjonssymmetrier, nemlig de samme som $\mathbf{C}_6$. Men nå har vi også 6 speilsymmetrier. 3 speilakser går gjennom "ekene", 3 midt mellom ekene. Symbolet $\mathbf{D}_n$ betyr en figur med n "dobbelthaker". Den har n rotasjonssymmetrier og n speilsymmetrier, tilsammen 2n symmetrier.

Symbolet D kommer av dihedral - to plan. Du kan f.eks. tenke deg to speilplan gjennom to nabo-speilakser i en slik figur. Ser du inn i vinkelen mellom speilene, vil du se figuren.

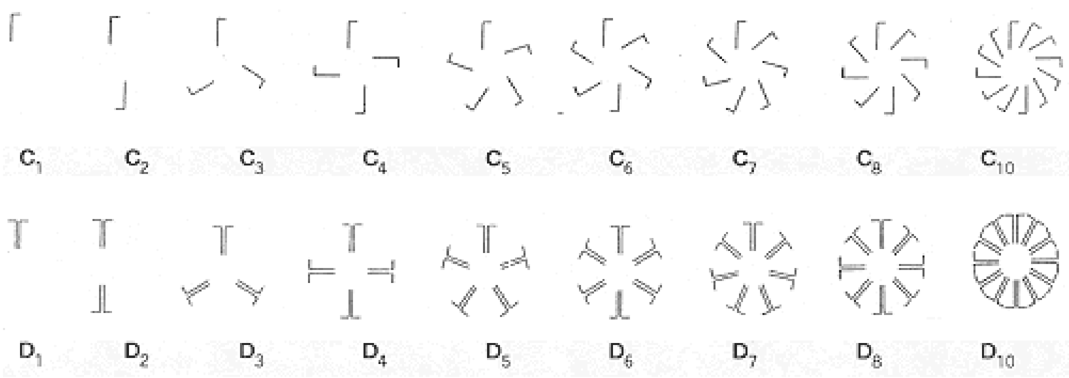
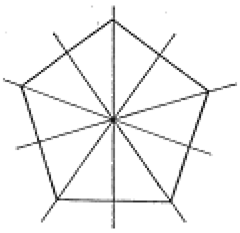


fig. 6. Noen C - og D - figurer.

Siden n i $\mathbf{C}_n$ og $\mathbf{D}_n$ kan være et hvilket som helst av de hele tallene 1, 2, 3, ... osv., finnes det uendelig mange symmetriforskjellige emblemer.

En regulær mangekant er en mangekant der alle sider er like lange og alle vinkler like store. Symmetriene i regulære mangekanter er D - symmetriene. En regulær 5-kant er en $\mathbf{D}_5$, en regulær n-kant en $\mathbf{D}_n$. (Fig. 7).



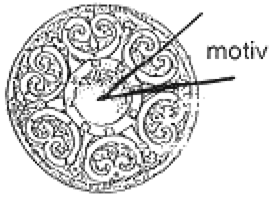


fig. 7 og fig. 8

En symmetrianalyse av et gitt emblem kan nå kort utføres ved å vise til malene. Faktisk er $\mathbf{C}_6$ en klassebetegnelse, nemlig klassen av alle emblemer med de samme symmetrier som vår mal-figur $\mathbf{C}_6$. Når et emblem tilhører en bestemt klasse, uttrykker vi det ved å gi klassebetegnelsen. Således vil fig. 5.5 være $\mathbf{D}_6$, og fig. 5.13 være $\mathbf{C}_{24}$. Fig. 5.15 symboliseres **D** .

Med litt trening vil klassifiseringen gå fort og greitt. Men i analysen ligger det også å få tak i motivet, det minste elementet som ved gjentakelse bygger opp emblemet. Gjentakelsen skjer ved å rotere eller også å speile. I fig. 8 (forrige side) er motivet markert ved innholdet i sektoren.

Når en skal lage et emblem kan en i prinsippet gjøre slik:

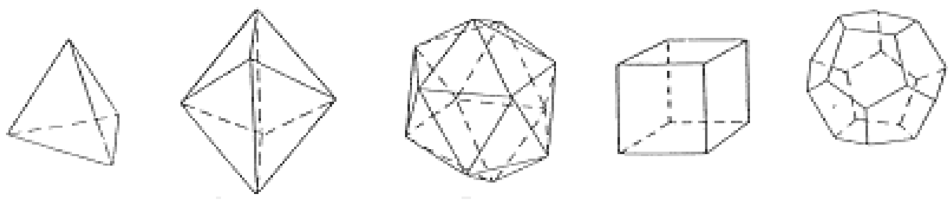
1. Lag et motiv.
2. Dersom emblemet skal være et **D** - ornament, så velg en speilakse og speil motivet. Motivet og speilbildet av det utgjør en enhet som vi vil kalle for **temaet**
3. Velg et rotasjonssentrum O.
4. Velg en minste dreievinkel u.
5. Drei motivet eller temaet vinkelen u om O. Gjenta denne dreiingen til du kommer helt rundt.

I praksis vil en ofte først markere vinkelen u for en C - figur eller u/2 for en D - figur, og så fylle vinkelen med motivet. I fig 8 er $u = 60^o$, og $u/2 = 30^o$
Den tekniske utfordring det er å kopiere motivet kan løses på forskjellig vis, uten at vi kommer nærmere inn på dette her.

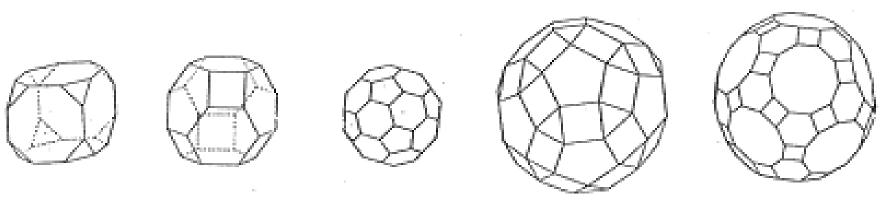
Valget av vinkelen u er selvsagt avhengig av hva slags symmetrier du vil ha. Skal emblemet ha 5 rotasjonssymmetrier må vinkelen u velges lik $360^o/5 = 72^o$.
Resultatet av denne prosessen er først og fremst avhengig av motivet. Men de andre valgene er også viktige i estetisk henseende.
Fig. 9 viser eksempler på syntese av motiv til emblem.

fig. 9

Symmetriene i romlegemer. Eskeprinsippet
Ornamenter og mønstre slik vi opplever de til daglig er oftest 2-dimensjonale. Men symmetribegrepet opplever vi også i 3-dimensjonale figurer. Det utvalg av geometriske romlegemer vi ser på fig. 10 gir oss intuitivt inntrykk av balanse og symmetri.



De 5 regulære polyedrene: Fireplanlegemet (tetraederet), åtteplanlegemet (oktaederet), tjueplanlegemet (ikosaederet), seksplanlegemet (heksaederet, terningen) og tolvplanlegemet (dodekaederet).
Et **regulært** polyeder er begrenset av en sort regulære polygoner (mangekanter).



5 av de mulige 13 semiregulære polyedrene. Et **semiregulært** polyeder er begrenset av 2 eller flere sorter regulære polygoner.

fig. 10

Fireplanslegemet (tetraederet) i fig. 11 avgrenses av 4 regulære trekanter. La oss først se om vi kan foreta rotasjoner slik at tetraederet faller i seg selv. Rotasjoner i rommet skjer ved å dreie gitte vinkler om gitte akser. La dreiingen skje om aksen A - A gjennom hjørnet 4 vinkelrett på hjørnets motstående trekant. La dreiingen være på på 120^o med angitt dreieretning. Da vil tetraederet falle i seg selv. Hjørnet 1 faller i hjørnet 2, 2 i 3, 3 i 1 og 4 i 4. Altså er denne rotasjonen en symmetri for tetraederet. Vi kan også dreie om den samme aksen 0^o eller 240^o. En dreiing på 360^o er det samme som dreiing 0^o.

Vi har altså ved å bruke A - A funnet 3 symmetrier, dreiing 0^o, 120^o eller 240^o. Men vi kan også legge slike akser gjennom de tre andre hjørnene i tetraederet. Vi får f.eks. 3 symmetrier ved å dreie om aksen B - B. Men dreiing på 0^o gir samme symmetri om vi bruker A - A eller B - B som akse, siden hjørnene ikke skifter plass! Dette er den uekte symmetrien i tetraederet. Dreiing om B - B gir altså 2 nye symmetrier i tillegg til de 3 som dreiing om A - A gir. Tilsammen har vi nå funnet 3 + 2 + 2 + 2 = 9 symmetrier.

Det er 3 akser til som er symmetriakser. En akse M - M gjennom midtpunktene av sidene 1 - 4 og 2 - 3 er en av disse. Dreier du 180^o om denne aksen vil tetraederet falle i seg selv. Hjørnene 1 og 4 vil nemlig bytte plass, det samme vil 2 og 3. Dreier du 0^o eller 360^o om M - M vil også nå tetraederet falle i seg selv. Men hjørnenes plassering beholdes, slik at du ikke får noen ny symmetri ved disse dreiingene. Dette er den uekte symmetrien som dreiing 0^o om A - A gir.
Tetraederet har 6 sider. Du kan gruppere de i 3 par motstående sider. Aksen M - M går gjennom midtpunktene av et par slike sider, og har gitt oss en ny symmetri. Det samme vil skje for akser som velges tilsvarende i forhold til de 2 andre par av motstående sider. Tilsammen har vi nå funnet 9 + 3 = 12 rotasjonssymmetrier i tetraederet. Det er ikke mulig å finne andre akser som gir symmetrier.

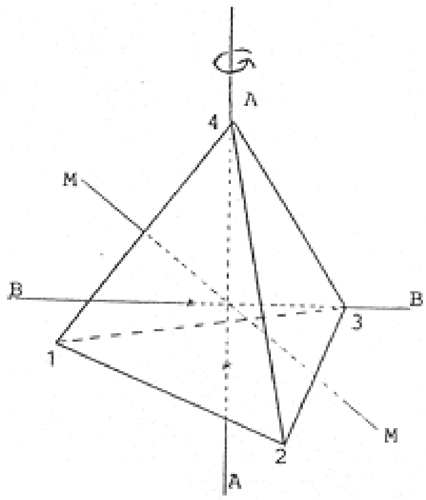


fig. 11

La oss se om det finnes speilsymmetrier. Vi må da lete etter speilplan. Et plan gjennom 4 og 3 og midtpunktet på siden 1-2 kan være et slikt plan. Hjørnene 4 og 3 faller i seg selv, mens 1 og 2 bytter plass. Vi har altså en symmetri. Det er ikke vanskelig å finne ytterligere 5 slike speilplan, slik at vi tilsammen har 6 speilsymmetrier.

Men det er en viktig ting: Vi kan ikke konkret utføre disse speilingene. Du kan ikke manøvrere tetraederet slik at hjørnene 4 og 3 beholder plassen og 1 og 2 bytter plass! Det var faktisk annerledes for speilsymmetriene i kvadratet. Vi kunne utføre disse ved å ta kvadratet ut i rommet, snu det og legge det tilbake med baksiden opp. Vi regner derfor ikke med speilingene i tetraederet som virkelige (reelle) symmetrier.
Tilsvarende gjelder for ethvert romlegeme. De reelle symmetriene for romlegemer er alle rotasjonssymmetrier.

Vi konkluderer med at tetraederet har 18 symmetrier. Av disse er det 12 reelle symmetrier (rotasjonssymmetriene) og 6 imaginære (speilsymmetriene).

Når du skal finne rotasjonssymmetriene for romlegemer gjør du dette:

1. Finn rotasjonsakser som kan være symmetriakser.
2. Finn de vinklene du må dreie om en slik akse for å få legemet til å falle i seg selv.

En rett linje er bestemt når vi vet to punkter som linja skal gå gjennom. Kandidater til symmetriakser kan være linjer gjennom par av motstående hjørner, par av midtpunkter i motstående sider, par av midtpunkter i motstående flater eller en parkombinasjon av et hjørne, sidemidtpunkt eller flatemidtpunkt. Når det gjelder antallet på symmetrier må vi passe på at vi ikke teller den uekte symmetrien mer enn en gang.
Du kan prøve deg på terningen. Den har tilsammen 24 reelle symmetrier. Finn disse. Som du sikkert har sett er det ikke lett å finne symmetriaksene i et romlegeme på en tegning av legemet. Du bør derfor ta for deg en konkret terning når du analyserer den.

Antallet reelle symmetrier i et legeme kan du finne på forhånd, uten å angi hvilke symmetrier legemet har. Et rektangulært postkort kan puttes inn i konvolutten på 4 forskjellige måter. Et kvadratisk kort i en kvadratisk konvolutt på 8 måter. Men 4 og 8 er nettopp tallet på symmetrier i rektanglet og i kvadratet.

Fig. 12 viser en $\mathbf{C}_3$ - og en $\mathbf{D}_3$ - figur lagt ned i emballasje av samme form. Det er lett å se at du kan legge figurene ned i eskene på 3 og 6 måter. De 3 måtene for $\mathbf{C}_3$ svarer til rotasjonssymmetriene. For $\mathbf{D}_3$ får du 3 måter i tillegg når du tar opp figuren, snur den og legger den ned i esken med baksiden opp. Dette svarer til speilsymmetriene.

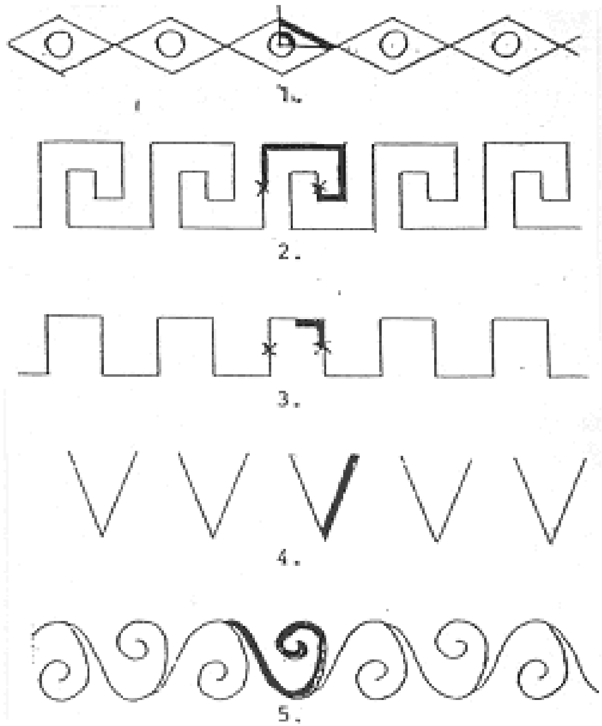
fig. 12

> **Eskeprinsippet: Antallet reelle symmetrier for et legeme er lik antallet måter legemet kan plasseres på i en eske som passer til legemet.**

Eskeprinsippet gjelder også for romlegemer. Ta terningen, f.eks (fig 10). Legg den ned i en terningformet eske. Terningen har 6 flater, slik at det er 6 muligheter for den flaten som skal være øverst. Men den øverste flaten kan orienteres på 4 forskjellige måter i forhold til esken. Altså vil du få $6 \cdot 4 = 24$ måter som terningen kan legges i esken på.
Dersom du bruker eskeprinsippet på oktaederet og dodekaederet i fig. 10 vil du finne at oktaederet har 24 og dodekaederet 60 symmetrier. Prøv også å finne hvilke symmetrier legemene har.

Bånd

I praksis vil et bånd på en tekstil (en bord) eller et båndmønster brukt i andre sammenhenger være en endelig, plan stripe med en gjentatt ornamental figur. **Men vi vil i teoretisk sammenheng tenke oss stripen forlenget i det uendelige i begge ender**. Fig. 13 viser eksempler på noen enkle bånd.



Som ved endelige ornamenter vil en symmetri for et bånd være en flytting av båndet som får det til å falle i seg selv. Slike flyttinger kan, som ved emblemer, være rotasjoner eller speilinger. I tillegg kan vi for uendelige bånd alltid **parallellforskyve** båndet i båndets lengderetning slik at det dekker seg selv.
Likeledes kan vi for bestemte båndtyper kombinere en parallellforskyvning og en speiling slik at båndet faller i seg selv. Å kombinere vil her si at vi først parallellforskyver båndet en viss lengde, for deretter å speile det om midtlinjen i båndets lengderetning. Fig. 13.5 viser et slikt bånd. En slik sammensatt bevegelse av en parallell-forskyvning og en speiling kaller vi for en **glidespeiling.**

> **I et båndmønster kan symmetriene være parallellforskyvninger, rotasjoner, speilinger eller glidespeilinger.**

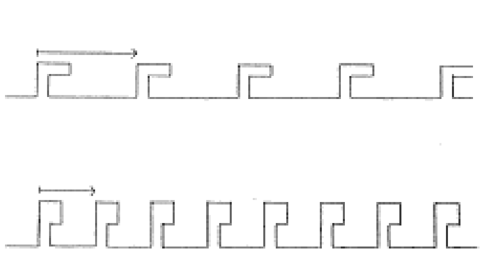
Det er visse begrensninger: Alle parallellforskyvninger må skje parallell med båndets lengderetning, eventuelle rotasjoner er på 180^o med sentrum på båndets midtlinje og eventuelle speilinger må skje om midtlinjen eller om akser vinkelrett på denne.

I fig. 14 er tegnet 2 enkle bånd. De eneste flyttinger som får båndene til å falle i seg selv er parallellforskyvninger. Den minste flyttingen som kan gjøres til høyre er angitt ved piler. De andre flyttinger som gir symmetrier er gitt ved piler hvis størrelse er et multiplum av disse.

Båndene er forskjellige med hensyn til størrelsen av flyttingen. Men båndene ser jo prinsipielt like ut, og vi vil da si at de tilhører samme båndtype. Under denne forutsetning, at størrelsen av en parallellforskyvning ikke skal ha noe å si, vil vi bestemme at

> **To bånd er symmetrilike når de har de samme rotasjoner, speilinger eller glidespeilinger.**

At vi har de samme rotasjoner betyr at rotasjonsentrene må ligge likt i forhold til de enhetene som bygger opp båndet. At vi har de samme speilinger betyr at speilaksene må ligge likt i forhold til enhetene. I fig. 15 er det to symmetrilike bånd. Rotasjonssentre og speilakser er markert. Vi ser at avstandene mellom sentrene og speilaksene er forskjellige, men både sentrene og aksene ligger likt i forhold til enhetene i båndene.



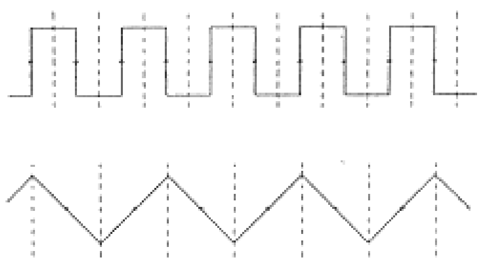
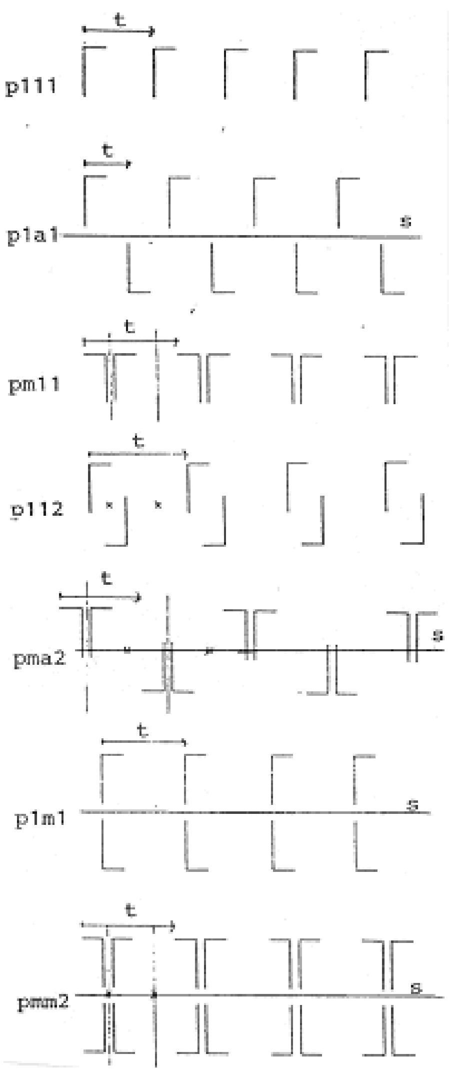


fig. 14 og fig. 15

I et bånd vil det alltid være et uendelig antall symmetrier. F.eks. vil det i alle bånd være en uendelighet av parallellforskyvninger som får båndet til å falle i seg selv.



Som nevnt finnes det en uendelighet av symmetriforskjellige emblemer. Overraskende viser det seg at antallet symmetriforskjellige båndtyper begrenser seg til 7. Vi ser da bort fra eventuelle farger i båndet. De 7 båndtypene er eksemplifisert ved de 7 malene på fig. 16. De internasjonale symbolene for båndene ser du også på fig. 16.

Vi foretar nå en analyse av hvilke symmetrier som finnes i hvert bånd i malen. Analysen vil inneholde en forsiktig bruk av symboler. Så la oss først si noe om det.

Vi vil bruke symbolet **t** om en pil. En pil har en gitt lengde, og også en gitt retning. En slik pil kaller vi i matematikken for en **vektor**. Vi bruker **t** i to betydninger: En statisk, som rett og slett sier at vi har for oss en vektor med gitt lengde og retning, og en dynamisk, der **t** forteller oss at vi skal flytte båndet den lengden vektoren har og i den retningen vektoren peker. Symbolet 3**t** betyr at vi har for oss en vektor som er 3 ganger så lang som **t** og har samme retning, og at vi skal flytte båndet i overensstemmelse med det. Symbolet -3**t** betyr en vektor med lengde 3 ganger så lang som **t**, men med motsatt retning! Symbolet betyr også en flytting i overensstemmelse med det.

Begrepet **helt tall** betyr at vi har for oss et av tallene 0, 1, 2, 3,..., -1, -2, -3,... osv. Sier vi at k skal være et helt tall, mener vi at k kan være et hvilket som helst helt tall.

Partallene er 0, 2, 4, 6,... -2, -4, -6,... osv. Oddetallene er 1, 3, 5, 7,...,-1, -3, -5, -7,... osv. Når vi angir linjer, vil vi som før bruke små bokstaver: linjen s, linjen l, linjen l_1, ... Som før nevnt vil da f.eks. **S** bety at en speiler om linjen s.

Analysen av symmetriene i båndene er da å finne de bevegelser som får båndet til å falle i seg selv. Vi får dette resultatet:

p111. Båndet har bare parallellforskyvninger. Dersom **t** er den minste vektoren som får båndet til å falle i seg selv, vil k·**t** være en symmetri for et hvilket som helst helt tall k. Er k = 2 vil forskyvningen være dobbelt så stor. Er k = -1, vil -**t** betegne den minste forskyvningen til venstre. Er k = -2, vil forskyvningen -2**t** skje til venstre. Er k=0 får vi den uekte symmetrien. Parallellforskyvningene, og dermed symmetriene, er altså gitt ved vektorene k**t**, der k er et helt tall.

p1a1. Båndet har glidespeilinger og parallellforskyvninger. Den "minste" glidespeilingen er gitt ved forskyvningen **t** etterfulgt av speilingen **S** om midtlinjen s. Vi betegner den med **tS**. Andre glidespeilinger er 3**tS**, 5**tS**, -**tS**, -3**tS**, osv. Eksempler på parallellforskyvninger i båndet er 2**t**, 4**t**, -2**t**, -4**t** osv. Parallellforskyvningene er altså gitt ved vektorene k**t**, der k er et partall. Glidespeilingene er gitt ved k**tS**, der k er et oddetall.

pm11. Parallellforskyvninger gitt ved vektorene k**t**, der k er et helt tall.
To sett med speilinger. Det ene settet er gitt ved speilakser midt mellom de to motivene som danner et tema, det andre settet ved akser midt mellom temaene.

p112. Parallellforskyvninger gitt ved vektorene k**t**, der k er et helt tall.
To sett med rotasjoner. Det ene settet har rotasjonssentra på midtlinjen i båndet og mellom de to motivene som danner et tema. Det andre settet har sentra på midtlinjen mellom temaene. Alle rotasjoner er på 180^o.

pma2. Båndet er temmelig komplekst, idet alle symmetrityper er representert.
Parallellforskyvninger gitt ved k**t**, der k er et partall (0**t**, 2**t**, 4**t**,...,-2**t**, -4**t**,...osv).
Glidespeilinger gitt ved k**t** og **S**, der k er et oddetall (**tS**, 3**tS**, 5**tS**,..., -**tS**, -3**tS**, -5**tS**,... osv).
Rotasjoner på 180^o med sentra på midtlinjen mellom 2 temaer (egentlig 2 sett rotasjoner).
Speilinger om akser vinkelrette på midtlinjen, mellom motivene som danner et tema (egentlig 2 sett speilinger).

p1m1. Parallellforskyvninger gitt ved k**t**, k et helt tall.
Speilingen **S** om midtlinjen.

pmm2. Parallellforskyvninger gitt ved k**t**, k et helt tall.
To sett av rotasjoner på 180^o. Ett sett har sentra midt i temaet bestående av 4 motiver, det andre settet har sentra midt mellom temaene.
Speilingen **S** om midtlinjen.
To sett av speilinger. Et sett om akser vinkelrette på midtlinjen, gjennom midten av temaet , og et sett om akser vinkelrette på midtlinjen, mellom temaene.

En analyse av et gitt bånd består også her i å klassifisere det i forhold til malen. Vi må da finne de bevegelser som får båndet til å falle i seg selv og se hvilket bånd i malen som har de samme typer bevegelser. I motsetning til malene er oftest et bånd sammenhengende. Det kan gi vansker ved klassifiseringen. Men det vil hjelpe å la utgangspunktet for analysen være å få tak i motivet, den minste delen som kan brukes for å bygge opp båndet. Denne minste delen er oftest usymmetrisk, men kan også ha symmetri i seg. I fig. 13 er motivet i hvert bånd markert.

Et enkelt skjema kan være til hjelp ved klassifiseringen. Betydningen av symbolene er dette: **G** betyr glidespeiling, **R** rotasjon, **L** speiling om akser vinkelrett på midtlinjen og **S** speiling om midtlinjen. I skjemaet er symmetrier som er parallellforskyvninger utelatt, da alle bånd har slike symmetrier.

	G	**R**	**L**	**S**
p111				
p1a1	x			
pm11			x	
p112		x		
pma2	x	x	x	
p1m1				x
pmm2		x	x	x

Et bånd med speilsymmetri (**S**) om midtlinjen må være enten p1m1 eller pmm2. Har båndet også "vertikale" speilsymmetrier er det pmm2. p111 har ikke symmetrier (bortsett da fra parallellforskyvninger). p1a1 har bare glidespeilinger. pm11 har bare vertikale speilsymmetrier, p112 bare rotasjonssymmetrier.

Båndene i fig. 13 er:

1. pmm2, siden det har **L**- og **S** - speilinger.
2. p112, siden det har bare rotasjoner. De 2 markeringene viser hvor det uendelige antallet rotasjonssentra ligger i forhold til enhetene i båndet.
3. pma2, siden det har **L** - speilinger og rotasjoner, men ikke **S** - speilinger.
4. pm11, siden det har **L** - speilinger, men ikke rotasjoner.
5. p1a1, siden det bare har glidespeilinger.

Båndene i fig. 14 er p111, i fig. 15. pma2.

Det er en spennende aktivitet å klassifisere bånd etter malene i fig. 16. Det er min erfaring at slik gjenkjenning har slått an både i undervisning og i annen sosial sammenheng. Noen trenger bare en kort redegjørelse for hva oppgaven går ut på. Gjenkjenning av bånd er nok noe vanskeligere enn av emblemer (fig. 5) på tross av at det er bare 7 båndtyper. Du kan prøve deg på en slik gjenkjenning for båndene i fig. 17. Til hjelp opplyses at det er 3 bånd av hver av de 7 båndtypene.

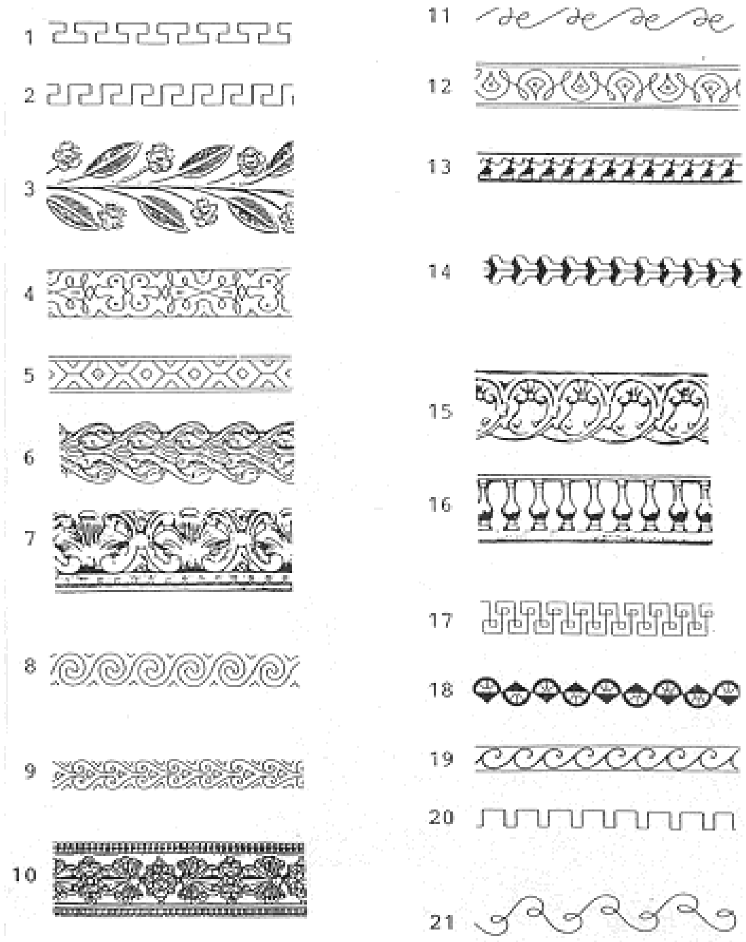


fig. 17

Vi har sett hvordan vi kan lage et emblem av et gitt motiv (fig. 9). La oss se på en tilsvarende syntese for et bånd. Vi velger å vise hvordan båndet i fig. 13.3. kan bygges av det uthevete, vinkelformete motivet. Vi kan da la speilingen **L** om linjen l og rotasjonen **R** på 180^{o} om O være de prosessene vi vil bruke. I fig. 18 ser vi hvordan båndet suksessivt bygges opp.

1. Rotasjonen **R** gir fig. 18.2.
2. Speilingen **L** av fig. 18.2. gir 18.3.
3. Rotasjonen **R** av 18.3. gir 18.4.
4. Speilingen **L** av 18.4. gir 18.5.
5. Rotasjonen **R** av 18.5. gir 18.6.
   osv.

Vi ser altså at det er nok å gjenta prosessene **R** og **L** for å generere båndet. Vi sier da at **R** og **L** er et sett **generatorer** for båndet.

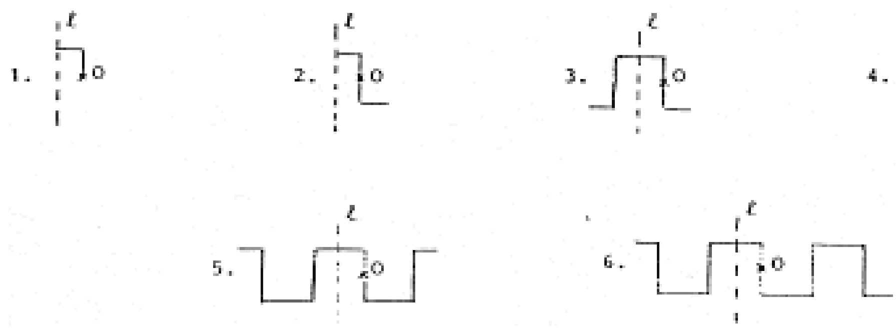


fig. 18

I denne genereringen har vi egentlig bare brukt motivet som basis i den første rotasjonen. Senere har vi utført prosessene på den figuren vi har oppnådd. Men vi kan også utføre alle prosesser på motivet alene. Vi vil illustrere dette på malen for båndet, altså på bånd pma2. Fig. 19 viser hvordan båndets enkelte elementer er fremkommet av det uthevete motivet ved å bruke **L** og **R**. Betydningen av symbolene er eksempelvis disse:

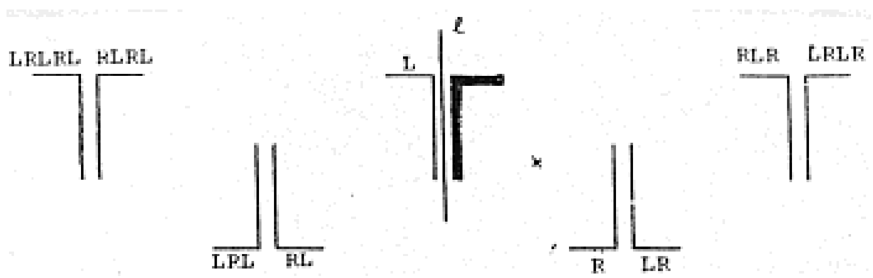


fig. 19

1. R er det elementet vi får av motivet ved å utføre rotasjonen **R** på det.
2. L er det elementet vi får av motivet ved å utføre speilingen **L** på det.
3. RL er det elementet vi får av motivet ved først å utføre **R** på motivet og så utføre **L** på elementet vi da får.
4. RLR er det elementet vi får av motivet ved først å utføre **R** på motivet, så **L** på elementet vi da har fått, og så utføre **R** på det elementet vi nå har. Kortere vil vi si dette: RLR er det elementet vi får av motivet ved suksessivt å utføre **R, L** og **R** på det.
5. LRLRL er det elementet vi får av motivet ved suksessivt å utføre **L, R, L, R** og **L** på det.

Kontroller selv de elementer i figuren som ikke er nevnt over.

Alle bånd kan bygges av et motiv ved å bruke et passende antall generatorer. For båndene p111 og p1a1 trengs bare en generator, nemlig en translasjon **t** og en glidespeiling **G = tS**. Båndene pm11, p112, pma2 og p1m1 trenger to generatorer, og pmm2 tre, f.eks. to vertikale speilinger og speilingen **S** om midtaksen.

Fig. 20 viser et eksempel på generering av et pmm2-bånd. Som generatorer har vi valgt de 3 speilingene om de stiplete linjene. Ved å speile motivet om den vertikale aksen til høyre, og så speile det utkomne om midtlinjen, får vi temaet. For å komme videre må vi også speile om den vertikale aksen til venstre. (Tegningene er utført ved å bruke datamaskin. I virkeligheten er speilingene om midtlinjen og én av de vertikale linjene samt parallellforskyvning brukt som generatorer).

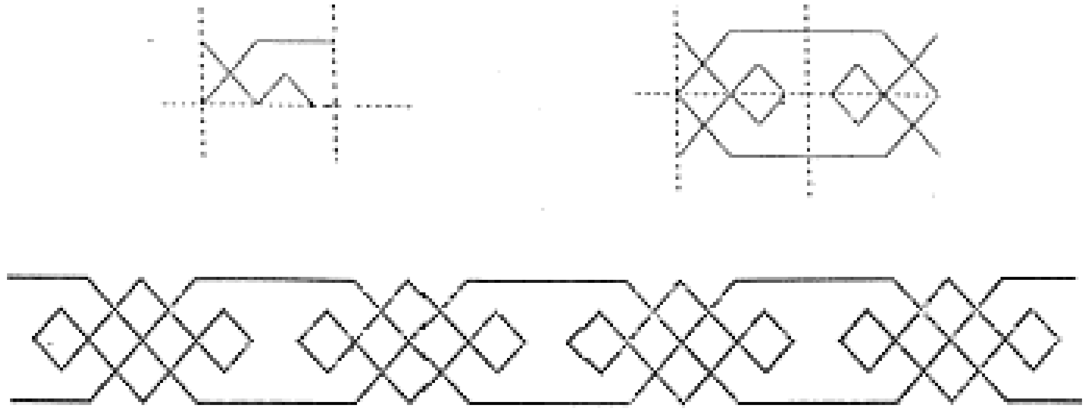


fig. 20

Tapeter
Med 'tapet' mener vi et plant mønster der et motiv eller et emblem er gjentatt i alle planets retninger. Vi finner f.eks. slike mønstre på vanlige tapeter, gardiner og andre tekstiler, golvbelegg og i hellelagte områder. En teglmur gir også et eksempel på et tapetmønster. Vi vil her forutsette det samme som ved border: Vi vil tenke oss at vi har en fortsettelse av tapetmønsteret i det uendelige, i alle planets retninger. Fig. 21 gir noen eksempler på tapetmønstre.

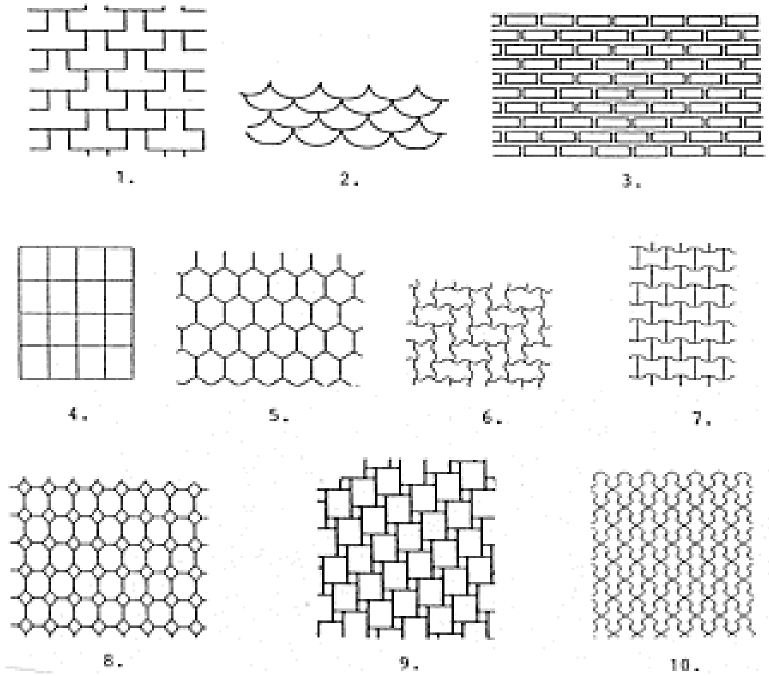
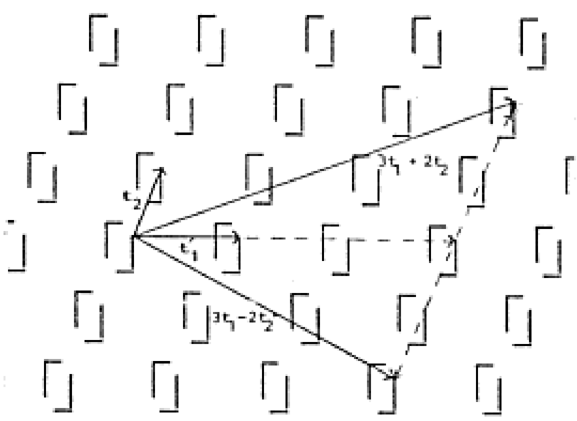


fig. 21

Med en symmetri for et tapetmønster mener vi også her en bevegelse vi gjør som får tapetmønsteret til å falle i seg selv. En vilkårlig utplukket endelig del av mønsteret vil da dekke en likt utseende del etter en symmetribevegelse. De mulige bevegelser som er symmetrier er de samme som de vi har for bånd, altså parallellforskyvninger, rotasjoner, speilinger eller glidespeilinger. La oss se på hvordan disse bevegelser kan forekomme i et tapet.

(1) Parallellforskyvninger.



Som vi vet har alle border symmetrier som er parallellforskyvninger i båndets retning. I alle tapeter har vi slike symmetrier i uendelig mange retninger. Disse parallellforskyvninger bestemmes av to forskjellige basisvektorer. På fig. 22 til venstre er basisvektorene $\mathbf{t_1}$ og $\mathbf{t_2}$ tegnet. Forskyvningen $\mathbf{t_1}$ vil føre hele mønsteret ett hakk til høyre slik at mønsteret dekker seg selv. Tilsvarende skjer ved bevegelsen $\mathbf{t_2}$. Men du kan kombinere disse to basisforskyvningene. F.eks. vil $3\mathbf{t_1} + 2\mathbf{t_2}$ bety at en forskyver 3 hakk til høyre fulgt av 2 hakk på skrått oppover. (Det er selvfølgelig lengden av basisvektorene som utgjør et "hakk"!). Også da vil mønsteret forskyves til å dekke seg selv. $3\mathbf{t_1} - 2\mathbf{t_2}$ er også en symmetri. Alle vektorer **t** som er en kombinasjon $k_1\mathbf{t_1} + k_2\mathbf{t_2}$, der k_1 og k_2 er hele tall, gir forskyvninger som er symmetrier. Alle tapeter har som nevnt slike symmetrier, og vi vil ikke hefte oss mer med det.

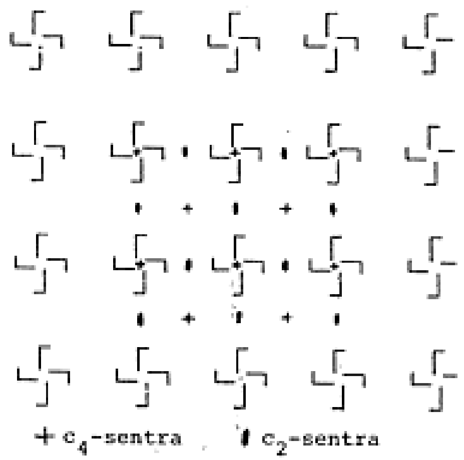
(2) Rotasjoner.

I det første mønsteret i fig. 23 vil du se at de + - merkete punkter er sentra for rotasjoner som får mønsteret til å falle i seg selv. Du kan dreie 0, 90, 180 eller 270 grader (allmennt et multiplum av 90^o). Dette svarer til emblemsymmetrien $\mathbf{C}_4$. Vi vil bruke symbolet c_4 om tilsvarende symmetrier i et tapetmønster. Mens vi i et emblem bare har ett sentrum for slike symmetrier, vil du i mønsteret ha uendelig mange slike sentra. Mønsteret har også symmetrier som er halvrotasjoner svarende til emblemsymmetrien $\mathbf{C}_{2.}$

I det andre mønsteret i fig. 23 vil du se at vi har punkter som gir 2, 3 eller 6 rotasjonssymmetrier henholdsvis. Dette svarer til emblemsymmetriene $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ henholdsvis $\mathbf{C}_6$. Vi vil her symbolisere slike tapetsymmetrier med c_2, c_3 og c_6.

Som ved emblemer vil c - symbolene også angi at du bare har rotasjoner.

Det viser seg at i et tapet kan vi bare ha rotasjonssymmetrier bestemt ved c_2, c_3, c_4 eller c_6.



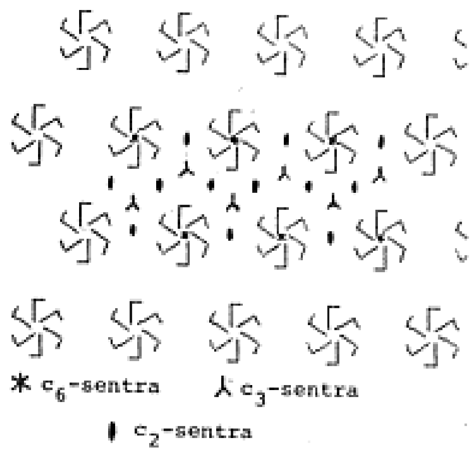


fig. 23

(3) Speilinger.

I det første mønsteret i fig. 24 vil du se at gjennom noen punkter er det tegnet 4 heltrukne linjer. Speiling om disse linjene vil gjøre at mønsteret faller i seg selv. Dette svarer til emblemsymmetriene $\mathbf{D}_4$. Her gir vi symbolet d_4 for slike symmetrier i et tapet. Legg merke til at d_4 også gir beskjed om at vi har rotasjonssymmetriene c_4, slik vi også har det i emblemet. Vi ser også punkter der det er tegnet 2 heltrukne linjer og 2 stiplete linjer gjennom (d_{22} - punkter). Vi kommer tilbake til dette senere.

I det andre mønsteret i fig. 24 vil du se at gjennom noen punkter er det tegnet 6 og gjennom noen punkter 3 heltrukne linjer. Disse linjene er speilakser for symmetrier i tapetet. Vi symboliserer dette med at tapetet har både d_6 og d_3 - symmetrier. Disse symmetriene gir også beskjed om at vi har de tilsvarende rotasjonssymmetriene c_6 og c_3. Vi ser også punkter der det er tegnet 2 heltrukne og 4 stiplete linjer gjennom (d_{24} - punkter).

I to tapet-typer kan en tegne ett sett parallelle linjer som er speilakser for symmetrier. Vi bruker da symbolet d_1 om dette. Det svarer til emblemet $\mathbf{D}_1$.

Det viser seg at i et tapet kan vi bare ha speilsymmetrier bestemt ved d_1, d_2, d_3, d_4 og d_6.

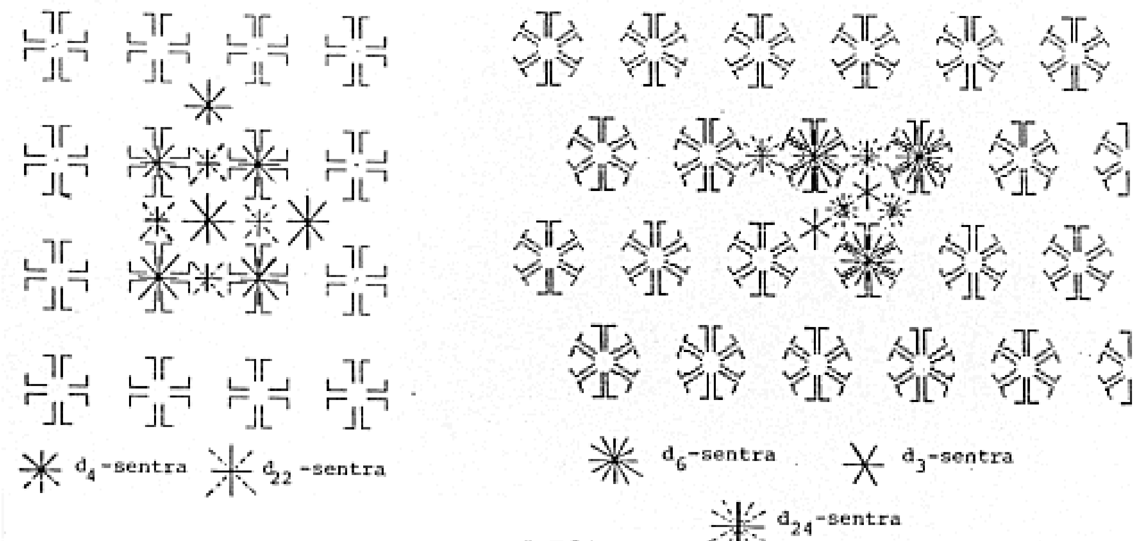
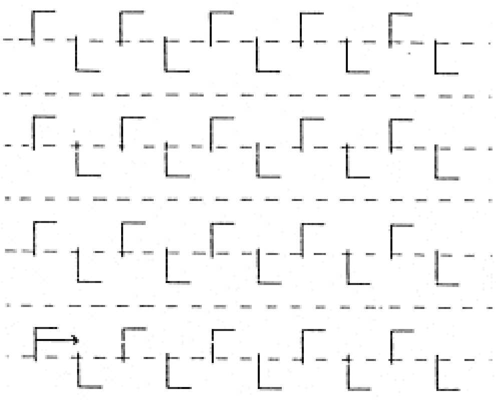


fig. 24

(4). Glidespeilinger.



I mønsteret i fig. 25 til venstre er det inntegnet et sett av parallelle, stiplete linjer. Dette skal vise at mønsteret har symmetrier som er glidespeilinger med linjene som speilakser. Vektoren som gir den minste forskyvning er markert. Når vi har ett sett med glidespeilinger betegner vi disse symmetriene med g_1.

I enkelte mønster finnes det to slike sett av linjer som gir glidespeilings-symmetrier. De to linjeskarene må da stå vinkelrette på hverandre. Vi betegner slike symmetrier med g_2.

(5) Kombinasjoner.

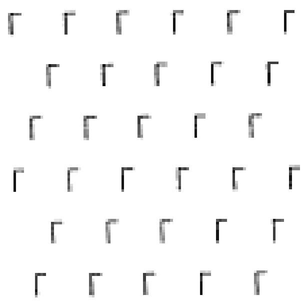
I noen tapetmønstre vil man finne at gjennom sentra for c - symmetrier vil det gå en eller to glidespeilingsakser som gir symmetrier. Det dreier seg om tre muligheter, som vi symboliserer c_{21}, c_{22} og c_{42}. De to første symbolene betyr at du har c_2 - symmetri sammen med 1 henholdsvis 2 glidespeilinger, det tredje at du har c_4 - symmetri sammen med 2 glidespeilinger.

I noen tapetmønstre vil man finne at gjennom sentra for d - symmetrier vil det gå 1, 2, 3 eller 4 glidespeilingsakser som gir symmetrier. Det dreier seg om fem muligheter, som vi symboliserer d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{22} og d_{24}. Det første symbolet betyr at du har punkter der det går en speilakse og en glidespeilingsakse gjennom. Eksempler på d_{22} - symmetrier har du i det første mønsteret i fig. 24.
I det andre mønsteret i fig. 24 vil du finne d_{24} - symmetrier.

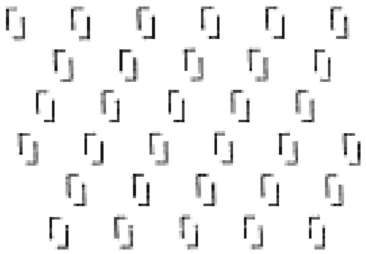
Det viser seg at det i alt finnes 17 symmetriforskjellige tapetmønstre. Dette ble først bevist på slutten av 1800 - tallet (Fedorov, 1891).
Noen av mønstrene er ganske intrikate. Det vitner om dyp matematisk forståelse når man i oldtidens ornamentikk finner eksempler på disse intrikate mønstrene. De fleste av mønstrene finner en også igjen i arabernes fabelaktige flisemønstre (Alhambra).
Fig. 26 viser malene for de 17 tapetmønstre. Nedenfor er det også en oversikt over symbolene for mønstrene og de symmetriene du vil finne i hvert enkelt mønster. Det er en utfordrende oppgave for deg å kontrollere dette for hvert enkelt mønster. Det gjelder da å få tak i punkter som er sentra for c - eller d - symmetrier og eventuelle glidespeilinger. Da alle mønstrene har parallellforskyvninger, er dette utelatt i oversikten.

Symbol	**Symmetrityper**	**Let etter:**
p1		Bare forskyninger
p2	c_2	Bare c_2
p3	c_3	Bare c_3
p4	c_4, c_2	c_4 (men ikke c_{42})
p6	c_6, c_3, c_2	c_6
cm	d_1, g_1	d_1, g_1
pm	d_1	Bare d_1
pg	g_1	Bare g_1
cmm	d_2, c_{22}	c_{22}
pmm	d_2	Bare d_2
pmg	d_{11}, c_{21}	d_{11} eller c_{21}
pgg	c_2, g_2	c_2, g_2
p31m	d_3, d_{12}, c_3	d_3, c_3
p3m1	d_3, d_{12}	Bare d_3 og d_{12}
p4m	d_4, d_{22}	d_4
p4g	d_2, c_{42}, d_{13}	c_{42}
p6m	d_6, d_3, d_{24}	d_6

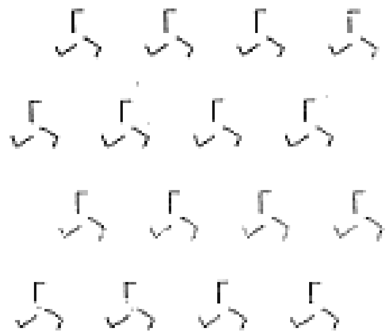
Kolonnen "Let etter" er et forslag til hvilke symmetrier det er nok å verifisere ved analyse (gjenkjenning) av en tapet-type.



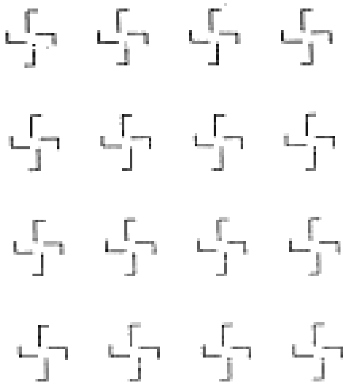
p1



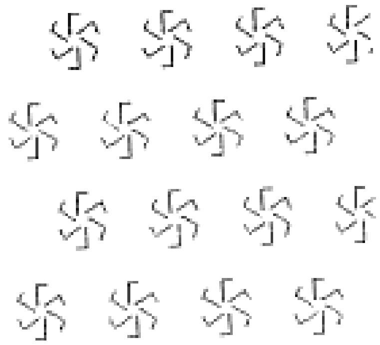
p2



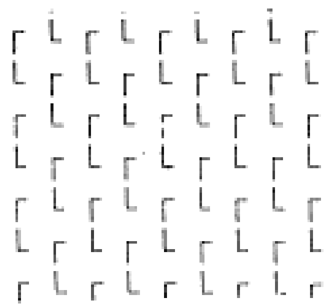
p3



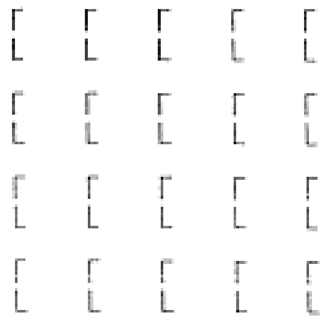
p4



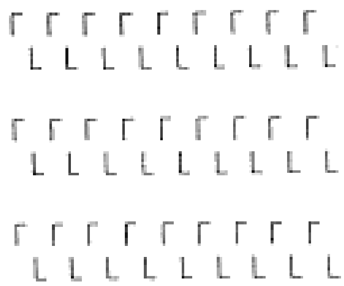
p6



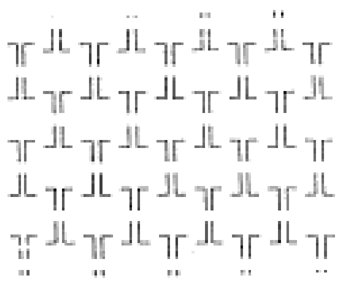
cm



pm



pg



cmm

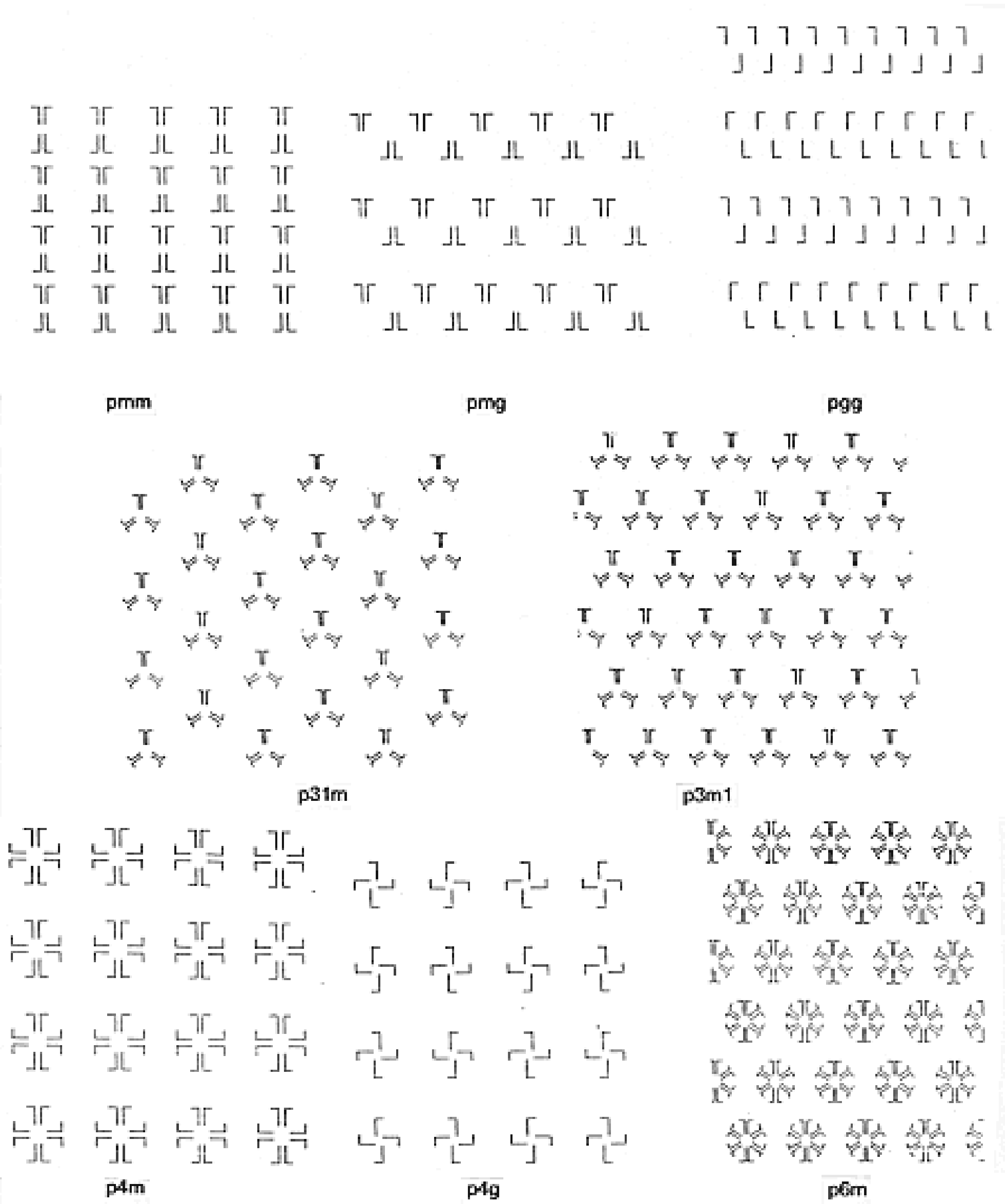
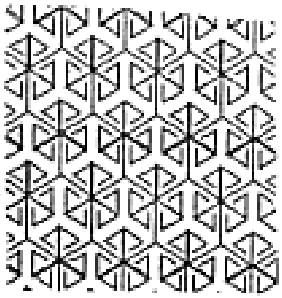
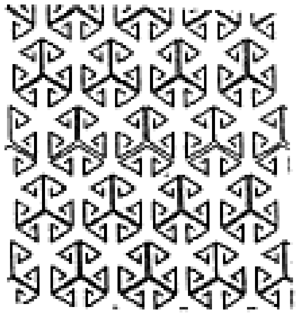
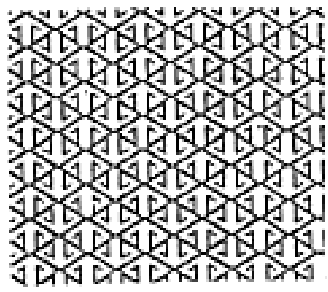


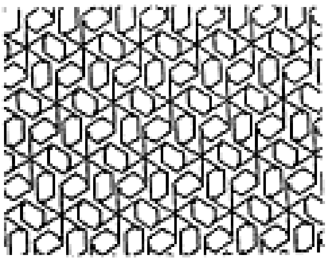
fig. 26

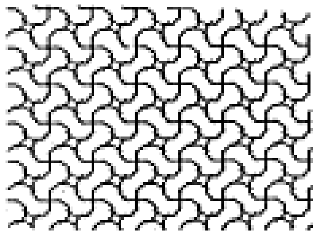
Prøv deg selv på en klassifisering (gjenkjenning) av mønstrene i fig. 21 og i fig. 27 under. Prøv også, for hvert mønster, å finne et motiv (uten symmetri) som kan brukes til å bygge opp mønsteret.

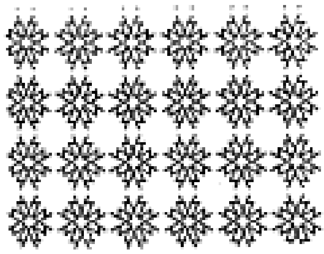

1

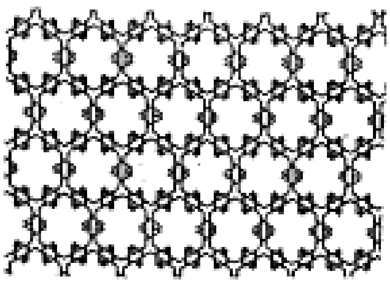

2

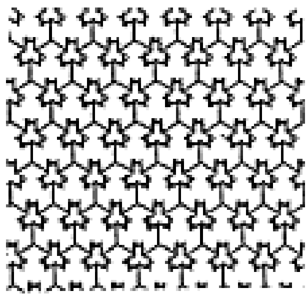

3

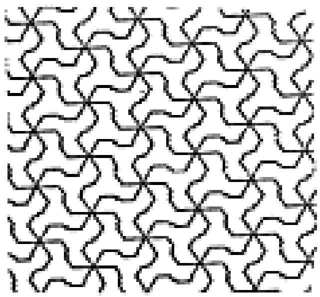

4

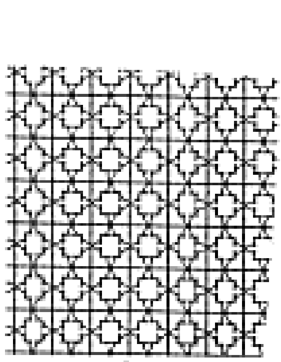

5

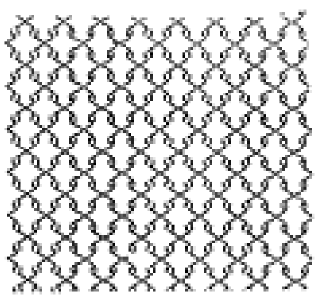

6

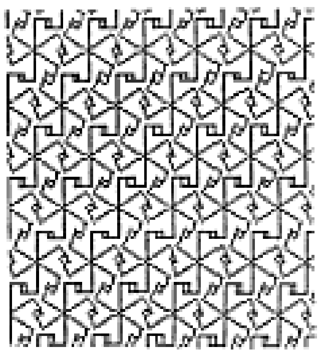

7


8


9


10


11


12

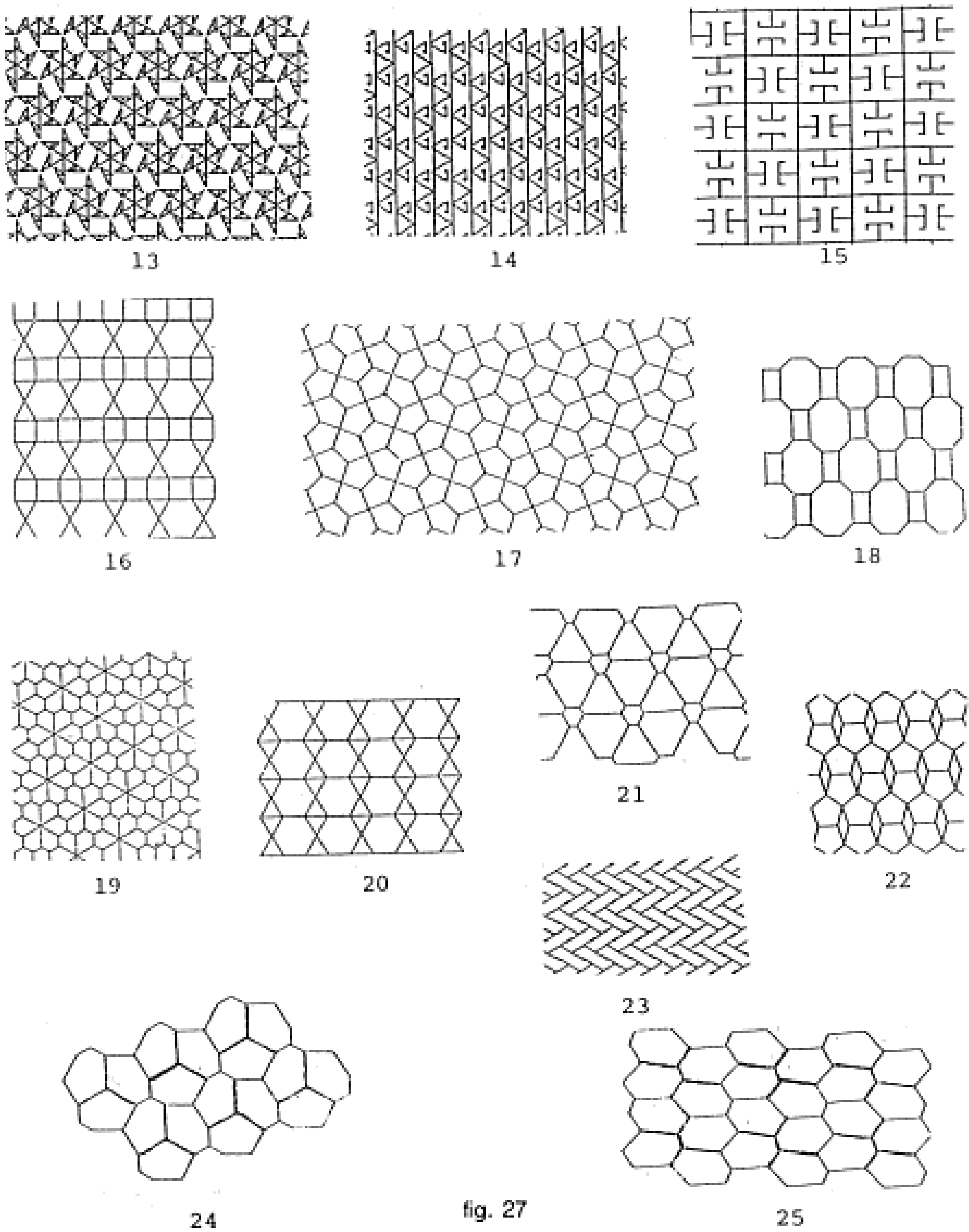


fig. 27

Enhetsområder
Et emblem kan oppdeles i kongruente sektorer med likt innhold. Vi sier da at vi har en sektorpartisjon av emblemet. Sektorene kan betraktes som brikker i et puslespill. Når vi "pusler" sektorene, kan vi få emblemet. Et $\mathbf{C}_6$ -emblem kan f.eks. deles i 3 kongruente sektorer, hver sektor på 120°. Men det er mer interessant å dele emblemet i et maksimalt antall kongruente sektorer med likt innhold. For $\mathbf{C}_6$ - og $\mathbf{D}_6$ -emblemer vil da antallet være 6, og hver sektor er på 60°. Ved en slik oppdeling vil hver sektor være et **enhetsområde** for

emblemet. Siden vi her bruker sektorer som enhetsområder, kan vi bruke ordet "enhetssektor". Enhetssektorene i en sektorpartisjon har altså disse egenskapene:

1. Sektorene skal være kongruente slik at både størrelsen og figuren i sektoren skal dekke hverandre.
2. Når sektorene pusles skal en kunne få emblemet.
3. I et $\mathbf{C}_n$ - eller $\mathbf{D}_n$ - emblem er sektorvinkelen i enhetssektorene lik $360^o/n$. Kongruente sektorer med mindre sektorvinkel kan ikke pusles til emblemet.

Begrepet 'enhetssektor' er ikke entydig. Vi kan ha forskjellige utforminger på en enhetssektor, som fig. 28 viser. Vi ser også at vi kan ha enhetsområder som ikke er sektorer i vanlig oppfatning.

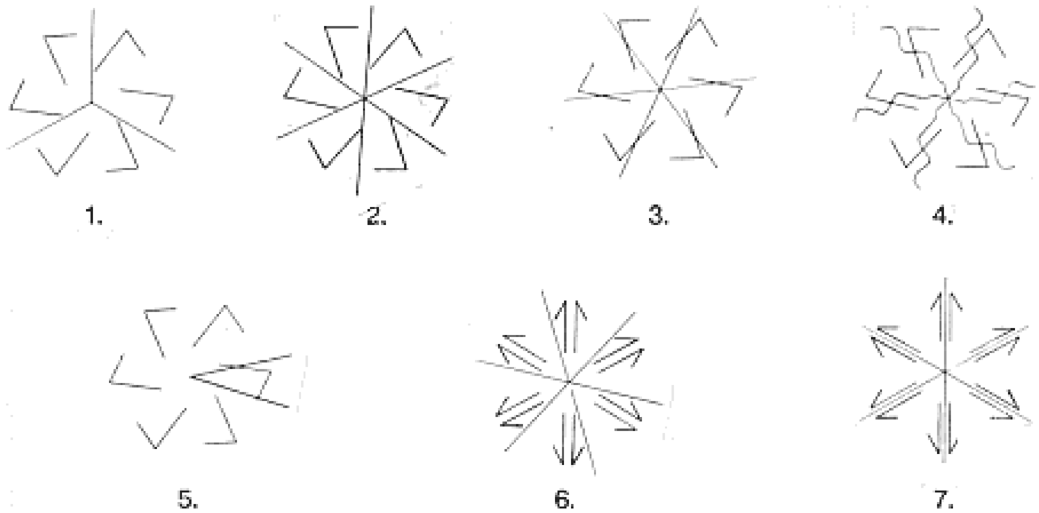


Fig. 28: 1. Partisjon i like sektorer som ikke er enhetssektorer. 2 og 3. Partisjoner med enhetssektorer. 4. Partisjon med enhetsområder som ikke er sektorer. 5. Sektor som ikke kan pusles til emblemet, og dermed ikke er enhetssektor. 6 og 7. Partisjoner i enhetsområder for $\mathbf{D}_6$.

Et bånd eller et tapet kan oppdeles i kongruente parallellogrammer med tilsvarende egenskapene som de for et emblem:

1. Parallellogrammene skal være kongruente slik at både størrelsen og figuren i parallellogrammet skal dekke hverandre.
2. Når parallellogrammene pusles skal en kunne få båndet eller tapetet.
3. Kongruente parallellogrammer med mindre areal kan ikke pusles til båndet eller tapetet.

Parallellogrammer med disse egenskaper kalles for **enhetsparallellogrammer.** Da et rektangel eller et kvadrat også er et parallellogram, kan disse også opptre som enhetsbrikker ved en parallellogrampartisjon. Som ved emblemer er ikke begrepet enhetsparallellogram entydig. En kan også nytte andre enhetsområder enn parallellogrammer. Fig. 29 viser eksempler på partisjoner med enhetsparallellogrammer i bånd og tapet. I en av partisjonene for båndet har vi også brukt et annet ehetsområde enn parallellogram. For bånd har vi én rekke med enhetsparallellogrammer, forskjøvet en avstand lik størrelsen av den minste parallellforskyvningen (basisvektoren) i båndet. Et tapet kan alltid oppdeles i kongruente, parallelle bånd med en viss minste avstand mellom båndene. Båndene er ofte skrått forskjøvet i forhold til hverandre. Vektoren som bestemmer denne forskyvningen, samt båndets basisvektor gir et sett basisvektorer $\mathbf{t}_1$ og $\mathbf{t}_2$ for tapetet. Disse vil da bestemme et sett enhetsparallellogrammer for tapetet (se også fig. 22).

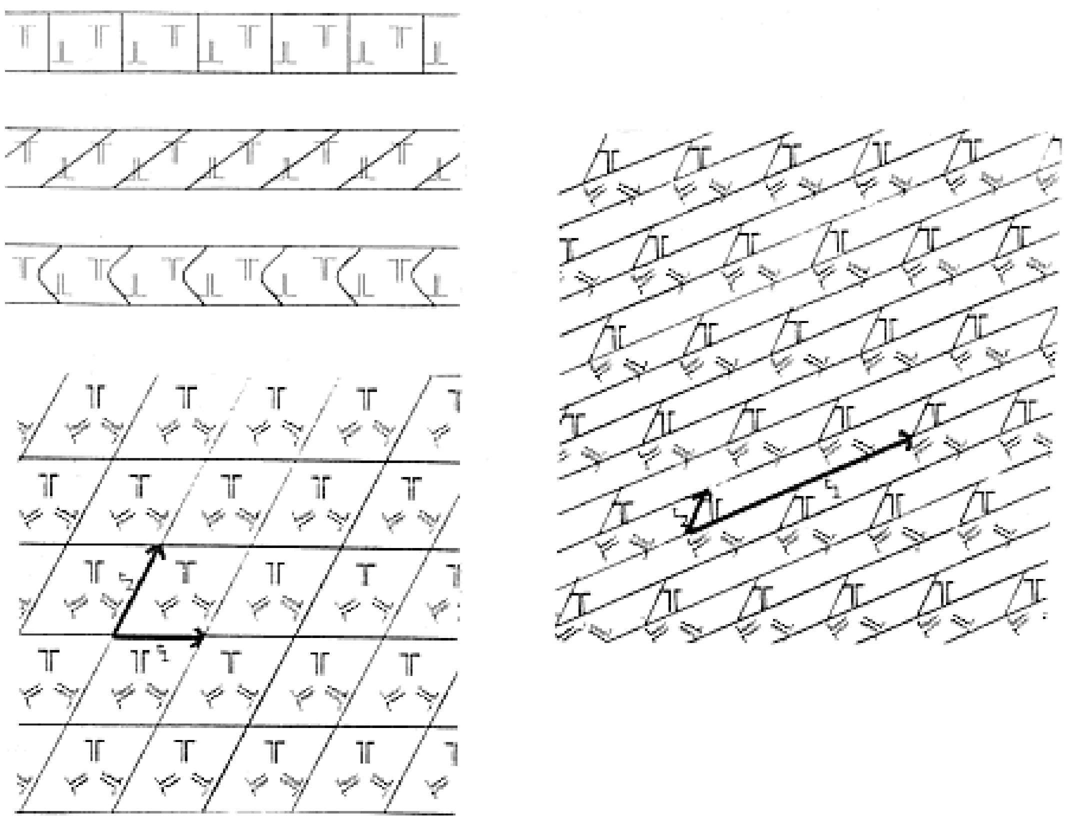


fig. 29

Enhetsområder har betydning ved oppbygging av ornamentet eller mønsteret. For et emblem vil en velge en passende sektor og tegne en figur inne i sektoren. Figuren vil for et **C** - emblem være motivet, for et **D** - emblem motivet og et speilbilde av motivet. Sektoren med sitt figurinnhold gjentas så ved rotasjon. For å lage et bånd vil en vanligvis velge et rektangel, tegne en figur i rektanglet og så gjenta rektanglet ved parallellforskyvning i én retning. For et tapet vil en vanligvis velge et parallellogram (men ofte et rektangel eller kvadrat), tegne en figur i parallellogrammet og gjenta dette ved parallellforskyvninger i to retninger. Alle figurer i dette skriftet kan tenkes fremkommet ved slike prosesser ("hellelegging"), og i realiteten er dette gjort for de fleste figurer, f.eks. for alle figurer som er laget ved å bruke datamaskin. Det er en relativt enkel sak å lage dataprogram som kan tegne emblemer, bånd eller tapeter etter en slik metode.

Figurinnholdet i et enhetsområde for et bånd eller et tapet vil til vanlig ikke være det samme som motivet. Oftest vil enhetsområdet ha en figur som består av flere gjentakelser av motivet eller speilfiguren til motivet. Men vi kan også dele båndstripen eller tapetplanet opp i mindre deler enn de som enhetsområdene gir, deler som er kongruente med hverandre og som har et figurinnhold som er lik et valgt motiv eller motivets speilfigur. En slik del kaller vi for et **fundamentalområde**. Fig. 30 gir eksempler på partisjoner av mønstre i fundamentalområder.

I det første eksemplet danner fundamentalområdene et nett av likesidete trekanter, i det andre et nett av rettvinklete, likebeinte trekanter.

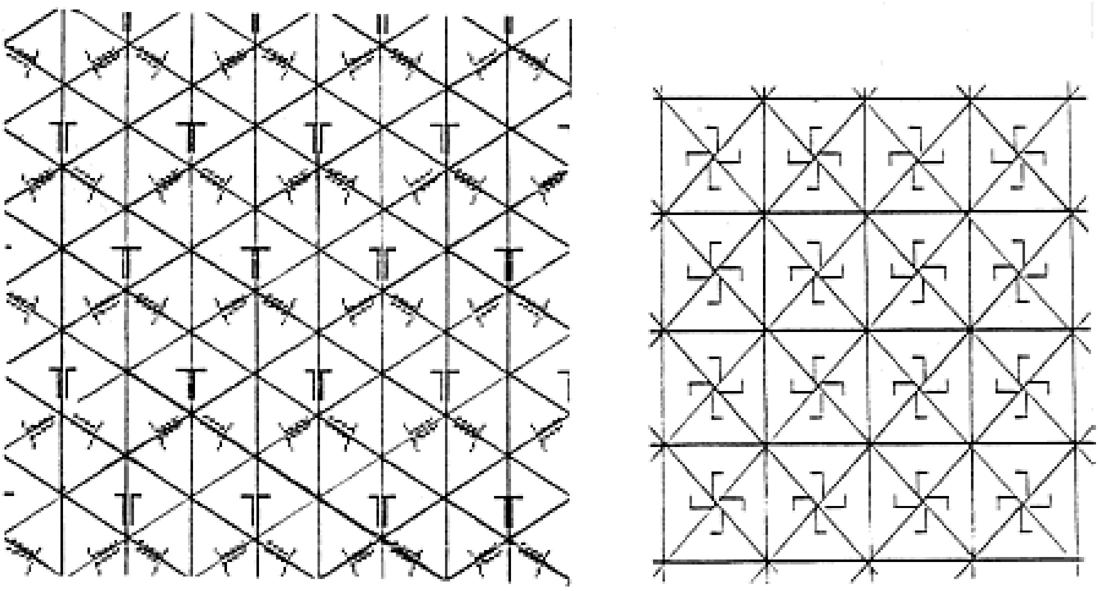


fig. 30

Emblemer, bånd og tapeter er mønstre i planet. De har betydning i artistisk sammenheng. En biolog, kjemiker, fysiker eller geolog har behov for å vite den romlige sammensetning av atomer og molekyler. I et fast stoff vil atomer og molekyler gjentas til romlige mønstre (krystallografiske mønstre). Det kan vises at det teoretisk er mulig å danne 230 slike "romlige tapeter" (Fedorov 1885). En stor del av disse 230 typene gjenfinnes faktisk i naturen.

Isometrier

Tenk deg at planet er dobbelt, f.eks. representert ved en transparent over en annen. Ta det øvre planet og flytt det slik at planet ikke strekkes eller deformeres på annet vis. Å flytte det kan skje på 4 måter:

1. Planet kan parallellforskyves en gitt vektor.
2. Planet kan roteres om et gitt punkt en gitt vinkel med pålagt omløpsretning.
3. Planet kan speiles om en gitt linje i planet. I praksis kan dette skje ved at en løfter det øvre planet, snur det og legger det ned igjen, i overenstemmelse med at den linjen en har tegnet skal være speilakse.
4. Planet kan glidespeiles om en gitt linje og etter en gitt vektor i planet. I praksis kan du da først forskyve etter den gitte vektor, så speile om den gitte linjen.

Det er klart at ved alle disse bevegelser vil avstanden mellom to gitte punkter i planet bevares. Avstanden er den samme før og etter bevegelsen. Slike bevegelser kaller vi for **isometrier** eller **kongruensavbildninger**. Iso betyr "lik", og metri kan oversettes til "avstand". Legg merke til at isometribegrepet egentlig er relatert til planet alene. Men om du har en figur i planet, så vil den ved en isometri avbildes i en kongruent figur.

Men er ikke en isometri det samme som en symmetri? Vi har jo ved våre betraktninger om symmetri brukt de samme bevegelsesmåter som ved isometri. Svaret er nei. For det første er isometri knyttet til planet alene, mens symmetri også er knyttet til en gitt figur. For det andre vil figur og avbildningen av figuren ved isometri også kunne falle på forskjellige steder, mens ved symmetri må figur og bilde dekke hverandre! Symmetri blir da en spesiell form for isometri, som da er et mer generelt begrep.

Symmetri i skolen

Symmetri for en figur er en isometri som gjør at figuren faller i seg selv. Vi har behandlet symmetri uavhengig av isometribegrepet. Det skjer også i skolen. Symmetribegrepet opptrer sporadisk i barneskolen, gjerne som aktiviteter av syntetisk karakter. Aktiviteter kan være å klippe i brettet papir. Oftest dreier det seg om én brettakse, slik at en får en $\mathbf{D_1}$ - figur. Men bretting og klipping kan være mer avansert enn som så. Fig. 31 viser sterkt forminskete eksempler. Emblemene har fra 2 til 10 speilakser. $\mathbf{C}_6$ - emblemet, som jo ikke har speilakser, krever en spesiell teknikk med oppklipping langs sektorlinjene og samling av sektorene i to grupper før klipping. Du vil også se de 4 båndtypene som har speilakser. Båndet **p1m1** krever en tilsvarende teknikk som $\mathbf{C}_6$ - emblemet, og i båndet **pma2** må samme figur klippes 2 ganger etter brettingene. Det er både glede og utfordring i å klippe emblemer og bånd. Det er også mulig å få fram tapetmønstre ved bretting og klipping.

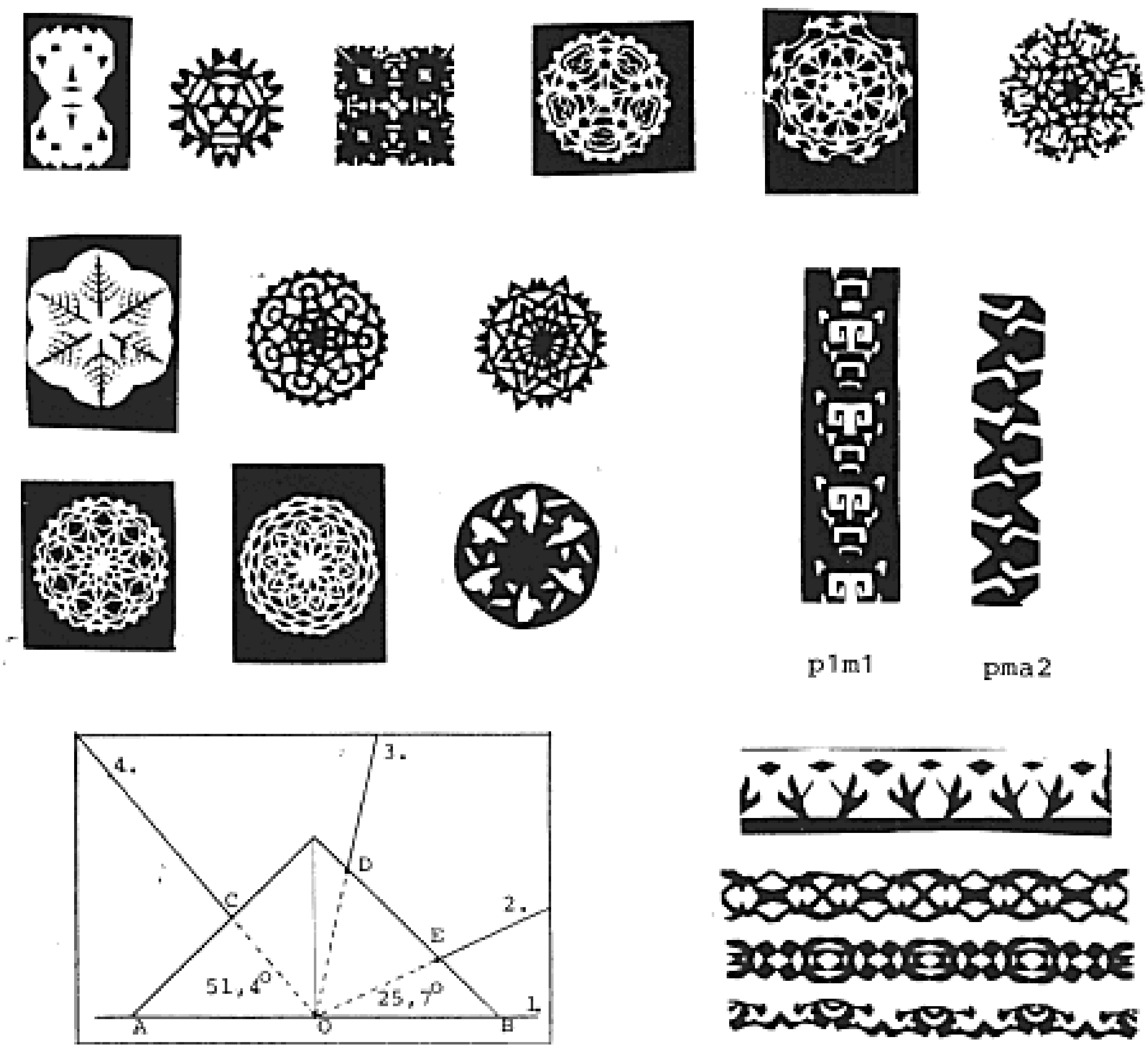


fig. 31.

For å øke nøyaktigheten når en bretter for å klippe emblemer, kan en lage brettemaler. Fig. 31 viser en brettemal for $\mathbf{D}_7$ - emblemer og bruken av den. Nabospeilakser for $\mathbf{D}_7$ danner en vinkel på $360^o/14 = 25{,}7^o$. På malen er linjene 1, 2, 3 og 4 speilakser (4 er egentlig unødvendig å tegne). De andre tre speilakser bestemmes av midtlinjene i sektorene på $51{,}4^o$. Malen kan brukes slik: Et ark brettes f.eks. et kvadratisk ark langs diagonalen. Brettkanten legges langs 1 (basislinjen), og punktene O, E og D markeres på det brettede arket. En bretter så om OC slik at OA faller langs OD, så om OD slik at OC faller langs OE. To nye brettinger vil føre til at en har en sektor på $25{,}7^o$ med 14 legg.

En kan eksperimentere med klippete emblemer og bånd som sjabloner for tegning og maling. Jeg husker fra min barndom da stuen skulle males. Maler Amundsen gjorde bakgrunnsmalingen ferdig, pakket så ut et veld av klippete sjabloner og vi (!) begynte dekoreringen. Resultatet var overveldende, og jeg syntes jeg mistet noe da stuen 20 år senere ble malt på nytt - ensfarget.

Andre aktiviteter kan være å avsmitte sverteflekker på papir ved å brette.

Speil er et nærmest ukjent hjelpemiddel i undervisningen i geometri. Bruk to speil slik som fig. 2 viser. Ved å la åpningsvinkelen variere kan en få fram en $\mathbf{D}_3$-, $\mathbf{D}_4$-, $\mathbf{D}_5$ - figur osv. Speiling av et linjestykke vil kunne gi en serie regulære mangekanter. Samme linjestykke kan plasseres mellom speilene på to måter for å få samme type regulær mangekant. Holder man f.eks. venstre speil i ro i en vinkel på 90^o med den tegnete linjen (fig. 32), og dreier høyre speil mot det venstre vil serien av regulære mangekanter kunne frembringes. På fig. 32 har en tegnet 4 posisjoner av høyre speil, svarende til speilvinkler på 60, 45, 36 og 30 grader, noe som i rekkefølge gir en regulær trekant, firkant, femkant og sekskant. Foruten å tegne figurer mellom speilene, kan en også legge ting mellom speilene (kaleidoskop).

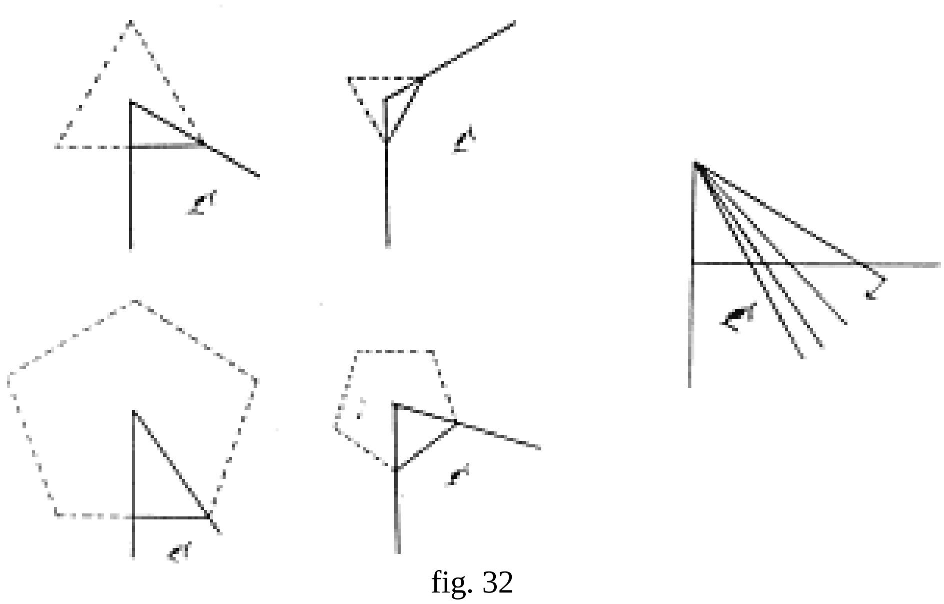


fig. 32

Fig. 33 viser en annen utfordrende aktivitet med speil. Den består i å plassere et eller to speil på en basisfigur (en master) og få fram andre figurer, gjerne tegnet på forhånd. Masteren er her hundetegningen. Ved å plassere kanten på et speil passende over masteren, vil du for 4 plasseringer kunne se fire av figurene. Bruk av 2 speil vil gi en av figurene, mens den sjette ikke kan frembringes ved speiling av noen del av masteren. Prøv deg på dette!

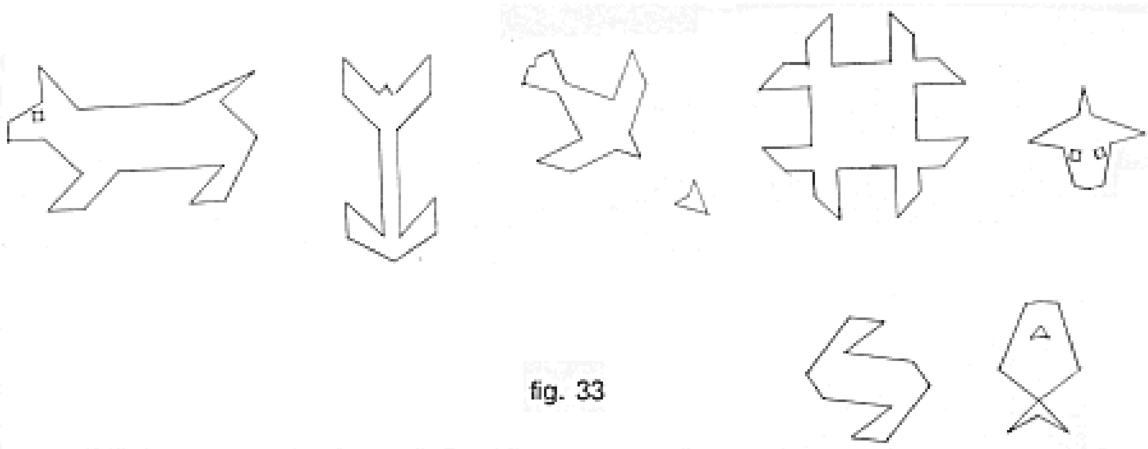


fig. 33

Gjennomskinnelige (transparente) pleksiglass er et særlig flott hjelpemiddel. En vil da ikke bare **se** speilbildet, men også kunne tegne det på andre siden av glasset (fig. 34). Det er ikke vanskelig å finne pleksiglass som kan brukes til dette formålet. De bør helst være farget. En kan få kjøpt slike speil, laget i didaktisk hensikt (Mira, speilograf).

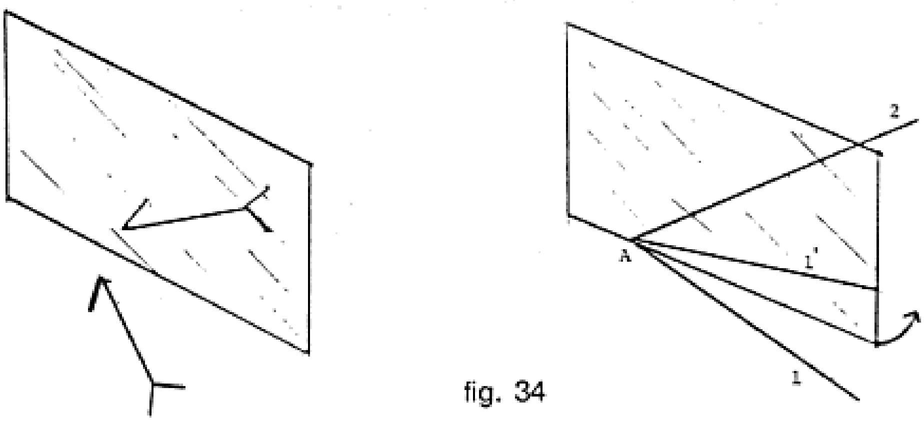


fig. 34

Konstruksjon og tegning bør gå hånd i hånd i undervisningen. En kan konstruere med passer, eller tegne med forskjellige hjelpemidler, f.eks. miraen. Med miraen eller med bretting kan en bl.a.

- halvere en vinkel
- oppreise en normal til en linje i et gitt punkt
- nedfelle en normal fra et gitt punkt til en gitt linje
- finne midtnormalen på et linjestykke
- finne eventuelle symmetriakser i figurer
- tegne emblemer og bånd med et gitt motiv.

De fire første aktivitetene er grunnleggende for å utføre vanlige flertrinns-konstruksjoner, f.eks. å finne parallellen til en gitt linje gjennom et gitt punkt eller finne midtpunktet i en trekant (midtpunktet er det punktet der halveringslinjene for vinklene i trekanten skjærer hverandre). På fig. 34 er vist hvordan miraen brukes til å halvere en vinkel. Miraen plasséres gjennom toppunktet A for vinkelen. Linjene 1 og 2 er vinkelbeinene. 1' er speilbildet til 1. Ved å dreie miraen om A får en 1' til å falle sammen med 2. Halveringslinjen tegnes langs nedre kant av miraen.

Miraen kan brukes til et veld av forskjellige aktiviteter. Det vises til litteraturreferansen for nærmere opplysninger om dette.

Transparenter er utmerket til et analytisk arbeid med symmetri. Et emblem eller et mønster kan en kopiere på 2 transparenter. En legger så den ene transparenten over den andre slik at figurene dekker hverandre. Så kan en utføre bevegelser med den øvre transparenten slik at figurene på ny dekker hverandre. Slik kan en finne symmetriene i emblemet eller mønsteret. (En kan også eksperimentere med isometrier, altså bevege den øvre transparenten i forhold til den andre, og slik at mønstrene overlapper uten å dekke hverandre. Slik overlapping kan gi nye, spennende mønstre, se fig. 35).

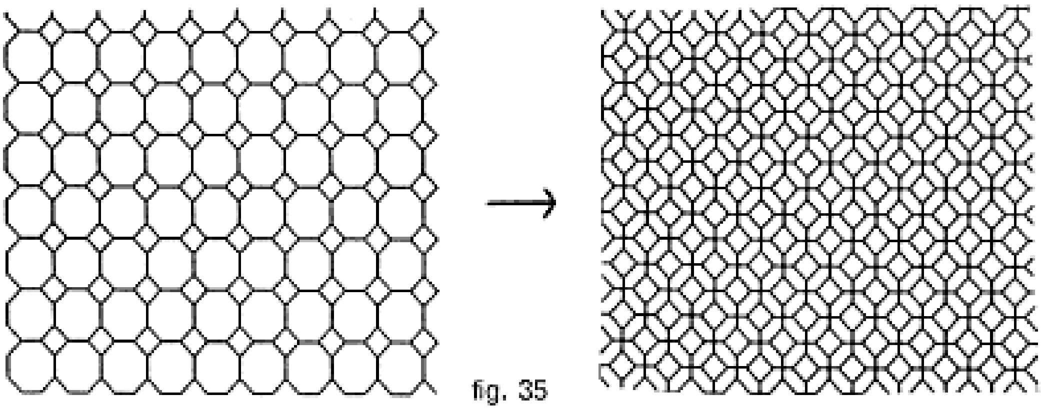


fig. 35

En kan bruke passer og linjal til å konstruere speilbildet til en figur. I skolen bruker en to slags speilinger: Speiling om akse og "speiling om punkt". Fig. 36 viser konstruksjoner til dette. Ved speiling om en akse konstruerer en normaler til speilaksen fra et stort nok utvalg av punkter på figuren og avsetter avstander etter den intuitive regelen om at et punkt og dets speilpunkt ligger like langt fra speilaksen. Normalkonstruksjoner får da en motiverende anvendelse. En bør også lage eksempler der speilaksen skjærer figuren. Ved "speiling om punkt" har en gitt (tegnet) en figur og et punkt, "speilsentret". En trekker linjer fra punkter på figuren gjennom speilsentret og avsetter like avstander for å finne speilpunktene. (Etter min mening er det kunstige navn en bruker her. "Speiling om punkt" er jo egentlig en rotasjon på 180^o om et punkt).

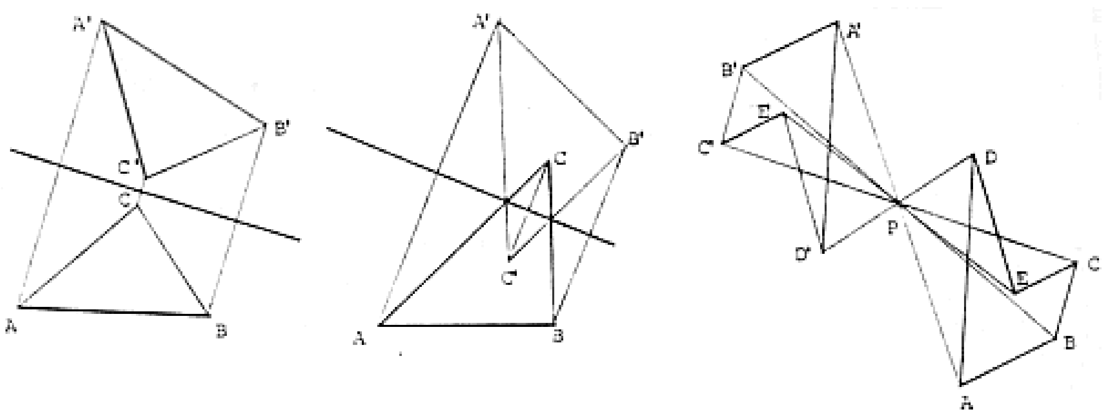


fig. 36

Du kan ellers bruke gitternett (eller rutenett) uten eller med et inntegnet koordinatsystem for å få fram speilfigurer som sammen med den gitte figuren gir symmetri. Fig 37 viser eksempler.

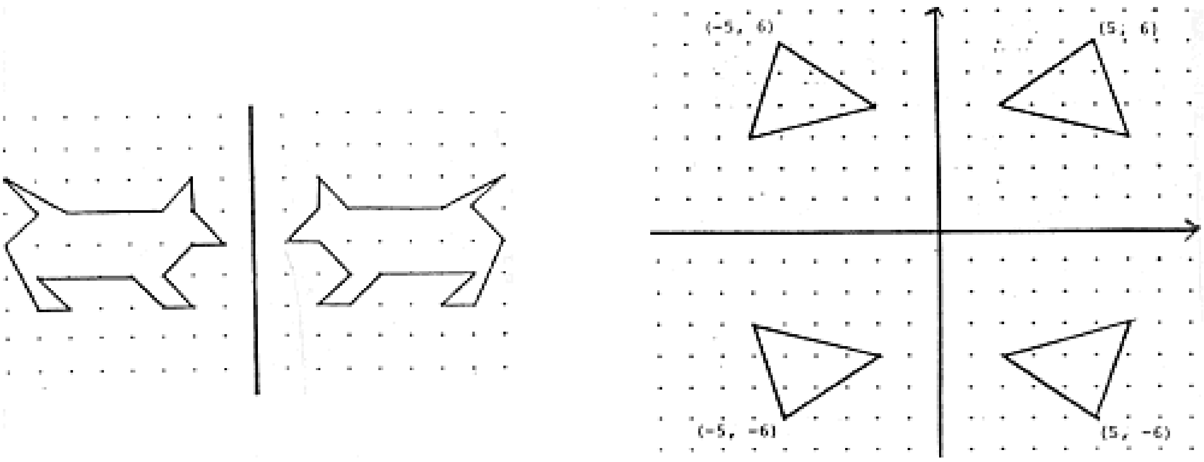


fig. 37

I grunnskolens lærebøker i matematikk vil en neppe finne aktiviteter som har med analyse å gjøre. I betraktning av at hverdagen er full av eksempler på emblem-, bånd- og tapetmønstre (fig. 38 viser eksempler), burde det ligge en utfordring i å finne motivet og symmetriene i en figur samt utføre klassifisering (gjenkjenning). Det er store muligheter for tilpasset undervisning her. Spesielt interesserte elever bør også få prøve seg på tapetmønstre.

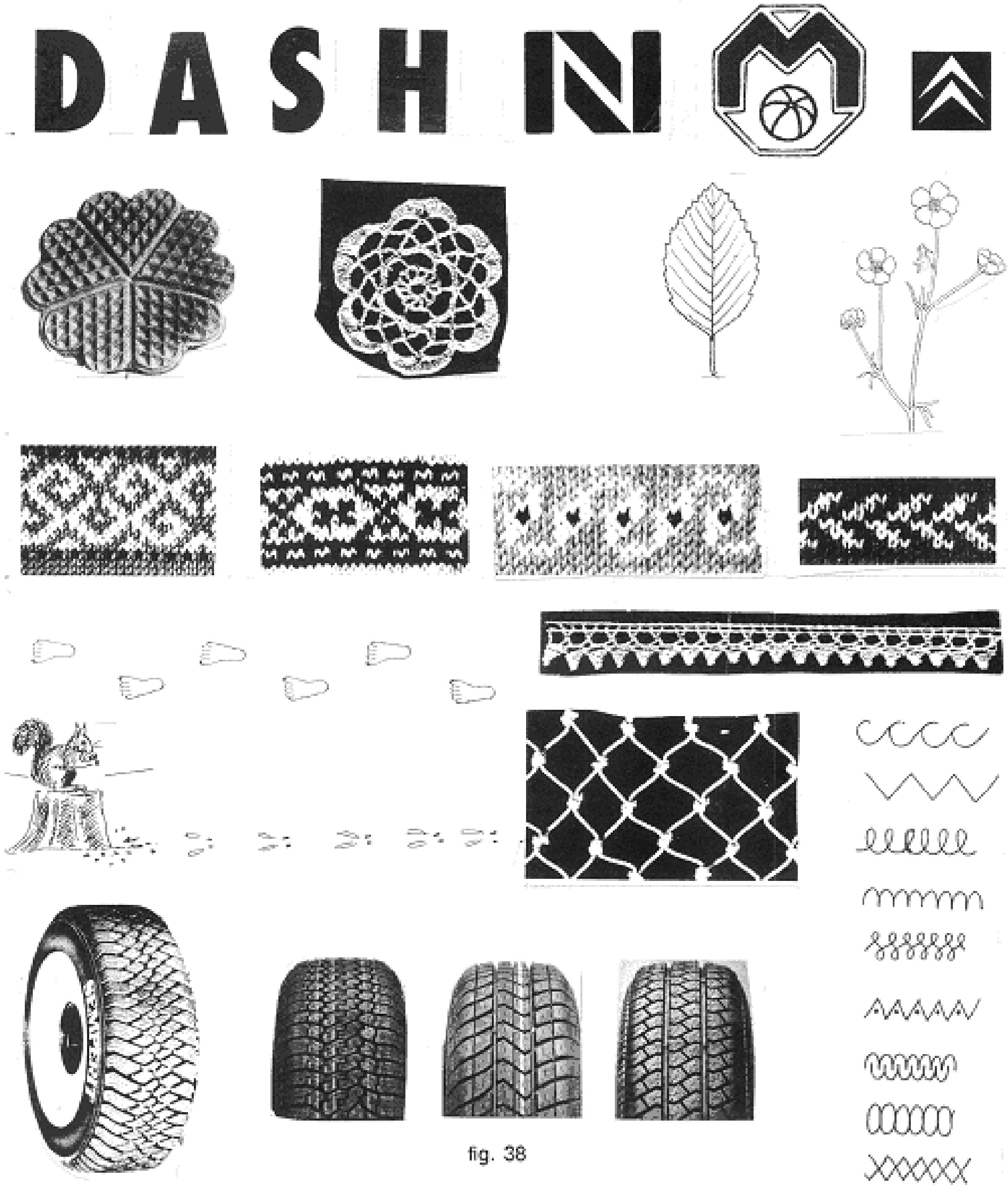


fig. 38

Symmetri er et emne der en kan integrere mønsterplanens hovedemner problemløsning, geometri og datalære. I problemløsning og i datalære har en bruk for å finne oppskrifter for prosessen en skal følge for å løse problemet eller lage programmer. Slike oppskrifter kalles algoritmer. Algoritmer har alltid vært brukt i matematikkundervisningen, f.eks. algoritmene for addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon. Men begrepet har nå fått et utvidet innhold. La oss illustrere ved å lage en algoritme for tegning av emblemet $\mathbf{C}_5$ i fig. 39. Premissene for algoritmen og algoritmen selv kan virke kunstig og komplisert. Men du vil snart se bakgrunnen for dette.

Vi går ut fra at vi har et tegneredskap som vi kan dirigere til å gjøre bestemte ting. Vi kan få det til å gå til bestemte steder i planet, vi kan få det til å innta bestemte retninger eller vi kan be det tegne en figur. Dette abstrakte tegneredskapet vil vi kalle "blyanten". Vi vil illustrere blyanten ved å bruke en pil. Pilens retning er da blyantens retning, og pilespissen markerer punktet blyantspissen befinner seg i.

0. Start ved å la blyanten ha en bestemt retning i et bestemt punkt. Punktet er sentret i emblemet.

Gjenta dette 5 ganger:

1. Flytt blyanten 5 enheter sidelengs til høyre og 10 enheter i blyantretningen uten å tegne. (Kommentar: Da blyanten har samme retning etter flyttingen som da den startet sier vi at den har gjort en **retningsstabil** tur).
2. Tegn haken. Følg haken tilbake til startpunktet for tegning av haken, og slik at også retningen er den samme etter at tegneturen er utført. (Kommentar: Vi sier at blyanten har gjort en **posisjonsstabil** tur).
3. Flytt blyanten 5 enheter sidelengs til venstre og 10 enheter motsatt blyantretningen. Du er nå tilbake i sentret for emblemet, og har samme retning som da den sist var i sentret.
4. Drei blyanten om sentret en vinkel lik 72^o (det samme som 360^o : 5).

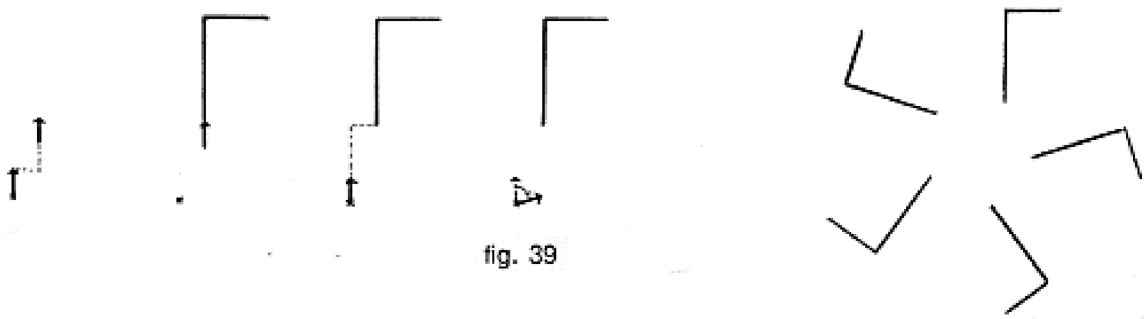


fig. 39

Med passende valg av navn på prosessene kan vi komprimere algoritmen slik:

Gjenta 5 ganger:
flytt (5, 10), hake, flytt (-5, -10), høyre 360:5

eller: [flytt (5, 10), hake, flytt (-5, -10), høyre 360:5]^5.

I denne formen er algoritmen direkte oversettbar til programmeringsspråket LOGO. Prosessen "høyre" er innebygget som en kommando i LOGO. Det får en trekantet figur på skjermen, som simulerer blyanten, til å dreie til høyre så mange grader som tallet bak "høyre" viser. Prosessene "flytt" og "hake" finnes ikke innebygget i LOGO-språket, men du kan selv lage de som **prosedyrer** idet du tar i bruk de prosessene (kommandoene) som finnes innebygget. De kan se slik ut:

```
PROS flytt :a :b
    opp høyre 90 fram :a venstre 90 fram :b
SLUTT

PROS hake
    ned fram 20 høyre 90 fram 12 tilbake 12 venstre 90 tilbake 20
SLUTT
```

opp, ned, venstre, fram og tilbake er eksempler på innebyggete kommandoer i LOGO, slik at blyanten "forstår" hva som skal gjøres når den får disse kommandoene. "opp" betyr at blyanten skal løftes, slik at den ikke tegner, "ned" at den skal kunne tegne, "fram" ("tilbake") at blyanten går fram (tilbake) så mange enheter som tallet bak angir. Dersom blyanten er i ned-status, vil den tegne samtidig med at den går fram (tilbake), er den i opp-status, tegner den ikke.

Symbolene a og b er symboler (navn) for variable, :a er symbol for verdien av variabelen a, :b for verdien av b. Skal du få blyanten til å bevege seg 5 til høyre og 10 i blyantretningen må du gi kommandoen **flytt 5 10**. Ved denne kommandoen vil **fram :a** da bety **fram 5**, siden a er gitt verdien 5.

Programmet, eller prosedyren for $\mathbf{C}_5$ - figuren blir da slik, idet "gjenta" også er en innebygget kommando i LOGO:

```
PROS c5 :a :b
    gjenta 5 [flytt 5 10 hake flytt -5 -10 høyre 360/5]
SLUTT
```

Vi ser det som er en vesentlig ting ved problemløsning (og programmering): Et problem løses ved at det spaltes opp i delproblemer som tilsammen vil gi løsningen. Her vil **c5** spaltes opp i deler som består av **flytt, hake** og **høyre.**

Løsningen slik vi har gitt den for å tegne dette enkle emblemet, gir også metoden for å la datamaskinen tegne et vilkårlig **C** - emblem. Da er det flere "størrelser" enn flyttlengdene a og b som skal kunne variere. En må **generalisere**, slik at en kan tegne et $\mathbf{C}_n$ - emblem for en vilkårlig verdi av variabelen n. Likeledes må en generalisere "hake" slik at den betraktes som en spesiell verdi av en variabel, f.eks med variabelnavnet "motiv". En slik generalisering fører til en prosedyre **cn** som kan gis slik utforming:

```
PROS cn :n :a :b :motiv
    gjenta :n [flytt :a :b utfør :motiv flytt -1*:a -1*:b høyre 360/:n]
SLUTT
```

"utfør" er en innebygget kommando i LOGO. Verdien til "motiv" skal være en figur som tegnes i en posisjonsstabil tur, altså som nevnt slik at start- og endepunkt er det samme, og at retningen til blyanten er den samme etter turen.

Med denne prosedyren vil du få tegnet $\mathbf{C}_5$ - emblemet over ved å gi kommandoen

```
cn 5 5 10 [hake]
```

Du vil se at dette stemmer med instruksjonen i cn - prosedyren. Den vil nemlig da bli seende ut slik:

```
gjenta 5 [flytt 5 10 utfør [hake] flytt -5 -10 høyre 360/5]
```

Figuren nedenfor fremkommer ved å gi kommandoen

cn 5 0 0 [gjenta 5 [fram 40 høyre 72]]

Verdien av motiv er uttrykket i hakeparentesen. Figuren som uttrykket gir er en regulær femkant. Denne tegnes da 5 ganger idet den etter hver gang dreier 72^{o}.

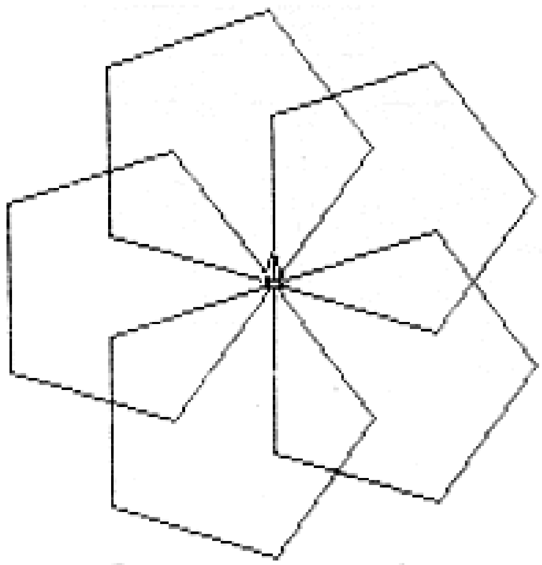


fig. 40

Litteratur

Breiteig, T.: *Isometrier i planet*. Kristiansand lærerhøgskole.
Breiteig, T.: *Symmetri og mønster i planet*. Kristiansand lærerhøgskole 1982.
Breiteig/Venheim: *Matematikk for lærere*. Bind 2. Aschehoug. Tanum-Norli 1984.
Budden: *The Fascination of Groups*. Cambridge University Press 1972.
Grünbaum/Shephard: *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman and Company.
Kildahl, K: *Ornamentale og abstrakte uttrykksformer i norsk tre- og metallkunst*. Grøndahl & Søn Forlag A.S. Oslo 1961
Mira Math Co.: *Math Activities for Elementary School,* og *Activities for Secondary School Geometry*.
Begge: Cochranes of Oxford Ltd. Seafield, Oxford OX85NY, England.
Perander, J: *Dynamisk geometri*. Tromsø lærerhøgskole 1989.
Skolöverstyrelsen: *Basfärdigheter i matematik*. Lieber AB.
Walter: *The Mirror Puzzle Book*. Tarquin Publications, Stradbroke, Diss, Norfolk IP21 5JP, England.
Weyl: *Symmetri*. Artikkel i Sigma bd 4. Forum. Stockholm.