UiT Norges arktiske universitet

Fakultet for naturvitenskap og teknologi
Institutt for matematikk og statistikk

Innsikt i matematisk problemløsning

En kvalitativ analyse av videregåendeelevers besvarelser på problemløsningsoppgaver.

Elias René Valøy

Masteroppgave i matematikk ved lektorutdanningen, trinn 8 – 13. MAT – 3907. Juni 2022

Sammendrag

Hensikten med denne studien er å se på hvordan elever arbeider med matematiske problemløsningsoppgaver. Gjennom studien har jeg besvart problemstillingen: *Hvordan oppnår elever innsikt gjennom arbeid med matematiske problemløsningsoppgaver?*

Studien er gjennomført som en kvalitativ analyse av elevbesvarelser på en videregående skole. Datamaterialet er transkriberte lydopptak samt elevnotater. Deltakerne er syv elever som alle går tredje og siste år på videregående.

Det teoretiske rammeverket i studien er innenfor problemløsning med hovedfokus på *logiske* modeller hvor analytiske metoder brukes, matematisk kreativitet og innsikt, med hovedfokus på hvordan dette oppnås gjennom problemløsningsprosesser.

Resultatene viser at de *logiske* problemløsningsmodellene har mangler som gjør at de ikke klarer å beskrive problemløsningsprosesser fullt ut. Noe som er samsvarende med den seneste forskningen på området. Manglene kan fylles ved hjelp av teori på området matematisk kreativitet. Det kan dermed se ut til at analytiske og kreative prosesser kan kombineres for best å beskrive hvordan innsikt oppnås gjennom problemløsningsprosesser.

Forord

Denne masteroppgaven er et resultat av mine fem år som lektorstudent ved Universitet i Tromsø. Å skrive en masteroppgave har vært utfordrende, frustrerende, morsomt og lærerikt.

Først vil jeg rette en stor takk til Anne Birgitte Fyhn, Institutt for lærerutdanningen og pedagogikk, for god og kyndig veiledning underveis i arbeidet med denne oppgaven.

Videre vil jeg takke min samboer for støtte gjennom det siste året.

En stor takk går også til de frivillige elevene, uten dere ville gjennomføringen av studien vært umulig.

Takk til alle medstudenter for fine studieår sammen.

Tromsø, mai 2022.

Elias René Valøy

Innholdsfortegnelse

Tabelliste

Figurliste

1 Introduksjon

Gjennom min studietid på Universitet i Tromsø har jeg blitt introdusert for mange teorier innenfor matematikkdidaktikk. Områdene som i størst grad fanget min oppmerksomhet var problemløsning og matematisk kreativitet. Disse teoriene traff mange av mine opplevelser som matematikkstudent helt fra grunnskolen og opp til universitetsstudier, samtidig som ingen av de fult ut kunne beskrive hvordan jeg opplever arbeid med matematiske oppgaver. Tanken om å kombinere disse teoriene dukket opp underveis i studiene, noe jeg forklarer nærmere i delkapittel 1.1. Videre er også problemløsing i matematikk noe som blir mer aktuelt nå som den nye læreplanen implementeres (Kunnskapsdepartementet, 2018). På bakgrunn av dette ble jeg motivert til å studere det nærmere i min masteroppgave.

1.1 Bakgrunn

I kjerneelementene for fag presenterer Kunnskapsdepartementet (2018) seks kjerneelementer i matematikk:

- Utforskning og problemløsning
- Modellering og anvendelser
- Resonnering og argumentasjon
- Presentasjon og kommunikasjon
- Abstraksjon og generalisering
- Matematiske kunnskapsområder

Kjerneelementene er nye for læreplanen. Da jeg begynte på lektorutdanningen ble jeg introdusert for disse kjerneelementene som noe jeg skulle implementere i min undervisning. Av disse kjerneelementene var det problemløsning jeg hadde minst kunnskap om og kjennskap til. Gjennom mine år i både grunnskole og videregående skole kunne jeg ikke huske at dette var noe jeg hadde gjort aktivt selv om jeg kunne kjenne meg igjen i mange av elementene innenfor problemløsing.

Kunnskapsdepartementet beskriver problemløsning som: «Problemløsing handler om at elevene utvikler en løsningsmetode på et problem de ikke kjenner fra før.» (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15). Videre forklarer Kunnskapsdepartementet at elevene skal lære å bryte ned problemene i delproblemer som kan løses systematisk. Dette er en måte å arbeide på som har vært lite i fokus gjennom min skolegang, men som jeg ble mer oppmerksom på etter hvert som jeg studerte matematikk på universitetsnivå.

Underveis i en praksisperiode på studiet skulle vi som praksisstudenter gjennomføre en FoU-oppgave. I denne oppgaven hadde jeg valgt å se på hvordan elevene arbeidet med problemløsningsoppgaver. Gjennom denne FoU-oppgaven innså jeg at det var stor sammenheng mellom matematisk kreativitet og hvordan elever arbeider med matematiske problemløsningsoppgaver. Etter hvert som jeg jobbet mer med datamaterialet i denne oppgaven så jeg at problemløsning og matematisk kreativitet på mange måter utfyller hverandre. Ettersom dette var en relativt liten oppgave ble jeg motivert til å fortsette med arbeid på samme område videre i masteroppgaven min.

Tidlig på høsten 2021 ble jeg introdusert for Haavold og Sriramans (2021) artikkel: *Creativity in problem solving: integrating two different views of insight.* Etter å ha lest denne artikkelen ble jeg inspirert til å rette min studie i en likende retning. I deres studie forklarer Haavold og Sriraman at forskning på matematisk kreativitet og problemløsning i stor grad har vært delt i to (Haavold & Sriraman, 2021). Forskning på problemløsning har i hovedsak fokusert på de analytiske og systematiske metodene som også Kunnskapsdepartementet (2018) bruker når de beskriver problemløsning som noe en kan bryte ned i deloppgaver og løse systematisk. Mens kreative modeller i større grad fokuserer på «aha»-opplevelser (Haavold & Sriraman, 2021; Weisberg, 2015). I min studie forsøker jeg å se om de kreative og analytiske prosessene kan kombineres for å forklare arbeid med problemløsningsoppgaver bedre.

1.2 Problemstilling

Formålet med denne studien er å få bedre forståelse av hvordan elever arbeider med og løser problemløsningsoppgaver. Ved å analysere elevbesvarelser med hensyn til både problemløsningsteori, matematisk kreativitet og innsikt er målet å kunne avdekke hvordan elever arbeider med matematiske problemløsningsoppgaver. På bakgrunn av dette er problemstillingen:

> *Hvordan oppnår elever innsikt gjennom arbeid med matematiske problemløsningsoppgaver?*

For å avgrense studien har jeg valgt å spisse problemstillingen med et underspørsmål:

> *Kan innsikt oppnås som et resultat av analytisk fremgangsmåte?*

Jeg har valgt dette underspørsmålet for å ha et mer spisset fokus i arbeidet med analysen og for å kunne kode data på en hensiktsmessig måte, se kapittel 3.5. Når det kommer til forskning på hvordan man oppnår innsikt i problemløsningsoppgaver har den ledende forklaringen vært at dette skjer gjennom underbevisste prosesser, noe jeg forklarer nærmere i kapittel 2.3. Derfor er jeg interessert i å se om det samme også kan oppnås ved hjelp av analytiske metoder, se kapittel 2.1.2.2, og om disse to synspunktene kan kombineres for å gi en dypere forklaring.

For å besvare problemstillingen skal elevene forsøke å løse to problemløsningsoppgaver hvor noen skal arbeide alene og noen i par. Oppgavene er designet slik at de ikke har en intuitiv og «enkel» løsning slik at elevene, forhåpentligvis, må forsøke flere forskjellige fremgangsmåter. Problemløsningsseansene vil foregå som et oppgavebasert intervju hvor lydopptak og elevbesvarelser benyttes som datamateriell, se kapittel 3 for mer informasjon om metoden.

1.3 Struktur i oppgaven

Masteroppgaven er delt inn i seks kapitler. Det første kapitlet omhandler oppgavens bakgrunn, problemstilling og oppbygning. Deretter presenteres teorien som skal benyttes for å best mulig belyse problemstillingen i kapittel 2.

I kapittel 3 presenteres de metodiske valgene som er gjort for å kunne besvare problemstillingen på best mulig måte. De metodiske valgene omhandler selve metodevalget, utvalg, oppgavene, hvordan data blir samlet inn og analysert, styrker og svakheter, samt validitet, reliabilitet og etikk.

Kapittel 4 består av resultatene fra studien sett i lys av teorien fra kapittel 2. Deretter vil resultatene diskuteres og oppsummeres i kapittel 5. Til slutt vil jeg reflektere rundt resultatene og se på om studiene kan være med på å danne et grunnlag for videre forskning.

2 Teori

Teorien i min studie er tredelt. Jeg vil bruke problemløsningsteorier for å undersøke hvordan deltakerne arbeider med problemløsningsoppgaver. Samtidig vil jeg bruke teorier innenfor matematisk kreativitet for å se på hvordan deltakerne skifter mellom forskjellige fremgangsmåter. Deretter vil jeg i lys av dette se på teorier om innsikt gjennom problemløsningsoppgaver og se om innsikten deltakerne oppnår kan beskrives og ses på som et resultat av analytiske fremgangsmåter.

2.1 Problemløsning

Innenfor matematikkdidaktikk finnes det flere problemløsningsmodeller og teorier. Innholdet i teoriene kan spores langt tilbake i tid og har deretter utviklet seg i flere forskjellige underkategorier. Gjennom dette kapitlet skal jeg presentere *kreative* modeller og *logiske* (eller analytiske) modeller. Hovedfokuset i oppgaven vil være på den *logiske* modellen, men det vil være nyttig å ha kjennskap til *kreative* modeller for å få et bredt bilde på hvordan problemløsning kan utføres.

2.1.1 Definisjon av matematisk problemløsning

George Pólya skal ha sagt under en konferanse om matematisk problemløsning at et av målene gjennom undervisning i problemløsning er å få studentene til «å bruke hodet» (Lester, 1985). På mange måter en svært enkel måte å se på matematisk problemløsning, men samtidig noe som kan være vanskelig å få til. For å forstå hva matematisk problemløsning er må jeg først formulere hva jeg mener med *problemløsning*.

En vanlig måte å definere et problem på er: når man blir konfrontert med noe man ikke umiddelbart vet hvordan skal løses, har man et problem (Newell & Simon, 1972). Problemet kan være både abstrakt, som et matematisk bevis, eller noe så basalt som å få tak i mat. Lester (2013) går videre med å definere at den vanligste måten å se på et problem er at vi har to ingredienser til stede: det er et mål og et individ (eller en gruppe) som ikke umiddelbart vet hvordan målet skal oppnås. Videre forklarer Lester at det vi må se dypere på hvilke prosesser vi gjennomgår under problemløsning. Problemløsning handler om å bruke tidligere opplevelser, kunnskaper, liknende problemer, mønster og intuisjon for å generere et svar på det gitte problemet (Lester, 2013). Måten Lester beskriver problemløsning viser at det er komplekst. På grunnlag av dette må en god problemløser har en solid «bank» fylt med mange egenskaper, erfaringer, opplevelser, dyp kunnskap, evne til å bruke forskjellige representasjonsformer og samtidig en evne til å forstå hvordan dette kan brukes for å løse problemet.

Schoenfeld (1992) beskriver matematikk som et levende fagområde hvor vi er ute etter å forstå mønster og hvordan verden rundt oss henger sammen. Samtidig som dette høres «fritt» ut baserer matematikken seg i stor grad på regler som må innlæres. Til tross at mange regler må innlæres er det viktig at studenter av matematikk ikke får disse innlært gjennom rutinepreget undervisning (Schoenfeld, 1992). Problemløsning skal være med på å oppmuntre elevene til å tenke matematisk. Gjennom en rutinepreget undervisning av matematikk lærer elevene å memorere prosedyrer, formler samt å gjøre oppgaver. Gjennom problemløsning er tanken at studenten skal lære seg å *tenke matematisk*, som vil si å søke etter løsninger, undersøke mønster og formulere konjekturer gjennom generalisering (Schoenfeld, 1992). Schoenfeld mener at undervisningen i matematikk i større grad bør fokusere på denne formen for matematikkundervisning slik at studenter av matematikk kan forså at matematikk i stor grad handler om mønster og ikke bare tall. Tall er ofte det vi bruker for å beskrive fenomener og mønster, men forståelsen ligger bak tallene.

2.1.2 Klassiske problemløsningsmodeller

Problemløsning innenfor matematikk skal være med på å hjelpe elevene … (se kap. 2.1.1). På bakgrunn av dette har matematisk problemløsning vært et området som har opptatt forskere i flere tiår (Rott et al., 2021). Pólya har med «How to solve it» vært en foregangsmann på området. Gjennom forskningen har det dukket opp flere forskjellige problemløsningsmodeller som på best mulig vis prøver å forklare hvilke prosesser som skjer gjennom en problemløsningsoppgave. De forskjellige modellene har noen likheter, men er også svært ulike på enkelte områder. Såpass ulike at de kan deles inn i forskjellige kategorier. Vi har det som kalles *kreative* modeller, *logiske* modeller og *beskrivende* modeller (Rott et al., 2021). De *beskrivende* modellene er noe Rott et al. (2021) presenterer i sin studie og ikke noe jeg vil fokusere på.

2.1.2.1 *Kreative* problemløsningsmodeller

Kreative modeller kan spores tilbake til Henry Poincaré og hans beskrivelse av sine egne problemløsningsprosesser (Rott et al., 2021). Det som er felles for de *kreative* modellene er at de gir underbevisste tanker og prosesser mye av æren for at de kommer frem til riktig svar. Poincaré (1948) beskriver denne opplevelsen som en plutselig illuminering som et resultat av en lang prosess med underbevisst arbeid. De *kreative* modellene kan deles opp i fire faser; *preparation, incubation, illumination* og *verification.*

Preparation er fasen hvor problemløseren arbeider med et problem over tid. Etter hvert som tiden går og ingen resultater er tilfredsstillende går man over i fase to, *incubation.* Denne fasen handler om at problemløseren gjør og tenker på andre ting enn problemet. Etter hvert som tiden går skal den tredje fasen komme, *illumination.* Her skal problemløseren få en ide, tilsynelatende ut fra ingenting som skal kunne gi et svar på problemet. Denne fasen er hvor de underbevisste prosessene foregår. Til slutt må problemløseren inn i fase fire, *verification.*

Etter svaret har åpenbart seg for problemløseren må svare sjekkes for å bekrefte at det er en reell løsning på problemet. (Rott et al., 2021)

For å beskrive hvordan en slik problemløsningsprosess kan forgå kan vi se på Pioncarés historie om hvordan han arbeidet med sin første avhandling om fuchsiske funksjoner. Poincaré (1948) gikk på kontoret hver dag å prøvde seg frem med mange kombinasjon, flere timer om dagen, hver dag uten hell. Men under en søvnløs natt vandret tankene hans og plutselig, ut av ingenting kom en ide til han. Dagen etter dro han på kontoret for å verifisere at resultatet stemte, noe det gjorde. Etter å ha arbeidet videre med disse funksjonene møtte han nye vanskeligheter. På et tidspunkt dro Poincaré ut på en reise for å ta del i en geologikonferanse. Dette gjorde at han tenkte på andre ting enn arbeidet han etterlot hjemme. På et tidspunkt skulle han ut på en kjøretur og i det han gikk inn i bilen kom en ide til han. Også denne skulle vise seg å være korrekt og han kunne jobbe videre (Poincaré, 1948). Videre understreker Poincaré (1948) at den beste måten å løse et problem på er å arbeide med problemet helt til en møter en hindring eller blindvei, forså å gjøre andre ting og vente på at resultatet skal komme som et resultat av underbevisste tankeprosesser.

I dette eksempelet beskriver Poincaré hvordan han selv arbeidet med et matematisk problem. En av nøkkelfaktorene i slike kreative problemløsningsmodeller er at mye av det som skjer er underbevisst, og at det skjer i etterkant av at problemløseren har møtt på en blindvei (Haavold & Sriraman, 2021; Poincaré, 1948; Rott et al., 2021; Weisberg, 2015). På bakgrunn at dette har det av mange vært kritikk mot de *kreative* modellene, både fordi *incubation*-fasen tar lang tid og fordi det er svært vanskelig å måle og analysere de underbevisste handlingene.

2.1.2.2 *Logiske* modeller

Logiske eller analytiske modeller kan spores tilbake til John Dewey på starten av 1900-tallet. Det felles for de *logiske* modellene er at de i stor grad baserer seg på analytiske metoder (Rott et al., 2021). Videre i teksten vil jeg bruke begrepet *analytiske metoder* for å vise til arbeid som kan beskrives ved hjelp av teori om de logiske modellene. Veien til et svar på problemet skal komme av en grundig og systematisk fremgangsmåte som kan deles inn i fem faser: *suggestion*, *intellectualization*, *the guiding idea and hypotesis, reasoning* og *testing by action* (Rott et al., 2021). Fasene kan til forveksling være svært like fasene i de *kreative* modellene, men innholdet i hver fase er annerledes.

Suggestion er den første fasen og omhandler å møte på problemet, eller å få det tildelt. *Intellectualization* kan ses på som å forstå problemet. Her må problemløseren sette seg grundig inn i problemet og virkelig prøve å forstå hva det omhandler (Pólya & Conway, 2014; Rott et al., 2021). *The guiding ideas and hypothesis* kan beskrives som der man prøver forskjellige løsninger og fremgangsmåter, mens *reasoning* er ment som der problemløseren ser om noen av fremgangsmåtene virker. Til slutt kommer man til *testing by action* som er fasen hvor problemløseren skal forsøke å verifisere resultatet (Rott et al., 2021). En litt revidert og videreutviklet variant av denne *logiske* problemløsningsmodellen er beskrevet av Pólya og vil være hovedfokuset videre i datanalysen. Denne videreutviklingen av modellen består i likhet med de *kreative* modellene av fire faser; *understanding, devising, carrying out* og *looking back* (Pólya & Conway, 2014; Rott et al., 2021).

Pólyas *logiske* modell kan anses som en analytisk fremgangsmåte for å komme frem til en løsning på et gitt problem. Underveis i prosessen skal problemløseren bruke tid på å planlegge sitt neste trinn ved hjelp av den informasjonen hen har på det tidspunktet. Etter hvert som flere forsøk viser seg å ikke gi et tilfredsstillende resultat vil problemløseren oppnå mer kunnskap om problemet, i form av at hen vet hva som ikke fungerer. Dette fører til at problemløseren får mer kunnskap om problemet underveis, og vil dermed være bedre rustet for å til slutt finne en tilfredsstillende fremgangsmåte (Pólya & Conway, 2014)

1. *understanding:* i denne prosessen skal problemløseren forsøke å få en oversikt over hva oppgaven faktisk spør om: Hva er ukjent? Hva er kjent? Hvilken data finnes? Her kan det være lurt å lage figurer og skrive ned all relevant informasjon for oppgaven. Etter å ha forstått oppgaven godt nok kan problemløseren gå videre til steg to.
2. *devising:* her handler det om å finne en sammenheng i dataen som oppgis i oppgaven, og undersøke hva som er ukjent. Ofte kan det være fordelaktig å tenke tilbake om en har møtt en lik eller en liknende oppgave tidligere. Hvis problemløseren har gjort en liknende oppgave kan det være fordelaktig å bruke algoritmer, teknikker eller tankemåter fra dette i den aktuelle oppgaven. Hvis ikke kan en forsøke å bryte ned oppgaven til mindre deler hvor enkelte deler kan likne på kjente oppgaver, hvor kjente teknikker og algoritmer kan brukes. Etter hvert som denne prosessen pågår, skal en lage en plan på hvordan oppgaven skal gjennomføres.
3. *carrying out:* her er målet gjennomførsel. Planen som ble lagt i steg 2 gjennomføres og problemløseren ser om det kommer et svar ut av det. Videre vil det være nyttig å se om svaret kan bevises og om det er riktig.

4. *looking back:* handler om å se gjennom det som er gjort og vurdere om svaret er gyldig. Hvis svaret er gyldig kan det være nyttig å se på om det er andre måter, og kanskje enklere måter en kunne kommet frem til det samme svaret på. Videre bør utøveren forsøke å se om svaret på oppgaven lar seg generalisere. Hvis svaret skulle være feil må stegene gjøres på nytt.

2.2 Matematisk kreativitet

For skoleelever og matematikere kan matematisk kreativitet være et vagt begrep som er vanskelig å forstå. Innenfor forskning har det vært forskjellige synspunkter på hvordan vi kan forstå matematisk kreativitet (Haylock, 1987, 1997; Haavold & Sriraman, 2021; Rott et al., 2021; Sriraman, 2004). Tidligere ble det sett på i sammenheng med matematisk begavelse, og dermed var det bare de som var begavet innenfor matematikk som ble sett på som matematisk kreative (Haylock, 1997). Som en forenkling beskriver Sriraman (2004) matematisk kreativitet som evnen til å produsere originalt arbeid.

Divergent thinking er en måte å se på matematisk kreativitet. Dette kan beskrives ved at man har flere tankeprosesser som går i forskjellige retninger. (Haylock, 1997; Runco, 2020). En slik måte å tenke på skjer ofte spontant og har tidligere blitt brukt som en måte å måle noens evner til kreativ tenking (Runco, 2020).

Ervynck (1991) beskriver hvordan vi kan se på matematisk kreativitet som en tretrinnsmekanisme. Den første fasen handler om å kunne bruke fundamentale matematiske regler uten noen form for kunnskap om dets fundament. Den andre fasen handler om å kunne bruke matematiske algoritmer og teknikker gjentatte ganger for å oppnå et mål. Den tredje og siste fasen handler om å kunne være *kreativ* og bruke andre ting en innlærte algoritmer og teknikker for å løse et problem (Ervynck, 1991).

For å oppmuntre elever og studenter i matematikk til å tenke kreativt, er det viktig å gi undervisning og problemer som legger til rette for en slik måte å tenke på (Ediger, 2000; Haylock, 1997). Egenskaper som er assosiert med kreativitet i besvarelser på problemløsningsoppgaver er; oppfinnsomhet, uavhengighet, originalitet, fleksibilitet, forming av nye assosiasjoner og divergerende produksjon (Haylock, 1997). Det er mange aspekter å ta hensyn til, og det kan dermed være vanskelig å bruke disse egenskapene til å vurdere matematisk kreativitet. Haylock (1997) beskriver to hovedområder innenfor matematisk kreativitet; *overcoming of fixations* og *divergent product.* Disse hovedområdene er dekkende for de overnevnte egenskapene innenfor kreativitet og gjør det enklere å vurdere matematisk kreativitet.

2.2.1 Overkomme fikseringer

Overcoming of fixations handler på mange måter om fleksibilitet. Haylock (1997) beskriver hvordan utdannede matematikere skårer høyere på fleksibilitet enn uutdannede. Denne fleksibiliteten kommer godt til syne spesielt under arbeid med problemløsningsoppgaver. *Overcoming of fixations* betyr direkte oversatt «overkomme fikseringer», disse fikseringene kan ofte være det å låse seg til en bestemt fremgangsmåte selv om den viser seg å ikke være fruktbar (Haylock, 1997). For at en problemløser skal komme seg ut av et slikt låst tankesett krever en fleksibilitet som også kan ses i sammenheng med *divergent thinking* og kreative problemløsningsmodeller. Haylock (1997) forklarer at det er når problemløseren skal bevege seg fra *incubation* til *illumination* det er kritisk å kunne løsrive seg fra et låst tankesett. Videre understreker han at når problemløseren ikke klare å komme seg videre til *illumination*-fasen er det ofte fordi tankesettet er fiksert på ikke-produktive fremgangsmåter. Videre introduserer Haylock to forskjellige typer fikseringer; *content-universe fixation* og *algorithmic fixation.*

Content-universe fixation beskriver en måte matematikkutøvere begrenser sin egen tankegang på. En legger unødvendige restriksjoner på seg selv og sin egen måte å løse problemer på gjennom å ikke klare å utforske flere metoder (Haylock, 1997). Et eksempel hentet fra Haylock (1997) «for exampel, they might find two numbers with sum 10 and difference 4. Later in the sequence they are asked to find, for example, two numbers with sum 10 and difference 10. A surprising number of pupils fail on this…» (s. 69) Her er det svært mange som feiler fordi de ikke klarer å se at 0 og 10 kan brukes. En forklaring kan være at de ikke anser 0 som et tall (forsøket ble gjennomført på 11 og 12-åringer). Videre ble deltakerne spurt om å finne tall med sum 9 og differanse 3, men svært få klarte det fordi de ikke anså desimaltall (3,5 og 5,5) som tall (Haylock, 1997)

Algorithmic fixation kan ses på som en måte å låse seg til en tidligere velfungerende algoritme eller fremgangsmåte (Haylock, 1997). Mye av det elever og studenter lærer i matematikk krever algoritmer eller innlærte fremgangsmåter for å løses, men disse måtene å løse oppgaver på feiler når de skal implementeres på problemløsningsoppgaver. Ofte vil en problemløser først prøve å bruke en fremgangsmåte som tidligere har fungert på liknende oppgaver. Hvis problemløseren ikke har blitt opplært i det Schoenfeld (1992) kaller *å tenke matematisk* kan det være vanskelig å bryte ut av denne algoritmiske tankegangen og problemløseren kan oppleve å møte en blindvei.

Haylock (1997) beskriver denne algoritmiske fikseringen gjennom et eksempel. I eksempelet skulle elevene måle en gitt masse ved hjelp av en vekt og tre sandposer med forskjellige masser. De blir først gitt et eksempel på hvordan de kan måle opp 24 g ved å ha sandposer på 20 g, 9 g og 5 g, her kan de legge 20 g og 9 g på den ene siden av vekta og 5 g på den andre siden. Deretter får elevene flere oppgaver med forskjellige masser som skal måles opp. Til tross for at flere av oppgavene kan løses på langt enklere måter enn det gitte eksempelet velger de aller fleste å fortsette med denne fremgangsmåten. Oppsiktsvekkende er det at når oppgavene er å veie ut 20 g ved hjelp av sandposer på 32 g, 20 g og 8 g velger så mye som 90% å plassere 32 g og 8 g på den ene siden og 20 g på den andre (Haylock, 1997).

2.2.2 Divergerende produksjon

Bruken av divergerende produksjon er en måte å måle kreativitet (Haylock, 1987, 1997). Dette blir som oftest målt gjennom en åpen oppgave som kan ha mange forskjellige svar. Haylock (1987) bruker eksempelet «nevn alle måter en murstein kan brukes» (s. 67, min oversettelse). Slike oppgaver har som mål å bedømme resultatet med hensyn til fleksibilitet, originalitet og riktighet. Når det kommer til denne måten å måle kreativitet på er man mer opptatt av resultatet enn prosessen.

Divergerende produksjon-oppgaver står i sterk kontrast til de vanlige oppgavene matematikkstudenter møter på, hvor de blir bedt om å finne ett, og bare ett korrekt svar. På bakgrunn av dette har det blitt stilt spørsmålstegn med hvorfor vi skal lære studenter opp til å være kreative innenfor matematikk når målet med den moderne matematikken er å måle deres evne til å finn ett enkelt riktig svar (Haylock, 1987). Som et svar på dette har mange undersøkt hvordan matematisk divergerende produksjon og generell divergerende produksjon henger sammen. Det har vist seg at resultater i divergerende produksjon innenfor matematikk har liten korrelasjon til generell divergerende produksjon, noe som kan tyde på at matematisk divergerende produksjon er en spesifikk egenskap som ikke henger sammen med den generelle (Haylock, 1987).

2.2.3 Forskning på matematisk kreativitet

Sternberg (2000) forklarer at kreativitet kan deles inn i seks forskjellige kategorier; *mystical, pragmatic, psychodynamic*, *psychometric, cognitive* og *social personality.* Jeg skal ikke forklare alle disse, men se nærmere på noen av de kategoriene som er mest aktuell for min studie.

Pragmatic handler i all hovedsak om å produsere kreative resultater (Sriraman, 2004). Sriraman (2004) nevner Pólyas (2014) fokus på bruk av heuristikker for å løse matematikkproblemer som er eksempel på en pragmatisk måte. En annen måte å se på den pragmatiske måten er å sammenlikne den med divergerende produksjon. Sriraman (2004) bruker et eksempel om idemyldring, hvor for eksempel en forretning kaster ut så mange ideer som overhodet mulig i et forsøk på å fange opp den ideen som er mest gunstig.

Psychodynamic går ut på at kreativitet i stor grad er noe som skjer underbevisst (Poincaré, 1948; Sriraman, 2004; Sternberg, 2000). Blant annet faller den *kreative* problemløsningsprosessen under den psykodynamiske kategorien for kreativitetsstudier. Denne måten å se på kreativitet har tilbake i tid vært kritisert fordi den er svært vanskelig å måle, samtidig som det også kan ta lang tid før problemløseren kommer i *illumination*-fasen (Sriraman, 2004). Til tross for dette har denne typen problemløsningsprosesser og kreativitetsmodeller blitt et mer populært forskningsområde i senere tid (Haavold & Sriraman, 2021; Rott et al., 2021).

Cognitive tilnærming er å forsøke å forstå de underliggende mentale representasjonene og prosessene som ligger i den menneskelige tanke. Enkelte har foreslått at kreativitet kun tar i bruk helt ordinære prosesser, men resulterer i originale og ekstraordinære resultater (Sriraman, 2004). Her er tanken at vi allerede har lagret kunnskap i minnet og de kognitive prosessene benytter seg av denne kunnskapen.

Avslutningsvis vil det være nyttig å påpeke at Sriraman (2004) gjennom sin forskning konkluderer med at en variant av en *kreativ* problemløsningsmodell er svært relevant for hvordan deltakerne i hans studie arbeider med problemer. I studien var det profesjonelle matematikere som deltok og flere av disse fortalte om hvordan de noen ganger kunne gå å vente på at løsningen på det problem skulle dukke opp (Sriraman, 2004). Flere av deltakerne forklarte en prosess hvor de jobbet med et problem helt til de møtte på en blindvei, på mange måter likt som Poincaré (1948) beskriver. Etter dette begynte de å arbeide med andre problemer eller gjorde andre ting. Det var i denne fasen at de plutselig gikk fra *incubation* til *illumination*-fasen. Denne plutselige hendelsen kunne skje på de underligste tidspunkt. Noen opplevde det mens de gikk til sengs, mens andre opplevde det mens de var ute på gåtur. En forklarte at det skjedde midt under en samtale med noen andre, en samtale som omhandlet problemet vel og merke (Sriraman, 2004). Etter at denne fasen av *illumination* hadde skjedd brukte samtlige av deltakerne tid på å verifisere om resultatene var korrekte (*verification)* (Sriraman, 2004).

Både de *kreative* problemløsningsmodellene og matematisk kreativitet legger vekt på underbevisste prosesser som skjer, ofte i etterkant av at problemløseren møter på en blindvei (Ervynck, 1991; Haylock, 1987, 1997; Haavold & Sriraman, 2021; Poincaré, 1948; Rott et al., 2021; Sternberg, 2000). Dette er noe Sternberg (2000) forklarer at kommer fra forskning innenfor psykologi og er det han kaller for en *psychodynamic*-prosess. Men noe av problemet med disse underbevisste prosessene er både hvordan de skal detekteres, måles og forklares (Haavold & Sriraman, 2021; Sriraman, 2004; Sternberg, 2000). For å bedre forstå disse prosessene kan det være nyttig å se på forskning innenfor området innsikt (Weisberg, 2015).

2.3 Innsikt

Innsikt gjennom problemløsningsoppgaver har i lang tid vært et interessant forskningsområde for psykologer (Fleck & Weisberg, 2013; Weisberg, 2015). På samme måte som de tidligere nevnte problemløsningsmodellene har forskningen på området vært delt i to. Den ene måten å løse et problem er gjennom en analytisk fremgangsmåte som nevnt i kapittel 2.1, mens den andre er gjennom det som kalles innsikt (Weisberg, 2015). Den analytiske måten å gå frem på baserer seg på reproduktiv tenking og problemløseren bruker løsninger fra liknende problemer og erfaringer som en del av en prosess for å løse problemet (Weisberg, 2015). Gjennom innsikt skal problemløseren oppnå en form for forståelse av problemet slik at underbevisste prosesser skal produsere en ide om hvordan problemet skal løses. Dette skjer ofte i form av en *aha!* opplevelse hvor ideen kommer plutselig og ofte uten forvarsel (Weisberg, 2015). Opplevelsen er veldig lik den Poincaré (1948) beskriver å ha opplevd flere ganger og kan ses i sammenheng med de *kreative* problemløsningsmodellene.

2.3.1 Pågående prosesser

For at problemløseren skal kunne oppnå innsikt må hen gå gjennom en serie av hendelser; *forsøk på løsninger – konsekvent feil – blindvei – restrukturering – aha! – løsning* (Fleck & Weisberg, 2013; Fleck & Weisberg, 2004; Ohlsson, 1992; Weisberg, 2015). I denne sekvensen er *blindveien* og *restruktureringen* det essensielle. Tanken er at problemløseren forsøk mange løsninger uten hell, når hen føler å ha møtt *veggen* skjer det en mental *restrukturering* som ender i en *aha*-opplevelse hvor en mulig løsning åpenbarer seg. Fleck og

Weisberg (2004) forklarer at tidligere kunnskap til oppgaven eller det å møtt på et liknende problem i verste fall kan være til hinder for problemløsningsprosessen. Dette fordi problemløseren kan ende opp med fikseringer underveis i prosessen.

Et av problemene med innsikt-sekvensen er hvordan problemløseren skal komme seg forbi blindveien. Ohlsson (1992) beskriver tre forskjellige måter å gjennomføre *restruktureringen* for å komme seg videre i problemløsningsprosessen. Disse er; *elaboration*, *reencoding* og *constraint relaxation. Elaboration* går ut på at problemløseren må se tilbake på problemet for å se om oppgaven er forstått på riktig måte eller om det finnes informasjon som har blitt oversett i selve oppgaveteksten eller formuleringen av problemet. *Reencoding* handler om at problemløseren må prøve å se på problemet på en ny måte, kanskje må noen deler av problemløserens forståelse endres eller forkastes. *Constraint relaxation* er enkelt forklart å endre fokus mot målet, heller enn selve problemet, hva er det som er målet med oppgaven/problemet (Ohlsson, 1992). Prosesser som alle har en viss overlapp innenfor de *logiske* problemløsningsmodellene.

2.3.2 Weisbergs firetrinns fremgangsmåte

Mye av uenighetene på området rundt analytisk problemløsning og problemløsing gjennom innsikt går ut på at; Ohlsson (1992) mener at problemløsning som foregår uten en *blindvei* og *restrukturering* ikke er oppnådd gjennom innsikt. Samtidig påpeker flere forskere at problemer designet som innsiktsproblemer faktisk kan løses ved hjelp av analytisk fremgangsmåte, og med et tilfredsstillende resultat (Fleck & Weisberg, 2013; Fleck & Weisberg, 2004; Weisberg, 2015). Fleck og Weisberg (2013) fant i sin forskning ut at det var få løsninger som fulgte *blindvei-restrukturering*-metoden. Dermed kunne man på mange måter vært trangsynt og forkastet denne tankemåten (Weisberg, 2015). Men i 2004 foreslo Fleck og Weisberg (2004, s. 1004) en firetrinns fremgangsmåte for å løse problemer på:

1. Problem presented ⇒ match with knowledge ⇒ transfer solution (if no solution available ⇒ #2)
   A. If solution transfers ⇒ problem solved (problem is familiar ⇒ no Aha!)
   B. If solution fails, but new information arises ⇒ #3
   C. If solution fails and no new information arises ⇒ #4
2. Problem presentation ⇒ No transfer ⇒ Analysis ⇒ Solution
   A. No solution ⇒ #4
      Comment: Person works through problem logically, trying to develop solution; if successful, problem solved directly; no impasse, no restructuring; however, Aha! is possible.

Top-Down Restructuring

3. New information from failure ⇒ New match with knowledge ⇒ New method (Restructuring)
   A. If new method leads to solution ⇒ stop
   B. If new method leads to failure, but more new information arises from the failure ⇒ #1
   C. If new method fails and no new information arises ⇒ #4
      Comment: Restructuring based on feedback from problem; no impasse, but Aha! possible.

Ohlsson's Bottom-Up Restructuring

4. Impasse: "Switch when stuck?"
   A. If bottom-up restructuring leads to new information ⇒ #1; if no new information arises ⇒ stop
      Comment: Attempt to acquire new information from bottom up, through reencoding, elaboration, and constraint relaxation

Figur 1 - Firetrinns fremgangsmåte innen problemløsning.

Trinn 1 er det som kalles *transfer solution,* trinn 2 er *heuristic solution,* trinn 3 er *restructuring* mens trinn 4 er å nå en blindvei (Fleck & Weisberg, 2013). Disse trinnene kan ses på som en stegvis prosess problemløsere går gjennom mens de forsøker å løse et problem (Fleck & Weisberg, 2013). Men i motsetning til Ohlssons (1992) tanke om at en løsning uten *blindvei* og *restrukturering* ikke er en gyldig løsning som resultat av innsikt foreslår Fleck og Weisberg (2013; 2004) at problemløseren ikke nødvendigvis må møte på en *blindvei* og deretter gjøre en *restrukturering* for å oppnå en løsning gjennom innsikt.

Weisberg (2015) beskriver steg 1-3 som den analytiske delen av en problemløsningsprosess. Disse prosessene finner sted i de fleste fremgangsmåter. Weisberg (2015) forklarer at steg 1 alltid oppstår i en problemløsningsprosess. Hvis problemløseren har arbeidet med en liknende oppgave eller problem kan hen forsøke å bruke samme fremgangsmåte, og på denne måten oppnås en løsning gjennom trinn 1. Hvis det ikke finnes en tilfredsstillende løsning i trinn 1 kan problemløseren gå videre til trinn 2. Her handler det om å bruke heuristikker som for eksempel: arbeide baklengs, bryte ned problemet til mindre underproblemer, finne analogier eller forsøke å bruke matematiske formler på problemet (Weisberg, 2015). Etter å ha gjennomført trinn 1 og 2 kan problemløseren, hvis hen er heldig, ha en løsning på problemet. Dette kan være en fremgangsmåte som er brukt tidligere på et liknende problem, eller det kan være en modifisert utgave av en tidligere brukt fremgangsmåte. Uansett vil problemløseren være ferdig hvis løsningen skulle vise seg å være korrekt (Weisberg, 2015). Hvis ikke vil problemløseren ha oppnådd ny kunnskap og informasjon om problemet, og dette kan igjen føre til en ny analyseprosess hvor problemløser går gjennom mulige løsninger. Her skjer det dermed en mental rekonstruksjon, som ikke er et resultat av en *blindvei,* som beskrevet av

Ohlsson (Weisberg, 2015). I dette tilfellet skjer det en mental rekonstruksjon som et resultat av en analytisk prosess. Videre i problemløsningsprosessen kan problemløseren enten komme frem til en tilfredsstillende løsning ved hjelp av trinn 1-3, eller hen kan til slutt møte en *blindvei*.

Som et resultat av forskning på området rundt innsikt blir det nå i senere tid foreslått å ikke ha så markante skiller mellom analytiske og innsikts-løsninger av problemer. Det er mulig å argumentere for at analytiske metoder kan føre til innsikt, og til og med til den velkjente *aha*-følelsen (Fleck & Weisberg, 2013; Fleck & Weisberg, 2004). Weisberg (2015) foreslår gjennom forklaringen av 4-trinnsmodellen en integrert forståelse av innsikt i problemløsningsoppgaver. Hvor man ikke er avhengig av en *blindvei* og *rekonstruksjon* for å oppnå innsikt, men hvor innsikt også kan oppnås som er resultat av en analytisk prosess.

3 Metode

Kapitlet om metode vil beskrive de metodiske valgene, utvalget og hvordan dette ble valgt samt noen refleksjoner rundt mine egne relasjoner til utvalget og hvordan dette kan påvirke studien. Videre vil jeg forklare hvordan data ble hentet inn og begrunne hvorfor jeg anså dette som den beste måten å innhente data. Jeg vil også redegjøre for hvordan datamaterialet ble analysert. Til slutt vil jeg se på hvilke utfordringer jeg møter på ved valg av metode samt diskutere studiets validitet, reliabilitet og etiske problemstillinger.

3.1 Forskningsmetode

Studien er en kvalitativ studie som gjennomføres ved bruk av et oppgavebasert intervju med syv deltakere. Goldin (2000) beskriver et oppgavebasert intervju som et intervju som minimum involverer: deltaker (problemløseren) som interagerer med forsker og en (eller flere) oppgave(r) som er utformet til dette formålet. Jeg vil benyttet meg av to forskjellige oppgaver og hvordan disse ble utformet var viktig for å fange opp det jeg var ute etter. Jeg gjennomførte også de fem intervjuene på to forskjellige måter. Noen intervju bel gjennomført med én enkelt deltaker og meg som forsker, mens andre ble gjennomført med to deltakere som arbeidet i par, og meg som forsker. Oppgavebaserte intervju i forsking har tidligere blitt gjennomført både på enkeltindivider og grupper (Goldin, 2000; Haavold & Sriraman, 2021; Mayring, 2015). Samtidig dukker det opp noen utfordringer når slike oppgavebaserte intervju skal gjennomføres. Dette diskuteres videre i delkapittel 3.6 hvor jeg skriver om styrker og svakheter ved metoden.

3.2 Utvalg

I denne studien har jeg selv rekruttert deltakere. Deltakerne er elever på videregående skole på tredje trinn. Elevene har enten faget samfunnsfaglig matematikk nivå 2, eller realfaglig matematikk nivå 2. Begge disse er valgfag tredje året på videregående og elevene som tar disse fagene har valgt å ta matematikkfag som er vanskeligere enn minste motstands vei, og de vil trolig ha en viss interesse for faget. Samtidig vil også deres kompetanse i faget være høyere enn for eksempel elever som kun har hatt praktisk matematikk nivå 1 og 2. Elevene går på samme skole og skolen tilbyr både studiespesialiserende linje og idrettslinje. Ettersom jeg har jobbet på skolen de siste to årene og til tider vært lærer for elevene som deltar i studien har jeg allerede en relasjon til deltakerne. Hvordan dette kan påvirke studien vil jeg komme tilbake til i delkapittel 3.6 hvor jeg skriver om styrker og svakheter ved metoden.

3.3 Oppgavene

Oppgavene i min studie er nøye valgt ut. De er på samme måte som i Haavold og Sriramans (2021) studie valgt ut med det formål at deltakerne skal måtte bruke flere forskjellige fremgangsmåter. For eksempel er poenget med oppgaven om feil aritmetikk (se 3.3.2) at den skal tvinge deltakerne til å tenke nytt og endre fremgangsmåte ofte.

3.3.1 *Roterende sirkel*

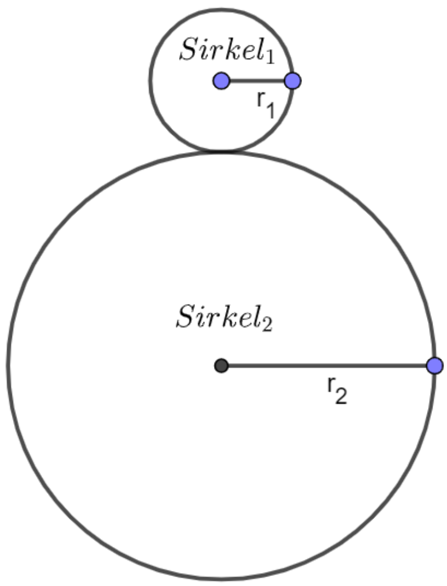
Radiusen til $sirkel_1$ er 1/3 av radiusen til $sirkel_2$. $Sirkel_1$ ruller en hel runde rundt $sirkel_2$ uten å skli. Hvor mange ganger vil $sirkel_1$ snurre rundt (seg selv) totalt?

Formler som kan være nyttig:

$$Areal_{sirkel} = \pi r^2$$

$$Omkrets_{sirkel} = 2\pi r$$

$$\pi \approx 3.14$$



Figur 2 - Illustrasjon roterende sirkel

Bakgrunnen for valget av denne oppgaven er at elevene skal prøve mange forskjellige fremgangsmåter. Den intuitive måten å angripe denne oppgaven på er å tenke at omkretsen til $sirkel_1$ er 1/3 av omkretsen til $sirkel_2$, dermed vil svaret være at den roterer tre ganger rundt seg selv. Dette viser seg å være feil fordi vi ikke tar hensyn til at begge er sirkler og ikke rette linjer. Forhåpentligvis vil den lite intuitive løsningen på oppgavene føre til at elevene går seg fast og møter «blindveier» som igjen fører til at de må prøve å se på oppgaven på en ny måte og dermed vil de måtte bytte mellom forskjellige fremgangsmåter.

3.3.1.1 Bevis

Teorem: s_1 vil rotere $n = 1 + \frac{r_s}{r_r}$ antall ganger rundt seg selv mens den ruller uten å skli langs sirkelperiferien til s_2.

Vi starter med å definere alle punktene på sirklene.

$s_1 = sirkel\ som\ roterer$

$s_2 = sirkel\ som\ er\ stasjonær$

$r_r = radius\ til\ roterende\ sirkel$

$r_s = radius\ til\ stasjonær\ sirkel$

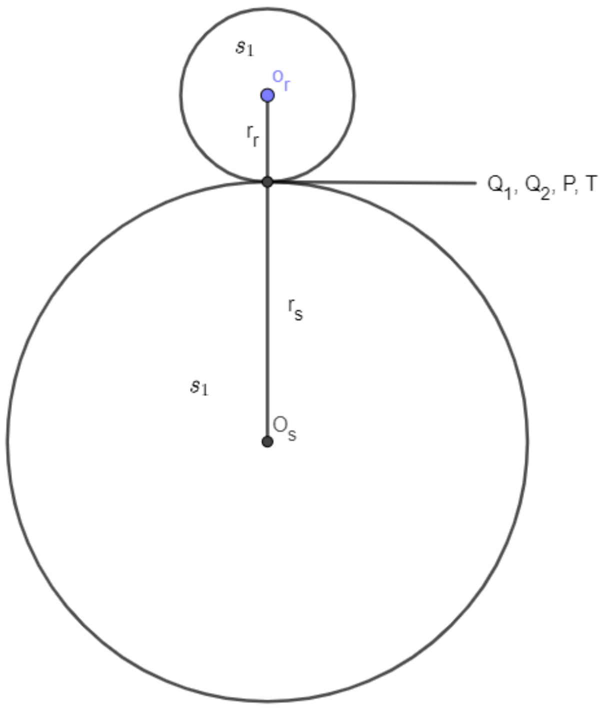
$o_r = origo\ til\ roterende\ sirkel$

$o_s = origo\ til\ stasjonær\ sirkel$

$Q_1 = punkt\ på\ roterende\ sirkel\ som\ alltid\ peker\ ned$

$Q_2 = punkt\ på\ stasjonær\ sirkel\ som\ alltid\ peker\ opp$

$P = stasjonært\ punkt\ på\ roterende\ sirkels\ periferi$
$T = tangentpunkt\ mellom\ s_1\ og\ s_2, mens\ s_1\ ruller$



Figur 3 - Illustrasjon av punkter på sirklene

Intuitivt kan vi tenke oss at uansett hvor liten r_s blir vil alltid s_1 rotere en gang rundt seg selv hvis den kun sklir rundt s_2. Se for deg at du drar mynten rundt en uendelig liten mynt, det faste punktet på mynten som peker nedover vil fremdeles peke nedover når du har dratt mynten en halv runde rundt den uendelig lille mynten. Det vil si at den har rotert en halv runde fordi det faste punktet som peker nedover vil ikke lengre tangere sirkelbuen på den uendelig lille sirkelen, men vil ha flyttet seg en halv runde. Videre vil mynten du drar rotere en halv runde til når du drar mynten tilbake til utgangspunktet. Ettersom mynten som roteres rundt beveger seg langs en krummet linje vil: $\lim_{r_s \to 0} 1 + \frac{r_s}{r_r} = 1$. Dette kan vi også vise matematisk.

Vi tar for oss en gitt situasjon hvor s_1 har begynt å rotere rundt s_2 i retning med klokken.

For å finne ut hvor langt s_1 har rotert må vi finne lengden $\overline{PTQ_1}$, ettersom både P og Q_1 starter i samme punkt får vi.

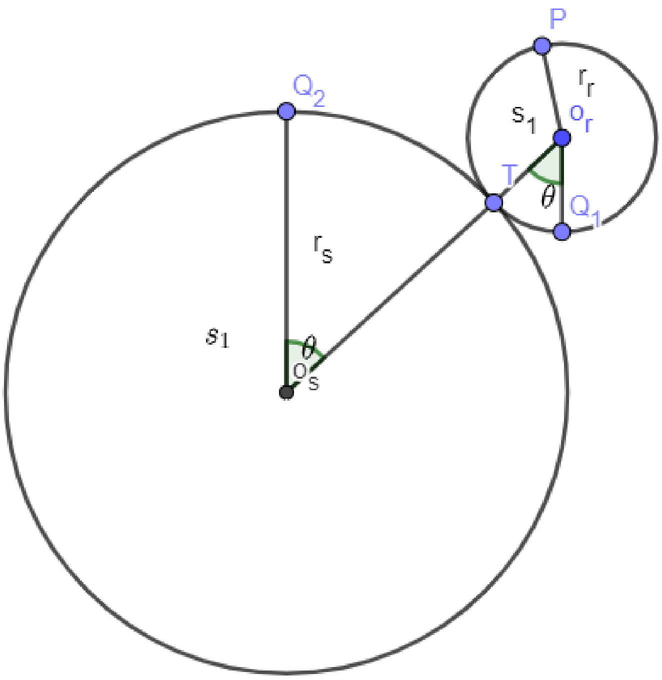
$$l_1{:}\,\overline{PTQ_1} = \overline{PT} + \overline{TQ_1}$$

Ettersom Q_2 og P starter i samme punkt og begge er stasjonære på hver sin sirkel vil lengdene $\overline{PT} = \overline{Q_2T}$.

$$l_2{:}\,\overline{PTQ_1} = \overline{Q_2T} + \overline{TQ_1}$$

Videre bruker vi formelen for sirkelbuen og får:

$$l_3{:} = \overline{PTQ_1} = \theta \mathrm{r_s} + \theta \mathrm{r_r}$$



Figur 4 - Illustrasjon av sirkel i bevegelse

Ettersom Q_1, Q_2, o_r og o_s er stasjonære punkt med samme utgangspunkt vil linjesegmentene $\overline{o_sQ_2}$ og $\overline{o_rQ_1}$ være parallell. Videre har vi at T er punktet hvor s_1 og s_2 tangerer til enhver tid og dermed vil linjesegmentene $\overline{o_sT}$ og $\overline{To_r}$ være ko-lineær og dermed et linjestykke. Det vil si at θ for s_1 og s_2 er samsvarende vinkler. Ved å faktorisere l_3 får vi:

$$\overline{PTQ_1} = \theta(r_s + r_r) \qquad (1)$$

$\overline{PTQ_1}$ representerer hvor langt P har beveget seg. Når s_1 har rotert en hel runde vil $\theta = 2\pi$. Når s_1 har rotert en hel runde rundt seg selv vil $\overline{PTQ_1}$ være:

$$\overline{PTQ_1} = 2\pi r_r \tag{2}$$

Hvis vi kombinerer likning (1) og (2) og løser for θ får vi: $\overline{PTQ_1} = \theta(r_s + r_r) = 2\pi r_r$:

$$\theta^* = \frac{2\pi r_r}{r_s + r_r} \tag{3}$$

Hvor θ^* representerer vinkelen $Q_2 O_s T$ når s_1 har rotert én gang rundt seg selv. Videre lar vi $n =$ antall runder s_1 roterer rundt seg selv mens den ruller en hel runde rundt s_2, som gir oss:

$$n\theta^* = 2\pi \tag{4}$$

Hvis vi kombinerer likning (3) og (4) får vi: $n = \frac{2\pi}{\theta^*} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi r_r}{r_s + r_r}} = \frac{r_s + r_r}{r_r} = 1 + \frac{r_s}{r_r}$:

$$n = 1 + \frac{r_s}{r_r} \tag{5}$$

■

3.3.2 Feil aritmetikk

Noen ganger gir feil metode riktig svar, for eksempel (Haavold & Sriraman, 2021):

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{18}{45}$$

Ta utgangspunkt i eksemplet ovenfor og finn ut i hvilke tilfeller denne metoden virker.

Jeg vil ikke gå gjennom et fullstendig bevis på oppgaven da det ikke finnes én generell løsning, men vi kan forenkle uttrykket. Vi starter med å se på utgangspunktet:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{10a + c}{10b + d} \tag{6}$$

Her ser vi at det som står i teller i den første brøken multipliseres med 10, ettersom det skal stå på 10'er posisjon i svaret. Samtidig adderes det som står i teller i den andre brøken med

$10a$. Det samme blir gjort med nevnerne. Likning (6) kan vi forenkle til: $ac(10b + d) = bd(10a + c)$. Som igjen kan forenkles til:

$$10ab(c - d) = cd(b - a) \tag{7}$$

Utfra dette vil det være nyttig å se videre på: $b - a = 5, b - a = -5, c = 5$ og $d = 5$. Ved å gjøre dette vil vi kunne finne nye betingelser som kan gi riktig resultat (Haavold & Sriraman, 2021).

3.4 Innsamling av data

Maher og Sigley (2014) beskriver tre måter å dele inn oppgavebaserte intervju. Det ene er et strukturert og lukket intervju hvor detaljerte protokoller og guider er lagd på forhånd. Den andre er en delvis-strukturert oppbygning som tillater noen modifikasjoner underveis om forskeren føler det er behov for det. Den siste er et mer åpent intervju hvor deltakerne blir introdusert for oppgaven og det er minimalt med interaksjon mellom forsker og deltaker. Det vil foregå noe avklaring rundt praktiske spørsmål om for eksempel oppgaven, ellers vil det være svært åpent hvordan intervjuet foregår. Jeg valgte en delvis-strukturert tilnærming. Dette fordi jeg ville ha noen retningslinjer for hvordan intervjuene skulle gjennomføres samtidig som jeg ville ha mulighet til å forme intervju litt hvis jeg følte at det var på vei i feil retning. Jeg lagde en intervjuguide med spørsmål som ble stilt etter gjennomføring samt noe fastsatte hint deltakerne skulle få hvis jeg følte de hadde behov for det, se vedlegg 3. Ellers ble interaksjonen som skjedde underveis mer improvisert utfra hvordan deltakerne gikk frem.

De vanligste måtene å innhente data på under oppgavebaserte intervju er: observatørs notater, deltakernes notater, lyd og video (Maher & Sigley, 2014). Jeg benyttet meg av både egne notater, deltakernes notater og lydopptak. Innen forskning brukes slike intervju til å se på deltakernes eksisterende matematiske kunnskaper, deres måter å resonere på, hvordan ideer representeres og utdypes, og hvordan forbindelser bygges til andre ideer mens de utvikler matematisk kunnskap (Maher & Sigley, 2014). Ettersom jeg var opptatt av å finne ut hvordan deltakerne oppnådde innsikt gjennom matematiske problemløsningsoppgaver passet slike intervjuer bra. Jeg kunne finne ut av hva de tenkte og hvordan de kom frem til svarene sine, samt hvordan de omstrukturerte ideer. Maher og Sigley påpeker at det i økende grader viser seg at slike oppgavebaserte intervjuer gir en viktig innsikt i subjektets eksisterende og utvikling av kunnskap, deres måter å utføre problemløsning og måter å resonere på. Det gir også innsikt i deres kreative aktivitet og strukturering av ny kunnskap i både individuell og gruppebasert problemløsning.

3.4.1 Intervjuguide

For å se selve intervjuguiden se vedlegg 3. I min studie valgte jeg å bruke en delvis strukturert tilnærming fordi jeg ville ha en interaksjon mellom meg selv og deltakerne, men samtidig ha muligheten til å endre på spørsmålene jeg stilte underveis i intervjuene. Det vil si spørsmål som omhandlet hva de tenkte og hva de planla å gjøre. I forkant tenkte jeg at alle intervjuene ville forløpe seg på forskjellige måter og deltakerne ville mest sannsynlig angripe oppgavene på forskjellige måter. På grunn av dette anså jeg det som lite hensiktsmessig å ha en streng intervjuguide som skulle følges. Samtidig var jeg klar over at både validiteten og reliabiliteten kunne bli svekket av å ha en lite strukturert intervjuguide. Til tross for dette mente jeg at det vil være mest hensiktsmessig å la hvert intervju ha sin egen flyt.

I intervjuguiden i vedlegg 3 har jeg skrevet at etter en gitt tid ville jeg forsøke å gi deltakerne noen hint hvis de hadde problemer med fremdriften. Disse hintene ble gitt i form av spørsmål, eller hint til hvordan de kunne se på problemet. Spørsmålene som ble stilt ligger i samme vedlegg som intervjuguiden. Disse spørsmålene var lik for alle deltakerne som hadde behov for det. Underveis i intervjuene gjorde jeg en vurdering om hver enkelt hadde nytte av et hint.

3.5 Analyse av data

Analysen av datamaterialet ble gjennomført i en trestegsanalyse hvor både intervju og skrevet arbeid ble analysert i etterkant av gjennomføringen. Simon (2019) presenterer denne trestegmodellen hvor han beskriver stegene som et utgangspunkt og ikke nødvendigvis noe som må kopieres direkte.

Steg 1: I dette steget var jeg ute etter å identifisere de forskjellige fasene av problemløsningsprosessen (Pólya & Conway, 2014). Dette gjorde jeg ved å gå gjennom datamaterialet *linje-for-linje* for å få en forståelse av hva deltakerne gjorde og hvorfor, samt prøve å finne ut hvilken forståelse de hadde på dette tidspunktet (Simon, 2019). I steg 1 ble ingen av dataen direkte kodet, men overgangen mellom to faser ble identifisert slik at fasene kunne videre undersøkes i steg 2. Dette ble gjort i etterkant av transkribering og overganger ble merket i teksten.

Steg 2: Her valgte jeg å klassifisere fasene gjennom problemløsningen i fire forskjellige kategorier: *forstå, planlegge, utføre* og *verifisere.* Denne klassifiseringen er noe Mayring

(2015) har mye fokus på i det han kaller kvalitativ *content analysis.* Se delkapittel 3.6.2 for å se hvordan dette ble kodet. Her ble resultatene fra steg 1 brukt til videre analyse. Gjennom dette steget var målet å komme nærmere målet med oppgaven og å få en dypere forståelse av hvordan deltakerne gikk frem for å løse oppgaven. Bakgrunnen for denne inndelingen var rettet mot målet med studien. Jeg var interessert i å se om innsikt kunne oppnås ved bruk av analytisk fremgangsmåte og dermed ble det naturlig å kategorisere utfra et analytisk synspunkt. Etter at datamaterialet var kodet så jeg også på hvordan deltakerne bevegde seg mellom de forskjellige kategoriene. Samtidig ble dataen analysert opp mot teorien på problemløsning og matematisk kreativitet. Her var fokuset å klassifisere prosesser som mulige kreative prosesser eller analytiske prosesser. Se kapittel 3.6.2 for hvordan dette ble kodet.

Steg 3: I steg 3 av analysen brukte jeg resultatene fra steg 1 og 2 i analysen til å gjennomføre det som kalles analytisk deduksjon. Sriraman (2004) beskriver analytisk deduksjon som noe som brukes på transkriberte intervjuer for å oppdage dominerende temaer og oppførsel i en studie. Et viktig prinsipp her er at analytisk deduksjon brukes for å bekrefte en allerede satt problemstilling eller hypotese gjennom kvalitative data. Disse kvalitative dataene er de transkriberte intervjuene og elevbesvarelsene. I min studie betyr det at datamaterialet ble nøye analysert og kodet gjennom steg 1 og 2 ved å dele inn i forskjellige kategorier og overgangene mellom disse. Videre ble denne dataen i steg 3 analysert opp mot det teoretiske rammeverket for å se om innsikt kan oppnås gjennom matematiske problemløsningsoppgaver ved hjelp av analytisk fremgangsmåte. Bakgrunnen for at dette ble gjort kommer av underspørsmålet i problemstillingen, se kapittel 1.2.

3.5.1 Transkribering

Etter å ha gjennomført intervjuene transkriberte jeg lydopptakene. Dette ga meg viktig og nyttig kunnskap om eget datamaterialet og var viktig for kvaliteten i studien, se kapittel 3.8 for å lese mer om det. For å beholde deltakernes anonymitet ble transkriberingen gjort på bokmål. I perioder med lange opphold uten lyd har jeg hvis mulig (det vil si hvis de fortalte meg hva de tenkte på eller forsøkte å finne ut av) skrevet inn hva deltakerne gjør slik at eventuelle prosessendringer under oppholdet kom med i kodingen.

Transkriberingen ble gjort ved å høre gjennom hvert enkelt intervju og skrive ned alt som ble sagt. Deltakerne fikk *kodenavnene:* A, B, C, D, E, G og H, mens jeg som forsker fikk navnet F. Dette for at selve transkriberingsprosessen skulle gå raskere og enklere. For å bli bedre kjent med datamaterialet ble transkriberingen skrevet ut og lydopptakene hørt gjennom på nytt. Under denne prosessen kunne jeg legge til egne notater underveis som falt bort i første runde med transkribering.

Når datamaterialet blir presentert senere i oppgaven har deltakerne fått navn slik at presentasjonen av resultatene blir mer *ekte.* Navnene de fikk ble generert på følgende måte: deltaker A fikk det mest populære navnet på nyfødte i år 2021, deltaker B fikk det nest mest populære navnet og deltaker C det tredje mest populære navnet osv. Ettersom svært få navn er kjønnsnøytrale har deltakerne fått navn som matcher deres kjønn.

3.5.2 Koding

Fasene i problemløsningsprosessen delt inn i fire forskjellige kategorier: *forstå, planlegge, utføre* og *verifisere.* Videre ble overgangene også kodet for å vise hvordan deltakerne flyttet seg mellom de forskjellige kategoriene.

Tabell 1 – Koding av kategorier og overganger

Kategorier	Forstå	Planlegge	Utføre	Verifisere
Forstå	F	$T_{F\rightarrow P}$	$T_{F->U}$	$T_{F->V}$
Planlegge	$T_{P\rightarrow F}$	P	$T_{P->U}$	$T_{P->V}$
Utføre	$T_{U->F}$	$T_{U->P}$	U	$T_{U->V}$
Verifisere	$T_{V->F}$	$T_{V->P}$	$T_{V->U}$	V

Tabell 1 fremstiller hvordan dataen ble kodet i analyseprosessen. Koden for hver enkelt kategori kan leses diagonalt fra venstre mot høyre, videre kan overgangene leses som at en overgang fra kategoriene som står loddrett til de som står vannrett. For eksempel vil $T_{F->P}$ beskrive en overgang fra å *forstå* til å *planlegge.* I resultatdelen vil kodene presenteres uten overgenen, men overgangene ble kodet til annet formål enn selve fremgangsmåten, se neste avsnitt. Koden: $F - P - U - V$ betyr at deltakeren først prøvde å forstå oppgaven, deretter prøvde hen å planlegge en fremgangsmåte før hen utfører planen og til slutt spør meg som forsker om resultatet er gyldig.

For leseren av studien vil kanskje ikke kodingen av overgangene være helt intuitiv å ha med. Men grunnen til at jeg har disse med er fordi overgangene kan være essensielle når steg 3 i analysen gjennomføres. For eksempel har jeg valgt å tolke en sekvens med overgangen $T_{F->P}$ som en analytisk fremgangsmåte, mens en sekvens med koden $T_{F->U}$ som en mer kreativ tilnærming hvor planleggingsfasen er erstattet med den underbevisste omstruktureringen. Samtidig er det viktig å huske at dette ikke nødvendigvis stemmer i alle tilfeller, men det er valgene jeg har gjort.

I steg 2 ble også datamaterialet kodet som mulige kreative eller analytiske prosesser:

Tabell 2 – Koding av kreative og analytiske prosesser.

Kreativ	K
Analytisk	A

Denne kodingen ble brukt slik at analysen i steg 3 skulle gå enklere og raskere. Alle prosesser som ble kodet med K ble forkastet som en mulighet for å bekrefte at innsikt kan oppnås ved hjelp av analytisk fremgangsmåte, mens alt som ble kodet med A ble videre analysert. Samtidig er problemstillingen hvordan elever oppnår innsikt gjennom matematiske problemløsningsoppgaver. Derfor ble også det som ble kodet med K analysert til slutt for å kunne svare på problemstillingen.

3.6 Styrker og svakheter ved metodologien

I denne studien var mitt hovedfokus å se på deltakernes tenkemåter og da spesifikt om de kunne oppnå innsikt ved hjelp av analytisk fremgangsmåte. Jeg så på hvordan de gikk frem for å løse en oppgave og da spesielt hvordan de endret tanke- og fremgangsmåte. Det vil si at jeg var mer opptatt av problemløsningsprosessen enn sluttresultatet. For å oppnå dette var jeg avhengig av et miljø hvor jeg kunne få innsikt i hvordan deltakernes tankeprosesser og deres konstruksjoner av nye fremgangsmåter. Goldin (2000) påpeker at en av styrkene til oppgavebaserte intervju er at de gir et strukturert matematisk miljø som til en viss grad kan kontrolleres. Samtidig vil en gjennom et slikt intervju i stor grad kunne observere og tolke kompleks oppførsel og mønstre i oppførsel, samt konseptuell forståelse, indre konstruksjon av matematisk forståelse og mekanismer av matematisk utforskning og problemløsning. Dette er sammenfallende med hva jeg var ute etter å studere, men det krevde også en del planlegging og forberedelser. Uten en teoretisk modell og planlagte guidende spørsmål vi også det vitenskapelige produktet bli svært begrenset (Goldin, 2000).

Metoden har blitt brukt på både enkeltindivider og grupper tidligere (Goldin, 2000; Maher & Sigley, 2014). Schoenfeld (1985) foreslår derimot å bruke $n \geq 2$ antall personer under oppgavebaserte intervju. Dette begrunner han med at noe av beslutningstakingen blir undergravd når enkeltpersoner undersøkes. En av hovedårsakene til at dette skjer er at når enkeltpersoner undersøkes kommer det frem mye «unaturlig» oppførsel som for eksempel at deltakeren distanserer seg fra oppgaven i frykt for å gjøre feil. Schoenfeld (1985) understreker dette med et eksempel på en undersøkelse han gjorde selv. I denne undersøkelsen var deltakeren en student han hadde en god relasjon til og de var «on a first name-basis». Til tross for dette var resultatet konsistent med andre tidligere enkeltindividforsøk. Under problemløsningsoppgaver er ofte det største problemet at deltakerne bruker for lang tid på å jage en fremgangsmåte som ikke er fruktbar. Dette gjør at mye av tiden som brukes er bortkastet. Ved å undersøke grupper vil det være større sannsynlighet for at noen tenker eller sier: «hvorfor gjør vi dette?» (Schoenfeld, 1985). Samtidig ser også Schoenfeld (1985) at det å arbeide i grupper kan være problematisk. Det kan hende at en enkeltperson tar styringen slik at det i hovedsak er den enes ideer som kommer frem.

Det faktum at jeg tidligere hadde undervist deltakerne som vikarlærer gjorde at jeg hadde en relasjon til dem. Som Schoenfeld forklarer hjalp det lite for han at han hadde en relasjon til en av sine deltakere i hans studie. Til tross for dette tror jeg det gjorde at deltakerne hadde en større trygghet når de skulle prøve seg på oppgavene. De hadde kjennskap til meg som lærer og jeg hadde kjennskap til dem som elever. Spesielt tror jeg dette kan ha hatt en positiv innvirkning på de som arbeidet alene da det kan ha vært enklere for dem å «gjøre feil» når de hadde kjennskap til meg. Samtidig er det viktig å huske at hvis deltakerne hadde dårlige opplevelser med meg som lærer kan det ha slått negativt ut. Dette tror jeg i mindre grad var et problem da deltakerne meldte seg på studien frivillig og til enhver tid hadde mulighet til å trekke seg.

Gjennom et oppgavebaserte intervju vil deltakerne bli plassert i en situasjon og omgivelser som er utenfor normalen. På toppen av dette skal også hele seansen tas opp med lydopptaker. Lydopptaket kan alene være med på å endre atferden til deltakerne (Schoenfeld, 1985). Mer generelt vil disse avvikende omgivelsene påvirke dataen, eller som Schoenfeld (1985) beskriver: «the more awkward the situation – the more obstrusive the recording equipment, the more unusual the problem, etc. – the more likely the verbal data is to be affected» (s. 180).

Goldin påpeker (2000) at selv om ikke resultatene er likeverdig som det en ville fått under vanlige omstendigheter er ikke dette en begrensning for metoden. Dette må ses på som en del av den menneskelige interaksjonen under de betingelsen som er lagt; matematisk problemløsning i en intervjuform, alene eller i gruppe. Selv om det er mange faktorer som vil påvirke resultatene i et oppgavebasert intervju argumenterer Ericsson og Simon (1980) for at ufullstendighet av rapporter vil gjøre noe av informasjon utilgjengelig, men det vil ikke undergrave den informasjon man får. Man vil kunne stole på den informasjon man får selv om noe går tapt. Samtidig hevder de at bevisene mot at verbale rapporter som data mangler evne til å plukke opp plutselig innsikt er anekdotiske og er tilbakevist i forsøk som er gjort på området (Ericsson & Simon, 1980). Det vil si at verbale rapporter kan gi mye god data om det innhentes og håndteres på en tilfredsstillende måte.

Grunnen til at denne metoden ble brukt er fordi jeg var ute etter å studere deler av deltakernes matematiske tankeprosesser. Slike prosesser er vanskelig å fange opp ved hjelp av ordinær oppgavejobbing eller spørreundersøkelser (Goldin, 2000; Maher & Sigley, 2014; Schoenfeld, 1985). Oppgavebaserte intervjuer er svært gode til å fange opp det mer komplekse underliggende som skjer underveis i løsningen av oppgavene.

> As noted, task-based interviews typically do not focus on easily defined outcomes such as patterns of correct and incorrect answers by subjects. Rather, investigators try to observe, record, and interpret complex behviors and patterns in behavior, including subjects' spoken words, interjections, movements, writings, drawings, actions on and with external materials, gestures, facial expressions and so forth. (Goldin, 2000, s. 527).

3.7 Kvalitet i studiet

Når vi gjennomfører forskning, er vi opptatte av kvaliteten i det vi gjør. For å sikre kvalitet og objektivitet er det ofte hensiktsmessig å snakke om validitet, reliabilitet og generaliserbarhet (Cohen et al., 2017; Gleiss & Sæther, 2021; Goldin, 2000). Gjennom validitet eller gyldighet vil vi som forskere prøve å analysere i hvor stor grad vi kan stole på målingene som er gjort i forskningsprosjektet (Befring, 2015; Gleiss & Sæther, 2021). Befring forklarer at vi gjennom fysiske målinger nesten kan ta det for gitt at vi får valide målinger, mens historien er en helt annen innen utdanningsvitenskapen og skoleforskning hvor de fleste målinger er indirekte. Gjennom reliabilitet, eller pålitelighet vil vi vurdere kvaliteten i forskningsprosessen vår.

Generaliserbarhet i kvalitative studier kan være vanskelig (Goldin, 2000). Gjennom kvalitative studier får man som oftest et mindre datautvalg og på bakgrunn av dette vil det være vanskelig å generalisere. Goldin (2000) mener at for å bevege oss i retning av generaliserbarhet må vi: «aim to describe methods and results in ways that give sense to the term *replicability,* namely, they must permit the community of researchers to employ similar methods, compare results, and confirm or contradict each other» (s. 531). Derfor vil det i dette tilfellet være uvesentlig å snakke om generaliserbarhet. Samtidig er det ofte slik at kvalitative studier er med på å danne et grunnlag for fremtidige kvantitative undersøkelser. Dette vil jeg drøfte mer i kapittel 6.

Videre i kapitlet vil jeg gå nærmere inn på validitet og reliabilitet i studiet. Jeg vil i lys av dette drøfte kvaliteten i det gjennomførte studiet.

3.7.1 Validitet

Cohen et al. (2017) legger frem fem nøkkelkriterier for validitet i kvalitativ forskning: *credibility*, *transferability*, *dependability* og *confirmability*. Samtidig påpeker Schoenfeld (2007) at validitet handler om troverdighet, viktighet og relevans. Vi undersøker altså studiets validitet for å sikre at arbeidet er av en viss kvalitet og at det er troverdig og relevant. Validitet handler altså om mer enn bare kvaliteten av målingene og tolkningene som blir gjort. Maxwell (1992) tar for seg fem typer validitet i kvalitativ forskning: *descriptive, interpretive*, *theoretical*, *generalizability* og *evaluative* validitet.

Descriptiv validitet – denne typen validitet handler om hvor sikker vi er på at noe faktisk har skjedd. Hvor sikker er vi på at en av deltakerne faktisk kom med den spesifikke påstandene eller uttalelsen (Maxwell, 1992). Eller som Cohen et al. (2017) beskriver det: «the factual accuracy of the account, that is not made up, elective or distorted» (s. 248). I lys av denne formen for validitet er det viktig å huske på hvordan informasjon persiperes. Som Bjørndal (2017) påpeker skal informasjon vi innhenter persiperes før den går over i korttidshukommelsen forså å gå videre til langtidsminnet. Videre forklarer Bjørndal at det derfor vil være hensiktsmessig å klargjøre gode strukturer å plassere observasjoner på i forkant av en observasjon.

Interpretive validitet – denne typen validitet handler om å tolke data på riktig måte. Det vil si hvor flink er vi til å fange opp det deltakerne faktisk mener med det som blir sagt (Maxwell, 1992). Vi som forskere må unngå å la oss farge av våre oppfatninger, men klare å se det fra deltakernes perspektiv og tolke data deretter.

Theoretical validitet – denne typen validitet handler om hvilket teoretisk utgangspunkt vi som forskere bruker når vi tolker data (Cohen et al., 2017). For at vi skal kunne ha teoretisk validitet må vi ha en tilfredsstillende sammenheng mellom fenomenet som undersøkes/tolkes og teorien den bygger på (Befring, 2015)

Generalizability – kan resultatene og den oppnådde *teorien* brukes til å forstå liknende sitasjoner? Kan vi generalisere til spesifikke grupper ol. (Cohen et al., 2017)?

Evaluative validitet – denne typen validitet innebærer bruk av et evaluerende rammeverk mot deltakerne, hvor evaluerende blir brukt som en kategori av *forståelse* (Maxwell, 1992). Vi må vurdere det deltakerne forteller (Befring, 2015)

Gjennom en kvalitativ undersøkelse er det viktig å huske at det er forskeren som er det viktigste instrumentet (Cohen et al., 2017). I så måte var det i mitt tilfelle mest hensiktsmessig å se på *descriptiv* og *interpretive* validitet. For å styrke den *descriptive* validiteten benyttet jeg meg av transkribert lydopptak, deltakernes notater og utregninger og en delvis strukturert intervjuguide. Intervjuguiden ga meg svar på spesifikke ting rundt det jeg undersøkte og var i så måte med på å styrke den *teoretiske* validiteten. Min posisjon som lektorstudent med mye praktisk erfaring som lærer de to siste årene hjalp meg til å tolke data en bedre måte i lys av *interpretive* validitet. Det at jeg hadde praktisk erfaring gjorde at jeg i større grad klarte å sette meg inn i deltakernes tankesett og hva de mente med påstandene og forklaringene de kom med. Disse punktene var med på å styrke studiets validitet.

3.7.2 Reliabilitet

Reliabilitet eller pålitelighet kan ses på som målesikkerheten i studien, hvor *treffsikker* er studien (Befring, 2015; Cohen et al., 2017; Gleiss & Sæther, 2021). Vi kan se for oss at vi er ute etter å finne ut av: hvis studien hadde blitt gjennomført på nytt, ville vi oppnådd samme resultat? Mange argumenterer for at reliabilitet er vanskelig å sikre seg gjennom en kvalitativ studie. For eksempel forklarer Cohen et al. (2017) at mange forskere mener det finnes like mange forskjellige oppfatninger som det finnes forskere. Dette vanskeliggjør reliabilitetsaspektet av forskningen. Gleiss og Sæther (2021) nevner at vi må ta hensyn til hvordan datamaterialet blir hentet inn, hvordan deltakerne påvirkes av forskerens tilstedeværelse, måten forskeren formulerer spørsmål og hvordan datamaterialet blir kodet i analyseprosessen (se kap. 3.6). Ofte kan reliabiliteten i kvalitative studier være vanskeligere enn i kvantitative studier (Befring, 2015; Goldin, 2000). Dette er fordi det i kvalitative studier er en del variabler som kan være vanskelig å gjenskape.

Glodin (2000, s. 529) forklarer hvordan Jean Piagets oppdagelse og beskrivelse av hvordan forståelsen av mengdebevaring hos barn varier med alder har blitt gjenskapt. Disse forsøkene ble gjort ved hjelp av godt beskrevet, individuelle oppgavebaserte intervju. De samme resultatene har blitt gjenskapt av mange andre forskere i forskjellige kontekster og i forskjellige kulturer. Dette gjenspeiles også i mye av litteraturen på området: god dokumentasjon av hvordan data innhentes og analyseres og en grundig og god beskrivelse av hvordan forskningsprosessen, i dette tilfellet intervjuet, gjennomføres, er nøkkelpunkter for å sikre reliabiliteten (Befring, 2015; Cohen et al., 2017; Gleiss & Sæther, 2021).

Vi gjennomfører matematikkdidaktisk forskning fordi vi vil finne ut hvordan vi som mennesker bearbeider og lærer matematikk. For at dette skal være mulig må vi til en viss grad klare å produsere forskning som kan utprøves og utfordres i et forsøk på å finne sammenhenger eller ulikheter for å kunne generalisere et fenomen. Goldin (2000) understreker at hvis dette er målet med forskningen må vi etterstrebe reliabilitet i forskningen. For å sikre reliabilitet i mitt forskningsprosjekt har jeg forsøkt å beskrive forskningsprosessen, forskningsmetoden, innhentingen av data (gjennomføringen av intervjuene) inkludert intervjuguide og analysen av datamaterialet så godt som mulig. En av de viktige tingene med å h en intervjuguide er at dette gir et eksplisitt dokument som kan vurderes, og senere gjenbrukes direkte eller som en modifisert utgave av andre forskere. Selv om jeg benyttet meg av en delvis strukturert tilnærming, og dermed også en delvis strukturert intervjuguide vil den kunne brukes som et utgangspunkt for retesting av studien. I analyseprosessen var jeg svært nøye med å få med viktige hendelser i transkriberingen. Det vil si at jeg gjennomførte transkriberingen i to omganger, se kapittel 3.5.1. Jeg har ikke forsøkt å generalisere noe gjennom mitt forskningsprosjekt, men jeg har forsøkt å produsere er produkt som kan være med på å generalisere et fenomen i fremtiden.

3.8 Etikk

I Norge har vi etter hvert fått på plass en lov om personregistrering m.m, med fokus på å verne om deltakernes integritet (Befring, 2015). Innenfor det forskningsetiske er det tre viktige punkter: *informantens rett til selvbestemmelse og autonomi, forskerens plikt til å respektere informantens privatliv* og *forskerens ansvar for å unngå skade* (Christoffersen & Johannessen, 2012). Disse punktene må enhver forsker følge under sitt arbeid og de skal sikre at deltakernes integritet og personvern blir tatt hensyn til og respektert. Jeg sendte inn en søknad til NSD (norsk senter for forskningsdata) om håndtering av personlige opplysninger. Søknaden ble innvilget før forskningsprosessen ble satt i gang, se vedlegg 1.

Informantens rett til selvbestemmelse og autonomi dekket jeg gjennom et samtykkeskjema, se vedlegg 2. Dette samtykkeskjemaet informerte deltakerne om at deltakelse i studien var valgfritt og at de på hvilket som helst tidspunkt kunne trekke seg fra studien uten å oppgi grunn, og uten konsekvenser. Ettersom datamaterialet ble innhentet ved hjelp av lydopptak var det viktig å understreke overfor deltakerne at de kunne velge å trekke seg selv etter intervjuene ble gjennomført uten at det hadde noen konsekvenser. Deltakeren fikk også kontaktinformasjonen min slik at de kunne ta kontakt om de ville vite mer om enten fremstillingen av dem i studien eller resultatene.

Forskerens plikt til å respektere informantens privatliv dekket jeg gjennom å anonymisere deltakerne umiddelbart etter intervjuene ble gjennomført. Gjennom transkriberingsperioden ble teksten gjort om til bokmål og navnene til deltakerne ble endret til A, B, C, osv. og til fiktive navn i resultatdelen, se kapittel 3.5.1. Den eneste informasjonen om deltakerne som kom frem etter transkriberingsprosessen var kjønn, hvilket matematikk-emne de tok på videregående og måloppnåelsen deres ved forrige termin (lav, middel eller høy).

Forskerens ansvar for å unngå skade handler om å ivareta deltakernes helsemessige og medisinske sikkerhet (Christoffersen & Johannessen, 2012). Under mitt forskningsprosjekt var det ingen fare for ytre skader på noen av deltakerne. Den eneste risikoen for skade ville være om elevene opplevde oppgavene under intervjuet eller selve intervjuet som en psykisk påkjenning. For å håndtere dette sørget jeg for å gi god informasjon om hvordan gjennomføringen skulle skje før vi startet. Jeg understrekte at jeg ikke var ute etter å måle om de svarte riktig eller galt, men at fokuset mitt var på prosessen. Dette tror jeg var med på å berolige deltakerne som var redd for å ikke lykkes med oppgavene.

4 Resultater

For å strukturere fremstillingen av resultatene har jeg valgt å dele disse opp i tre delkapittel. 4.1 vil beskrive hvilke svar deltakerne har kommet frem til gjennom problemløsningsprosessen, 4.2 vil beskrive hvordan de har kommet frem til svarene ved hjelp av problemløsningsteori og matematisk kreativitet, mens jeg i delkapittel 4.3 ser på hvilke sammenhenger det er å finne i datamaterialet. Dermed vil de generelle resultatene presenteres først, før jeg sammenfatter likheter og sammenhenger i datamaterialet. Gjennom resultatkapittelet vil jeg omtale de forskjellige deltakerne som gruppe 1, gruppe 2, gruppe 3, gruppe 4 og gruppe 5. Disse gruppene består av:

Gruppe 1: 1 deltaker – Nora. Har tidligere hatt realfaglig matematikk nivå 1 med høy måloppnåelse, har nå realfaglig matematikk nivå 2.

Gruppe 2: 2 deltakere – Noah og Oskar. Begge har tidligere hatt realfaglig matematikk nivå 1 med høy måloppnåelse, har nå realfaglig matematikk nivå 2.

Gruppe 3: 2 deltakere – Emma og Sofie. Begge har tidligere hatt samfunnsfaglig matematikk nivå 1 med høy måloppnåelse, har nå samfunnsfaglig matematikk nivå 2.

Gruppe 4: 1 deltaker – Olivia. Har tidligere hatt samfunnsfaglig matematikk nivå 1 med middels måloppnåelse, har nå samfunnsfaglig matematikk nivå 2.

Gruppe 5: 1 deltaker – Oliver. Har tidligere hatt samfunnsfaglig matematikk nivå 1 med middels måloppnåelse, har nå samfunnsfaglig matematikk nivå 2.

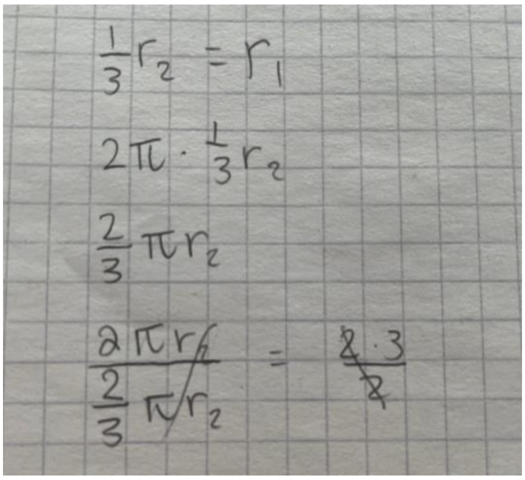
4.1 Besvarelser

Dette delkapittelet handler utelukkende om besvarelsen til deltakerne. I denne delen av resultatene er det ikke gjennomført noe analyse og det er bare de generelle besvarelsene deltakerne kom frem til.

4.1.1 *Roterende* sirkel

I oppgaven om *roterende* sirkel prøvde samtlige grupper én bestemt fremgangsmåte på første forsøk. Alle prøvde å regne ut omkrets av $sirkel_1$ og $sirkel_2$ forså å finne forholdet mellom disse: $\frac{O_{sirkel_2}}{O_{sirkel_1}}$. Dette ga det samme svaret, 3, hver gang. Dette skjer fordi omkretsen av sirklene har et forhold som kun er avhengig av radiene. Dermed vil to sirkler som har radier med forhold 1/3 også ha omkrets med forhold 1/3. Etter at gruppene hadde verifisert svaret ved å spørre meg om det var riktig startet de på nytt, og her ble det forskjeller i fremgangsmåtene videre.

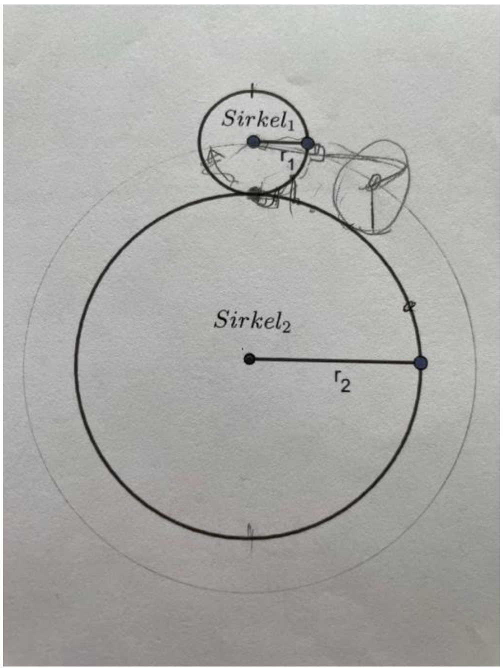
Gruppe 1, Nora: Nora begynte i likhet med de andre med å finne omkrets og dividere:



Figur 5 – Noras utregning på oppgave om roterende sirkel.

Videre forsøkte Nora å komme opp med flere alternative fremgangsmåter. Hun hadde problemer med å se hva som var galt med det hun hadde gjort: «A: ahh jeg skjønner ikke hva jeg har gjort feil.». Hun gjentok flere ganger «jeg tenker fortsatt 3» mens hun forsøkte å komme opp med noe nytt. Etter hint fra meg prøvde hun å se på hva som skjedde hvis sirklene hadde lik radius uten at dette ga henne noe umiddelbar inspirasjon til videre arbeid. Etter å ha brukt mye tid på å forsøke å forstå oppgaven bedre prøvde hun på en siste fremgangsmåte. Denne tanken dukket opp etter å ha tenkt på hva som skjer om radiene i sirklene var like. Hun fant ut at hvis radiene var like ville $sirkel_1$ rotere to ganger rundt seg selv. Derfra prøvde Nora å se om sammenhengen kunne være: $2^1, 2^2, 2^3$, osv. Dette ville gi et svar på $2^3 = 8$, noe hun konkluderte med at måtte være for mye.

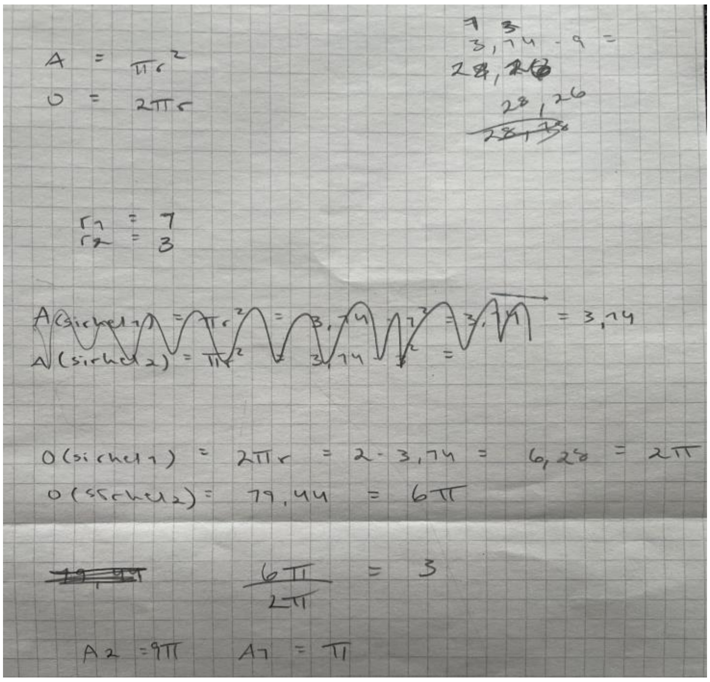
Gruppe 2, Noah og Oskar: Startet med å finne omkretsen til begge sirklene forså å dividere. Dette førte til svaret 3 som er feil. Etter å ha tenkt og diskutert mente Noah at grunn til at dette ble feil var fordi ved denne fremgangsmåten så de på hva som ville skje om de «brettet» ut sirkelbuen til en rett linje. Det faktum at de skulle se på sirkler måtte gjøre at det ble annerledes. Etter hvert kom Noah opp med forslaget å se på hvordan sentrum til $sirkel_1$ bevegde seg mens sirkelen roterte:



På denne måten dennes en ny sirkel med sentrum på samme sted som $sirkel_2$ og en radius på: $r = r_2 + r_1$. De ble enige om at dette måtte være banen sirkelen faktisk fulgte mens den roterte. Til tross for at de her var svært nærme riktig svar klarte de ikke å bruke dette på riktig måte. Jeg synes det virket som de var litt uenige i om dette ville gi riktig resultat og de klarte dermed ikke å komme frem til et spesifikt svar. De var inne på at svaret kunne være 4, men også at det kunne være 8. Etter mye om og, men endte det med at tiden gikk ut og de fikk ikke gitt et svar på oppgaven.

Figur 6 – Illustrasjon lagd av gruppe 2 i forsøk på å løse oppgave om roterende sirkel.

Gruppe 3, Emma og Sofie:

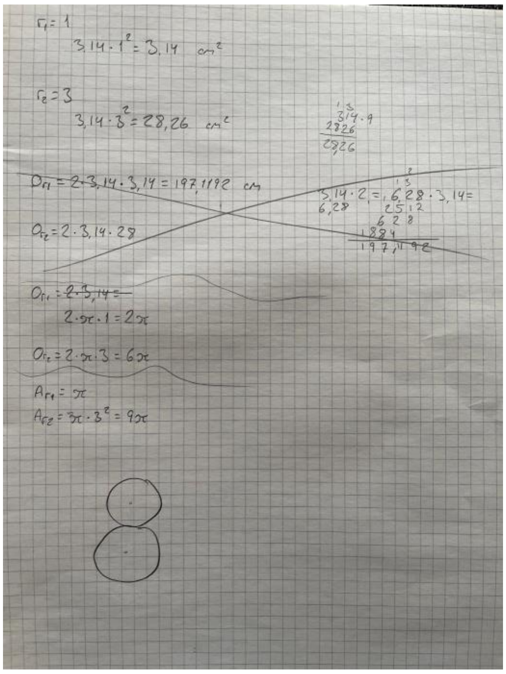


Første forsøk til gruppe 3 var å regne omkretsene og dividere. Da dette ikke ga et tilfredsstillende svar, fortsatte de med å finne arealet av sirklene. Underveis spurte Emma hva de egentlig skulle med arealene og fikk til svar fra Sofie «det står på arket». Hun refererte til at det sto på oppgavearket. Emma svarte med «kanskje det bare er der for å lure oss», noe hun hadde rett i. Etter å ha regnet ut arealene fant de ut at dette ikke ville fungere heller.

Figur 7 – Emma og Sofies utregninger på oppgave om roterende sirkel.

Utover i prosessen fikk de et hint om å se på hva som ville skje hvis radiusen var lik på sirklene. Etter å ha funnet svaret på dette, 2, forsøkte de å se om det ville være dobbelt stå mange ganger som forholdet mellom radiene var. De forsøkte med svaret 6, som også var feil. Etter dette gjettet de på 12 før tiden gikk ut.

Gruppe 4, Olivia: Olivia forklarte først at hun ville finne arealet av sirklene, men ombestemte seg raskt og bestemte seg for å finne omkretsen. Deretter ble hun usikker på hva hun skulle gjøre med omkretsen og bestemte seg for å finne arealet også. Etter å ha funnet ut at arealet ikke ga mening gikk hun tilbake til omkretsen, men i stedet for å dividere omkrets av $sirkel_2$ med omkrets av $sirkel_1$ valgte hun å subtrahere. Dette førte til at hun kom frem til svaret 4. Noe som matematisk også vil være feil da $6\pi - 2\pi = 4\pi$. Olivia kom dermed frem til riktig svar, men ved hjelp av feil fremgangsmåte. Etter å ha verifisert at svaret var riktig påpekte jeg at fremgangsmåten var feil og ville at hun skulle forsøke å finne ut hvorfor svaret var 4. Til tross for at hun hadde svaret fremfor seg klarte hun ikke å finne en tilfredsstillende fremgangsmåte for å forklare hvorfor det var riktig.



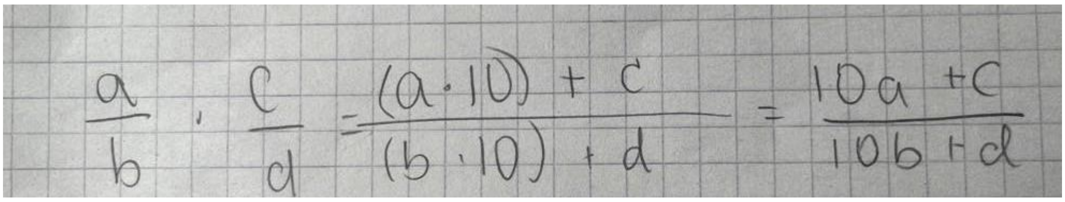
Figur 8 – Olivias forsøk på oppgaven om roterende sirkel.

Gruppe 5, Oliver: Oliver startet umiddelbart med å finne omkrets av begge sirklene. Deretter dividerte han og fant at forholdet var 3. Etter å ha fått verifisert at svaret var feil gikk han tilbake og forsøkte å lese oppgaven på nytt og tenke frem en ny fremgangsmåte. Dette førte til at han et øyeblikk vurderte om areal ville være nyttig på noen måte, men la dette raskt fra seg. Etter hvert sa Oliver at: «akkurat nå klarer jeg ikke tenke noe konstruktivt, jeg husker bare at hvis noe skal snurre rundt noe annet vil det rotere raskere. Men jeg vet ikke hvorfor eller hvor jeg har hørt eller lest det». Han forsøkte å bruke dette til noe nyttig og fikk hint fra meg om å se på hva som ville skjedd hvis radien til sirklene var like. Etter mye tenking og lite fremgang gikk tiden til slutt ut uten at Oliver hadde kommet frem til et svar. Han var derimot innom det samme som gruppe 2 at sentrum til $sirkel_1$ ville være det stasjonære punktet uten at han klarte å bruke dette til noe.

4.1.2 Feil aritmetikk

På samme måte som i oppgaven om *roterende sirkel* angrep samtlige deltakere oppgaven om feil aritmetikk på samme måte. Alle deltakerne forsøkte å finne liknende uttrykk av en eller annen form. Måten de gikk frem var forskjellig, men alle prøvde å finne et slags mønster i uttrykket som allerede sto og brukte det som utgangspunkt mens de prøvde ut mer eller mindre tilfeldige tall.

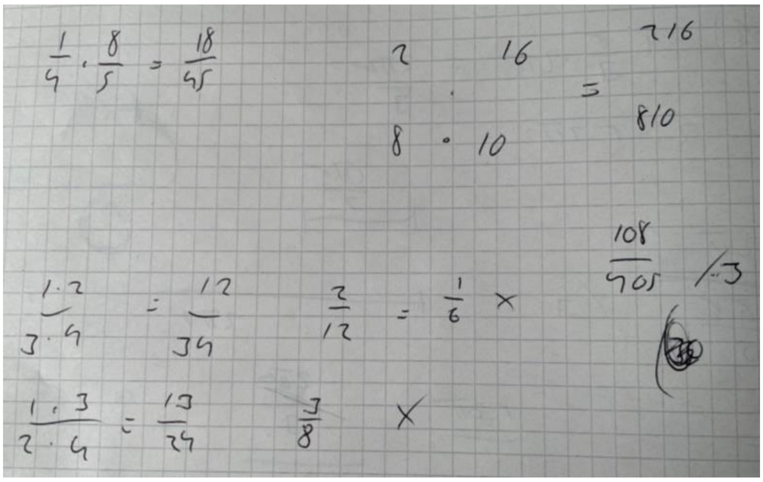
Gruppe 1, **Nora**: Nora oppdaget med en gang at både 18 og 45 var delelig med 9. Hun brukte dette som utgangspunkt videre. Dette brukte hun for å sette opp uttrykket $\frac{2}{6} \cdot \frac{7}{3} = \frac{27}{63}$. Videre forsøkte hun å finne ut om $\frac{27}{63} = \frac{14}{18}$. Dette fant hun raskt ut at ikke kunne stemme og gikk videre. Etter å ha prøvd seg litt frem fant Nora ut at 0 ikke kunne være en del av regnestykket og konstaterte at hun i alle fall kunne utelukke dette. Etter hvert fikk hun et hint fra meg om at hun kunne bruke algebra på hele uttrykket om hun ville finne en generell formel. Etter å ha tenkt seg om kom hun frem til følgende:



Figur 9 – Noras forsøk på å generalisere oppgaven om feil aritmetikk.

Etter å ha satt opp denne formelen forsøkte Nora med forskjellige tall for a, b, c, d uten at hun kom noe nærmere en løsning. Ut fra hvilke tall hun forsøkte med virket det som hun var bestemt på at a, b, c, d alle måtte være mindre enn 10. Nora valgte å ikke forenkle uttrykket ytterligere og brukte den resterende tiden på å forsøke med vilkårlige tall.

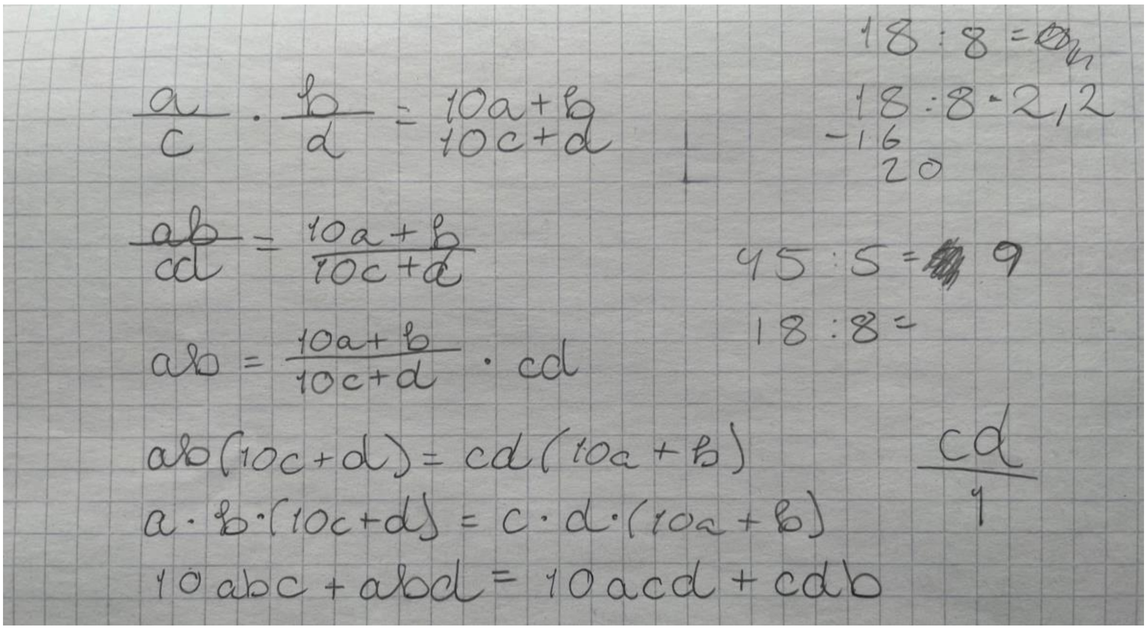
Gruppe 2, Noah og Oskar: Gruppe to begynte med å diskutere oppgaven slik at begge hadde samme forståelse av hva de var ute etter. De brukte litt tid på dette, men etter å ha blitt enig om hva oppgaven egentlig gikk ut på begynte de med å prøve tilfeldige tall. De forsøkte både med tall større og mindre enn 10. Etter hvert kom de frem til at enkle kombinasjoner som



Figur 10 – Gruppe 2 sine forsøk med tilfeldige tall på oppgave om feil aritmetikk.

for eksempel $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{11}{11}$ og $\frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{22}{22}$ ville fungere. Disse fulgte den feile oppskriften som ble presentert i oppgaven, samtidig som svaret var korrekt. Videre foreslo Noah at det kanskje kunne ha noe med partall eller oddetall å gjøre. Etter litt diskutering kom de frem til at det ikke kunne stemme. Etter et hint om å bruke algebra kom de frem til samme formel som Nora på gruppe 1 kom frem til, uten at de klarte å bruke dette videre. De avsluttet med å prøve tilfeldige tall uten at de kom frem til noe mer enn at hvis a, b, c, d alle var like enten 1, 2, 3 osv. ville de alltid få riktig svar selv med feil fremgangsmåte.

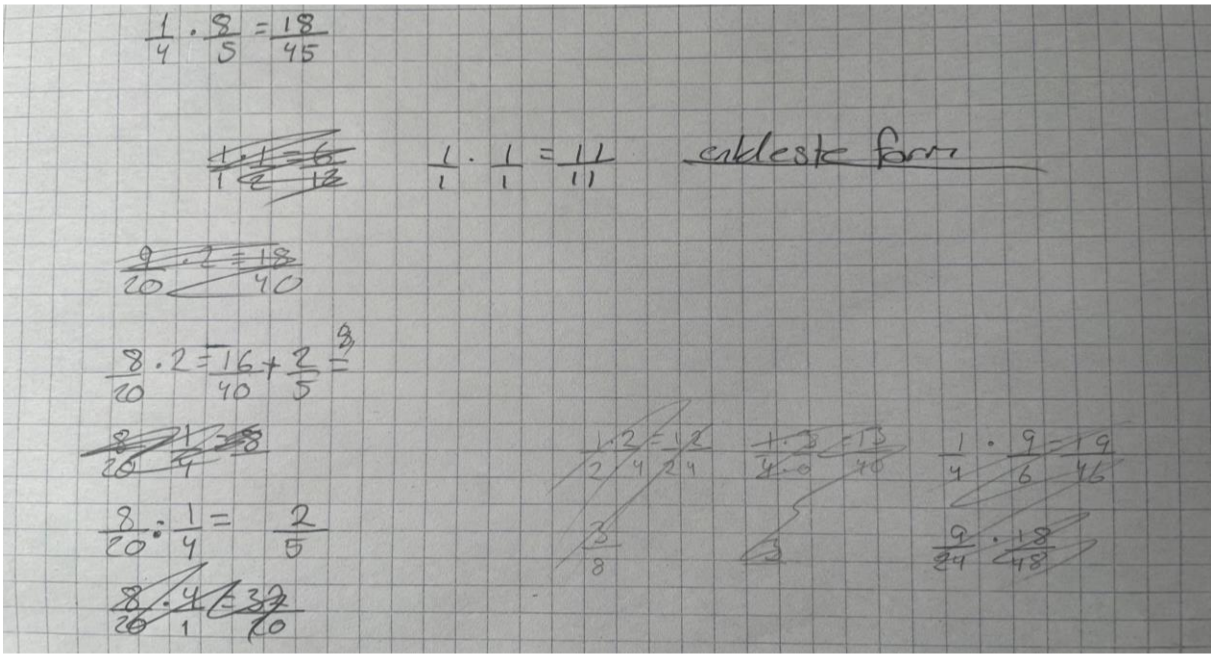
Gruppe 3, Emma og Sofie: Emma og Sofie ble raskt enig om å prøve med tilfeldige tall. Etter hvert begynte de å diskutere om de burde finne en metode før de fortsatte med å prøve tilfeldige tall. Etter å ha sett på oppgaven på nytt og brukt en del tid på å diskutere fikk de et hint om å bruke algebra på uttrykket for å prøve å generalisere:



Figur 11 – Emma og Sofies generalisering i oppgave om feil aritmetikk.

Etter at de hadde satt opp den første delen av uttrykket $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{10a+b}{10c+d}$ prøvde de å forenkle uttrykket ytterligere. De endte opp med uttrykket $10abc + abd = 10acd + cdb$ og kommenterte at *«det ble sykt mye bokstaver»*. Samtidig som de satte opp uttrykket og prøvde å forenkle det diskuterte de hvordan dette egentlig skulle hjelpe dem med å finne en generell formel da det bare ville ende opp med å bli et stort uttrykk med mange variabler. Etter å ha kommet frem til $10abc + abd = 10acd + cdb$ så de ingen vei videre og tiden gikk også ut.

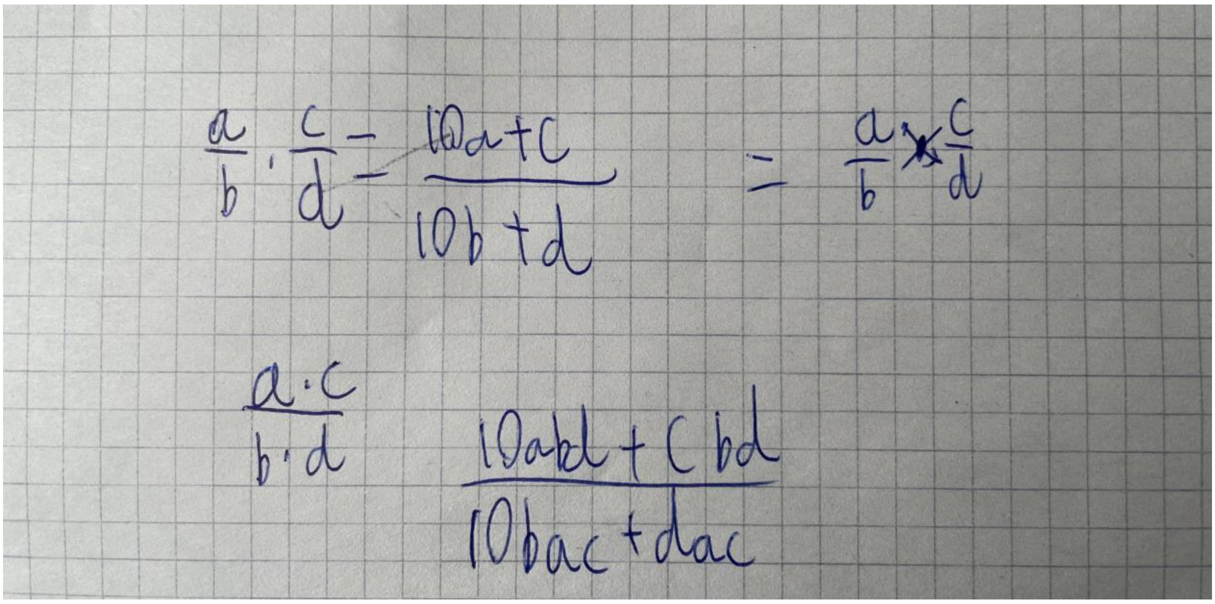
Gruppe 4, Olivia: Olivia brukte litt tid på å forstå oppgaven. Hun prøvde etter hvert $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{12}$. Hun forsto raskt at dette ble feil fordi hun ikke hadde brukt den feile aritmetikken på riktig måte. Etter å ha tenkt seg litt om endret hun til $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{11}{11}$ og sa at dette måtte være den enkleste formen det kunne fungere på. Etter å ha funnet ut dette forsøkte hun å se på regnestykket i selve oppgaven. Dermed begynte hun å gjøre $\frac{8}{2}$ om til $\frac{8}{45}$ for å se om det kunne være et mønster der.



Figur 12 – Forsøk på å finne fremgangsmåte i oppgave om feil aritmetikk.

Etter å ha brukt litt tid på dette konkluderte hun med at det ikke kunne være dette som var enkleste måte å se på det. Etter hint fra meg om å bruke algebra kom også Olivia frem til den samme likningen som de andre $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{10a+b}{10c+d}$. Hun klarte ikke å bruke denne videre til noe ettersom hun kom frem til denne ganske sent i prosessen.

Gruppe 5, Oliver: Oliver trodde han hadde forstått oppgaven ganske raskt og begynte umiddelbart med $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{1} = \frac{5}{5}$. Da han oppdaget at dette var feil måte å gjøre det på forsøkte han med $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4}$ og $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}$ uten at dette førte noen vei. Etter litt betenkningstid kom Oliver frem til at summen av tellerne og summen av nevnerne begge var lik 9. Dette brukte han videre og forsøkte å finne liknende uttrykk. Etter hvert som dette ikke ga noen gunstige resultater så Oliver at den ene brøken var verdt mer enn 1 mens den andre mindre. Han brukte dette som utgangspunkt i et forsøk på å finne liknende eksempler. Da dette heller ikke ga noen resultater, fikk Oliver et hint om å prøve å bruke algebra. Ganske raskt etterpå hadde han kommet frem til likningen:



Figur 13 – Olivers likning i oppgave om feil aritmetikk.

Ettersom dette var ganske sent i problemløsningsprosessen klarte ikke Oliver å se noen vei videre etter å ha satt opp likningen. Dermed gikk tiden ut og han fikk ikke prøvd seg på noe videre.

4.2 Funn gjennom analyse

I dette delkapitlet vil jeg presenterer funnen som ble gjort gjennom analysen. I del 1 vil jeg presentere analysen med hensyn på problemløsningsstrategier. Del 2 vil fokusere på hvilke områder av problemløsningsprosessen som kan forklares ved hjelp av teori om matematisk kreativitet.

4.2.1 Prøblemløsningsmodeller

Gruppe 1, Nora: Nora begynte begge oppgavene med å lese oppgaven nøye og stille eventuelle spørsmål om det som var uklart. Når hun hadde forstått oppgavene godt nok begynte hun å planlegge hvordan hun skulle løse disse. Videre fortsatte hun med å gjennomføre den planlagte fremgangsmåten hun hadde valgt. I oppgaven om *roterende* sirkel valgte hun deretter å verifisere svaret med meg som forsker, mens i oppgaven om feil aritmetikk verifiserte hun selv at svare ble feil. Disse prosessene ble begge kodet til $F - P - U - V$ og stemmer godt overens med analytiske problemløsningsprosesser (Pólya & Conway, 2014; Rott et al., 2021). Nedenfor er et utdrag fra starten på oppgaven om roterende sirkel:

30 sek – leser oppgaven (F)

A: Jeg tror jeg starter med å finne ut hvor mye av, liksom, hvor mye en omkrets, eller hvor mye en svingning er. Hvis du skjønner. Da tar vi omkretsen. Dette blir bare et generelt svar som vi blir å ende opp med. (P)

A: Burde jeg heller da beholde at realfaglig matematikk nivå 1, er liksom, 1/3 av r2 eller skal (U)

F: Oppgaven har gitt det forholdet mellom, så det kan være lurt å begynne der.

A: Ja okei

A: Nå skal jeg finne omkrets til liten sirkel

A: Så vil jeg dele omkretsen fra sirkel to på sirkel en

A: Da krysser jeg ut og ser at forholdet vil være – 3

A: den vil gå tre omganger? (V)

Her har jeg skrevet inn hvilken kategori de forskjellige delene av prosessen er kodet som. Som vi ser er det et klart tegn på den klassiske problemløsningsstrategien fra *how to solve it* (Pólya & Conway, 2014).

I oppgaven om den *roterende* sirkel fortsatte Nora på en noe kaotisk måte. Under spørsmålsrunden i etterkant av det oppgavebaserte intervjuet forklarte hun at da den første fremgangsmåten ikke fungerte hadde hun problemer med å omstille seg fordi hun på en måte hadde *låst* seg til den første fremgangsmåten. Selv ikke etter å ha fått hint klarte hun å gi seg selv tid til å tenke og endte opp med koderekken $F - U - V - U - V$, hvor U i stor grad bestod av gjetting.

I oppgaven om feil aritmetikk startet Nora som tidligere nevnt med $F - P - U - V$. Her valgte hun å prøve forskjellige tallkombinasjoner, noe som gjorde at hun ikke gikk tilbake til å prøve å *forstå* mellom hvert forsøk. Etter hvert som hun fant ut at denne måten ikke ville gi noe uttelling gikk hun tilbake til å prøve å forstå oppgaven bedre og startet en ny prosess med $F - P - U - V$. Heller ikke denne gangen kom Nora frem til et tilfredsstillende resultat.

En ting som er verdt å merke seg er at under begge oppgavene gikk Nora tilbake til kategorien *forstå* to ganger. Det vil si at hun i etterkant av å ha prøvd å utføre forskjellige fremgangsmåter gikk *tilbake til start* og prøvde å forstå oppgaven bedre. Dette ble også bekreftet under spørsmålsrunden i etterkant av intervjuet hvor hun sa: «Hvis ja, hvordan kom du deg videre etter å ha møtt «veggen»? - Prøvde å lese oppgaven flere ganger, og prøvde å endre tankemåte».

Gruppe 2, Noah og Oskar: På samme måte som Nora starter Noah og Oskar med $F - P - U - V$ i begge oppgavene. Men i motsetning til Nora som forflyttet seg raskt til planleggingsfasen brukte Noah og Oskar lengre tid på å diskutere oppgavene. Dette kan være fordi de ville sikre seg at begge hadde forstått oppgaven på samme måte før de begynt å planlegge. Etter hvert som de kom i gang med oppgaven om *roterende* sirkel, var de raske med å komme frem til et svar og verifisere det. Etter å ha innsett at resultatet ikke var riktig gikk de umiddelbart tilbake til fasen hvor de prøvde å forstå oppgaven bedre. I den nye runden med forståelse diskuterte de følgende:

> B: Vi kan jo prøve å tenke oss hvor langt den har gått når den har snudd én gang
>
> C: altså når det har tatt en rotasjon?
>
> B: ja, langs.. eller vi bør prøve å finne ut hvordan vi kan skrive det matematisk
>
> C: areal står også det, men vet ikke hvordan vi kan bruke det?!
>
> B: jeg må bruke passer for å vise, vi kan jo se på banene. Den vil gå slik, og vi får en til sirkel her med sentrumet sitt her. Dette blir jo radius til to + radius til en, dette blir mer.
>
> C: det blir 4 av radiusen
>
> B: dette er jo egentlig distansen den går
>
> C: det er veien sentrum går.

I forkant av disse åtte linjene hadde de funnet ut at svaret 3 ikke var riktig. I de fire første linjene diskuterer de hvordan de vil gå frem i forsøket på å finne en ny fremgangsmåte. I etterkant av linje fire hvor Oskar (C) lurer på om areal kan være en mulighet, blir det stille i et par sekunder før Noah (B) kommer med sitt forslag og tegner opp figuren, se figur 6. Oskar skyter raskt inn at dette blir 4 ganger r_1 og at det blir veien sentrum går. I stedet for å fortsette på denne tankemåten, som kunne gitt riktig svar, begynte de heller å diskutere om hvorvidt det måtte være et heltall antall ganger den gikk rundt. Etter å ha diskutert seg bort fra denne ideen startet de en ny prosess med å prøve å *forstå* oppgaven bedre før de begynte på en ny fremgangsmåte. Dette ble kodet til $F - P - U - V$. Her virket det som de ikke helt klarte å forstå hva den andre tenkte slik at de ikke klarte å bli enige om en fruktbar vei videre. For eksempel svarte Noah: «kan være vanskelig å forklare abstrakte tanker og ideer, men som læringsmetode tror jeg vi lærer mye av det.» på spørsmål om de foretrakk å arbeide i par eller alene med slike oppgaver.

I oppgaven om feil aritmetikk startet de med en prosess som godt kan beskrives ved hjelp av en analytisk problemløsningsmodell med en fase hvor de prøvde å forstå, før de planla, deretter utførte og til slutt verifiserte (Pólya & Conway, 2014; Rott et al., 2021). Utdrag fra *planlegging*sfasen og overgangen til *utføre.*

> B: da må vi passe på at, jo, vi kan vel alltid gange med det tallet som gir det resultatet til slutt. Eller?
>
> C: jo det går kanskje
>
> B: eller etter eller annet forhold.
>
> C: nei det skjer jo ikke, nei…
>
> B: skal vi prøve med noen tilfeldige tall
>
> 30:30-31:40 (prøver tilfeldige tall)

I den siste linjen begynner de å lete etter mulige kombinasjoner ved å bruke tilfeldige tall, se figur 10. Videre verifiserte de dette selv:

> C: du prøvde med 2, 9, 5, 6, men det gikk ikke
>
> B: nei, da må vi gange med et tall over og under, men fikk ikke noe. Det gikk ikke å gange med.
>
> C: funker dette faktisk, er dette sant?
>
> B: nei i dette tilfellet er det ikke sant, fordi det er ingen tall jeg kan gange dette med for å få det tallet jeg ønsker til slutt
>
> C: det funket ikke ved å legge til 7 her og 1 her. Dette funket heller ikke.

Etter hvert kom de frem til en rekke med svar som ville fungere:

> B: vi har jo 1, 1, 1, 1. som blir det samme som 1/1
>
> C: og 2, 2, 2, 2 og 22/22
>
> B: kanskje det har noe med…
>
> B: kan det ha noe med partall og oddetall, prøver å se etter mulige mønstre.

Etter å ha funnet disse tallene gikk de tilbake til å forstå oppgaven bedre slik at de kunne komme frem til enten flere uttrykk som ga riktig svar, eller en generell formel, uten at de lyktes med det.

Gruppe 3, Emma og Sofie: Gruppe 3 begynte med å lese oppgaven om *roterende* sirkel nøye og diskutere litt seg imellom slik at de hadde samme forståelse av oppgaven. Deretter planla de hvordan de skulle gå frem før de forsøkte å gjennomføre det. Underveis i prosessen *utføre* ble de usikre:

> 1:45-2:30 (forsøker en fremgangsmåte)
>
> F: men hvordan skal vi gjøre det når vi ikke vet lengden på noen av dem?
>
> D: Vi vet at den er 1/3 av den.
>
> F: dere kan spørre meg om det er noe ved oppgaven som er uklart
>
> D: er det den vi skal finne?
>
> E: det vi skal finne er hvor mange ganger den ruller rundt den
>
> F: vi vil finne ut hvor mange gang den lille sirkelen ruller rundt den store, uten å skli
>
> Forsøker fremgangsmåte

Etter at de hadde begynt på fremgangsmåten sin spurte de meg (F) for å forsikre seg om at de hadde forstått oppgaven riktig før de fortsatte med den samme fremgangsmåten som de hadde startet på. Hvis vi ser bort fra den lille usikkerheten ble denne prosessen kodet som $F - P - U - V$. I motsetning til gruppe to som også arbeidet i par, brukte de lite tid på å diskutere fremgangsmåter og jobbet mer eller mindre individuelt store deler av intervjuet. I det store og hele virket det som Emma og Sofie hadde problemer med å komme seg videre når de møtte «veggen». De prøvde hardt å komme seg videre, blant annet sa Sofie: «hvis vi skal se som her, da fant vi jo forholdet. Da får vi det samme uansett, siden vi bare stryker pi, da blir forholdet 9:1. Men jeg skjønner ikke hva vi skal gjøre med dette», etterfulgt av en lengre tenkepause på begge.

På oppgaven om feil aritmetikk gikk de rett på U etter at de hadde lest oppgaven. Før de begynte spurte de meg om de hadde forstått riktig. På samme måte som i forrige oppgave brukte de her lite tid på å diskutere om de hadde samme forståelse og begynte egentlig bare å prøve med tilfeldige tall. Dette fortsatte de med helt til jeg ga et hint om at det kunne være mulig å bruke algebra og skrive opp en likning. Dette ga dem en ny måte å se på problemet og de brukte litt tid på å arbeide med dette helt til de igjen møtte «veggen». Igjen var det problematisk for dem å komme seg videre og de klarte ikke å omstille seg. Dette kunne de også bekrefte i spørsmålsrunden etter intervjuet: «Hvis ja, hvordan kom du deg videre etter å ha møtt «veggen»? - Hint hjalp for å få tips til hvordan vi kunne gå frem. Det er vanskelig å bytte fremgangsmåte».

Gruppe 4, Olivia: I oppgaven om *roterende* sirkel brukte Olivia lang tid på å komme i gang. Hun brukte lang tid i fasen F. Videre begynte hun å planlegge før hun utførte planen sin. Til slutt ville hun verifisere svaret og når det endte opp som feil gikk hun tilbake til å prøve å *forstå* oppgaven på nytt. Dermed fulgte hun rekken: $F - P - U - V - F$, en klar indikasjon på en analytisk fremgangsmåte (Pólya & Conway, 2014; Rott et al., 2021). Deretter endte Olivia opp med å komme frem til riktig svar, men på grunn av at fremgangsmåten hun brukte ikke var gyldig, se kapittel 4.1.1, ba jeg henne om å prøve å finne en fremgangsmåte som kunne gi dette svaret. Dette hadde hun problemer med i den grad hun ikke klarte å omstille seg og tenke nytt.

I oppgaven om feil aritmetikk brukte Olivia lang tid på å se at oppgaven i oppgaveteksten faktisk var riktig. Etter å ha forstått oppgaven prøvde hun å finne liknende brøker:

> 26:30-28:00 (prøver å finne nye brøker)
>
> G: jeg vet liksom ikke helt hvor jeg skal starte

På samme måte som i oppgaven om *roterende* sirkel hadde hun problemer med å finne en måte å starte oppgaven på. Det var også problematisk å begynne på nytt etter å ha prøvd. Det var lite analytiske metoder å spore da det ble mye av det samme hvor hun prøvde å finne like uttrykk uten å ha en plan, se figur 12. Generelt sett kan oppgaven om feil aritmetikk for Olivias del oppsummeres ved at hun hadde problemer med å planlegge hva hun skulle gjøre. Dette kan nok ha en sammenheng med at hun muligens ikke fikk full forståelse for hva oppgaven spurte om.

Gruppe 5, Oliver: Oppgaven om *roterende* sirkel startet med at Oliver brukte tid på å lese oppgaveteksten nøye og stilte spørsmål om de tingene som var uklare. Etter dette brukte han kort tid på å planlegge hva han skulle gjøre, og utføre det. Relativt kort tid etterpå hadde han kommet frem til et svar som viste seg å være feil. Oliver gikk deretter rett tilbake til å analysere hva oppgaven spurte om:

> H: jeg tenker at siden radiusen er 1/3 så må jeg bare gange 2pi med 3 for å finne ut forskjell på radius og siden den skal rulle rundt omkretsen til den så skal jeg dele omkretsen på den på omkretsen til den, så får jeg svaret.
>
> H: så da blir det 3?!
>
> F: ja hvis du gjør det sånn ja, men svaret er feil. Kanskje den mest intuitive måten, men det blir feil
>
> H: okei
>
> 4:20-5:40 (tenker)
>
> H: jeg tenker på hvordan andre måter man kan regne på det utfra de opplysningene som er gitt

Her viser den første linjen til planleggingsfasen, mens mellom linje én og to utfører han planen før han i linje to verifiserer. Deretter bruker han litt tid på å tenke før han forklarer meg hva han gjør i linje seks. Videre trodde Oliver at han hadde noen små gjennombrudd uten at han kom noen vei med disse. I denne delen av intervjuet hoppet han mellom F og P i et forsøk på å komme seg videre.

I oppgaven om feil aritmetikk begynte Oliver på samme måte som i forrige oppgave. Han prøve å forstå, planla, utførte og verifiserte:

> Leser oppgave
>
> H: det første jeg tenker er hvis brøkene har det samme over og under så har vi ¼ her og 4/1 her. Blir det riktig? Kan jo sjekke.
>
> H: Hvis vi plusser sammen her så blir det jo det riktige
>
> F: men her har de ikke plusset, men bare slått sammen disse
>
> H: åja, ja okei.

Her leser han oppgaven (F) før han mellom linje én og to og i linje to planlegger hvordan han skal angripe oppgaven. Videre utfører han planen sin mellom linje to og tre, før han i linje tre verifiserer med meg. Etter å ha prøvd å finne noen brøker som kunne fungere prøvde han å skifte fremgangsmåte, eller rettere sagt prøvde han å se om det kunne være en form for mønster han kunne følge:

> H: jeg tenker at kanskje det har noe å si at den ene er verdt over og den andre under 1.
>
> 30:00-34:00 (prøver å finne nye)
>
> H: jeg tenkte at det kanskje bare var faktorer som var på denne måten at det funket, at det var med jevne mellomrom mellom dem.

Generelt sett viste Oliver veldig mye som tydet på en analytisk fremgangsmåte. Spesielt måten han prøvde å omstille seg i etterkant av å ha fått feil svar:

> Hvis ja, hvordan kom du deg videre etter å ha møtt «veggen»? - Jeg bruker å gå tilbake å lese oppgaven på nytt, på denne prøvde jeg noe og startet på nytt og så etter noe nytt. Eller se om det var noen sammenhenger jeg hadde oversett. Hjelper ofte å lese på nytt, det gjør at jeg kan nullstille. Ta med det jeg har funnet ut at er feil.

4.2.2 Matematisk kreativitet

Gruppe 1, Nora: Fra et matematisk kreativt synspunkt møter Nora på fikseringer underveis i prosessen. Hun forklarte i etterkant av å problemløsningen at hun synes det var problematisk, spesielt på oppgaven om *roterende* sirkel, å løsrive seg fra den fremgangsmåten hun trodde var riktig.

> Hvorfor begynte du å løse oppgaven på den måten du valgte?
>
> Hadde du sett en liknende oppgave tidligere?
>
> Ja, det påvirket meg spesielt på den første oppgaven hvor jeg har sett noe liknende før. Jeg var litt fastlåst på at det var sånn det skulle være. Jeg låste meg litt til den ene tankemåten.

Noras forklaring på hvorfor hun ikke kom seg videre kan godt beskrives ved hjelp av Haylock (1997) *algoritmic fixation*. Hun forklarer at hun har sett noe liknende før, og har en klar tanke om hva hun skal gjøre. Når denne måten viser seg å ikke fungere har hun problemer med å løsrive seg fra denne. Muligens kan dette også forklares som mangel på *divergent thinking* (Haylock, 1997; Runco, 2020).

I oppgaven om feil aritmetikk opplevde Nora to «aha-øyeblikk». Det første øyeblikket oppstod i etterkant av at jeg som forsker hadde gitt henne et hint, mens det andre oppstod mens hun var midt i en U-prosess. I dette tilfellet kan det tenke seg at hun drev med *divergent* *thinking* og at denne ideen oppstod spontant som et resultat av at hun tenkte og prosesserte mange tanker samtidig, mens hun jobbet med å utføre den fremgangsmåten hun hadde valgt (Haylock, 1997; Runco, 2020).

Hvis vi ser tilbake på Ervyncks (1991) tre faser kan det se ut som Nora kom seg til fase to i oppgaven om *roterende* sirkel, mens i oppgaven om feil aritmetikk klarte hun delvis å komme seg inn i fase tre hvor hun prøvde å bruke andre metoder enn innlærte teknikker og algoritmer.

Gruppe 2, Noah og Oskar: I oppgaven om *roterende* sirkel var Noah og Oskar innom både den andre og tredje fasen Ervynck (1991) beskriver. I deres første forsøk på å løse oppgaven var de i fase to hvor de brukte kjente algoritmer og teknikker for å løse oppgaven. Da dette ikke fungerte klarte de å komme seg videre og være kreativ på en slik måte at de brukte andre ting enn innlærte algoritmer og teknikker for å løse problemet:

> B: jeg må bruke passer for å vise, vi kan jo se på banene. Den vil gå slik, og vi får en til sirkel her med sentrumet sitt her. Dette blir jo radius til to + radius til en, dette blir mer.
>
> C: det blir 4 av radiusen
>
> B: dette er jo egentlig distansen den går
>
> C: det er veien sentrum går.

Problemet var at selv om de her nærmest hadde løsningen fremfor seg klarte de ikke å produsere et resultat av det. Dette kan ha en sammenheng med *content-universe fixation* som Haylock (1997) beskriver. Under spørsmålene på slutten av problemløsningen svarte Noah at:

> Hvorfor begynte du å løse oppgaven på den måten du valgte?
>
> Hadde du sett en liknende oppgave tidligere?
>
> B: ja oppgave 1, hadde sett noe liknende, husket at det ikke var helt rett frem.

Noe som kan ha gjort at han følte at det de fant ut med den ekstra sirkelen med fire ganger så stor radius ble for *enkel*, altså kan de ha begrenset sine egne muligheter ved å se for avansert på problemet. Utover dette viste de få ting som tydet på fremgangsmåter som kunne forklares gjennom matematisk kreative problemløsingsmodeller.

I oppgaven om feil aritmetikk brukte de også fremgangsmåter som i liten grad lar seg forklare av matematisk kreative problemløsningsmodeller. Det de viste av matematisk kreativitet, eller rettere sagt mangel på matematisk kreativitet var at de i lang tid låste seg til en fremgangsmåte. Fremgangsmåten hvor de prøvde ut forskjellige og til dels tilfeldige tall:

> C: vi kan teste på nye tall.
>
> B: men da må tallene, eller kanskje kan vi alltid gjøre det med, litt vanskelig å bare teste frem. Vi har jo egentlig bare to brøker som vi ganger sammen, så får vi et svar, også er det et eller annet tall både oppe og nede, slik at disse to tallene satt sammen ble riktig. Her ganger du med to først forså og gange med noe annet oppe og nede. Men det jeg vil komme frem til er at, det ville vært enklere å, ja dele på 2/5. Vi har to brøker, så ganger vi resultatet oppe og nede med noe slik at det blir samme når de settes sammen.

Til tross for at de tidlig var enige om at det var en vanskelig metode å bruke hadde de problemer med å omstille seg å forsøke noe nytt. De nevnte aldri at dette var et problem, men det faktum at de brukte over halvparten av tiden på denne metoden viser at de ikke klarte å rive seg løs fra denne tankemåten. Etter hint fra meg som forsker begynte de å lage et algebraisk uttrykk uten at de kom langt med denne metoden heller.

Gruppe 3, Emma og Sofie: I oppgaven om *roterende* sirkel jobbet Emma og Sofie på en måte som i liten grad kan forklares med kreative matematiske problemløsningsmodeller. Derimot møtte de på utfordringer som er i samsvar med det som presenteres som matematisk kreativitet i kapittel 2.2 (Haylock, 1997; Runco, 2020). Etter hvert som de fant ut at den første fremgangsmåten ikke ville fungere hadde de problemer med å omstille seg. Jeg opplevde ikke at de hadde *algorithmic fixation,* men heller det Haylock (1997) beskriver som *content-universe fixation.* Det virket som de la restriksjoner på seg selv og egne matematiske ferdigheter. Noe som førte til at de ikke klarte å utforske flere mulige metoder. Dette gjenspeiles i spørsmålene som ble stilt i etterkant av problemløsningen hvor de begge svarte at hintene var det som hjalp mest når de skulle komme seg videre til en ny fremgangsmåte:

> Hvis ja, hvordan kom du deg videre etter å ha møtt «veggen»?
>
> Hint hjalp for å få tips til hvordan vi kunne gå frem. Det er vanskelig å bytte fremgangsmåte.

I oppgaven om feil aritmetikk begynte de med å forsøke tilfeldige tall etter å ha lest oppgaven. Dette foregikk en god stund med noen meningsutvekslinger mellom Emma og Sofie. På meg virket det som de prøvde tilfeldige tall uten noen særlig struktur, og at de hoppet litt frem og tilbake mellom forskjellige utregninger. Dette kan tyde på *divergent thinking* ettersom det er mange prosesser som foregår samtidig, og flere av utregningene de jobbet med ledet dem i forskjellige retninger mens de utforsket nye uttrykk som kunne fungere.

Gruppe 4, Olivia: I oppgaven om *roterende* sirkel kom Olivia frem til riktig svar. Dette skjedde på en måte som jeg umiddelbart tenkte traff godt under matematisk kreativ problemløsningsmodell. Hun begynte først å jobbe med noe som ikke førte frem og plutselig sier hun at:

> G: mens med omkrets fikk jeg den til å være 2pi og omkretsen til sirkel 2 er 6pi, men jeg tviler på at den bare vil rulle rundt 4 ganger.
>
> F: hva tenker du da?
>
> G: 6-2 er 4

Her viste det seg at hun hadde tenkt litt feil og det riktige svaret i hennes tanke måte ville vært: $6\pi - 2\pi = 4\pi$. Til tross for at Olivia kom frem til riktig svar og fikk dette bekreftet hadde hun problemer med å komme frem med en forklaring på hvorfor. Hun viste tydelige tegn på *algorithmic fixation* og klarte ikke å komme seg vekk fra tanken om at det skulle fungere ved å bruke formel på omkrets.

I oppgaven om feil aritmetikk hadde Olivia en noe uoversiktlig fremgangsmåte. Mye av det hun gjorde kan forklares ved hjelp av *divergent thinking* (Haylock, 1997; Runco, 2020). Det virket som hun hadde mange prosesser pågående samtidig og hun brukte lite tid på å planlegge. Denne måten å arbeide på er godt definert innenfor matematisk kreativitet, men Olivia klarte ikke omgjøre den divergerende tankegangen til divergerende produksjon. Haylock (1987) beskriver at divergerende produksjon ofte brukes for å måle matematisk kreativitet og at resultatet blir bedømt med hensyn til fleksibilitet, originalitet og riktighet. I Olivias tilfelle kunne det virke som hun hadde den divergerende tankemåten, men klarte ikke å få noen resultater ut av det. Mulig hadde det vært nyttig om hun hadde bedre tid på seg (Haavold & Sriraman, 2021; Rott et al., 2021).

Gruppe 5, Oliver: Oliver begynte å jobbe etter en analytisk fremgangsmåte i oppgaven om *roterende* sirkel. Når denne fremgangsmåten ikke fungerte prøvde han å komme opp med nye metoder å gjøre det. Her hadde han problemer med å bryte ut av tankemønstret sitt og kom ikke ordentlig i gang med en ny fremgangsmåte. På samme måte som gruppe 2 med Noah og Oskar kan det virke som han la restriksjoner på sin egen *kreativitet.* Etter problemløsningen svarte han:

> Hvorfor begynte du å løse oppgaven på den måten du valgte?
>
> > Hadde du sett en liknende oppgave tidligere?
>
> Har sett noe på youtube, jeg mener i alle fall å huske det. Jeg tror det var noe likt, men jeg tror ikke det var helt likt, så jeg husker at det var noe med pi fordi det var det jeg husket. Derfor trodde jeg det på slutten.

Her kan det tenkes at han lot seg styre litt av det faktum at han hadde kjennskap til liknende oppgaver fra før og ikke klarte å rive seg løs fra tankesettet han hadde. Samtidig som dette kan ha vært en forklaring hadde han også noen tanker rundt hva han kunne forsøke, uten at han klarte å omgjøre dette til resultater:

> H: da tenker jeg at siden den går rundt en sirkel vil denne spinne raskere siden den er mindre. Da vil det i så fall bli flere enn 3.

I oppgaven om feil aritmetikk jobbet Oliver i stor grad etter en analytisk metode. Til tross for dette kom han seg ikke videre for å produsere resultater. Som oftest stoppet det opp i planleggingsfasen, eller så stoppet han underveis i utførelsen fordi han innså at det ikke ville fungere. På meg kunne det virke som at metoden om å forsøke å lese og forstå oppgaven bedre sjeldent hjalp han videre. Det som derimot hjalp, var da han fikk hint til hvordan han kunne fortsette. I etterkant av hintene hadde han en slags aha-opplevelse som gjorde at han kom seg et hakk videre med oppgaven, se figur 13.

4.3 Sammenhenger i datamaterialet

I dette kapittelet vil jeg fremheve sammenhenger i datamaterialet. Først vil jeg presentere forskjeller og likheter mellom de som arbeidet i par og det som arbeidet alene. Deretter vil jeg se mer generelt på hvilke sammenhenger det var i problemløsningsprosessene mellom alle deltakerne.

4.3.1 Par vs. individuelt

Par: I studien deltok det to par. Gruppe 2 bestod av gutter med realfaglig matematikk nivå 1 som siste godkjente matematikkfag, begge med høy måloppnåelse derfra. Gruppe 3 bestod av jenter med samfunnsfaglig matematikk nivå 1 som siste godkjente matematikkfag, begge med høy måloppnåelse derfra.

I oppgaven om *roterende* sirkel begynte begge gruppene å lese og forsøke å forstå oppgaven så godt som mulig. De diskuterte litt seg imellom, den ene gruppen mer enn den andre, og ble enig om en måte å angripe oppgaven på. De valgte samme fremgangsmåter og begge viste klare tendenser til analytisk fremgangsmåte i starten hvor de brukte tid på å forstå, planlegge og utføre. Gruppe 3 ble litt usikre på sitt valg underveis i utførelse, men de hentet seg inn og fortsatte. I etterkant av det første forsøket var det store forskjeller i hvordan de fortsatte. Gruppe 2 brukte mye tid på å diskutere hvorfor dette ikke var riktig og hva de måtte endre på for å komme seg videre, mens Emma og Sofie i gruppe 3 tenkte mest hver for seg. Begge gruppene brukte tid på å komme frem til nye ideer, men gruppe 2 hadde alltid en dialog som gjorde det enklere for meg som forsker å følge med på hva de tenkte.

Begge gruppene prøvde å lese oppgaven på nytt i et forsøk på å se om de hadde et nytt perspektiv på den i etterkant av å ha mislyktes på første forsøk. Men der gruppe 2 fikk en liten åpenbaring da de innså at de kunne lage en ny sirkel som fulgte sentrum av den minste sirkelen opplevde gruppe 3 det som problematisk å komme seg videre. Til tross for at gruppe 2 hadde denne åpenbaringen klarte de ikke å omsette den videre og formulere et svar innenfor de tidsrammene som var satt.

I oppgaven om feil aritmetikk var det få likheter i hvordan de to gruppe valgte å løse oppgavene. Mens gruppe 2 med Noah og Oskar i stor grad arbeidet på samme måte som i oppgaven om *roterende* sirkel, gikk gruppe 3 rett i gang med U. Gruppe 2 brukte også i denne oppgaven tid på å diskutere mye for å bli enige om hvordan de tenkte og kunne gå videre, mens gruppe 3 brukte mindre tid på dette.

Individuelt: Her var det 3 deltakere. Gruppe 1 bestod av én jente med realfaglig matematikk nivå 1 som siste godkjente matematikkfag, med høy måloppnåelse. Gruppe 4 bestod av én jente med samfunnsfaglig matematikk nivå 1 som siste godkjente matematikkfag, med middels måloppnåelse. Gruppe 5 bestod av én gutt med samfunnsfaglig matematikk nivå 1 som siste godkjente matematikkfag, med middels måloppnåelse.

I oppgaven om *roterende* sirkel begynte alle tre med sekvensen $F - P - U - V$. Det var varierende tidsbruk i de forskjellige fasene, men alle kom frem til samme metode. Da denne mislyktes varierte det litt hvordan de gikk videre. Nora i gruppe 1 hadde problemer med å komme seg videre og viste tydelige tegn på det Haylock (1997) kaller *algorithmic fixation.* Olivia i gruppe 4 møtte på samme problem, men på en litt annen måte. Hun kom frem til riktig svare ved en feiltakelse, men klarte ikke å løsrive seg fra tankesettet sitt slik at hun kunne forsøke å finne en ny og riktig metode. Oliver i gruppe 5 sitt problem forklares bedre med det Haylock (1997) kaller *content-universe fixation* hvor han satte unødvendige restriksjoner på seg selv og sin egen kreativitet.

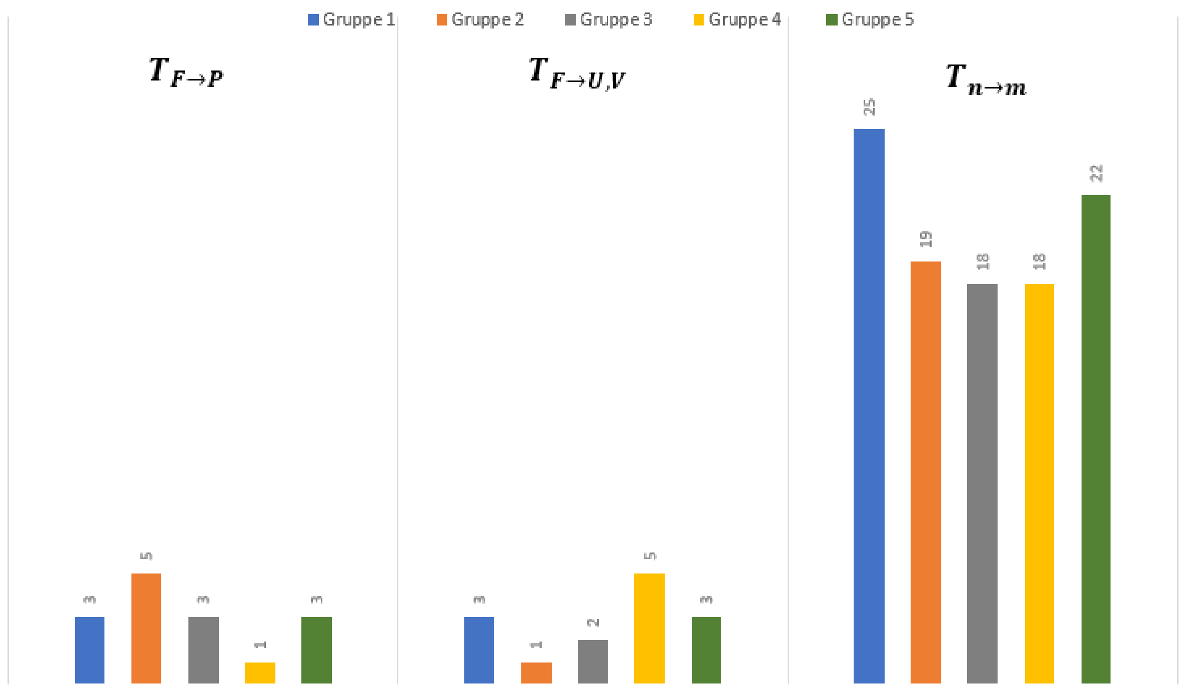
I oppgaven om feil aritmetikk begynte alle med å lese oppgaven nøye og prøvde å forstå hva som ble spurt om. Alle tre begynte med samme fremgangsmåte som innebar å prøve tilfeldige tall. Dette førte ingen vei for noen av dem. Oliver forsøkte deretter å endre på fremgangsmåten og begynte å lete etter andre mønster i oppgaven. I motsetning fortsatte Nora og Olivia å se etter mulige tilfeldig kombinasjoner. Videre arbeidet alle tre noe kaotisk og det eneste som førte de nærmere et svar var da de fikk hint. Dette hintet gjorde at samtlige fikk en liten «aha»-opplevelse. Til tross for dette hadde de problemer med å komme seg nevneverdig videre ved å sette opp et algebraisk uttrykk.

Generelt sett virket det som alle de tre som jobbet individuelt opplevde en form for fikseringer når de skulle komme seg videre til en ny fremgangsmåte. Alle oppga at de forsøkte å lese oppgaven på nytt og se om det var en annen måte å løse det på, men ingen av de klarte å omstille seg.

4.3.2 Generelle sammenhenger

Samtlige grupper hadde minimum én sekvens som var: $F - P - U - V$, hvor de fleste hadde flere enn én. Dette sammen med det som kommer frem i kapittel 4.2.1 tyder på at alle gruppene i større eller mindre grad brukte fremgangsmåter som kan forklares med analytiske problemløsningsprosesser. Samtidig svarte 4 av 5 grupper at når de møtte «veggen» forsøkte de å lese oppgaven på nytt og se om det var noe de hadde misforstått eller oversett. Dette er også samsvarende med teorien på området om analytisk problemløsende modeller når problemløseren skal omstille seg og finne nye måter å løse problemet på (Pólya & Conway, 2014; Rott et al., 2021).

Videre har jeg valgt å fokusere på noen viktige faseoverganger. Figur 14 viser en oversikt over faseovergangene $T_{F->P}$, $T_{F->U,V}$ og totalt antall faseoverganger $T_{n->m}$. Jeg har valgt disse fordi en overgang fra *forstå* til *planlegge* i stor grad sammenfaller med en analytisk problemløsningsmodell, mens en overgang fra *forstå* til enten *utføre* eller *verifisere* i stor grad sammenfaller med en kreativ problemløsningsmodell. Ettersom overgangen fra *incubation* til *illumination* er svært vanskelig å fange opp har jeg i dette tilfellet valgt å bruke $T_{F->U,V}$ som et tegn på at en kreativ problemløsningsprosess. Når det er sagt vil det være flere faseoverganger som kan tyde på at enten en analytisk eller kreativ problemløsningsmodell er brukt, men jeg har valgt å fokusere på disse.



Figur 14 – Oversikt over viktige faseoverganger i løpet av begge oppgavene.

Som vi ser av figur 14 har gruppe 1 like mange overganger som tyder på analytisk og kreativ problemløsningsmodell. Samtidig som tallene viser likt antall er det viktig å understreke at gruppe 1 begynte begge oppgavene med en sekvens på $F - P - U - V$. Gruppe 2 har klart flere faseoverganger som tyder på analytisk, og viste flere andre analytiske tendenser, se kapittel 4.2.1. Gruppe 2 startet også begge oppgavene med sekvensen $F - P - U - V$. Gruppe 3 har én faseovergang mer til fordel for analytisk. Når det er sagt hadde gruppe 3 kun én sekvens som var $F - P - U - V$, og denne kom helt på slutten av oppgaven om feil aritmetikk. Gruppe 4 viste en klar tendens mot kreativ problemløsningsmodell om vi skal se på de valgte faseovergangene. Videre hadde gruppe 4 bare én sekvens på $F - P - U - V$, hvor denne kom helt i starten av oppgaven om *roterende* sirkel. Gruppe 5 har en lik fordeling av faseoverganger, men begge oppgavene starter med sekvensen $F - P - U - V$.

Av totalt 10 oppgaver starter 7 av disse med sekvensen $F - P - U - V$. Hvis vi ser bort fra disse 7, finner jeg bare den samme sekvensen 3 ganger. Det vil si at 70% av oppgavene ble forsøkt løst ved hjelp av det som kan ses på som en analytisk fremgangsmåte til å begynne med. Men etter at dette viste seg å være feil finner jeg kun sekvensen $F - P - U - V$, 3 ganger. Dette stemmer overens med at mange hadde problemer med å komme seg videre etter å ha fått feil svar ved hjelp av den først valgte fremgangsmåte. Som beskrevet i kapittel 4.2.2 kan mange av problemene deltakerne møtte på forklares ved hjelp av teori på området matematisk kreativitet (Haylock, 1997; Runco, 2020).

For å oppsummere sammenhengen i datamaterialet kan jeg si at det var få likheter blant parene som deltok. Blant de som jobbet individuelt var det i større grad likheter i måten de arbeidet på, uten at jeg vil si at det var sammenfallende likheter blant noen. Generelt sett var det flere likheter å spore. Blant de mest interessante sammenhengene var det at de aller fleste begynte å løse oppgavene ved hjelp av metoder som er sammenfallende med analytiske problemløsningsprosesser. Deretter møtte de på utfordringer i form av at de ikke kom seg videre med en ny fremgangsmåte eller metode for å løse problemet. Problemene her lar seg godt forklare ved hjelp av teori på området matematisk kreativitet.

5 Diskusjon

Nesten alle gruppene startet med fremgangsmåter som kan forklares av analytiske problemløsningsprosesser. Derimot var det slik at veldig få fortsatte på samme spor videre. Som man ser fra figur 14 har gruppe 1, 3 og 5 forholdsvis likt antall faseoverganger som kan tolkes som analytiske og kreative, mens gruppe 2 har en klar overvekt av analytiske faseoverganger og gruppe 4 har en klar overvekt av kreative faseoverganger.

Gruppe 2 hadde en klar overvekt av analytiske faseoverganger. Dette sammen med flere observasjoner, se kapittel 4.2.1, bekrefter at de i stor grad arbeidet på en analytisk måte. De viste klare tegn til analytisk arbeid og brukte mye tid på å prøve å forstå problemene på nytt, samt planlegge nøye før de forsøkte nye fremgangsmåter. Til tross for at de arbeidet på en analytisk måte endte de opp med å møte veggen og klarte ikke å komme seg videre herfra. Ut fra resultatdelen kan man se at dette kan forklares gjennom teori på området matematisk kreativitet. I dette tilfellet var det mangelen på matematisk kreativitet som gjorde at det stoppet opp. Noah og Oskar kom seg ikke videre på grunn av mangel på matematisk kreativitet. Det kan også forklares ved at de hadde tidsbegrensninger på begge problemene og mye av kritikken rettet mot overgangen fra *incubation* til *illumination* er nettopp at det kan ta svært lang tid (Haavold & Sriraman, 2021; Rott et al., 2021; Weisberg, 2015). De var svært nærme en løsning på oppgaven om *roterende* sirkel uten at de klarte å omsette dette til et tilfredsstillende svar. Muligens hadde de plukket opp denne tråden igjen hvis de hadde fått lengre tid på seg.

Når det kommer til gruppe 1, 3 og 5 hadde de ganske likt antall analytiske og kreative faseoverganger. Til tross for dette viste også disse gruppene sterke tendenser til analytisk metoder, se kapittel 4.2.1. Spesielt i oppstartsfasen til begge problemene. Men på samme måte som gruppe 2 hadde de problemer med å komme seg videre etter å ha møtt veggen. Utfordringene de møtte på lot seg godt forklare av teorien på området matematisk kreativitet og det kan også her tyde på at mangelen på matematisk kreativitet var avgjørende for deres videre fremgang med problemene. Gruppe 1 og 5 forklarte at måten de forsøkte å omstille seg på etter å ha møtt veggen var ved å lese oppgaven på nytt og prøve å se om de hadde oversett noe. Mens gruppe 3 mente at hint hjalp. Samtidig ser det ut til i resultatene at også de gikk tilbake for å lese oppgaven på nytt. Det at gruppe 3 mente at hint hjalp kan være fordi de opplevde hintene som en form for *illumination*.

Gruppe 4 som hadde et klart flertall av kreative faseoverganger viste til tross for dette også noen tegn til å bruke analytiske metoder. For eksempel begynte Olivia med sekvensen $F - P - U - V$ i oppgaven om *roterende* sirkel. Videre forklarte hun etter problemløsningen at for å komme seg videre etter å ha møtt veggen hjalp det å lese oppgaven på nytt for å se om det var noe som var misforstått eller oversett. I oppgaven om *roterende* sirkel kan noe av forklaringen på de mange $T_{F->U,V}$ overgangene være at Olivia på et tidspunkt trodde hun hadde løst problemet og kom frem til riktig svar. Det viste seg at hun kom frem til dette svaret ved hjelp av en ugyldig fremgangsmåte. Dette gjorde at hun forsøkte å tenke ut en gyldig fremgangsmåte som kunne fungere. I oppgaven om feil aritmetikk er det generelt vanskelig å spore noe spesifikk metode og en mulig forklaring på dette kan være *divergent thinking*, men uten divergent produksjon.

Alle gruppene oppnådde innsikt i problemene i større eller mindre grad. I steg 3 av analysen brukte jeg analytisk deduksjon. I denne delen av analysen fant jeg data som passer med det teoretiske rammeverket innenfor analytiske fremgangsmåter. Hele 7 av 10 oppgaver starter med en analytisk metode ($F - P - U - V$) og 4 av 5 grupper beskriver at de forsøker å forstå oppgaven bedre når de finner ut at deres første fremgangsmåte ikke fungerte. Noe Pólya (2014) beskriver som en viktig del av den analytiske problemløsningsprosessen. Selv om én av gruppene hadde få analytisk faseoverganger er det flere andre ting ved arbeidsmetodene som faller under analytiske metoder.

Selv om majoriteten av deltakerne tenderer mot å bruke analytiske fremgangsmåter er også teori om matematisk kreativitet viktig for å forklare mange deler av prosessen. Som tidligere nevnt hadde mange problemer med å komme seg videre etter å ha møtt veggen. Dette kunne i stor grad forklares med mangel på matematisk kreativitet, eller kanskje bare mangel på tid. En av kritikkene mot de kreative problemløsningsmodellene er at de tar tid (Haavold & Sriraman, 2021; Rott et al., 2021; Weisberg, 2015). Dermed ville det vært svært interessant å se hvordan problemløsningsseansen hadde utviklet seg om tiden hadde vært utvidet.

De fleste valgte å begynne med en analytisk problemløsningsstrategi hvor de gikk gjennom fasene; *forstå, planlegge, utføre* og *verifisere.* Hvis dette ikke fungerte forsøkte de å lese oppgaven på nytt for å se om det var noe som var oversett eller misforstått. Det var i denne fasen av problemløsningsprosessen det stoppet opp for de fleste. Her kan det se ut som de ikke holdt seg til den analytiske prosessen i like stor grad som i starten og prosessene forklares best ved hjelp av teori om matematisk kreativitet. Det kan tenkes at flere av gruppene i denne delen av problemløsningsprosessen drev med *divergent thinking* uten at de klarte å produsere noen resultater fra det. Dette kan være på grunn av tidsbegrensningen eller andre faktorer. Det kan også tenkes at matematiske evner er en begrensning her. I Haavold og Sriramans (2021) artikkel bruker de deltakernes kunnskap som argument i flere av resultatene sine, spesielt når det kommer til hvor grundig de undersøkte hver fremgangsmåte.

Disse observasjonene stemmer godt overens med Fleck og Weisbergs (2004) firetrinns fremgangsmåte, se figur 1. Deltakerne i min studie prøvde å bruke fremgangsmåter fra tidligere og liknende oppgaver uten å lykkes. De forsøkte også å bruke matematiske formler, bryte ned problemet samt å jobbe baklengs (gruppe 4 som kom frem til svaret). Disse metodene tilfredsstiller trinn 1 og 2 i Fleck og Weisbergs firetrinns fremgangsmåte. Det neste trinnet, 3, er det de kaller *restructuring*. Ifølge mine data kom alle gruppene til dette trinnet, men ingen av gruppene kom frem til et tilfredsstillende resultat. I denne firetrinns fremgangsmåten er det flere underkategorier i trinn 3. Deltakerne i min studie kom minimum én gang til trinn 3B – som betyr at metoden deres ikke fungerte, men ga ny informasjon slik at de kunne gå tilbake til trinn 1. Når det stoppet opp for mine deltakere kan det tenkes at de stod fast i trinn 3C – som betyr at metoden ikke fungerte og ga ingen ny informasjon. Ifølge modellen i figur 1 skal problemløseren dermed over til trinn 4 hvor den kreative prosessen skal skje. I min studie kan det tenkes at flere hadde klart dette om tid ikke var en begrensning.

Det er mulig tidsbegrensningen i min studie spilte en rolle for resultatene som ble oppnådd. For eksempel kan det tenkes at deltakerne hadde behov for en lengre inkubasjonstid etter å ha brukt en eller flere metoder som ikke fungerte. Likevel antyder resultatene mine at de klassiske problemløsningsmodellene har noen mangler. Ifølge mine resultater er det vanskelig for problemløseren å komme seg videre med et problem bare ved å forsøke å «forstå oppgaven» bedre. Det ser ut til at bruk av tidligere kjente algoritmer og liknende kan være ødeleggende for fremgangen og mange endte opp med både *algorithmic* og *content-universe fixations.* Det kan dermed se ut som både analytiske fremgangsmåter og matematisk kreativitet er til stede når deltakerne skal oppnå innsikt i, og løse matematiske problemløsningsoppgaver.

6 Avslutning

6.1 Oppsummering og refleksjoner

Formålet med masteroppgaven har vært å se på hvordan elever arbeider med matematiske problemløsningsoppgaver. Gjennom studien har jeg besvart problemstillingen:

> *Hvordan oppnår elever innsikt gjennom arbeid med matematiske problemløsningsoppgaver?*

Hovedfokuset har vært å se på om elever kan oppnå innsikt gjennom analytiske fremgangsmåter i matematiske problemløsnigsoppgaver. Funnene i studien er todelt. Først og fremst viser mine data at 7 av 10 oppgaver i studien starter med en analytisk tilnærming. Samtidig som flere av besvarelsene i spørsmålsrunden etter intervjuene er samsvarende med det teoretiske rammeverket rundt analytisk problemløsning, se kapittel 4.2.1. For å spisse problemstillingen min ytterligere stilte jeg et underspørsmål som ble brukt i den deduktive delen av analysen:

> Kan innsikt oppnås som et resultat av analytisk fremgangsmåte?

Disse resultatene viser at deltakerne absolutt oppnådde innsikt ved hjelp av analytiske fremgangsmåter. Når det er sagt er ikke innsikt synonymt med at de klarte å besvare oppgavene de fikk utdelt. Bare én besvarelse var korrekt, men denne ble oppnådd på feil grunnlag og var dermed ugyldig. Det fører meg videre til den andre delen av mine funn. Selv om majoriteten begynte på en analytisk måte, fortsatte de ikke nødvendigvis på samme måte gjennom hele seansen. Figur 14 viser at det er hele 14 faseoverganger som antyder en kreativ tankegang mot 15 faseoverganger som antyder analytisk. Det viser seg at etter deltakerne hadde forsøkt med en analytisk tilnærming og mislyktes var det flere som begynte å jobbe på en mer kreativ måte. Samtidig som min data viser at flere av deltakeren endte opp med fikseringer som beskrives godt ved hjelp av det teoretiske rammeverket om matematisk kreativitet.

Resultatene i min studie viser at et integrert syn på analytisk og kreativt arbeid kan være den beste måten å forklare hvordan elever arbeider med og oppnår innsikt i matematiske problemløsningsoppgaver. I min studie oppstår vanskelighetene for deltakerne når de opplever at fremgangsmåten deres ikke er tilfredsstillende. Haavold og Sriraman (2021) konkluderer med at problemløsningsmodellene treffer på området som handler om å forstå problemet, men at deltakerne har for mye fokus på tidligere kjente algoritmer og fremgangsmåter samtidig som de undergraver det å jobbe og feile på oppgavene over tid. Selv vil jeg ikke gå så langt som å konkludere med noe, men mine data har klare indikasjoner. Deltakerne endte opp med fikseringer på grunn av at de hadde fokus på tidligere liknende problemer og forsøkte å bruke allerede kjente algoritmer. Videre kan det se ut som tidsbegrensningen gjorde at deltakerne ikke fikk nok tid til å omsette kreative prosesser til resultater, og dermed klarte ingen av deltakerne å besvare oppgavene.

6.2 Veien videre

I denne studien har jeg gjennomført en kvalitativ studie ved hjelp av oppgavebasert intervju og den vil ikke kunne gi resultater som kan generaliseres. Til tross for dette er mine resultater på mange områder samsvarende med Haavold og Sriramans (2021) resultater. I deres studie hadde de problemløsningsseanser som varte i ca. 60 minutter mens mine varte i opptil 45 minutter. Mine resultater tyder på at tidsbegrensningen har vært en medvirkende faktor til at deltakerne ikke klarte å omgjøre sine kreative prosesser til ideer og mulige resultater.

Denne studien antyder at de nåværende problemløsningsmodellene har noen mangler og videre forskning på området vil derfor være interessant. Jeg mener det ville vært interessant å se på hvordan slike oppgavebaserte intervju hadde forløpt seg hvis deltakerne fikk lengre tid på seg. Konkret mener jeg at en tidsbegrensning på 45 minutter per oppgave ville gitt et større datamateriale og dermed større grunnlag for å kunne gjennomføre større kvantitative studier på området.

Referanseliste

Befring, E. (2015). *Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap*. Cappelen Damm akademisk.

Bjørndal, C. R. P. (2017). *Det vurderende øye. Observasjon, vurdering og utvikling i pedagogisk praksis* (3 utgave.). Gyldendal Akademiske.

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt forl.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2017). *Research Methods in Education*. Taylor & Francis Group. http://ebookcentral.proquest.com/lib/tromsoub-ebooks/detail.action?docID=5103697

Ediger, M. (2000). The Creative Mathematics Teacher.

Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1980). Verbal reports as data. *Psychological review*, *87*(3), 215-251. https://doi.org/10.1037/0033-295X.87.3.215

Ervynck, G. (1991). Mathematical Creativity. In D. Tall (red.), *Advanced Mathematical Thinking* (s. 42-53). Kluwer Academic.

Fleck, J., & Weisberg, R. (2013). Insight versus analysis: Evidence for diverse methods in problem solving. *Journal of Cognitive Psychology*, *25*, 436-463. https://doi.org/10.1080/20445911.2013.779248

Fleck, J. I., & Weisberg, R. W. (2004). The use of verbal protocols as data: An analysis of insight in the candle problem. *Memory & Cognition*, *32*(6), 990-1006. https://doi.org/10.3758/BF03196876

Gleiss, M. S., & Sæther, E. (2021). *Forskningsmetode for lærerstudenter : å utvikle ny kunnskap i forskning og praksis* (1. utgave. utgave.). Cappelen Damm akademisk.

Goldin, G. A. (2000). A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research. In A. Kelly & R. A. Lesh (red.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Sience Education* (Vol. 1, s. 517-546). Taylor & Francis Group.

Haylock, D. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(1), 59-74. https://doi.org/10.1007/BF00367914

Haylock, D. (1997). Recognising mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM*, *29*(3), 68-74. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0002-y

Haavold, P. Ø., & Sriraman, B. (2021). Creativity in problem solving: integrating two different views of insight. *ZDM – Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01304-8

Kunnskapsdepartementet. (2018). Kjerneelementer i fag. https://www.regjeringen.no/contentassets/3d659278ae55449f9d8373fff5de4f65/kjerneelementer-i-fag-for-utforming-av-lareplaner-for-fag-i-lk20-og-lk20s-fastsatt-av-kd.pdf

Lester, F. K. (1985). Methodological Considerations in Research on Mathematical Problem-Solving Instruction. In E. A. Silver (red.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203063545

Lester, F. K., Jr. (2013). Thoughts About Research On Mathematical Problem- Solving Instruction. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1/2), 245-278. https://www.proquest.com/docview/1434424865?accountid=17260&parentSessionId=wErkMX%2Ff9DpNCNNeSONjkL36iIO98qNmr2EkpyvD%2Fk8%3D

Maher, C. A., & Sigley, R. (2014). Task-Based Interviews in Mathematics Education. In S. Lerman (red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 579-582). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_147

Maxwell, J. (1992). Understanding and Validity in Qualitative Research. *Harvard Educational Review*, *62*, 279-300.
Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (red.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of Methodology and Methods* (s. 365-380). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13
Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Prentice-Hall.
Ohlsson, S. (1992). Information-processing explanations of insight and related phenomena.
Poincaré, H. (1948). *Science and Method*. Dover.
Pólya, G., & Conway, J. H. (2014). *How to solve it : a new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
Rott, B., Specht, B., & Knipping, C. (2021). A descriptive phase model of problem-solving processes. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(4), 737-752. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01244-3
Runco, M. A. (2020). Divergent Thinking. In E. G. Carayannis (red.), *Encyclopedia of Creativity, Invention, Innovation and Entrepreneurship* (s. 754-758). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-15347-6_430
Schoenfeld, A. (1985). Making sense of "out loud" problem-solving protocols. *The Journal of Mathematical Behavior*, *4*, 171-191.
Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 334-370). Macmillan Publishing Company.
Schoenfeld, A. (2007). Method. In F. K. Lester (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 69-108). Information Age Publishing Inc.
Simon, M. A. (2019). Analyzing Qualitative Data in Mathematics Education. In K. R. Leatham (red.), *Designing, Conducting, and Publishing Quality Research in Mathematics Education* (s. 111-122). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-23505-5_8
Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM*, *41*, 13-27.
Sternberg, R. J. (2000). *Handbook of Creativity*. Cambridge University Press. https://doi.org/DOI: 10.1017/CBO9780511807916
Weisberg, R. W. (2015). Toward an integrated theory of insight in problem solving. *Thinking & Reasoning*, *21*(1), 5-39. https://doi.org/10.1080/13546783.2014.886625

Vedlegg 1

Vurdering

15.10.2021

Referansenummer
991582

Prosjekttittel
Innsikt i matematisk problemløsning

Behandlingsansvarlig institusjon
UiT Norges Arktiske Universitet / Fakultet for naturvitenskap og teknologi / Institutt for matematikk og statistikk

Prosjektperiode
01.10.2021 - 01.06.2022

Meldeskjema

Dato
15.10.2021

Type
Standard

Kommentar
Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 15.10.2021, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

DEL PROSJEKTET MED PROSJEKTANSVARLIG

For studenter er det obligatorisk å dele prosjektet med prosjektansvarlig (veileder). Del ved å trykke på knappen «Del prosjekt» i menylinjen øverst i meldeskjemaet. Prosjektansvarlig bes akseptere invitasjonen innen en uke. Om invitasjonen utløper, må han/hun inviteres på nytt.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 01.06.2022.

LOVLIG GRUNNLAG

Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER

NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

· lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen

· formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål

· dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet

· lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), og dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13. Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER NSD

legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET

NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet. Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 2

Vil du delta i forskningsprosjektet «Innsikt gjennom matematisk problemløsning»

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se på hvordan elever løser matematiske problemløsnigsoppgaver i par sammenliknet med alene. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Problemstillingen for prosjektet er «*hvordan påvirker arbeid i par innsikten i matematiske problemløsningsoppgaver*». Målet er å se på hvordan elever oppnår innsikt i problemløsning og hvordan dette er forskjellig fra elever som arbeider i par og alene. Dette prosjektet inngår i min masteroppgave ved lektorutdanningen 8-13 trinn ved UiT.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

UiT Norges Arktiske Universitet Fakultet for naturvitenskap og teknologi / Institutt for matematikk og statistikk er ansvarlig for prosjektet

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Utvalget er videregåendeelever i fagene realfaglig matematikk nivå 2 og/eller S2 i håp å få et utvalg som er motiverte og interesserte i matematikk. Hvis det blir for mange deltakere blir det gjennomført loddtrekning.

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å delta innebærer det at du må gjennomføre et oppgavebasert intervju, enten i par eller alene (dette vil bli trukket). Det oppgavebaserte intervjuet går ut på at du skal løse to problemløsningsoppgaver mens du eller dere i så stor grad som mulig forklarer hva du/dere tenker. Avslutningsvis vil jeg stille oppfølgingsspørsmål hvis det er noe jeg lurer på. Det vil bli gjort lydopptak av hele intervjuet. Dere får opptil 20 minutter til å gjennomføre hver av de to oppgavene og hele seansen vil ta ca. 45 minutter. Jeg vil også be hver enkelt deltaker om å oppgi måloppnåelse i matematikkfaget ved forrige termin (lav, middels eller høy).

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det vil kun være meg som student som har tilgang til datamaterialet på en mobil enhet eid av behandlingsansvarlig. Lydopptakene vil bli transkribert og i publikasjonen vil alle deltakere være anonymisert.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres fortløpende etter intervjuet og slettes når oppgaven er godkjent, noe som etter planen er 01.06.21.
Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra UiT Norges Arktiske Universitet Fakultet for naturvitenskap og teknologi / Institutt for matematikk og statistikk har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- UiT Norges Arktiske Universitet Fakultet for naturvitenskap og teknologi / Institutt for matematikk og statistikk ved Anne Birgitte Fyhn, epost: anne.fyhn@uit.no
- Vårt personvernombud:

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Anne Birgitte Fyhn *Elias René Valøy*
(Veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *«Innsikt i matematisk problemløsning»*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta i oppgavebasert intervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 3

Intervjuguide

Hvis jeg føler at noen av spørsmålene blir besvart underveis i oppgaveløsningen vil jeg ikke stille alle spørsmålene.

1. Hvorfor begynte du å løse oppgaven på den måten du valgte?
   a. Hadde du sett en liknende oppgave tidligere?

2. Hvorfor byttet du fremgangsmåte, og hvordan kom du frem til at du ville bruke denne måten? (hvis de bytter fremgangsmåte)

3. Følte du noen gang at oppgaven var uløselig?

4. Hvis ja, hvordan kom du deg videre etter å ha møtt «veggen»?

5. Hvor mange ganger byttet du fremgangsmåte?

6. Synes du det er best å arbeide med slike oppgaver alene eller i par?

Hvis deltakerne har problemer med oppgavene, kan du gi hint fra 10 min og utover. Disse hintene er:

Roterende sirkel:

1. prøv å tenk hva som skjer hvis sirklene har lik radius
2. prøv å tenk hva som skjer hvis $sirkel_2$ *sklir* rundt $sirkel_1$

Feil aritmetikk:

1. kan du/dere sette opp ett algebraisk uttrykk?