Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

«Noen ganger ser man bare et tall og skjønner hele oppgaven»

En kvalitativ studie av høytpresterende barneskoleelevers oppnåelse av innsikt i arbeid med problemløsningsoppgaver

Paul Andreas Engebakken & Marcus Wilhelm Johnsen

Masteroppgave i matematikkdidaktikk - LER-3903

Forord

Denne mastergradsavhandlingen er gjennomført ved UiT Norges arktiske universitet i perioden 2021-2022, og markerer slutten på vår tid som lærerstudenter. Årene har gått fort og det har vært fem veldig innholdsrike år. Nå ser vi frem til å ta med oss det vi har lært ut i skolen og ser frem til en spennende tid fremover som lærere.

Temaet problemløsning var noe vi fikk øynene opp for allerede det første året på lærerutdanningen. Dette var et begrep som var relativt ukjent fra egen skolegang, noe som førte til at når vi først ble introdusert for begrepet visste vi ikke helt konkret hva dette innebar. Gjennom vår tid på lærerutdanningen er utforskning og problemløsning i matematikk noe vi har erfart at elever finner veldig lærerikt og motiverende. Noe vi imidlertid har satt spørsmålstegn med når vi underviste om problemløsning i praksis, var hvilke faktorer som gjorde at elevene lykkes med problemløsning. Én av faktorene vi synes det ville være interessant å se nærmere på, er tidspunktet for når elevene oppnår innsikt i en problemløsingsprosess og hva som kjennetegner nettopp dette tidspunktet. Dette legger premisset for vår mastergradsavhandling. Kunnskap om innsikt i en problemløsingsprosess anser vi som relevant for oss som fremtidige matematikklærere.

Gjennom arbeid med denne avhandlingen har vi fått støtte og veiledning fra ulike hold. Vi vil rette en takk til Per Øystein Haavold for kyndig veiledning av valg av tematikk og videre hjelp med å finne relevant forskningslitteratur på området. Videre må vi rette en takk til Oskar Jensen Wang som tredde inn som veileder midt i prosessen. En stor takk går også til våre informanter som gjorde en formidabel innsats med å løse oppgavene og gjorde sitt beste gjennom hele intervjuet. Vi vil også takke familie og venner som har støttet og motivert oss gjennom denne utdanningen. Videre vil vi rette en takk til våre medstudenter for en god studietid og gode øyeblikk sammen.

Tromsø, mai 2022

Marcus Wilhelm Johnsen

Paul Andreas Engebakken

Sammendrag

I vår mastergradsavhandling har vi undersøkt hvordan barneskoleelever oppnår innsikt i arbeid med problemløsningsoppgaver. Tidligere forskning viser at innsikt er en viktig del av problemløsningsprosessen, men at det ikke forkommer tydelig hvor og når innsikt oppstår i forhold til problemløsningsmodellene (Haavold & Sriraman, 2021). Dette var noe vi fant interessant og som vi har til hensikt å undersøke nærmere. På bakgrunn av dette kom vi frem til følgende problemstilling: *«Hvordan oppnår høytpresterende barneskoleelever innsikt i møte med tre problemløsningsoppgaver med én, ingen og flere riktige løsninger?»*

For å besvare denne problemstillingen har vi utarbeidet fire forskningsspørsmål:

1) *Når i problemløsingsprosessen oppstår innsikt? 2) Hva skjer like før innsikt oppstår? 3) Hvilken type innsikt oppnår elevene? 4) Hva er mulige årsaker til at innsikt oppstår?*

For å besvare dette har vi gjennomført oppgavebaserte intervjuer med 12 elever på en barneskole. Her fikk elevene tre problemløsningsoppgaver med én, ingen og flere løsninger. Intervjuene ga oss innblikk i elevenes løsningsprosess og tanker de gjorde seg i arbeid med disse oppgavene. Disse intervjuene ble transkribert, analysert med kvalitativ innholdsanalyse, og funnene diskuterer vi i sammenheng med relevant teori og tidligere forskning.

Funnene fra denne avhandlingen viser at innsikt kan oppstå på to ulike måter. Enten plutselig og ubevisst etter man har stått fast med en oppgave, eller gjennom gradvis og systematisk arbeid. Disse to innsiktskategoriene har vi funnet at oftest forekommer i midten eller slutten av oppgaveløsingen. Angående hva som skjer like før innsikt, viser funnene at det var faktoren hint som oftest forekom før oppnåelse av innsikt. Det ble også avdekket andre faktorer før oppnåelsen av innsikt, slik som prøving og feiling, streving med lite produktive strategier og oppløsning av misforståelser. Undersøkelsene av hvilken type innsikt elevene oppnådde viser at plutselig innsikt forekom omtrent dobbelt så ofte som gradvis innsikt. Dette mener vi kan skyldes grad av åpenhet, struktur og antall løsninger i oppgavene. Vi har avdekket seks mulige årsaker til at innsikt oppsto. Disse var: hint, gradvis og systematisk arbeid, oppløsning av misforståelsen, oppdagelse av små detaljer, få en plutselig uforventet idé og strategioverføring.

Innholdsfortegnelse

Tabeller

Figurer

1 Innledning

I denne mastergradsavhandlingen har vi gjennomført en kvalitativ studie av hvordan høytpresterende barneskoleelever oppnår innsikt i problemløsningsoppgaver. Vi gjør rede for bakgrunnen for tema, valg av problemstilling og forskningsspørsmål. Videre presenteres relevant teori og tidligere forskning. Deretter beskrives metodikken om hvordan datainnsamling ble gjennomført og hvordan vi analyserte data. Videre presenteres resultatene. Til slutt gjør vi rede for funn og drøfter disse ved bruk av relevant teori og tidligere forskning.

1.1 Bakgrunn

Våre erfaringer fra egen skolegang er at matematikkfaget kan være lite variert. Matematikktimene besto ofte av at lærerne presenterte en oppgave på tavla og deretter prosedyren på hvordan denne oppgaven skulle løses. Dette førte til at faget var dominert av tavleundervisning, regler og repetisjon av ensformige oppgaver. Målet med majoriteten av matematikktimene var at man skulle lære en gitt måte å løse oppgaver på og deretter pugge gjennom strukturelt like oppgaver (Alseth, Breiteig & Brekke, 2003). Vårt syn på hva matematikk er og hvordan man skal undervise det, har endret seg fra egen skolegang og gjennom studieforløpet på lærerutdanningen ved UiT Norges arktiske universitet, og har vist oss at faget består av mer enn tavleundervisning og pugging. Et av innslagene som har vært nytt for oss gjennom utdanning sammenliknet med egen skolegang, er bruken av problemløsing i matematikkfaget.

I den gjeldende læreplan LK20 er et av kjerneelementene i matematikkfaget utforskning og problemløsning. En sentral forskjell fra tidligere læreplanmål i K06 sammenlignet med nye læreplanmål i LK20, er et skifte i fokus fra elevenes resultater til et fokus på selve læringsprosessen. Mer spesifikt, at elevene skal arbeide prosessorientert med problemløsingsprosessen ikke bare som et middel på vei til et mål, men også som et mål i seg selv (Utdanningsdirektoratet, 2020). Gjennom dette fattet vi interesse for hvorvidt det fantes ulike faktorer som kan spille inn når man skal løse problemer og hvordan man lykkes med det. Innenfor arbeid med problemløsning er det utarbeidet noen modeller som er utviklet for å forklare hvilke faktorer som påvirker problemløseren og prosessen rundt oppgaveløsningen, der den mest kjente er Polya (1949) sin fire-stegs modell. Denne modellen er blitt videreutviklet av Schoenfeld (1985) og flere andre i nyere tid. Likevel blir disse modellene sett på som mangelfulle av enkelte fordi problemløsningsprosessen er kompleks og det er mange faktorer som spiller inn. Ett av disse aspektene er hvordan elever oppnår innsikt i oppgaven eller problemet (Haavold & Sriraman, 2021). Blant annet Haavold & Sriraman (2021) har forsket på hvordan innsikt har oppstått blant videregåendeelever og studenter. Det vi imidlertid ikke kunne finne noe særlig forskning på, var hvordan innsikt i problemer oppnås blant elever på barneskolen. Derfor fant vi dette veldig interessant og relevant å forske på. Gjennom å undersøke hvordan elever oppnår innsikt, ønsker vi å finne ut mer om hvordan man kan «lykkes med problemløsning».

1.2 Problemstilling og forskningsspørsmål

Studien vår innebærer undersøkelser av hvordan et utvalg elever på barneskole oppnår innsikt i møte med tre problemløsningsoppgaver med én, ingen og flere riktige løsninger. Vi ønsker å undersøke når og på hvilken måte elevene oppnår innsikt. Mer spesifikt skal vi undersøke om innsikt er noe som skjer gradvis og bevisst eller plutselig og ubevisst, noe som er Haavold & Sriraman (2021) sine to hovedsyn på hvordan innsikt kan oppnås. På bakgrunn av dette har vi utarbeidet følgende problemstilling:

Hvordan oppnår høytpresterende barneskoleelever innsikt i møte med tre problemløsningsoppgaver med én, ingen og flere riktige løsninger?

Med denne studien ønsker vi å avdekke mer om hvordan innsikt oppstår og med dette bidra til å belyse at problemløsning er en kompleks prosess. Ved å ha kunnskap om flere aspekter rundt prosessen, vil man i større grad kunne ta gode valg i klasserommet, og samtidig potensielt kunne bidra til at enda flere elever oppnår innsikt og mestring i arbeid med problemløsning og utforskning. Ved å gjøre et dypdykk i oppgaveløsningen til et utvalg elever, ønsker vi å undersøke om muligheten for å oppnå forståelse blir påvirket av om oppgavene har én, ingen eller flere løsninger. Bakgrunnen for at vi har valgt å ta utgangspunkt i høytpresterende elever er at forskning viser at denne gruppen anvender flere og mer avanserte løsningsstrategier. Å avdekke hvordan denne målgruppen oppnår innsikt mener vi vil være med å tydeliggjøre hvordan andre elever kan lykkes med problemløsning. «Suksess i problemløsning» er dermed noe som kan være overførbart og relevant for alle elever.

For å undersøke dette har vi utarbeidet noen forskningsspørsmål som skal være med å belyse prosessen med hvordan elevene oppnår innsikt:

1) *Når i problemløsingsprosessen oppstår innsikt?*
2) *Hva skjer like før innsikten oppnås?*
3) *Hvilken type innsikt oppnår elevene?*
4) *Hva er mulige årsaker til at innsikt oppstår?*

Det første forskningsspørsmålet ble stilt med formål om å kunne si noe om når i problemløsningsprosessen hver enkelt elev oppnår innsikt. Det andre forskningsspørsmålet ble stilt med formål om å undersøke hva som skjer i tidsrommet før innsikten oppstår. Det tredje ble stilt med formål om å utforske hvilke typer innsikt elevene oppnår i problemløsningsoppgavene. Det siste spørsmålet stilte vi med formål om å undersøke mulige årsaker til at innsikt oppstår i oppgaveløsningen.

1.3 Oppbygging av oppgaven

Denne masteroppgaven er bygget opp av seks overordnede kapitler. I det første kapittelet presenterer vi bakgrunn for valg av tematikk og, basert på dette, problemstillingen med tilhørende forskningsspørsmål. I det andre kapittelet vil vi presentere det teoretiske rammeverket vi har basert oppgaven på, samt den tidligere forskningen på området for å gi leseren et bilde av hvilket grunnlag vi har skrevet oppgaven på ut ifra de kunnskapshullene vi observerer at eksisterer. I det tredje kapitlet vil vi presentere de metodiske valgene vi har fattet og kvaliteten på arbeidet vil bli drøftet. Videre vil vi i kapittel fire presentere resultatene. I dette kapittelet presenteres de ulike løsningsstrategiene vi identifiserte ved gjennomgang og analyse av dataene, samt hvilke av disse løsningsstrategiene som førte til innsikt. Vi vil også presentere eksempler på elever som har oppnådd gradvis og plutselig innsikt. Kapittel fem består av tolkninger av funnene våre, men også noen nye resultater. Dette anså vi som nødvendig for å unngå å skape et gjentagelsespreg av forrige kapittel. I dette kapittelet presenterer vi våre funn og drøfter de opp imot det teoretiske rammeverket fortløpende. I det siste og sjette kapittelet vil vi konkludere og oppsummere funnene av undersøkelsen av problemstillingen og forskningsspørsmålene. Her vil vi også drøfte prosjektet vårt i forhold til relevans i skolen, før vi avslutningsvis vil foreslå videre forskning på området.

2 Teori

Denne delen av oppgaven har til hensikt å presentere et relevant teoretisk grunnlag for studien vår. I kapittel 2.1 vil vi definerer begrepene tradisjonell undervisning og problemløsning. Videre vil vi i kapittel 2.2 definere begrepet innsikt og se på det gjennom et problemløsningsperspektiv og kreativtetsperspektiv. I kapittel 2.3 trekker vi frem problemløsningsoppgaver med ulike antall løsninger. Her vil vi karakterisere hva som kjennetegner oppgaver med én, ingen og flere løsninger. I kapittel 2.4 vil se på noen ulike oppgavekategorier og hva som kjennetegner disse. Videre ser vi i kapittel 2.5 på hva som kjennetegner høytpresterende elever i matematikk før vi avslutningsvis ser på tidligere forskning innenfor feltet i kapittel 2.6.

2.1 Ulike typer matematikkundervisning

2.1.1 Tradisjonell undervisning

Alrø & Skovsmose (2006) skriver at tradisjonell matematikkundervisning kan kjennetegnes ved at det som er dominerende er løsning av rutineoppgaver og tavleundervisning. Læreren følger progresjonen i læreboka ved å instruere tema, algoritmer og prosedyrer for å løse oppgavene. På bakgrunn av dette jobber elevene med noen utvalgte matematikkoppgaver som blir løst ved hjelp av det som er gjennomgått på tavla. Videre går læreren rundt og veileder, samt observerer om det elevene gjør blir riktig. Alrø & Skovsmose (2006) kaller dette *«oppgaveparadigme»* hvor hovedfokuset er oppgaveløsning, følge prosedyrer og at matematikkoppgavene bare har et riktig svar. Mellin-Olsen (1996) omtaler derimot dette som *«oppgavediskursen»*. Han beskriver hvilken sentral rolle oppgaveløsning har i matematikkundervisningen. Dette fokuset på en oppgavestyrt og lærebokstyrt undervisning mener Mellin-Olsen (1996) kan ha en uheldig bi-effekt i form av at målet er å finne en riktig løsning og et svar, fremfor det å utvikle en dypere forståelse for matematikkfaget. En annen som har sett på hva som karakteriserer et tradisjonelt klasserom er Boaler (2015) som mener at oppgavene og lærebøkene er basert på meningsløse kontekster noe som fører til to ting. Det første er at elevene finner emnet de jobber med lite interessant og det andre er de begynner å se bort fra konteksten og bare konsentrerer seg om tallene i oppgaven (Boaler, 2015). Sammenhengen mellom begrepene er at dette fokuset på oppgaver og prosedyrer gjør at faget blir mindre overførbart til virkeligheten, da det å løse problemer er mer fremtredende senere i livet.

2.1.2 Problemløsning

I 1949 ga Polya ut boken «How to solve it». Denne har lagt grunnlaget for mye av den moderne forskningen på området. Opp gjennom årene har begrepet problemløsning blitt håndtert av flere og er blitt anerkjent som et komplekst begrep. Matematikkdidaktikkere har lenge vært interessert i begrepet problemløsning og hvordan man best mulig kan undervise i dette. I den norske skolen kom problemløsning inn for første gang i mønsterplanen fra 1987 og var også inkludert i den forrige læreplanen LK06. I den gjeldende læreplanen LK20, har problemløsning fått større plass og er blitt et av kjerneelementene i faget (Utdanningsdirektoratet, 2020). Problemløsning blir ansett som noe av det mest sentrale i matematikken (Schoenfeld, 1992). Synene på hva problemløsning er og hvilken rolle den har i matematikkundervisning, er sprikende (Schoenfeld, 1992). Et tradisjonelt syn på problemløsning var at alle oppgaver som ble utført var problemløsning. Dette gjaldt også rutineoppgaver til øving på spesifikke måter å løse oppgaver på. I forholdet til dette synet behøvde ikke oppgavene å oppfattes som utfordrende i noen grad. Et mer moderne syn på problemløsning er definisjonen til Schoenfeld (1992, s. 335): «*Et matematisk problem er en oppgave som (a) engasjerer, interesserer og du ønsker å finne en løsning, og (b) du ikke har en kjent matematisk løsning for å løse problemet*». Dette blir støttet av Lesh & Zawojewski (2007) som definerer en problemløsningsoppgave til å være problemløsning når problemløseren anser oppgaven som et problem. Dette blir også støttet av Niss & Jensen (2002) som peker på at problemløsning er et relativt begrep der noe som er problemløsning for enkelte ikke er det for andre. I det øyeblikket problemløseren vet hvordan oppgaven skal løses havner oppgaven innenfor kategorien rutineoppgaver (Niss & Jensen, 2002). I kjerneelementene i den gjeldende læreplanen er et av momentene utforskning og problemløsning (Utdanningsdirektoratet, 2020). Innenfor temaet problemløsning står det at det handler om å utvikle en metode for å løse et problem, som problemløseren ikke kjenner til fra før. Videre står det i kjerneelementene at: «*Problemløsning handler om å analysere og omforme kjente og ukjente problemer, løse de og vurdere om løsningene er gyldige*» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2). I denne oppgaven vil vi benytte oss av denne definisjonen. Det er utarbeidet mange modeller for hvordan man kan undervise i problemløsning, der de fleste baserer seg på Polya og modellen hans. I en artikkel viser Woods (2000) til at det finnes over 150 problemløsningsmodeller og disse har til felles at de baserer seg på modellen til Polya. Dette gjør at vi i dette studiet vil støtte oss på modellen til Polya og Schoenfeld sin videreutvikling av den. Dette vil vi presentere mer inngående i kapittel 2.2.1. Et forskningsområde som det i nyere tid har blitt gjennomført forskning på er det kognitive momentet innsikt innenfor problemløsning. Dette er omtalt som et av momentene innenfor å lykkes med problemløsning. Ifølge Lester (2013) er problemløsning en kompleks prosess som består av mange faktorer. En av de viktigste faktorene i denne prosessen er innsikt og hvordan innsikt oppstår. I hovedsak er det to ulike syn på hvordan innsikt oppstår. Det ene synet er at innsikt er en konsekvens av analytisk tenking gjennom bevisste steg. Det andre synet er at innsikt er et resultat av en ubevisst prosess som forekommer etter at man har stått fast og plutselig forstår en oppgave (Haavold & Sriraman, 2021).

2.2 Innsikt

Forskning på innsikt innenfor problemløsning har vært av interesse for psykologer i over 100 år (Weisberg, 2015). Begrepet ble innført av gestalt-psykologene som mente det var to måter å løse problemer på. Den ene måten var gjennom reproduktiv tenkning som omhandlet at man skulle overføre løsningen på et tidligere problem over til et nytt problem. Denne prosessen skjer i en sekvens av steg som tar problemløseren gradvis mot en løsning (Weisberg, 2015). Denne måten blir kalt innsikt gjennom analytisk tenking. Den andre måten de mente man kunne løse oppgaver på, var gjennom å oppnå innsikt i problemet. Dette handler om å skape forståelse i problemet som ofte kan forkomme som et Aha! eller et Eureka! øyeblikk (Weisberg, 2015). Dette er et øyeblikk som kan ansees som emosjonelt, der følelser blir uttrykt gjennom en euforisk følelse i kroppen som i noen tilfeller kan bli uttrykt verbalt. De to ulike synene på hvordan man oppnår innsikt innenfor problemløsning er også de avgjørende synene i dag. Dette blir støttet av Haavold & Sriraman (2021) som skriver at det finnes hovedsaklig to måter å definere hva innsikt er i kontekst med problemløsning. Videre skriver de at innsikt enten kan være resultatet av analytisk tenking og gradvis fremgang, eller så kan innsikt være noe som kommer ubevisst og plutselig som et resultat av prosessen etter at man har opplevd å stå fast (Haavold & Sriraman, 2021).

Haavold & Sriraman (2021) definerer innsikt som en kognitiv omstrukturering som resulterer i en mer produktiv måte å se eller forstå et problem eller situasjon på. Robinson (2016) skriver at elever som arbeider og står fast med vanskelige oppgaver vil ha en nytte av å oppnå innsikt da dette vil være med å få de videre i prosessen. Weisberg (2015) bruker begrepet «*impasse*» om å stå fast i en oppgave, og viser til at innsikt ikke kan oppstå uten at et «*impasse*» forekommer først. Ohlsson (2011) beskriver innsikt som noe man oppnår etter at et løsningsforsøk feiler og en plutselig og meningsfull mental omstrukturering finner sted. Etter at man har stått fast med en oppgave blir innsikt oppnådd, og man løser oppgaven ut ifra et nytt perspektiv med en riktig tilnærming. Vi forstår dette som at innsikt kan kategoriseres som enten gradvis og bevist eller plutselig og ubevist. I tillegg kreves det at man tidligere har stått fast i oppgaveløsningen, og at man finner en ny og bedre måte å forstå problemet på. For å kunne skille mellom disse må man avdekke om det skjer uforutsett og plutselig uten en klar sammenheng, eller om det kommer som følge av gradvis og systematisk arbeid.

2.2.1 Gradvis innsikt i problemløsningsmodeller

Problemløsning har vært interessant for forskere innenfor matematikkdidaktikk i en årrekke (Haavold & Sriraman, 2021). Bakgrunnen for mye av denne forskningen er arbeidet til Polya, gjennom hans arbeid «How to solve it» (Schoenfeld 1985). I dette arbeidet har Polya (1949) utarbeidet en problemløsningsmodell som beskriver hva problemløsning er, og hvordan man effektivt kan arbeide med problemløsning. Polya (1949) har delt prosessen inn i fire steg: forstå problemet, lage en plan, implementere og se tilbake.

Forstå problemet - Handler om at man må forstå problemet for å kunne løse det. Problemet må derfor være av en slik karakter at det treffer vanskelighetsgraden til mottaker. Er det for vanskelig er det utfordrende å forstå hvordan en skal gå frem, mens er det for lett vil motivasjonen for å løse problemet være lav (Polya & Conway, 2014).

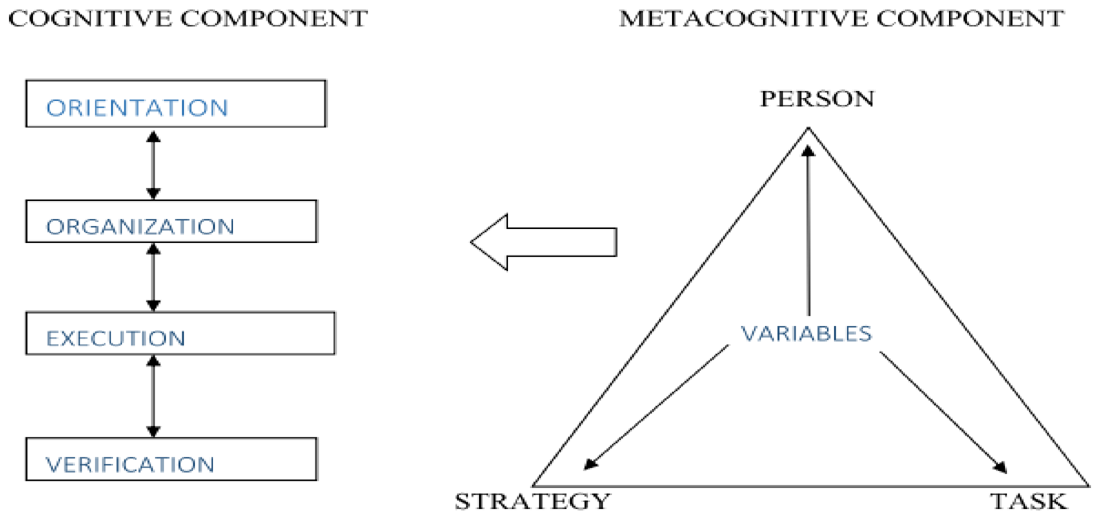
Lage en plan - Handler om at man legger en plan for å løse problemet. Polya & Conway (2014) nevner at man har en plan når man vet hvilke utregninger, beregninger og konstruksjoner man må anvende for å undersøke det ukjente problemet. Her spiller de tidligere forkunnskapene en sentral rolle. Polya & Conway (2014) skriver at hvis man har gode forkunnskaper vil man i større grad være i stand til å legge en god plan.

Implementere - Handler om å sette planen ut i live og følge den stegvis. Her er det viktig at man er sikker på at hvert steg er riktig før man går videre til neste steg i planen. Er ikke løsningen helt korrekt må man gjøre justeringer til man mener den er riktig. Når man oppdager at man må justere strategien og ser at man må løse problemet på en annen måte, kan man oppnå innsikt i problemet (Polya & Conway, 2014).

Se tilbake - Handler om å se tilbake på hele løsningen, revurdere løsningen og deretter undersøke på nytt om den veien man brukte frem til målet var god. Dette for å konsolidere egen kunnskap og utvikle egen evne til løse problemer (Polya & Conway, 2014).

Denne modellen bygger på at problemløsning er en systematisk og gradvis prosess, der innsikt i hovedsak oppstår gjennom å anvende tidligere kunnskap og kontinuerlig evaluering (Haavold

& Sriraman, 2021). Liljedahl, Santos-trigo, Malaspina & Bruder (2016) hevder at grunnen til at denne modellen er så populær i arbeidet med å undervise og arbeide med problemløsning er strukturen og den pedagogiske tilnærmingen. I tillegg bygger modellen på at elevene skal anvende tidligere kunnskap. Denne modellen er videreutviklet av Schoenfeld (1989) og er bygget opp rundt hvordan en matematiker jobber med geometriske problemer. Han sammenligner denne prosessen med hvordan elever burde arbeide med problemer. Schoenfeld (1989) deler problemløsningsfasen inn i seks faser som er: *lese*, *analysere, utforske, planlegge, implementere* og *sjekke*. Til forskjell fra Polya (1957) bygger Schoenfeld (1989) på at modellen også inneholder en metakognitiv del. Polya (1957) mente problemløsning var noe som skulle utføres gjennom et sett med regler og prosedyrer for å komme videre i prosessen mente Schoenfeld (1989) at man også måtte ta høyde for den metakognitive aktiviteten. Lester (1985, sitert i Haavold & Sriraman, 2021) nevner denne aktiviteten som kunnskap om tankeprosesser og selvregulering. Dette presenteres i «*The cognitiv-metacognitiv model*» (Lester ,1985, sitert i Haavold & Sriraman, 2021) og vises i figur 2.1.



Figur 2.1 - The cognitiv-metacognitiv model (Lester,1985. sitert i Haavold & Sriraman, 2021)

De metakognitive delene i modellen handler om at løsningsprosessen er avhengig av oppgaven, strategivalg og personen som skal løse oppgaven. Innenfor personvariablene inngår den enkeltes mestringsforventning og egenskaper for å løse oppgaver. Videre handler strategivariabelen om at individet er bevisst på strategier som kan hjelpe til med å forstå, organisere, gjennomføre planer, samt evaluere egen prosess og løsning. Den siste variabelen er oppgavevariabelen som handler om hvordan oppgaven er bygget opp, strukturen til oppgaven, hva målet med oppgaven er, samt hvilken kontekst oppgaven blir gitt i (Haavold & Sriraman, 2021). Hovedmålet med at den metakognitive delen ble implementert i modellen var å vise at dette kunne ha en påvirkning på alle stegene i den kognitive delen (Schoenfeld, 1985). Gjennom denne utviklingen av modellen presenterte Schoenfeld (1985) at problemløsning var noe som baserte seg på et mer personlig aspekt, der individets forkunnskaper og forståelse av problemet var en viktig del av det å løse et problem (Liljedahl et al., 2016). Disse modellene bygger på at problemløsning er noe som skjer bevisst og gjennom en stegvis prosess og at problemløseren oppnår innsikt gjennom tidligere erfaringer og stegvis evaluering av egen prosess (Haavold & Sriraman, 2021). En annen modell som beskriver problemløsning, er modellen til Mason, Burton og Stacy (2010) som deler prosessen inn i 3 faser. *Entry* som handler om å se hva man vet, hva man skal finne ut, samt hva man må spesialisere seg innenfor for å løse problemet. *Attack* handler om å utføre en kvalifisert gjetning og utarbeide en argumentasjon, bevis eller overbevisning for at det du har funnet ut kan stemme. Det siste steget i modellen til Mason et al. (2010) er *review* som omhandler å generalisere problemet. Innsikt som er en omstrukturering av et problem til en ny og mer produktiv måte å se problemet på blir gjennom disse modellene gitt gjennom analytisk, bevisst og gradvis arbeid (Haavold & Sriraman, 2021). En grunn til at det er flere syn på hvordan man kan oppnå innsikt er at problemløsningsmodellene ikke forklarer hvordan eksisterende kunnskap og analytisk tenking kan produsere nye ideer (Haavold & Sriraman, 2021). Dette nevner Haavold & Sriraman (2021) som essensielt for å løse nye problemer som krever en form for innsikt. Weisberg (2015) skriver at et gradvis logisk system bare kan produsere kunnskap som allerede er kjent, og derfor ikke skape noe nytt. Samsvarende til dette mener Ohlsson (2011) at innsikt må være resultatet av en spesiell kognitiv aktivitet som skiller seg fra en bevisst og stegvis prosess som baserer seg på analytisk tenking.

2.2.2 Plutselig innsikt i kreativitetsmodeller

Allerede i 1925 ble det foreslått at innsikt burde bli sett på som to ulike prosesser. Gestalt-psykologene mente innsikt enten kunne forekomme gjennom logikk eller gjennom analytisk arbeid (Weisberg, 2015). Fra et kreativitetsperspektiv er innsikt noe som oppnås plutselig, ubevisst og skjer ofte i sammenheng med en emosjonell reaksjon ofte kalt «*Aha-moment*» i litteraturen (Weisberg, 2015). Haavold & Sriraman (2021) forklarer i sin studie hvordan et forløp der en oppnår plutselig innsikt vil kunne utarte. I starten av en problemløsningsprosess vil man først prøve å finne en løsning basert på oppgaver man har løst tidligere. Når dette feiler, vil man stå fast og havne i en blindgate. Det er på dette punktet man plutselig og ubevisst kan oppnå innsikt gjennom en mental omstrukturering av problemet som fører til at man kommer frem til et svar (Haavold & Sriraman, 2021). Ifølge gestaltistene følger kreativ tenking og da spesifikt innsikt en fire-stegs modell. Stegene i modellen består av *preperation – incubation – illumination – verification* (Poincaré, 1948). Denne modellen er videreutviklet av Ohlsson, (2011) og blir kalt «*innsiktssekvensen*». Trinnene i modellen består av:

Forsøkt løsning →konsekvent feil →stå fast → omstrukturering →innsikt →løsning

Forsøkt løsning – Benytte ulike tilnærminger for å prøve å komme frem til en løsning (Weisberg, 2015).

Konsekvent feil - Prøver på tilnærminger, men ser gjentatte ganger at dette må være feil og kommer dermed ikke videre (Weisberg, 2015).

Stå fast - En blindgate der det ikke er noen intuitive veier videre for å komme frem til en løsning. Her vil individet få følelsen av at ingenting fungerer og må prøve noe helt nytt for å komme videre (Weisberg, 2015). Med andre ord handler det om å stå fast i en oppgave. Begrepet «*impasse*» brukes som et synonym til dette.

Omstrukturering- En omstrukturering som kan forekomme på tre ulike måter. Den første er at individet søker etter informasjon som er oversett. Oppdages det noe som er oversett stimulerer dette til en ny løsningsstrategi. Den andre måten er at individet analyserer egne strategier for å undersøke om oppgaven kan sees på fra andre perspektiver. Den tredje og siste måten en omstrukturering kan forekomme er at individet endrer representasjon på målet (Weisberg, 2015).

Innsikt- En ny og mer produktiv måte å se eller forstå problemet på (Haavold & Sriraman, 2021).

Løsning – Finne en løsning på problemet (Weisberg, 2015).

Weisberg (2015) skriver at til forskjell fra problemløsningsmodeller som viser at innsikt er noe som forekommer gradvis gjennom analytisk tenking viser modellen at dette er en prosess som forekommer plutselig og ubevisst. Gestalt-psykologene mente innsiktsekvensen var resultatet av psykologiske prosesser som var veldig annerledes fra de løsningene som ble produsert gjennom problemløsning gjennom gradvis og analytisk arbeid (Weisberg, 2015). Ohlsson (2011) skriver at analytisk arbeid er basert på å løse problemet med kunnskap som allerede er til stede i minnet og handler om å få dette til å treffe med det nye problemet. Derimot fra et kreativitetsperspektiv handler innsikt om å putte dette til side og produsere nye ideer fra et naivt perspektiv (Ohlsson, 2011). Weisberg (2015) skriver at dette «naive» perspektivet kun kommer etter at man har stått fast, som setter i gang ubevisste prosesser som resulterer i en omstrukturering av tilnærmingen.

2.3 Problemløsningsoppgaver med ulike antall løsninger

En vanlig misoppfatningene i matematikk er at det alltid er bare en riktig løsning eller en måte å løse en oppgave på (Reusser & Stebler, 1997). Grunnen til dette er at man har egne erfaringer fra å bare løse veldefinerte oppgaver med en løsning som kan framstilles med litt utregning. Problemløsningsoppgaver kan ha en, ingen eller flere antall løsninger. En annen måte man kan fremstille problemløsningsoppgaver er ved å ha fokus på fremgangsmåten og at den skal være viktigere enn svaret. I noen tilfeller kan man vektlegge et større fokus i måten en løser en oppgave på i form av strategivalg dersom oppgaven er åpen nok. Noen problemer kan løses med å følge en åpenbar og klar fremstilt fremgangsmåte for å finne løsningen. Ofte er disse oppgavene «*well-defined*» med en tydelig struktur og bare et korrekt løsningsvar (Robertson, 2017). Oppgaver med bare en løsning kan ofte kategoriseres som «*closed-ended*», fordi både målet og svaret er lukket i dem. I slike oppgaver er det bare en løsning (Becker & Shimada, 1997, sitert i Yeo, 2015).

«*Open-start*»-oppgaver er en annen kategori mange oppgaver passer innenfor. Disse kjennetegnes med at de har en lukket slutt og ofte bare et svar (Yeo, 2015). Her er det et krav at det l i tillegg ikke skal fremstå som tydelig hvilken fremgangsmetode man kan benytte seg av (Monaghan, Pool, Roper, Threlfall, 2009). I slike oppgaver er spekteret av mulige løsningstilnærminger svært bredt, noe som fører til at det eksisterer mange potensielle tilnærminger siden det er mange veier frem til svaret (Monaghan et al., 2009).

Oppgaver med mange riktige eller gyldige løsningsvar kategoriseres ofte av forskere innenfor begrepet «*open-ended*» (Yeo, 2015). I slike oppgaver er det flere korrekte måter å representere svaret på slik at svaret er åpent (Yeo, 2015). Slike oppgaver omtales i tillegg som «*ill-structured*», siden fremgangsmåte og strategier ikke er åpenbare, noe som gjør at man kan løse oppgavene på mange måter (Yeo, 2015).

Når det gjelder oppgaver som ikke har noen gyldige løsningsvar, så har vi forsøkt å finne teori som nevner kjennetegn på slike oppgavetyper. Dette viser seg å være er et område det er gjort lite forskning på og vi fant ingen klare definisjoner eller kjennetegn ved disse. Noe vi derimot fant teori om var hvordan elever løser slike oppgaver. Reusser & Stebler (1997) forsket på å gi 7.-klasse elever uløselige oppgaver. De fant at flertallet av elevene i studiet løste betydelige deler av uløselige oppgaver uten å innse at de var urealistiske og uløselige. Mange elever løser tekstoppgaver uten å ta hensyn til sammenhengen fra oppgaven til virkelige situasjoner (Reusser & Stebler, 1997). Elever har en tendens til å «løse» uløselige og absurde oppgaver så lenge de presenteres i en kontekst de er vant med (Baruk. 1989; Reusser, 1988; Schoenfeld, 1989, sitert i Reusser & Stebler, 1997).

2.4 Oppgavekategorier

I forhold til å kategorisere ulike oppgavetyper er det vanlig å skille oppgaver i to ulike kategorier **«***well-defined***»** eller **«***ill-defined***»**. I en «*well-defined*»-oppgave har man all nødvendig informasjon man trenger for å løse den (Robertson, 2017). I tillegg skal det være en korrekt løsning og en fremgangsmåte for å løse den på (Kitchener, 1983). Innenfor «*ill-defined*» oppgaver møter man på motstridende informasjon, meninger og forutsetninger som kan føre til forskjellige løsningssvar (Kitchener, 1983). I disse oppgavene er det mangelfulle defineringer og det kan virke uklart hva man skal gjøre i de (Robertson, 2017). En annen type oppgaver som blir omtalt i litteraturen er «*Innsiktsoppgaver*» som Robertson (2017) karakteriserer som oppgaver med et viktig steg i seg som er avgjørende for å finne løsningen. Når dette steget blir utført vil løsningen bli åpenbar for problemløseren enten umiddelbart eller kort tid senere. I slike oppgaver er løsningen ofte etterfulgt av en aha-opplevelse (Robertson, 2017). Det er typisk at elever som skal løse slike oppgaver trenger flere løsningstilnærminger for å finne svaret (Weisberg, 2015).

2.5 Høytpresterende elever i matematikk

I dette delkapitlet skal vi redegjøre for hva vi legger i begrepet «*høytpresterende elev i matematikk*». I internasjonale studier brukes begrep som «*talentet*», «*gifted*» eller «*creative*» ovenfor matematisk flinke elever. Heinze (2005) har følgende kjennetegn på begrepet «*mathematical gifted*» ved barneskoleelever: At de kan rekonstruere mønster og strukturer, har fleksibilitet i den mentale prosessen, kan reversere matematiske operasjoner, kan endre representasjonen i et problem, at de er kreative og til sist at de har godt arbeidsminne og god matematisk hukommelse. Hun argumenterer for at «*mathematical gifted*» elever har bedre evner til å kommunisere matematikk sammenlignet med motparten, og at de bruker innsikt i matematiske problemer til å komme frem til løsninger (Heinze, 2005).

Innen forskning på matematisk kreativitet er en oppfatning at desto mer kunnskap man har, jo mer fleksible problemløsere er man. Forklaringen på dette er at de høytpresterende har over tid tilegnet seg et repertoar av tekniker, metoder og strategier som kan overføres til løsningsprosessen. Dette gjør at man klarer å løse nye problemer med å gjøre små modifikasjoner med relativt lite kognitiv innsats (Ionescu, 2012; Ohlsson, 2011, sitert i Haavold & Sriraman, 2021). I norske studier brukes ofte begreper som *evnerike* eller *elever med stort læringspotensialet*, men i matematikksammenheng er det mer vanlig med begrepet høytpresterende elever. Videre i studien vår vil vi benytte oss av sistnevnte, altså høytpresterende elever. Smedsrud & Skogen (2016) skriver at høytpresterende elever er de som klarer å prestere godt på skolen og gjør det bra på ulike tester. Disse trenger ikke være evnerike, men må ha fremvist gode prestasjoner. I rammeverket til matematikk i PISA-undersøkelsen, regnes elever som høytpresterende dersom de presterer på de to øverste nivåene 5 og 6 (Kjærnsli & Jensen, 2016). I dette rammeverket oppsummerer de hva som kjennetegner høytpresterende elever. Der nevner de at høytpresterende elever kjennetegnes med at de har fleksible strategier, kan løse komplekse oppgaver og kan hente og knytte informasjon fra flere kilder. I tillegg at de er i stand til å resonnere, argumentere og forklare hvordan de har løst oppgaven. Til slutt kjennetegnes disse elevene med å ha god begrepsforståelse og kan anvende metoder og prosedyrer der det høver seg (Kjærnsli & Jensen, 2016). Det vi legger i begrepet høytpresterende elev i matematikk i denne sammenhengen er at det skal tilsvare karakter 5 eller 6 på ungdomskolen, eller være blant de med høyest måloppnåelse i klassene.

2.6 Tidligere forskning

Det finnes fra før av mye forskning på temaet problemløsning (Lester, 2013). Allerede i 1949 presenterte Polya en modell for hvordan man kunne jobbe og lære bort problemløsning (Polya, 1949). Denne modellen la grunnlaget for mye av den moderne forskningen på feltet. I 1992 bygget Schoenfeld på denne modellen og inkluderte at det var flere faktorer som påvirket problemløseren i prosessen (Schoenfeld, 1992). Et av momentene var at problemløser måtte ha engasjement for problemet og at oppgaven ikke er et problem før eleven har gjort det til sitt problem (Schoenfeld, 1992). Et problem Lester (2013) peker på, er at en del av forskningen mangler bekymring for kompleksiteten i de ulike faktorene i problemløsningsprosessen. En av disse faktorene er innsikt og er det vi skal forske på. Problemløsningsmodellen legger opp til at innsikt er noe som skjer gjennom en analytisk tilnærming og kommer gjennom bevisst og gradvis arbeid (Haavold & Sriraman, 2021). Dette var det ulike meninger på allerede i 1925 da en gruppe psykologer (gestaltpsykologene) mente at innsikt kunne oppstå på to ulike måter. Gjennom bevisst og gradvis arbeid eller gjennom en ubevisst og plutselig måte (Weisberg, 2015). Forskning på dette aspektet ved problemløsning er noe som det er gjort en del studier innenfor nå i nyere tid. Men det finnes lite forskning på når, hvor og hvordan innsikt oppnås blant elever som løser problemløsningsoppgaver. En studie som er spesielt relevant er forskningsprosjektet til Haavold & Sriraman (2021) som har flere likhetstrekk med vårt forskningsområde. De gjennomførte forskning på videregåendeskole-elever og lærerstudenter på sitt avsluttende år på mastergradsstudiet i matematikkdidaktikk, og undersøkte hvordan de oppnådde innsikt. Resultatene viser at innsikt kan oppstå gradvis gjennom systematisk arbeid, eller plutselig etter man har stått fast med oppgaven. Forskningen viser også at innsikt kan være avgjørende i problemløsningsarbeidet, men at det ikke kommer frem helt tydelig i problemløsningsmodellene hvor og hvordan innsikt oppstår. Resultatene deres viste en liten overvekt av antall hendelser av kategorien plutselig innsikt. Videre fant de også tilfeller der ingen av informantene oppnådde innsikt (Haavold & Sriraman, 2021). Det ble konkludert med at problemløsningsmodellene baserer seg på at innsikt oppstår gradvis, og at de burde inkludere synspunktet om at det også kan oppstå plutselig (Haavold & Sriraman, 2021).

En annen studie som har studert sammenhengen med problemløsningsoppgaver og hvordan elever oppnår innsikt er studien til Fleck & Weisberg (2013). Studien var gjennomført på 60 informanter som snakket mens de løste problemløsningsoppgaver. Studien deres visste at elevene benyttet ulike metoder i løsningen av innsiktsproblemer. Det de fant var at det kun var en minoritet av elevene som løste oppgavene ved hjelp av innsiktssekvensen (Fleck & Weisberg, 2013). En del av elevene benyttet seg av heuristiske metoder, andre direkte anvendelse av tidligere kunnskap, mens en del omstrukturerte som følge av ny informasjon hentet fra mislykkede løsninger (Fleck & Weisberg, 2013). Med bakgrunn i dette konkluderte de med at det ikke var et skarpt skille mellom det å løse problemer gjennom en analytisk fremgangsmåte eller en kreativ måte som innsiktsekvensen (Fleck & Weisberg, 2013).

En annen studie som har sett på innsikt innenfor problemløsning og kreativitet er studien til Weisberg (2015). Studien har tatt for seg de to ulike synene på hvordan innsikt oppstår. Innsiktsekvensen som bygger på at innsikt er en kognitiv prosess der innsikt oppstår gjennom å stå fast og deretter oppnå plutselig og bevisst innsikt (Weisberg, 2015). Der innsikt kan beskrives som en aha-opplevelse som forekommer etter man har stått fast med en oppgave, der man ender opp med ny tilnærming som baserer seg på en ny forståelse og rekonstruering av problemet. Aha-opplevelsen av innsikt omtales for å virke overraskende for både oppgaveløseren og for en eventuell utenforstående observatør, siden ingen av de kan se for seg den kommende nye løsningen (Weisberg, 2015). Det andre synet er problemløsningsmodellene som mener innsikt er noe som forekommer gjennom analytisk gradvis arbeid (Weisberg 2015). Disse synene blir ofte sett på som motsetninger og gjennom de ulike argumentene og modellene fra begge synene undersøker Weisberg (2015) i denne studien implikasjoner med begge synene og presenterer et integrert syn på begrepet innsikt i problemer.

3 Metode

I dette kapittelet skal vi redegjøre for de metodiske valgene i mastergradsavhandlingen som er gjort for å undersøke problemstillingen. I studien har vi gjennomført oppgavebaserte intervjuer av 12 elever på en barneskole i Tromsø. Under intervjuet fikk informantene utdelt tre problemløsningsoppgaver med ulikt antall riktig løsninger. Målet var å utforske hvordan et utvalg elever oppnår innsikt. I arbeidet med dette har det vært behov for å foreta noen valg. Vi skal redegjøre og begrunne for de metodiske valgene som er foretatt fra prosessen med planlegging av datainnsamling og frem til analysen av data. I tillegg vil vi forankre studien vår vitenskapteoretisk. Til sist vil vi drøfte studiens kvalitet gjennom å se på begrepene validitet og reliabilitet og avslutningsvis ta for oss de etiske perspektivene i studien.

3.1 Forskningsmetode og kunnskapssyn

Innenfor forskningsmetode er det vanlig å skille mellom kvalitativ og kvantitativ metode. Gleiss og Sæther (2021) skriver at ved en kvantitativ tilnærming ønsker man å undersøke hva et større antall forskningsdeltakere mener. I tillegg kunne fremstille dette som statistiske analyser og identifisere sammenhenger mellom ulike variabler. Dette blir støttet av det Postholm & Jacobsen (2018) skriver om at kvantitative forskningsmetoder baserer seg på at virkeligheten blir fremstilt ved hjelp av tall som blir behandlet av statistiske analyser. Kvantitativ metode er ofte preget av større distanse mellom forsker og informant, og forskningen er ofte basert på spørreskjema med svaralternativer for å skape sammenligningsgrunnlag (Thagaard, 2018). En kvalitativ tilnærming er en mer utforskende tilnærming der man undersøker et lavere antall forskningsdeltakere. Dette fører til at man kan gå mer inngående i hva hver enkelt forskningsdeltaker mener eller gjør, og dette er med på å styre utviklingen av kunnskap (Gleiss & Sæther, 2021). Thagaard (2018) skriver at en kvalitativ forskningstilnærming kjennetegnes ved at det er nær kontakt mellom forsker og det som skal forskes på. Til dette er vanlige metoder intervju, observasjon eller analyser av tekst og visuelle fremstillinger (Thagaard, 2018).

For å besvare problemstillingen trenger vi en grundig undersøkelse av hvordan elever oppnår innsikt. Da er vi avhengig av å gå dypt inn å analysere noen elevers oppgaveløsning. Til dette trenger vi å se elever jobbe med problemløsningsoppgaver og ha mulighet til å stille spørsmål. På bakgrunn av dette finner vi det mest hensiktsmessig med en kvalitativ tilnærming. Da vil vi få en større nærhet til det vi forsker på. Både vi som forskere og for informantene vil det bli et større rom for å utrykke seg. Dette er noe vi ikke ville ha hatt mulighet til med kvantitative metoder. Fordelen for oss er at med kvalitativ metode kan vi få frem mer dybde i detaljer, kontekster og beskrivelser. Derimot er en ulempe med metoden at den ikke like lett lar seg generalisere på samme måte som i kvantitative undersøkelser. Med dette vil vi ikke kunne generalisere funn og resultater i like stor grad for en større populasjon med høytpresterende elever på mellomtrinnet, men det vil likevel være en overførbarhet tilknyttet de.

Cresswell (2014) skriver at kvalitative forskere tar utgangspunkt i et verdenssyn eller forskningsparadigme i arbeid med egen forskning. Dette blir støttet av Postholm (2010) som skriver at forskeren alltid har et syn eller noen antakelser om verden som er med på å styre forskningen. Disse synene eller antagelsene er uttrykk for hvordan man ser på verden og blir ofte presentert som paradigmer. Creswell (2014) skriver om fire slike filosofiske verdenssyn: *post-positivisme, konstruktivisme*, «*advocacy/participatory*» og *pragmatisme*. Pragmatisme handler om å gjøre det som er mest pragmatisk for å finne ut av det man ønsker å undersøke i problemstillingen. En pragmatisk tilnærming kan gå inn under både kvalitativ og kvantitativ forskning. Datainnsamlingsmetoder, analysemetoder og andre metoder kan være både kvalitative og kvantitative, så lenge de fungerer og er best mulig egnet for å besvare problemstillingen. I vårt tilfelle ønsket vi å gjennomføre oppgavebaserte intervjuer for å komme til et svar på problemstillingen vår. Analysen av datainnsamlingen baserer seg på både en induktiv og deduktiv tilnærming. Cohen, Manion & Morrison (2018) skriver at ved en pragmatisk tilnærming kombinerer man ofte både induktive og deduktive resonnement for å i størst grad kunne besvare problemstillingen. Det ble da naturlig å plassere oppgaven vår i et pragmatisk paradigme

3.2 Valg av kvalitativ metode

I arbeidet med kvalitative metoder er det ulike metodologiske tilnærminger man kan velge. Creswell (2014) viser til at de vanligste tilnærmingene er fenomenologi, grounded theory, etnografi, kasusstudier og generisk kvalitativ metode. Hovedforskjellene i disse metodene er basert på hvordan man stiller forskningsspørsmål, samler inn data, samt hvordan man analyserer datamaterialet. Den vanligste kvalitative tilnærmingen innenfor utdanning som omhandler å forstå sammenhenger er generisk kvalitativ metode. Dette er en metode som har mange ulike definisjoner. Sammenhengen mellom definisjonene er at gjennom en generisk kvalitativ metode søker man etter å utforske og forstå et fenomen, en prosess eller et perspektiv til deltakerne i studien (Caelli, Ray & Mill, 2003). Her er man interessert i å undersøke hvordan elever konstruerer kunnskap ut ifra interaksjon med omgivelsene. I tillegg ser man på hvordan individer tolker erfaringer, konstruerer egne syn og hvilken betydning dette har for videre attribusjoner av egen erfaring (Merriam & Tisdell, 2016). En generisk kvalitativ metode kjennetegnes ved at rammene for studien er basert på begreper, modeller og teorier innenfor pedagogikk, kognitiv- eller utviklings psykologi (Caelli et al., 2003). Gjennom å benytte seg av denne metoden søker man etter en dypere forståelse av det som undersøkes (Bjørndal, 2017). Bakgrunnen for at valget falt på en generisk kvalitativ metode er at det fungerer hensiktsmessig siden vi skal samle inn konkret data om et lite utvalg elever sine oppgaveløsninger. Dette gir oss rom for fleksibilitet og rom for å stille åpne spørsmål. Dette fører til handlingsrom for at deltakerne kan svare fritt (Christoffersen & Johannesen, 2012). Gleiss & Sæther (2021) viser til ved å ha et mindre utvalg deltakere vil man få en dypere samling med data. I tillegg henger pragmatisme og generisk kvalitativ metode tett sammen, siden det i begge to handler om å anvende metoder og tilnærminger som er best mulig egnet for å besvare problemstillingen.

3.3 Utvalg

Kvalitative studier kjennetegnes ofte med et mindre antall informanter (Thagaard 2018). På bakgrunn av dette er det viktig at man tar strategiske valg i utvelgelsesprosessen som er hensiktsmessig for problemstillingen (Thagaard, 2018). Cohen et al. (2018) skriver at det er fire faktorer forsker må avgjøre i utvelgelsen av utvalget. Disse fire faktorene er størrelsen på utvalget, hvilken utvelgelsesstrategi man skal benytte, tilgang til utvalget og representativitet i utvalget. Vi vil presentere hvilke valg vi har tatt og begrunne hvorfor videre.

I forhold til størrelse på utvalget er det en ganske stor avgjørelse man må fatte. Cohen et al. (2018) skriver at størrelsen på utvalget avhenger av forskningsprosjektet, men at det generelt alltid er bedre med større utvalg for å skape større pålitelighet og gjøre det mer generaliserbart. På den andre siden skriver Thagaard (2018) at kvalitative analyser er tid og ressurskrevende noe som legger føringer for hvor stort utvalget kan være. Ifølge Christoffersen & Johanessen (2012) er det vanlig med et utvalg på mellom 10 og 15 informanter i kvalitative studier. I forhold til dette har vi valgt 12 informanter. Dette utvalget mener vi er representativt for å svare på problemstillingen. Guest, Bunce og Johnson (2006) fant ut i deres studie at *teoretisk metning* skjedde blant de første 12 intervjuene i en kvalitativ datainnsamling. *Teoretisk metning* vil si at man ikke finner nye kategorier i en datanalyse. Etter gjerne 8-12 deltagere i intervjuet, vil man oppleve at kategoriene man undersøker begynner å overlappe og gjenta seg (Guest et al., 2006). Å gjøre et kvalitativt dypdykk i oppgaveløsningen til 12 informanter, mener vi derfor vil være tilstrekkelig for å skape teoretiskmetning i datasettet, der det på et tidspunkt ikke kommer ny informasjon. Dette valget er også basert på at vi ønsker å gå bredt inn i et lite utvalg informanter i istedenfor å gå smalt inn i det stort utvalg. Dette vil også gjøre prosjektet enda mer gjennomførbart med tanke på tiden vi har til rådighet.

I forhold til utvalgsstrategi av informanter til forskningsprosjektet vårt har vi gjennomført det Christoffersen & Johannessen (2012) kaller en «*strategisk utvelgelse*». Det handler om at forskerne velger ut informanter etter hensiktsmessighet. Bakgrunnen for dette ligger i at forskerne strategisk må velge utvalg for å samle inn nødvendig datamateriale for å svare på problemstillingen (Christoffersen & Johannessen, 2012). I forhold til problemstillingen vår, ønsker vi å undersøke hvordan høytpresterende elever i grunnskolen oppnår innsikt. Dette fører til at vi trenger informanter som oppfyller spesielle kriterier. Christoffersen & Johannessen (2012) kaller dette «*kriteriebasert utvelgelse*». Bakgrunnen for at vi ønsket å undersøke høytpresterende elever, har grobunn i forskning som er gjennomført om sammenhengen mellom matematisk ekspertise og kreativitet i problemløsning. Elgrably & Leikin (2021) skriver at det man kan klassifisere som problemløsningseksperter fant og skapte tre ganger så mange løsninger, samt at løsningene var mer fleksible og mer originale enn majoriteten. I denne studien løste elever åpne problemløsningsoppgaver. Dette funnet er i tråd med eksisterende litteratur som viser til en sammenheng mellom matematisk kunnskap og løsningene elevene konstruerer. På bakgrunn av at det mest sannsynlig forekommer flest strategier og løsningstilnærminger fra høytpresterende elever, har vi valgt å bruke dette som selekteringskriterier. I konteksten vår gjør vi datainnsamlinger fra en barneskole der det ikke settes karakterer. Derfor har vi gitt en faglærer ansvaret for å vurdere hvilke elever som passer kriteriene. Faglæreren skal da selektere de hun mener har høyest ferdigheter i matematikkfaget blant de aktuelle klassene på skolen. Med andre ord vil utvelgelsen av informanter basere seg på faglærerens subjektive mening om hvem som oppfyller kriteriene. Grunnen til vi valgte å gjennomføre det på denne måten var at vi stolte på at faglæreren er den som kjenner informantene best. Andre måter å velge ut disse elevene kunne vært å gi de en test, observert eller en annen form for bedømmelse. Da ville vi bare bedømt elevene over et kort tidsrom, derfor fant vi det mer treffende å basere oss på faglærerens oppfatning.

Det tredje punktet til Cohen et al. (2018) er tilgang til utvalget. Til dette måtte vi som forskere sørge for at tilgangen til informantene var tillat. Da måtte vi søke om godkjenning fra Norsk senter for forskningsdata (NSD), for å kunne lagre informasjon fra intervjuene og kunne ta opp lydopptak i prosessen. Videre måtte vi ordne samtykke fra lærere, informanter og deres foresatte. Vi fikk hjelp fra en lærer som var faglærer på 7. trinn. Hun hjalp oss med å få sendt samtykkeskjema til de aktuelle informantene i 7. klasse ved hennes skole som ligger i Troms og Finnmark Fylke. Vi ble enige om at hun utelukkende skulle gi samtykkeskjemaet til de informantene hun mente hadde høyest måloppnåelse i matematikk. I tillegg til dette foreslo hun å inkludere en annen informant som går på småtrinnet, men som hadde svært begavede ferdigheter i matematikk. Grunnen til at faglæreren forslo denne informanten var fordi han tilhørte småtrinnet, men arbeidet til daglig med matematikk fra 7. og 8. klasse pensum. Med dette innfridde han kriteriene for seleksjon av utvalget. Dette syntes vi virket svært spennende og interessant, så vi valgte å inkludere denne informanten i utvalget. På samtykkeskjemaet endte vi opp med å få svar fra 11 informanter i 7. klasse, samt den siste informanten fra småtrinnet som innfridde kriteriet.

Det fjerde punktet til Cohen et al. (2018) er representativitet i utvalget. I utvalget er begge kjønn representert, med en liten overvekt av gutter. I forhold til oppgavetypen problemløsningsoppgaver, er dette noe informantene har god erfaring å arbeide med fra før av. Dette er noe faglæreren har hatt mye fokus på og som klassene har holdt på med i en lengre periode. Med tanke på å kunne si noe om representativiteten i utvalget og hvordan elevene oppfatter matematikkfaget stilte vi de noen innledende spørsmål i starten av intervjuet. Disse omhandlet egne holdninger til faget, nyttighetsgrad, hvor lang tid de bruker på faget i uka, samt foreldrenes matematikkfaglige bakgrunn. Til dette kom det frem at de likte faget godt og at de syntes faget er svært viktig. I gjennomsnitt bruker de 77 minutter på matematikk hjemme i uka. Deres subjektive meninger om egen innsats i matematikkundervisning var også i det øvre sjiktet. Flesteparten sa også at de trivdes med å arbeide med vanskelige oppgaver. I tillegg kan vi se at svært mange av de har et godt forhold til faget. Videre uttrykte elevene at flesteparten hadde foreldre som er flinke i matematikk.

3.4 Datainnsamlingsmetode

På bakgrunn av forskningsspørsmål og formålet med studien har dette lagt grunnlaget for hvilken metode som er hensiktsmessig å anvende. Christoffersen & Johannessen (2012) viser til at de vanligste metodene for å samle inn data i arbeid med kvalitativ forskning er intervju og observasjon. Thagaard (2018) skriver at intervju gir oss som forskere fyldige og omfattende kunnskaper om situasjoner og synspunkt om det som intervjuobjektet blir spurt om. Skilbrei (2019) skriver at målet med intervjustudier er gjennom kvalitative intervjuer å skape en overføringsverdi der man ser etter sammenhenger, prosesser og kategorier som gjelder for flere.

For å kunne gi svar på vår problemstilling ble det tidlig klart at vi ville anvende intervju og da spesifikt oppgavebasert intervju. Grunnen til at vi valgte å benytte oss av oppgavebasert-intervju var at vi ønsket å gå i dybden på informantenes oppgaveløsning for å kunne identifisere hvordan de oppnådde innsikt i arbeid med noen oppgaver. I drøftingen om observasjon eller intervju var mest treffende for det vi ønsket å undersøke så vi både fordeler og ulemper med metodene. Et viktig aspekt var at vi ønsket å undersøke hvordan informantene tenkte i arbeidet med problemene. Informantenes tanker under oppgaveløsning er noe man ikke kan observere konkret og kan være utfordrende å kartlegge. Derfor var det naturlig at vi valgte intervju for å kunne spørre informantene hva de tenkte. En annen faktor vi mente hadde verdi for undersøkelsene var at informantene hadde mulighet til å stille oppklarende spørsmål i oppgaveløsningen. Videre vektla vi viktigheten av å ha mulighet til å kunne stille spesifikke og innholds-relaterte spørsmål til informantene. En annen fordel med oppgavebasert-intervju som metode var muligheten til å stille fastsatte spørsmål i sekvensene etter hver av oppgavene, dette var for å få informantene til å sette ord på tankene og valgene i oppgaveløsningen. Alle disse momentene førte til at vi fant det mest hensiktsmessig å benytte oppgavebasert-intervju i vår forskning.

3.4.1 Oppgavebasert intervju

Oppgavebasert intervju har sin opprinnelse fra kliniske intervju som stammer tilbake til Piaget. Han utviklet disse kliniske intervjuene for å skape en dypere forståelse for barns kognitive utvikling (Lerman, 2014). Oppgavebasert intervju er en av de mest brukte metodene for kvalitative studier innenfor matematikkdidaktikk, og at de i hovedsak blir de brukt til å gi kunnskap om elevers eksisterende matematiske kompetanse og problemløsnings-kunnskaper (Lerman, 2014). Dette blir støttet av det Goldin (1997) skriver om at oppgavebasert intervju er en god metode for å undersøke elevarbeid innenfor problemløsning. Oppgavebasert intervju er utformet på en slik måte at det ikke er kun interaksjon mellom intervjuer og informant som er hensikten, men like mye samtalen om oppgaven som blir gjennomført (Goldin, 2000). Dette krever at oppgavene er nøye planlagt og konstruert for å få frem hensikten med intervjuet (Goldin, 2000). Denne metoden gir oss muligheten til å gi elever oppgaver og samtidig gi oss et godt bilde av hvordan de løser de. Samtidig vil vi ha mulighet til å stille oppklaringsspørsmål, observere og undersøke sporadiske hendelser som ikke kan forutses.

Oppgaveutformingen var noe vi brukte mye tid på, og fremgangsmåten har vi beskrevet inngående i kapittel 3.5.1. Lerman (2014) skriver at for å kunne analysere datamaterialet fra oppgavebaserte intervjuer kan smarte grep være å enten ta lydopptak eller video. Dette blir støttet av Kvale, Brinkmann, Anderssen & Rygge (2015) som skriver at det er ulike måter å registrere data fra intervjuer for senere dokumentasjon og analyse. Disse metodene er lydopptak, videoopptak og notatskriving, men viser til at det vanligste er å anvende lydopptak (Kvale et al., 2015). Han viser videre til at det er fordeler og ulemper ved både lydopptak og videoopptak. Hovedforskjellen er at man gjennom et videoopptak har mulighet til å analysere det mellommenneskelige samspillet i intervjuet. På den andre siden gir videoopptak en mye mer tidkrevende prosess når man skal analysere (Kvale et al., 2015). Vi anså oppgavebasert intervju til å være en datainnsamlingsmetode som kom til å gi oss tilstrekkelig med data for å besvare vår problemstilling. I tillegg anså vi det som irrelevant å benytte oss av video, siden dette ikke ville gitt oss noe mer verdifull informasjonsgrunnlag i datasettet i forbindelse med problemstillingen. Tvert imot anså vi at dette kunne bidratt til at informantene var vanskeligere å rekruttere. I tillegg kunne dette bidratt med større sannsynlighet til at de ville endret væremåte i intervjuet. Ut ifra dette anså vi det som mest hensiktsmessig å benytte oss av lydopptak. For å sikre at elevene skulle snakke mest mulig og samtidig dele sine tanker, valgte vi å benytte oss av en verbal protokoll som Ericsson & Simon (1993) kaller «*think aloud*». Dette er en metode som brukes for å skaffe innsikt i noens tanker gjennom kontinuerlig deling av tanker samtidig som en oppgave løses. Med dette kan man få ordrike lydopptak som inkluderer elevens tanker. Ericsson & Simon (1993) har et forslag til en tale-instruks som de anbefaler. Denne har vi oversatt og omskrevet til:

«*Si meg alt du tenker på fra du får oppgaven og til du kommer til et svar. Jeg vil at du tenker høyt hver gang du får en oppgave og til du er ferdig. Si alt du tenker uten å planlegge hvordan du skal forklare det. Bare lat som om du er alene i rommet og snakker med deg selv. Dersom du er stille i en lengre periode, kommer jeg til å be deg tenke høyt*».

Christoffersen og Johannessen (2012) viser til fire ulike kategoriseringer et intervju kan være bygget opp på. Dette er ustrukturert, semistrukturert, strukturert og strukturert intervju med faste svar alternativer. Formen oppgavebasert intervju krever stor grad av fleksibilitet i intervjuprosessen og det ble dermed naturlig at vi gjennomførte intervjuet med en semistrukturert tilnærming der vi overordnet benyttet en intervjuguide, men rekkefølgen på temaer og spørsmål kan bevege seg frem og tilbake. Fordelen med at vi velger å gjennomføre det på denne måten er at man får fleksibilitet og mulighet til å følge opp interessante momenter som plutselig dukker opp.

3.5 Forberedelse og gjennomføring av datainnsamling

I prosessen med å utarbeide det oppgavebasert intervjuet utformet vi først oppgavene. På bakgrunn av dette utarbeidet vi en intervjuguide og bestemte grad av struktur på denne. Videre gjennomførte vi et pilotintervju og justerte intervjuet etter dette. Prosessens ulike deler utdypes i det følgende.

3.5.1 Utforming av oppgavene

For å kunne sette sammen et oppgavebasert intervju var vi avhengig av å ha noen oppgaver. Det første vi begynte med var å utarbeide noen kriterier oppgavene måtte oppfylle. Til dette var vi interesserte i å finne problemløsingsoppgaver med en vanskelighetsgrad innenfor informantenes rekkevidde. Et annet kriterium med oppgavene var at de skulle ha en, ingen og flere riktige løsninger. Grunnen til dette var at vi da kunne undersøke om antall løsninger på oppgavene kunne ha en sammenheng med antall tilnærminger som brukes i oppgaveløsningene og om det kunne ha en innvirkning på oppnåelse av innsikt. Vi fant det naturlig å bruke lang tid på å bestemme hvilke oppgaver vi skulle bruke, fordi vi ville unngå at oppgavene verken skulle være for vanskelige eller for lette. Vi lette etter oppgaver på internett, forsøkte å lage selv og vi spurte veileder. Til slutt fant vi mange nok til å lage en oppgavebank med ca. 10 ulike oppgaver. Gjennom veiledning kom vi frem til 6 gode oppgaver som oppfylte kriteriene. Av disse 6 plukket vi ut de tre mest passende oppgavene innenfor hver kategori av antall løsninger. Her så vi etter oppgaver med «passende vanskelighetsgrad» og som hadde flere nøkkelpunkter ved seg som kunne ha en innvirkning for å oppnå innsikt. Med «passende vanskelighetsgrad», mener vi at oppgavene må være utfordrende på en slik måte at det er et problem for elevene og fremgangsmåtene ikke er åpenbare. Alle de tre oppgavene vi har med i studiet passer innenfor kategorien innsiktsoppgaver. Derfor var det et viktig poeng for oss å se etter avgjørende steg i oppgavene der løsningen kan komme eller innsikt kan oppstå. Måten vi kan se etter innsikt er primært på to ulike måter ut ifra kriteriene. Vi kan observere en elev stå fast med en oppgave og deretter plutselig få en «aha-opplevelse», for så å oppnå et mer produktivt synspunkt på oppgaven. Eller så kan vi observere eleven arbeide systematisk gjennom prøving og feiling, før den til slutt finner en gradvis mer produktiv tilnærming og oppnår innsikt. Dette var noe vi gjennomtenkte da vi valgte oppgavene. Etter at vi hadde valgt ut oppgavene utarbeidet vi hint. En del av veiledningsprosessen fra lærer til elev innenfor problemløsning er å bruke hint som ikke tømmer prosessen for læringsutbytte. Med bakgrunn av dette laget vi standardiserte hint. Noen hint hadde en overførbar verdi gjennom å vise hvordan man kan løse et lignende problem og andre hint var konkrete til oppgaven det gjaldt. Hintene var i varierende grad lite eller noe avslørende i forhold til løsningen og de besto av både tekst og figurer. Videre presenteres hver oppgave kronologisk med tilhørende hint.

3.5.2 Oppgave 1 – Gjentagende siffer

Oppgave 1

Skriv et tresifret tall. F.eks. 371. Gjenta tallet slik at du nå har 371371. Del dette tallet på 7. Del dette tallet på 11. Del dette tallet på 13. Hva skjer?

Figur 3.1 - Oppgave 1.

Den første oppgaven vises i figur 3.1, og kan kategoriseres som det Robertson (2017) omtaler som «*well-defined*» problemløsningsoppgave med bare en løsning. Grunnen til dette er at i oppgaveteksten er all informasjonen som man trenger tilgjengelig for den som skal løse oppgaven. I dette tilfellet er det bare et spesifikt svar man er ute etter, men det er mange måter å ordlegge seg på i forklaringen av svaret. Denne oppgaven handler om å utforske hva som skjer og lete etter en sammenheng rundt årsaken til at man returnerer til et tresifret tall etter man utfører noen regneoperasjoner. F.eks. vil 371371 dividert på 7, 11 og 13 bli 371. Selve utforskningen og utregningene skal gjøres på ark med kalkulator som eneste hjelpemiddel. Dette er en forklaringsoppgave der oppgaveløseren blir bedt om å forklare egen løsning og forståelse til oppgaven. For å komme til et svar på denne oppgaven er det et nøkkelmoment å multiplisere tallene 7, 11 og 13, siden disse tallene brukes for å dividere det 6-siffrede tallet man velger ut på starten. Svaret på multiplikasjonen blir da 1001. Et svar vi anså på denne oppgaven til å være korrekt, var en argumentasjon som vektlegger at hvis man multipliserer et tresifret tall med 1001, så vil de tre sifrene gjenta seg. Eksempel på begrunnelse kunne også inneholde en argumentasjon som inkluderer regnestykkene $371 \times 1000 = 371000$, og $371 \times 1001 = 371371$. Alle hintene til denne oppgaven vises nedenfor i figur 3.2.

- Hint 1: Fyll inn tallet ditt i tabellen

Hundretusen-plassen	Titusen-plassen	Tusen-plassen	Hundrer-plassen	Tier-plassen	Ener-plassen

- Hint 2: Regn ut 7×11×13
- Hint 3: Hvorfor er 1001 spesielt?
- Hint 4: Hva skjer om du multipliserer tallet ditt med 1000?

Figur 3.2 - Hintene til oppgave 1.

Det første hintet omhandler plassverdisystemet og skulle få eleven til å fylle inn tallene sine i tabellen. Dette hintet hadde som intensjon at det ikke skulle røpe alt for mye eller være for hjelpende. Da kunne vi begynne med dette og deretter gi gradvis mer røpende hint. Meningen var å få eleven til å komme et lite spor nærmere løsningen. Med hint 2, var intensjonen å være mer direkte og konkret. Dette hintet var ment å være delvis avslørende gjennom å vise en konkret retning man kan ta for å komme nærmere løsningen. Her tok vi det ikke forgitt at oppgaveløseren kom til å forstå sammenhengen med tallet 1001. Videre kommer hint 3, som kan gjøre at oppgaveløseren skjønner konkret at tallet 1001 har noe med løsningen å gjøre. Dersom oppgaveløseren ikke ser sammenhengen, må den da prøve å utforske seg frem. Det siste hintet anser vi som ganske konkret siden det er tydelig hva hintet får oppgaveløseren til å gjøre. Hintet er litt røpende og har som intensjon å gjøre at flest mulige får til oppgaven.

3.5.3 Oppgave 2 – Romersk arveproblem

Oppgave 2

En døende mann skrev følgende i testamentet sitt: Hvis min gravide kone føder en sønn, arver konen 1/3 av eiendommen og sønnen 2/3. Hvis konen føder en datter, skal konen arve 2/3 av eiendommen og datteren 1/3. Konen fødte tvillinger etter at mannen hennes døde. En gutt og en jente. Hvordan vil mannens eiendommer bli fordelt?

Figur 3.3 - Oppgave 2.

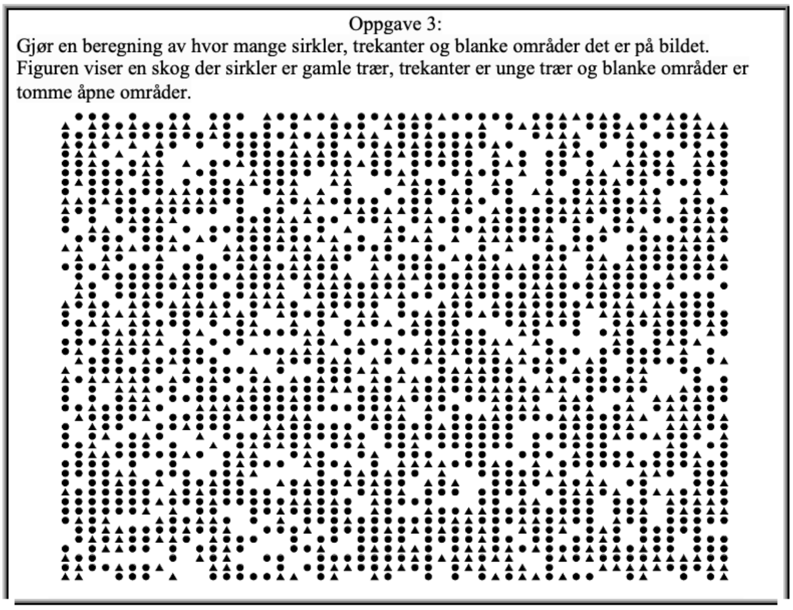
I figur 3.3, vises oppgave 2. Den kommer opprinnelig fra «m*oscow puzzles*» og blir referert fra litteraturen på engelsk som «*roman problem*». Denne oppgaven er tidligere anvendt i studien til Haavold & Sriraman (2021). I deres studie brukte de oppgaven på elever som tok matematikk-faget R2 på videregående, samt lærerstudenter som var på sitt avsluttende semester på sin mastergrad innenfor matematikkdidaktikk. Oppgaven kan kategoriseres som det Kitchener (1983) omtaler som «*ill-defined*», grunnet den mangelfulle informasjonen oppgaveløseren får. Vi mener den vil passe bra siden oppgaven kan få elevene til å måtte hente frem mange løsningstilnærminger siden informasjonen i oppgavene er tvetydig og vanskelig å strukturere. Dette er en problematisk oppgave å arbeide med siden oppgavens betingelser aldri vil gjøre at en fordeling vil være korrekt eller rettferdig. Det vil forekomme mange ulike løsningstilnærminger blant elevene siden oppgaven kan tolkes og påbegynnes på mange ulike måter. Vi tenkte denne oppgaven ville være ekstra interessant å gi til elever på barneskolen siden de kan ha en misoppfatning av at alle matematikkoppgaver har et fasitsvar. På bakgrunn av dette og at oppgaven allerede var brukt i en annen studie, førte dette til at vi fant oppgaven veldig interessant og ønsket dermed å ta den med. I forhold til at vi skulle gi oppgaven til elever på barneskolen, måtte vi gjøre noen tilpasninger. Det ene var å oversette oppgaven fra engelsk til norsk, for å unngå språklige utfordringer og fokusere på det matematiske aspektet med oppgaven. Det andre var å tilby oss å lese, forklare og utdype oppgaven, fordi dette er en lang tekstoppgave med mye informasjon. På grunn av strukturen og vanskelighetsgraden har vi hint til også denne oppgaven.

- Hint 1: Per og Pål skal dele 1000 kr. Per fant pengene og skal ha 2/3. Pål mener de skal dele likt og skal ha ½. Hvor mye skal hver av dem ha?
- Hint 2: Kan man bruke en annen brøk enn 1/3?
- Hint 3: Nevn betingelsene i arven at sønnen er lovet mest.

Figur 3.4 - Hintene til oppgave 2.

I figur 3.4, kan man se hintene til denne oppgaven. I det første hintet, ga vi en strukturell lik oppgave uten en løsning, men med andre tall. Hintet vil ikke bidra til noen konkrete tips for hva de kan gjøre i oppgaven, men det kan få elevene til å tenke bredere eller annerledes. Hint 2 handler om å få informantene til å se muligheter med andre brøker. Tanken bak hintet var at vi så for oss en mulighet at noen trenger mer konkret hjelp. Da kan dette bidra til at noen endrer tallene sine og utvider brøkene, uten at det røper noe. Dersom informantene prøver ut ulike representasjoner med brøker er det mulig at de oppdager noe nytt. I det siste hintet skal vi forklare betingelsene i arven. Da skal vi få frem at sønnen skal ha størst andel av arven. Hensikten med hintet er å få frem tanker om logikken i kravene fra arven som er fastsatt. Vi gir det kun til informantene som ikke allerede har gitt sønnen mesteparten av arven. Dette hintet er ikke veldig røpende, men det kan få eleven inn på et nytt spor der de utforsker og oppdager noe nytt.

3.5.4 Oppgave 3 - Estimeringsoppgave

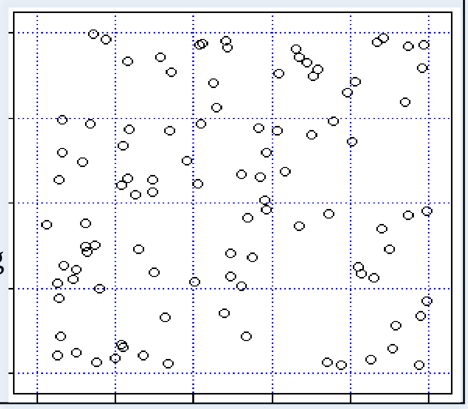


Figur 3.5 - Oppgave 3, hentet fra (Counting trees, 2012, Mathematics Assesment Project, 2012)

Figur 3.5, viser vår tredje og siste oppgave. Dette er en estimeringsoppgave som opprinnelig heter «*Counting Trees*». Denne fant vi blant en samling med matematikkoppgaver på internett fra *Mathematics Assessment Project*. Oppgaven dreier seg om å estimere hvor mange trekanter, sirkler og blanke områder det er på et bilde med 2500 symboler. Man får ikke lov til å telle alle symbolene, men man må bruke strategiske problemløsningsferdigheter for å komme frem til et best mulig estimat. Oppgaven kan defineres som en «*open-start*» oppgave fordi den opprinnelig bare har en løsning, men mange veier for å komme frem til løsningen på (Monaghan et al. 2009). Grunnen til at vi anser denne oppgaven til å ha mange løsninger er fordi vi nødvendigvis ikke er ute etter 100 % nøyaktighet i estimatet, men at fremgangsmåten vektlegges som løsningen i seg selv. Oppgaven passer innenfor kategorien som Robertson (2017) omtaler som «*well-defined*», siden det er tilstrekkelig med informasjon om oppgaven, men den sier ingenting om hvordan man skal løse den. Det eneste man får vite på forhånd er at det er 50 symboler i hver retning både vannrett og loddrett. Det vil være flere måter å komme frem til et svar på denne oppgaven. En måte er å fordele 1/3 til hver og deretter se at det er litt flere sirkler enn trekanter og blanke områder, og deretter justere etter dette. En annen og bedre måte er å telle i et spesifikt område og multiplisere for å representere hele figuren. Eksempler på dette er å telle en linje og multiplisere med 50, siden det er 50 linjer. Eller man kan dele figuren opp i ruter på f.eks. 10×10 og multiplisere med 25 siden det er 2500 symboler totalt i figuren. En siste og bedre måte er en videreføring av sistnevnte. Man kan telle i to eller flere ruter og regne ut gjennomsnittet i de og deretter multiplisere for å finne antallet i hele figuren. Dette vil sannsynligvis gi det mest presise svaret. Gradvis innsikt ser vi for oss kan oppstå dersom noen forbedrer sin tilnærming gjennom gradvis og systematisk arbeid, f.eks. med å telle i et ugunstig område og deretter innse en bedre måte. Plutselig innsikt ser vi for oss kan oppstå f.eks. dersom noen står fast og plutselig innser at de kan telle i et lite område og multiplisere opp for å få hele figuren.

Hint 1: Anslå hvor mange sirkler det er i gjennomsnitt i hver rute i figuren?

Hint 2: Er det noen områder i skogen som ikke egner seg til å bruke i estimeringen? Hvordan kan du være sikker på at området du har valgt egner seg i estimeringen?



Figur 3.6 - Hintene til oppgave 3. Bildet er hentet fra: (Random Points in Cells of Regular Grid, 2011, av Wicklin, https://blogs.sas.com/content/iml/files/2011/08/bincount.png).

På figur 3.6, kan man se begge hintene vi ga i oppgave 3. Med det første hintet var målet å få elevene til å innse at det kan være en mulighet å dele opp figuren i ruter. Det er ikke nevnt noe om hvor store ruter eller hvor mange ruter det er, dette må de finne ut av selv. På bildet til hintet kan man se et rutenett med en tilfeldig fordeling av celler. Dette har relevans for oppgaven og vil med stor sannsynlighet føre med seg noe overførbart for elevene. Vi anser det også som en mulighet for at ordet gjennomsnitt blir plukket opp og brukt videre i en fremgangsmåte. I det andre hintet får vi informanten til å reflektere over hvorvidt deres avgrensede område egner seg til å brukes i estimatet. Dette kan få de til å reflektere over egen strategi og innse at det er andre strategier som er bedre. Dette kan føre til at informantene innser at de kan regne ut gjennomsnittet av antallet i flere ruter og dermed sikre et spredt utvalg før de multipliserer opp og finner totalsummen.

3.6 Utforming av intervjuguide

I utarbeidelsen av intervjuguiden tok vi utgangspunkt i det Christoffersen & Johannessen (2012) mener bør være med i en intervjuguide. Punktene de nevner er presentasjon, info om prosjektet, hvordan man vil dokumentere intervjuet, garantere anonymitet og hva som skjer hvis informantene på et tidspunkt ikke ønsker å være med i prosjektet. Oppbyggingen av intervjuet tar utgangspunkt i oppgavene med tilhørende spørsmål, samt disse fem punktene. Bjørndal (2017) skriver at i en intervjusituasjon er makten til intervjuer stor og den kan være med å forme intervjuets gang. For å begrense denne påvirkningen valgte vi å kun ha innvirkning gjennom standardiserte hint og ellers ikke bidra til noe hjelp eller bekreftelse om en tilnærming er riktig. Dette var noe vi tok høyde for når vi utarbeidet intervjuguiden. Vi har bygget opp intervjuet vårt slik at det består av 3 deler. Del 1 består av generelle spørsmål om elevens forhold og holdninger til faget. Del 2 består av de tre oppgavene og tilhørende spørsmål som omhandler oppgaveløsningen. Her er spørsmålene direkte relaterte til hvordan elevene oppfatter oppgavene og det de har gjort og erfart i fra oppgavene. Del 3 består av generelle spørsmål om alle oppgavene som en helhet. Her var noe av fokuset rettet på å få frem hva elevene syntes om oppgavene, tidsbruk og om opplevelsen som deltager. Til hver av disse tre delene valgte vi ut flere ulike spørsmål.

I den første delen valgte vi ut en del generelle spørsmål som skulle avdekke informasjon om elevenes bakgrunn og forhold til matematikkfaget. For å få svar som kunne gi en indikator på dette, så fikk vi eleven til å gi et tall på en skala fra 1-10. Vi spurte om hvor godt de liker faget, hvor viktig de synes faget er og hvor god innsats de har i timene. Etter dette spurte vi om hva de synes om å løse vanskelige oppgaver, hvor lang tid de bruker på å arbeide med matematikk hjemme i uka, om noen av foreldrene er flinke i matematikk og eventuelt hva foreldrene jobber innen. Rekkefølgen på disse spørsmålene hadde en fast struktur i intervjuet. Grunnen til at vi samlet inn informasjon om deres bakgrunn var for å ha mulighet i etterkant til å se om det kunne være noen sammenhenger i dette, og for å gi oss et bedre bilde av representativiteten i utvalget gjennom å kartlegge hvem informantene er og hva de synes om matematikkfaget.

Til del to lagde vi spørsmål som skulle stilles etter hver oppgave. Her ønsket vi å få frem hvordan det var for eleven å løse oppgavene og i tillegg få frem ny informasjon som ikke dukket opp av seg selv. Med å stille alle elevene faste spørsmål, var formålet å gjøre intervjuene så like som mulig. Dette for at elevsvarene skulle være sammenlignbare. Til sammen hadde vi 18 spørsmål til oppgavene. Disse spørsmålene skulle få frem blant annet hva elevene syntes om oppgavene, hva som gjorde at de kom frem til svaret og deres opplevelser rundt hintene. Noen av spørsmålene var også ment for å avdekke informasjon om hvordan elevene håndterte usikkerhet. Vi startet opprinnelig med usikkerhet som et tilhørende forskningstema, men dette gikk vi bort i fra etter datainnsamlingen da vi hadde nok omfattende data om innsikt. Vi blir ikke å ramse opp alle oppgavene her grunnet plasshensyn, men de finnes under vedlegg 1.

Del tre består av avsluttende spørsmål i intervjuet. Her var hensikten å få ny informasjon ut av informantene som vi tidligere ikke hadde fått avdekket. Her stilte vi spørsmål om de hadde opplevd å stå fast og deretter plutselig skjønne løsningen til en vanskelig oppgave. I denne delen stilte vi også spørsmål om hva informantene syntes om oppgavene og hvor vanskelig de syntes de var. Dette gjorde vi for å få bedre oversikt og for å bekrefte om oppgavene hadde passende vanskelighetsgrad. Avslutningsvis stilte vi to spørsmål med hensyn til validiteten. Spørsmålene handlet om de hadde klart å løse oppgavene bedre uten oss til stede og om de fikk tilstrekkelig med tid. Dette gjorde vi for at å kunne si noe om validiteten var svekket. Gjennomføringen av intervjuene kommer vi til å spesifisere mer i kapittel 3.7.

3.7 Pilotintervju

Etter vi hadde utformet de tre oppgavene og fastsatt hintene, gjennomførte vi et pilotintervju. Da valgte vi ut en tilfeldig informant fra utvalget vårt som hadde samtykket til deltakelse. Eleven i pilot-intervjuet oppfylte da de samme kriteriene som resten av utvalget. Det var viktig for oss at dette ville foregå på en så lik måte som mulig som de intervjuene vi skulle gjennomføre senere. En av grunnene til at vi valgte å ha pilotintervju var for å teste vår egen rolle i intervjuet. Samtidig fikk vi også testet strukturen på intervjuguiden og sett hvor lang tid eleven brukte på oppgavene og spørsmålene. Piloteringen var viktig for å sikre at oppgavene, hintene og spørsmålene var som tiltenkt. Etter intervjuet spurte vi om tilbakemeldinger på oppgavene og hvordan det opplevdes å være en del av denne situasjonen. Dette var for å få et innblikk i hvordan det var for eleven å delta og for at vi kunne gjøre justeringer frem til neste intervju. Etter piloteringen hadde vi en veiledning for å dele erfaringene og diskutere mulige justeringer. Refleksjonen vi gjorde oss var at hvert intervju tok lang tid og dette kunne medføre at datainnsamlingen ville ta mange dager og elevene ville da ha mulighet til å snakke om intervjuene med hverandre. På bakgrunn av denne erfaringen, ble det bestemt at vi skulle dele oss i to, slik at vi kunne gjennomføre to intervjuer samtidig og dermed minimere sannsynligheten for informasjonslekkasje. Angående strukturen på intervjuguiden, var en refleksjon vi gjorde å omformulere og justere rekkefølgen på noen av spørsmålene.

3.8 Gjennomføring av oppgavebaserte intervjuer

Vi gjennomførte alle våre oppgavebaserte intervjuer med en intervjuguide, kan man se i vedlegg 1. Cohen et al. (2018) skriver at en fordelene med intervjuguide er at emnet som skal dekkes er spesifisert på forhånd. Intervjueren har på forhånd valgt ut spørsmålene og rekkefølgen på de. Videre nevner Cohen et al. (2018) andre fordeler som at dataen blir mer omfattende og systematisk for hver respondent. Ulempen med dette er at fleksibiliteten i spørsmålene og rekkefølgen kan gjøre at svarene blir mindre sammenlignbare (Cohen et al., 2018). Når det gjelder strukturering av intervjuet har vi valgt å plassere oss imellom ytterpunktene strukturert og ustrukturert med en semi-strukturert tilnærming. Denne formen kalles «*intervjuer basert på intervjuguide*», ifølge Christoffersen & Johannessen (2012). Intervjuguiden inneholder forhåndsbestemte spørsmål og tema som skal gjennomgås i intervjuet, og disse skal ha en relevans for det undersøkelsen skal belyse (Christoffersen & Johannessen 2012). Utenom pilot-intervjuet ble det gjennomført 12 oppgavebaserte intervjuer, som hadde en varighet på omtrent 45 minutter hver. Vi intervjuet en elev om gangen slik at vi kunne gjøre et intervju på to forskjellige grupperom samtidig. På denne måten fikk vi gjennomført datainnsamlingen mye raskere. Vi ønsket å bli raskt ferdig med datainnsamlingen for å gjøre det mindre sannsynlig at elevene fortalte andre elever om oppgavene og dermed røpte informasjon de ikke skulle vite før de ble intervjuet. Til tross for dette gikk det med to sammenhengende fulle dager til å gjennomføre intervjuene. For å unngå at elevene snakket sammen om oppgavene fra intervjuet, oppfordret vi de om å ikke fortelle medelever noe om oppgavene.

Gjennomføringen av intervjuene startet med at vi hilste på eleven og fortalte hvorfor vi var der. Her informerte vi om at de ville få tre utfordrende oppgaver og oppfordret de til å gjøre sitt beste og dele alle tankene sine underveis. For å få eleven til å tenke mest mulig, brukte vi Ericsson og Simon (1993) sitt forslag til tale-instruks «think aloud». Som beskrevet tidligere er dette en protokoll som bidra til at elevene deler tankene sine høyt. Dette var til hensikt for å få eleven til å tenke høyt og sette ord på tankeprosessen. Her ønsket vi at tanker og ideer skulle komme frem. Videre informerte vi om anonymitet og hva som vil skje dersom eleven ønsket å trekke seg fra intervjuet. Da vi gikk i gang med intervjuet ble det utdelt kalkulator, ark, blyant og oppgaveark. Her hadde vi en løs prat sammen med eleven for å lette litt på stemmingen. Når alt var klart startet vi lydopptaket og stilte de innledende spørsmålene. Til å gjøre lydopptak brukte vi diktafon-appen til Universitetet i Oslo.

Gjennomføringen av de oppgavebaserte intervjuene var som nevnt tidligere en 3-delt prosess. Den første delen var de innledende spørsmålene om elevenes bakgrunn. Deretter i del 2, gis oppgavene med tilhørende spørsmål, og avslutningsvis i del 3 gis de avsluttende spørsmålene om helheten i intervjuet. I del 2 når elevene løste oppgavene selvstendig, var vår rolle å observere hva de gjorde. Dette for å kunne stille oppklarende spørsmål underveis. Samtidig kunne vi passe på at de hele tiden forklarte hva de gjorde. Dette innebar for oss å røpe minst mulig, kun stille spørsmål og ikke være hjelpsom. Dersom elevene ble stille over en periode stilte vi spørsmål for å få frem deres tanker og begrunnelser. Et valg vi tok var å ikke skrive notater underveis, for å ha fokus på dialogen. Dette for at det skulle komme tydelig frem i lydopptaket hvordan eleven tenkte underveis i oppgaveløsingen. Når det gjelder å komme videre i problemløsningsprosessen valgte vi som nevnt i kapittel 3.5.1, å gi noen standardiserte hint. Vi ga hint til alle selv om de hadde kommet til et svar. Dette var for å gjøre intervjuene mest mulig like og sammenlignbare. En forventning vi hadde var at elevene kunne endre mening selv etter de hadde løst en oppgave med å få hint. Derimot hvis en elev ikke skjønte oppgaven etter å ha fått alle hintene, var det ikke noe poeng i å fortsette og gi hjelp. Grunnen til dette var at det da ville det være en sannsynlighet for at intervjuene ble ulike. En ting vi måtte akseptere var at ikke alle elevene nødvendigvis trenger å klare alle oppgavene. Grunnen til dette var at tiden var begrenset og vi ønsket strukturelt like intervjuer.

Etter at eleven hadde løst oppgavene stilte vi de avsluttende spørsmålene i del 3. Avslutningsvis sa vi til elevene at de ikke måtte røpe detaljer fra oppgavene til medelevene sine. Deretter takket vi for deltagelsen og gjentok at alt som har foregått vil bli anonymisert. Etter endt intervju tok vi bilde av oppgavearkene som var brukt og noterte et kort sammendrag fra hvert intervju. Dette for at vi lettere skulle huske tilbake til hver elev i arbeidet med analysen.

3.9 Transkribering av intervju

En transkripsjon er en oversettelse fra et talespråk til et skriftspråk. I en transkripsjon blir samtalen mellom to mennesker abstrahert og fiksert over til skriftlig form (Kvale et al., 2015). Denne transkripsjonsprosessen kan sees på som en kritisk fase i intervjuprosessen fordi det er en risiko for feiltolkninger i forhold til faktorer som er non-verbale (Kvale et al., 2015). Når datamaterialet fra intervjuet er transkribert over til tekstform er det lettere å få oversikt og man er i stand til å begynne å strukturere det. Et transkribert materiale er svekkede, dekontekstualiserte gjengivelser av intervjusamtaler basert på forskerens subjektive tolkninger (Kvale et al., 2015). Dette førte til at vi som forskere måtte lage en felles plattform for hvordan vi ønsket å gjennomføre transkripsjonen. I forhold til valget om å transkribere det vi mente var interessant eller hele intervjuet, endte vi opp med at vi ønsket å transkribere hele intervjuet. Grunnlaget for dette var at problemstillingen vår baserer seg på et samspill mellom det eleven forteller i de fastsatte spørsmålene og selve oppgaveløsningen. Ved å transkribere all tale over til tekst mener vi dette vil gi oss et bredere grunnlag for å gjøre presise analyser. På grunnlag av at vi ønsket å transkribere all tale fra alle 12 intervjuene, måtte vi fatte et valg i forhold til hvem som skal transkribere. Her ble vi enige om å dele opp intervjuene og ta 6 intervjuer hver. Kvale et al. (2015) skriver at hvis det er flere som transkriberer skal de bruke sammen skriveprosedyre. I Initieringsfasen var vi derfor grundig med å utarbeide en lik mal og noen felles retningslinjer for hva vi skulle ta med i transkriberingen. Grunnen til at vi valgte å dele det var at det var en omfattende og tidkrevende prosess å transkribere alle intervjuene. Et spørsmål Kvale et al. (2015) nevner er om følelsesuttrykk og pauser skal inkluderes. I vår sammenheng var det essensielt og ta dette med i de oppgavespesifikke situasjonene der elevene enten står fast, klarer oppgaven eller opplever økt produktivitet. Grunnen til at vi valgte å ta det med er fordi det ville gi oss et klarere bilde på hva som skjer kognitivt. Da vi transkriberte intervjuene, måtte vi være sikre i uklare situasjoner. Derfor hørte vi tilbake situasjoner som var uklare sammen for å sikre validiteten. Vi har valgt å transkribere intervjuene til et skriftlig normert språk. I hovedsak var vi ute etter å se sammenhengen i intervjuet og ikke ha fokus på det lingvistiske.

Tabell 3.1 - Intervju av Elev 3 i oppgave 1

Elev	Får oppgave 1, leser oppgaveteksten, regner ut 371371/7 = 53053. «Hmm. 53053. Jeg har på følelsen av at dette kommer til å gå tilbake til 371». Regner ut 53053/11 = 4823.
Forsker	«Hvorfor tenker du at det kommer til å gå tilbake til 371 da?»
Elev	«Fordi når man deler det på denne måten og jeg fikk 53053 så skjer det noe i et mønster». Regner ut 4823/13 = 371. «Da hadde jeg rett. Dette fikk jeg fordi når man deler det på forskjellige tall så kan man gjøre slik at det blir akkurat det samme».

I tabell 3.1, vises et kort utdrag fra det transkriberte intervjuet med Elev 3. Beskrivelser av hva eleven gjør har vi markert i rødt for å tydeliggjøre forskjellen til det som blir sagt i svart skrift.

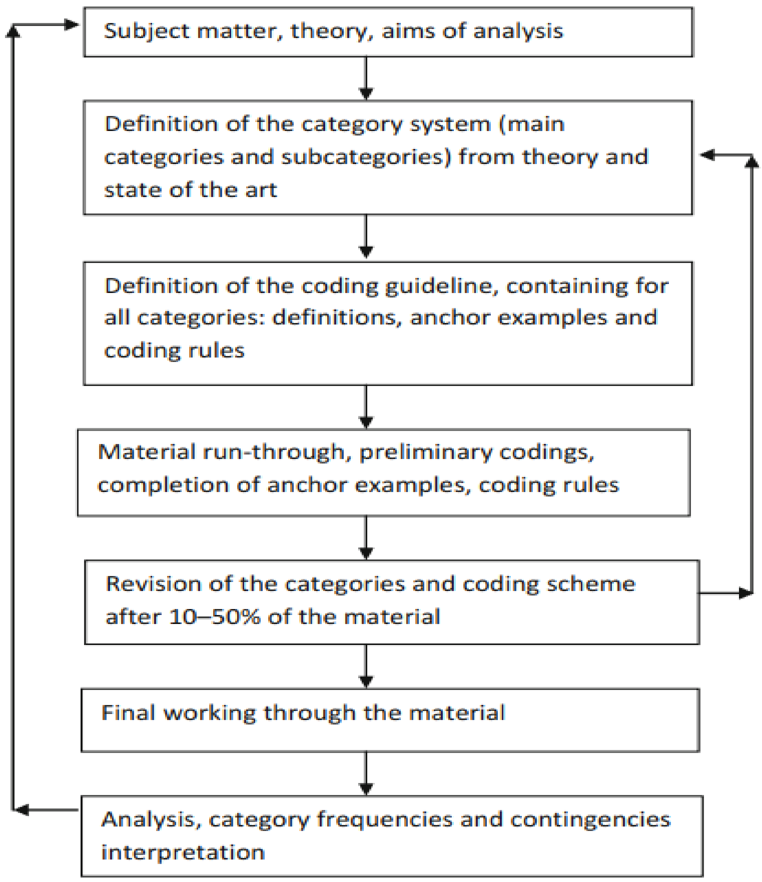
3.10 Analysemetode

Vi analyserte hele prosjektet ved hjelp av tre-stegs modellen til Simon (2019). Modellen er utarbeidet for å analysere kvalitative studier innenfor matematikkundervisning (Simon, 2019). I den første delen gjennomførte vi en kvalitativ innholdsanalyse med induktiv tilnærming for å utarbeide kategorier i datamaterialet. Her kategoriserte vi innholdet i tilnærmingene til noen generelle koder. Her var målet å se hvilke tilnærminger elevene benyttet seg av i hver oppgave for å senere i analysen kunne kategorisere disse hendelsene som plutselig eller gradvis innsikt. I den andre delen identifiserte vi hva slags tilnærminger som var mest vanlige og om det var noe som gikk igjen blant alle elevene, individuelt og avslutningsvis for hver oppgave. I denne delen av analysen var målet å si noe om forholdet mellom oppgavene og hvor mange tilnærminger eleven anvendte i hver enkelt oppgavetype. I den tredje delen gjennomførte vi en deduktiv kvalitativ innholdsanalyse der vi identifiserte når og hvordan elevene oppnådde innsikt innenfor problemene. Her undersøkte vi om innsikten i hovedsak kunne kategoriseres ut ifra to perspektiver. De to perspektivene er kreativitet og problemløsning.

Grunnen til at vi har valgt kvalitativ innholdsanalyse er fordi det egner seg til analysering av datamaterialer som er innhentet fra kommunikasjon. Elo & Kyngäs (2008) nevner at kvalitativ innholdsanalyse egner seg som metode til å analysere skrevne, visuelle eller verbale fremstillinger fra kommunikasjon. Med denne metoden er målet å være i stand til å ta replikerbare slutninger fra datasettet og videreføre dette til ny kunnskap (Elo & Kyngäs, 2008).

3.10.1 Analyse del 1

Det første av de tre stegene til Simon (2019) starter med en «line by line» analyse der man er interessert i å forstå elevenes oppfatning eller utvikling i et målområde. I vår kontekst vil dette være elevers tilnærminger gjennom arbeid med problemløsningsoppgaver. Simon (2019) skriver at man på forhånd har bestemt seg for et interesseområde og går aktivt inn og analyserer linje for linje for å skape system og forståelse. Simon (2019) skriver videre at her er man ute etter å lage en basis for en mer avansert analysetype. Denne delen gjennomførte vi ved hjelp av kvalitativ innholdsanalyse med en induktiv tilnærming. Målet her var å identifisere og beskrive hvilke tilnærminger hver enkelt benyttet seg av i hver oppgave. Etter at vi hadde transkribert intervjuene startet analyseprosessen. Innholdsanalyse kan brukes for å identifisere, analysere og finne mønster og temaer i datamateriell. Ifølge Mayring (2015) blir innholdsanalyse brukt som et rammeverk for å hjelpe forsker å organisere og beskrive datasettet i detalj. Innenfor kvalitative innholdsanalyser er det utarbeidet flere ulike modeller. I arbeidet vårt har vi tatt utgangspunkt i prosessmodellen til Mayring (2015).



Figur 3.7 - Prosessmodellen for kvalitativ innholdsanalyse, hentet fra (Mayring. Approaches to qualitative research in mathematics education, 2015, s. 375).

Figur 3.7, viser prosessen til den induktive kvalitative innholdsanalysen vi gjennomførte. For at vi skulle kunne undersøke om noen elever oppnår innsikt, må vi undersøke sammenhengen mellom løsningsstrategier og fremgangsmåter i oppgaveløsningen, opp imot kriteriene for innsikt. Dette skal vi gjøre gjennom å undersøke det Fleck & Weissberg (2013) kaller «*solving approaches*», som vi videre blir å omtale som *tilnærminger*. Det inkluderer elevenes løsningsstrategier, løsningsforsøk, argumentasjoner og mentale fremstillinger av problemet (Fleck & Weissberg, 2013). En tilnærming kan dermed assosieres med en løsningsstrategi. Som nevnt tidligere er innsikt en mental omstrukturering som får problemløser til å se problemet på en ny og mer produktiv måte. Denne kognitive prosessen er noe vi ikke kan observere og identifisere direkte. Det vi kan identifisere er elevenes individuelle tilnærminger gjennom å se på deres utførelse av problemløsningen. Dette kan vi gjøre ved å se på hvordan elevene går løs på oppgaven, hvordan de fortsetter videre og hvilken tilnærming de bruker for å komme frem til en løsning (Fleck & Weisberg, 2013). Med andre ord representerer progresjon og endringer i tilnærmingene en spesiell mental strukturering eller omstrukturering av problemet (Weisberg, 2015). For å telle antallet og være i stand til å kunne skille mellom de, må vi på bakgrunn av dette navngi alle tilnærmingene som brukes i datasettet. Måten vi gjort dette er med å lage hendelsesforløp hvor vi plasserte og identifiserte elevenes ulike tilnærminger fra oppgavene inn i et system. Vi laget et til hver elev på hver oppgavene. Dette var for å lage en slags tidslinje som gjør det mulig å skille mellom alle tilnærmingene i oppgaveløsningen. Her var fokuset å skille mellom alle mulige tilnærminger som kom frem og få med et utdrag av det eleven sa på dette tidspunktet i intervjuet. Måten vi skilte mellom tilnærmingene var med å fylle hver enkelt inn i ulike kolonner i hendelsesforløpet. Eleven kunne gå videre til en annen tilnærming enten gjennom en gradvis prosess med samme tilnærming som utgangspunkt f.eks. 1.1→1.2, som tabell 3.2 viser. Eller så kunne de gå videre med en helt annen tilnærming f.eks. 1.0→2.0. Deretter fylte vi inn en beskrivelse av tilnærmingen og i hvilken grad den var produktiv. Grunnen til at vi valgte ordet produktivitet i tabellen, er fordi dette ordet omtales i kriteriene for innsikt, gjennom at produktiviteten må økes når eleven oppnår innsikt med en ny og bedre tilnærming. I tidslinjen kommer det også tydelig frem når vi ga de standardiserte hintene, samt når vi spørsmål. Hendelsesforløpene ble aktivt anvendt når vi videre spesifikt så på alle tilnærmingene og tilfellene der innsikt oppsto. Med hendelsesforløpet ville vi få frem hvordan hver elev har kommet frem til sine tilnærminger i oppgaveløsningene. Et viktig moment her var at vi ikke vurderte riktigheten av tilnærmingene. Dermed inkluderte vi alle tilnærminger enten de var riktige eller gale. Elevene kan ut ifra dette score på både gradvis og plutselig innsikt, og det er åpenhet for at de i tillegg kan oppnå innsikt mer enn en gang på en og samme oppgave.

Tabell 3.2 - Hendelsesforløp Elev 12 oppgave 1

Oppgave 1	Tilnærming 1	Tilnærming 1.1	Hint 2	Tilnærming 1.2
Beskrivelse av situasjon	Forklarer at tallet egentlig divideres på 31.	Finner ut at dette ikke var riktig	Regn ut 7×11×13	Forklarer at han delte egentlig på 1001.
Produktivitet	Lav	Litt bedre, men står fast		Høy
Sitat	Har valgt tallet 466466. «Du deler det egentlig på 31. Hvis du deler det på 7 + 11+ 13 er det lik 31. Så egentlig deler du bare tallet flere og flere ganger»	«Man deler ikke tallet på 31. Man deler det på 7, også svaret på det deler man på 11, også deler man det på 13. Men hva gjør det til det samme tallet vi startet med?»		«Det var tallene jeg delte med, så jeg delte egentlig med 1001 for å få 466 igjen»

3.10.2 Analyse del 2

Den andre delen i analysemodellen til Simon (2019) er å anvende resultatene fra den første delen av analysen. Her er man ute etter å undersøke to hovedspørsmål. Hvilken forståelse eller løsningsmetoder eleven bruker i situasjonen, og hvordan man kan systematisere disse (Simon, 2019). I denne delen identifiserte vi hva slags tilnærminger som var mest vanlige. Her så vi på hva som gikk igjen hos alle elevene, for hver oppgave. Her var målet å si noe om forholdet mellom oppgavene og tilnærmingene elevene anvendte. For å kategorisere tilnærmingene måtte vi utarbeide noen retningslinjer for hvordan vi skulle kode de. Gjennomførelsen av dette gjorde vi med å kode de tilnærmingene vi fant lik i hver oppgaveløsning. Her var vi interessert i å undersøke hva innholdet i tilnærmingen var slik at den kunne navngis, gjenkjennes og telles. Det neste vi gjorde var å lage et system som inkluderte alle de kodede tilnærmingene fra alle oppgavene. Tilnærmingene som var kodet var gitt et navn som beskrev hva den handlet om, slik at vi lett kunne gjenkjenne de. Her tok vi et hendelsesforløp om gangen og fylte inn i en liste med alle tilnærmingene som ble brukt. Her førte vi inn tellestreker da vi fant samme tilnærming flere ganger. På denne måten kunne vi telle alle tilnærmingene og se hvor mange forskjellige som ble brukt. Eksempel på dette kan sees nedenfor i tabell 3.3. Årsaken til at vi kartla hvor mange ganger hver tilnærming ble brukt, var fordi vi skulle ha en oversikt over alle tilnærmingene fra alle elevene slik at vi kunne se hva som går igjen og sammenligne oppgavene opp mot hverandre. Dette ville være med på å si noe om hvordan problemløsningsprosessen er for elevene. Et av momentene vi skulle undersøke var sammenhengen mellom løsninger på oppgavene, antall tilnærminger som brukes og hvor mange hendelser med innsikt vi fant.

Tabell 3.3 - Utdrag fra tilnærminger oppgave 1

Oppgave 1			
Tilnærminger brukt	Antall	Tilnærminger brukt	Antall
Prøver oppskriften med et annet tall	2	Skrive tallet inn i tabellen i hintet	10
Deler på 31 (siden 7+11+13=31)	3	Regner ut abcabc/1001	2
Gjør ingenting og «venter på hint» (står fast)	3	Regner ut abc×1000	7

3.10.3 Analyse del 3

Det tredje steget i modellen til Simon er innholdsanalyse med en deduktiv metode. Denne handler om å se analysen fra del 1 og 2 opp mot et teoretisk rammeverk. Denne delen handler om å skape forståelse og mening av datamaterialet (Simon, 2019). Her identifiserte vi når innsikt oppsto, hva som skjedde før og hvordan elevene oppnådde innsikt innenfor oppgavene. Vi benyttet en deduktiv innholdsanalyse der vi undersøkte om innsikten kunne kategoriseres ut ifra to perspektiver. Fra et problemløsningsperspektiv undersøkte vi om elevens arbeid kunne knyttes opp mot analytisk og gradvis innsikt gjennom å se de opp imot problemløsningsmodellen til Schoenfeld (1992). Fra et kreativitetsperspektiv knyttet vi elevenes spesifikke arbeid i problemløsningsoppgavene opp mot plutselig og ubevisst innsikt gjennom å se den opp imot innsiktsrekken til Ohlsson (2011). Måten vi praktisk gjennomførte dette på var å innledningsvis bruke perspektivene fra problemløsning og kreativitet til å fastsette kriterier for hva som legges i plutselig eller gradvis innsikt. På bakgrunn av disse kriteriene undersøkte vi alle hendelsesforløpene fra del 1. Her leste vi «mellom linjene» i hendelsesforløpet, diskuterte og tolket hvor innsikt skjedde, med innsiktskriteriene som utgangpunkt. På denne måten så vi etter endringer i tilnærminger som fastslo at innsikt kan ha oppstått. Måten vi i mange tilfeller kunne identifisere om det var plutselig innsikt, var dersom eleven først sto fast i oppgaveløsningen og deretter uforutsett finner en mer produktiv tilnærming på oppgaven. Andre ganger dukket det opp verbale aha-opplevelser og åpenbaringer hos eleven som gjorde det tydelig at plutselig innsikt oppsto. Måten vi kunne gjenkjenne gradvis innsikt var i tilfeller der en og samme tilnærming ble gradvis forbedret gjennom systematisk arbeid over tid. Her så vi på om en tilnærming ble gradvis utforsket og forbedret gjennom f.eks. prøving og feiling. Etter dette satte vi sammen alle hendelsene med innsikt i et oversiktsdokument. Her fylte vi inn når i oppgaveløsningen innsikten oppsto, hva som skjedde like før, hva den handlet om, mulige årsaker til at den oppsto og om den var plutselig eller gradvis. Eksempel på dette vises i utdraget nedenfor i tabell 3.4.

Tabell 3.4 - Utdrag fra oversiktsdokument

Oppgave 3	Elev 2
Når kom innsikten	«Midt i» oppgaveløsingen
Hva skjedde like før	Forklarer hva oppgaven handler om også «skal eleven bare prøve noe» og regner ut 7×11×13
Hva handler innsikten om	Finner svaret på oppgaven
Mulig årsak til dette	Forsto oppgaven da han så tallet 1001
Plutselig eller gradvis	Plutselig

3.11 Forskningsetikk

Det er utviklet noen forskningsetiske retningslinjer av den nasjonale forskningsetiske komite for humaniora og samfunnsvitenskap, som skal sørge for de etiske kravene mellom forsker og informanter skal ivaretas. Et av kravene er at forskningen skal være basert på fritt og informert samtykke fra informantene, for å sikre at de de deltar frivillig og er godt informert om hva forskningen skal basere seg på (Gleiss & Sæther, 2021). Forskningsprosjekter som gjennomføres på barn under 15 år må få samtykke fra foreldrene slik at de kan delta i prosjektet. I forbindelse med selektering av informanter lagde vi et samtykkeskjema. Dette inneholder blant annet et informasjonsskriv om forskningsprosjektet, hvordan data blir innsamlet, informasjon om frivillighet i deltakelsesprosessen, våre kontaktopplysninger og informasjon om hvilke personopplysninger vi vil samle inn. Videre er et krav at informantene skal være anonymisert og deltakerne som deltar i undersøkelsen skal holdes konfidensielle (Gleiss & Sæther, 2021). I forhold til dette informerte vi om at all data anonymiseres og slettes etter at det var anvendt i studien vår. Det siste punktet Gleiss & Sæther (2021) nevner er at deltakelse i forskningen ikke skal få negative konsekvenser for den som deltar. Her informerte vi om at elevene måtte gjøre sitt beste og at det var godt nok. Videre informerte vi om det ikke kom til å få noen negative konsekvenser for informantene dersom de ikke ønsket å delta. I tillegg opplyste at det gikk greit om de ikke klarte oppgavene eller syns det var vanskelig å svare på spørsmål vi stilte under intervjuet. Før vi satt i gang med studien sendte vi inn en søknad og fikk samtykke fra NSD, for å gjennomføre vår studie. I forhold til at vi skulle benytte oss av lydopptak var det viktig for oss å presisere og informere om at dette kom til å bli slettet når det var transkribert. Her benyttet vi oss av lydopptak-appen til UIO som også tilbød en plattform for sikker datalagring. Her ble dataen lagret på en sky som bare vi har tilgang til.

3.12 Forskningskvalitet

Validitet og relabilitet er vanlige begreper man bruker for å vurdere kvaliteten på forskning. Begrepene er viktige for å vurdere styrker og svakheter ved datainnsamling og analyseprosessen. Begrepene henger sammen med metodevalg, siden de er avgjørende for hvilke spesifikke krav som tilhører hver metode (Cohen et al., 2007).

3.12.1 Validitet

Validitet handler om hvor gyldige dataene, funnene og resultatene i et forskningsprosjekt er (Postholm & Jacobsen, 2018). Ved å stille spørsmål om tolkningene prosjektet kommer frem til er gyldige opp mot den virkeligheten vi har studert er vi i stand til å si noe om validitet (Thagaard, 2018). Det er vanlig å skille mellom to typer validitet: intern og ekstern. Intern validitet handler om i hvor stor grad det man forsker på samsvarer med de begrepene og teoriene vi benytter for å beskrive virkeligheten. Videre handler det om at man på bakgrunn av studien er stand til å uttale seg om årsak og virkning (kausalitet) av den (Postholm & Jacobsen, 2018). I forhold til det å jobbe med problemløsning var dette noe elevene ifølge faglærer hadde arbeidet med over en lengre periode. Dette gjør at tema og oppgavetypene ikke oppleves som totalt ukjent for elevene. I intervjusituasjonen gjennomførte vi lydopptak for å sikre den indre validiteten slik at vi kunne ha mulighet til å høre situasjonene på nytt flere ganger. Å bli tatt lydopptak av var litt uvant for flere av elevene. Dette var noe vi tok høyde for ved å starte intervju-situasjonen med å snakke litt løst og fritt for at elevene ikke skulle føle situasjonen som så ubehagelig og unaturlig. Transkripsjonen av intervjuet har også noe å si på den indre validiteten i studiet. I denne prosessen hørte vi tilbake utdrag for å sikre oss at vi hadde forstått situasjonene riktig, samt verifiserte med hverandre at det vi hadde hørt samsvarte med det vi hadde transkribert.

Det andre begrepet innenfor validitet er ekstern validitet. Begrepet dreier seg om i hvor stor grad forskningen kan generaliseres og i hvor stor grad det vi har funnet ut kan overføres til andre situasjoner (Postholm & Jacobsen, 2018). I forhold til generaliserbarheten er det ikke tilstrekkelig nok informanter til å generalisere forskningsspørsmålet. Goldin (2000) skriver at oppgavebaserte intervjuer vanligvis gir kvalitative observasjoner som ikke er lette å gjøre generaliserbare for et kvantitativt utvalg. Dette begrunnes med at ingen intervjuer vil være helt like og at man ikke er i stand til å kontrollere alle variablene. Derimot kan prosjektet være med å belyse at problemløsning er en kompleks prosess som blir påvirket av mange ulike faktorer. En av faktorene er hvordan elever oppnår innsikt. Gjennom studien har vi sett på hva som kjennetegner det som skjer før innsikt, når innsikt oppstår, hvilken form for innsikt som oppstår og om hvordan antall løsninger påvirker innsikt. Dette mener vi er viktig kunnskap for å kunne si noe om hvordan man skal lykkes med problemløsning. «Suksess i problemløsning» er noe som kan være overførbart og være relevant for alle elever. Et tiltak for å styrke validitet er å reflektere over hvilken kunnskap ulike metoder gir og hva slags begrensninger de kan ha (Gleiss & Sæther, 2021). En av styrkene våre, er det Long & Johnson (2000) omtaler som «*peer* *debriefing*», som handler om at det er styrkende for validiteten om man har flere å diskutere funn, resultater og undersøkelser med. Vi er to som skriver i lag og har to veiledere. En annen styrke er at vi gjør datainnsamlingen og analyseringen selv, noe som fører til at man unngår man mistolkninger i arbeidsprosessen som kunne oppstått dersom noen andre hadde gjort dette for oss. Det ble gjennomført et kriteriebasert utvalg av informanter der kriteriet var høytpresterende i matematikkfaget på mellomtrinnet. For å sikre at dette kriteriet ble oppfylt, var det faglæreren til informantene som utførte seleksjonen for oss. Læreren kjente informantene bedre enn oss og hadde dermed et større grunnlag for å ta disse avgjørelsene. Med dette vil det være opp til læreren å vurdere hva som vektlegges under begrepet høytpresterende.

Et tiltak vi gjorde for å styrke validiteten var å gjennomføre pilotintervju. Dette gjorde vi for å få testet ut intervjuet og for at vi deretter kunne gjøre utbedringer. Til dette er det styrkende for validiteten at vi benyttet intervjuguide, slik at alle intervjuene ble så like som mulig. På slutten av intervjuene spurte vi elevene 3 spørsmål som er viktige for dette punktet om validitet. Det første var hvor vanskelig de syntes oppgavene var. Her svarte elevene at oppgavene lå mellom 6 og 7 i gjennomsnitt av 10 mulige i vanskelighetsgrad. Det andre spørsmålet var om de mente at de hadde løst oppgavene bedre uten oss inne i rommet. Til dette svarte 11 av 12 at de ikke hadde løst oppgavene bedre. Det siste spørsmålet var om de følte at de hadde fått nok tid til å løse hver oppgave. Her var det bare en elev som svarte nei. Ut ifra dette kan vi konkludere med at validiteten ikke ble svekket på de punktene. Dette er fordi elevene ikke syns selv at oppgavene var for vanskelig, at de fikk nok tid og at de ikke hadde prestert bedre uten oss i rommet.

3.12.2 Relabilitet

Reliabilitet handler om hvor troverdig og pålitelig et forskningsprosjekt er (Postholm & Jacobsen, 2018). Innenfor kvalitativ forskning er det utfordrende å gjenta en helt lik studie fordi det er så mange faktorer som påvirker prosessen. Møtet mellom forsker og informant, utvikling innenfor forskningsfeltet, samt at mennesket er i stadig utvikling er noen av faktorene Postholm & Jacobsen (2018) viser til som kan skape utfordringer. Derfor knytter Postholm & Jacobsen (2018) reliabilitet opp mot en refleksjon over hvordan forsker og undersøkelsen har påvirket resultatene i studien. Når vi som utenforstående kommer og tar elevene ut av læringssituasjonen de står i, er det naturlig at dette har en påvirkning på elevene. Ifølge Thagaard (2018) kan forskerens relasjon til elevene være av betydning når man skal bedømme påliteligheten. Alle elevene fra mellomtrinnet i utvalget hadde vi vært lærere for i til sammen 6 uker i praksis. Dette førte til at vi hadde en relasjon og god kjennskap til elevene fra før av, noe som kan ha ført til at de følte seg trygge i intervjusammenhengen. Når man skal vurdere relabilitet er det vanlig å ta stilling til spørsmålene; hvordan har datamaterialet blitt påvirket gjennom innsamlingsmetodene? Og kan resultatene reproduseres på nytt av andre forskere? (Gleiss & Sæther, 2021). Vi ønsker å redusere undersøkelseseffektene eller bias som det mer vanlig omtales. For å styrke relabiliteten valgte vi å ha lydopptak under gjennomgangen av intervjuene. På denne måten ble alt som ble sagt lagret som datamateriale. Et annet viktig tiltak som styrker relabiliteten, er at vi gjennomførte alle intervjuene med intervjuguide. Denne utarbeidet vi slik at den enkelt kunne følges og der alle viktige detaljer var presisert og klargjort. Dette medfører at det for andre vil være lettere å reprodusere intervjuene og i tillegg gjorde det at intervjuene ble mest mulig like hverandre. Godt strukturerte intervjuskjema gir brukere god fleksibilitet underveis i intervjuet og sikrer en bedre relabilitet på forskningen (Goldin, 1997). Relabiliteten til studien har vi forsøkt å styrke med alle disse grepene, med et overordnet formål om å sørge for at studien kan etterprøves av andre, det LeCompte & Goetz (1982) kaller «repliserbarhet».

4 Resultater

Vi har valgt å dele resultatkapittelet i to deler. Den første delen består av «nære» og deskriptive data, før vi i neste del (kap. 4.2) vil presentere funn og drøfte disse fortløpende. I kapittel 4.1 presenterer vi resultater fra hver oppgave i kronologisk rekkefølge. Oppbyggingen av kapittelet baserer seg på at vi først vil presentere alle tilnærmingene vi identifiserte. Dette for å legge grunnlaget for å få frem hvordan antallet løsninger på en problemløsningsoppgave påvirker hvor mange tilnærminger elevene bruker. Videre presenterer vi hvor mange av disse tilnærmingene som førte til innsikt. På bakgrunn av analysen har vi plassert om innsikten kan kategoriseres som noe som skjer plutselig, gradvis eller om denne prosessen kan ansees som en blanding. Til hver kategori på hver oppgave, vil vi presentere et hendelsesforløp og beskrive hvordan eleven oppnådde innsikt i disse hendelsene.

4.1 Oppgave 1 – gjentagende siffer

Oppgaven var følgende:

Skriv et tresifret tall. F.eks. 371. Gjenta tallet slik at du nå har 371371. Del dette tallet på 7. Del dette tallet på 11. Del dette tallet på 13. Hva skjer?

4.1.1 Anvendte tilnærminger (oppgave 1)

Tabell 4.1 viser en oversikt over alle tilnærmingene elevene brukte i oppgave 1. Oversikten viser hvor mange tilnærminger vi identifiserte, og hvor mange registreringer vi gjorde av løsningstilnærming.

Tabell 4.1 - Tilnærminger oppgave 1

Oppgave 1			
Tilnærminger brukt	Antall	Tilnærminger brukt	Antall
Prøver oppskriften med et annet tall	2	Skrive tallet inn i tabellen i hintet	10
Dividerer tallet på 31 (siden 7+11+13=31)	3	Regner ut abcabc/1001	2
Gjør ingenting og «venter på hint»	3	Regner ut abc×1000	7
Forklare hva som skjer på en mangelfull måte	5	Regner ut 1001/abcabc	1
Regner ut 7×11×13	12	Regner ut abc×1001	4
Regner ut sum av egne tall	1		

Det vi kan se av Tabell 4.1, er at det er noen tilnærminger som går igjen, og blir anvendt flere ganger. Noen av de kan virke tilsynelatende like, men vi har valgt å skille de, da dette vil være mest hensiktsmessig i den videre prosessen. Derfor har vi valgt å dele de opp og registrere de hver for seg. I tabellen der det står «abc», mener vi de tre tilfeldige sifrene eleven måtte velge i oppgaven. Et eksempel på dette er som gitt i oppgaven «371».

I denne oppgaven er de fleste tilnærmingene basert på konkrete regnestykker. Oppgaven baserte seg på å forklare en gitt fremgangsmåte. Majoriteten av argumentasjonen var da regnestykker. En tilnærming vi identifiserte alle elevene anvendte var å regne ut 7×11×13. Dette var noe som forekom 10 ganger etter det ble gitt hint, mens i to av tilfellene gjennomførte elevene dette helt selv. Disse to elevene var de eneste som klarte oppgaven uten å få hint. En annen tilnærming vi fant som gikk igjen med 7 registreringer var *abc×1000*. Videre fant vi 4 tilfeller av tilnærmingen *abc×1001* ble anvendt. En tilnærming som gikk igjen hos to av elevene som brukte lang tid på å komme i gang, var å verifisere om vilkårene i oppgaven ville fungere på et annet tall. De var ikke overbeviste om at vilkårene i oppgaven stemte og måtte utforske dette med å sjekke med et annet tilfeldig tall. Den siste tilnærmingen vi bør se litt ekstra nøye på er *Dividerer tallet på 31*. En mulig forklaring på at elevene endte på denne tilnærmingen, var at de tenkte 7+11+13 = 31. Denne misforståelsen var det tre av elevene som brukte som forklaring på oppgaven. Samtidig registrerte vi at det var flere elever som hadde problemer med å finne en god løsningstilnærming på oppgaven. Vi valgte å inkludere denne kategorien som en tilnærming fordi det var sentralt i prosessen videre med å undersøke hvor mange av elevene som gikk fra dette stadiet til å produsere en løsningstilnærming for videre arbeid. 5 av 12 elever startet med å forklare oppgaven på en mangelfull måte. Vilkårene for dette var at oppgaveløsningen kunne ansees mangelfull da elevene enten gjennomførte en ukvalifisert gjetning, forklarte en løsning som var ute av kontekst med oppgaven eller at de bare repeterte det de allerede hadde gjort. Grunnet plasshensyn og et ønske om å ikke være for gjentakende og for å holde ting relevant, vil ikke alle tilnærmingene i tabellene bli beskrevet i like stor grad da vi anser mange av tilnærmingene som selvforklarende.

4.1.2 Tilnærminger som førte til innsikt (oppgave 1)

I 4 av de 11 unike tilnærmingene som ble anvendt, identifiserte vi at elevene oppnådde innsikt. Den løsningstilnærmingen flest oppnådde innsikt med var «*Regn ut 7×11×13*». Denne tilnærmingen skilte seg ut med 7 hendelser av innsikt og omhandler å se sammenhengen med at sifrene som blir dividerte i oppgaven gir 1001 ved å multiplisere de. Det som gikk igjen, var at elevene med bakgrunn i dette kunne forklare hva som skjedde i oppgaven. Videre var det to tilnærminger som førte til henholdsvis to tilfeller av innsikt. Tilnærmingene var «*Regn ut abc×1000*» og «*Regn ut abc×1001*», som handlet om at elevene multipliserte eget tall med 1000 og 1001. Den siste tilnærmingen «*Deler på 31*» identifiserte vi hos 3 elever. Oppdagelsen her var at hendelsen av innsikt som omhandlet å oppdage at disse tallene må multipliseres og ikke adderes.

Tabell 4.2 - Tilnærminger med innsikt oppgave 1

Tilnærming	Antall registreringer	Antall hendelser med innsikt
Regner ut 7×11×13	12	7
Regner ut abc×1000	7	2
Regner ut abc×1001	4	2
Deler på 31 (siden 7+11+13=31)	3	1

I tabell 4.2, kan man se alle tilnærmingene som elevene fikk innsikt gjennom, hvor mange ganger de ble brukt og hvor mange av disse som førte til innsikt. Her ser man at det er færre hendelser med innsikt enn registreringer i alle tilfellene. Videre vil vi ta med noen eksempler som viser hvordan disse tilnærmingene enten har ført til plutselig eller gradvis innsikt og deretter visualisere dette med hendelsesforløp.

4.1.3 Plutselig innsikt (oppgave 1)

Basert på tilnærmingene som førte til innsikt er 10 av disse tilfellene oppstått som plutselig innsikt. Det som gikk igjen i disse tilfellene var to faktorer. Avstanden mellom tilnærming 1 og tilnærming 2 var stor. Den andre faktoren var at elevene prøvde en tilnærming, oppdaget at denne tilnærmingen ikke fungerte og sto fast. Plutselig forsto eleven hvordan oppgaven kunne løses og oppnådde plutselig innsikt. Nedenfor vises et eksempel av en elev som oppnådde plutselig innsikt. Tabell 4.3, viser et hendelsesforløp av oppgaveløsningen og er ment for å synliggjøre at kriteriene for innsikt ble oppfylt.

I løpet av resultatdelen blir det presentert flere tabeller slik som tabell 4.3. I tabellen vises øverst hvilken oppgave det gjelder, og hvilken tilnærming eleven er på. I den øverste raden fremstilles et skille mellom tilnærminger, hint, om eleven står fast og nye forbedrede versjoner av samme tilnærming. De gule rutene indikerer der innsikten fant sted. I linjen under kommer en linje med ulike beskrivelser av situasjonen. Den neste linjen beskriver produktiviteten av tilnærmingene som brukes. Her er hensikten å få frem i hvor stor grad tilnærmingen fører til progresjon eller regresjon av produktiviteten. I tillegg vil det stå om og når eleven står fast i oppgaven. I den nederste linjen vil det være et utdrag av sitat fra intervjuene for å få frem det elevene sa og mente.

Tabell 4.3 - Hendelsesforløp Elev 2 oppgave 1

Plutselig innsikt

Oppgave 1	Tilnærming 1 -	Står fast	Tilnærming 2	
Beskrivelse av situasjon	Gir en mangelfull forklaring.	Står fast i et minutt og er usikker på hva han skal gjøre	Regner ut 7×11×13	Eleven forklarer koblingen mellom tallet 1001 og løsningen
Produktivitet	Lav	Står fast	Høy	Høy
Sitat	«Så får jeg 293, akkurat det samme tallet som jeg startet med. Når man tar 293 og tar 293 bak om det igjen, så får du jo et høyere tall som er 293293. Også deler man det på 7 og får et mindre tall, også deler man det på 11 og 13. Også får du 293»		«Skal bare prøve på noe. 7×11×13. Det ble ikke det samme, det ble 1001»	«At til sammen deler man på 1001, slik at de tre bakerste sifrene forsvinner. Når man deler på 7, 11 og 13, deler man egentlig på 1001, da får du 293. Så man deler egentlig bare tallet på 1001, fordi du ganger 7 med 11 og 13»

Av tabell 4.3 ser vi at Elev 2 følger oppgaveteksten og ender opp med tallet 293. Etter dette gir han en mangelfull forklaring på hvorfor han endte opp med det samme tallet. Med mangelfull mener vi at eleven bare gjentar det som er utført uten å beskrive sammenhengen eller årsaken til dette. Etter dette står eleven fast i en periode og blir sittende å gruble. Plutselig endres tilnærmingen og han uttrykker «*jeg skal bare prøve noe*». Dette fører til at han ender opp med å utforske 7×11×13 og får 1001 som svar. Det kan virke som han hadde forventet å få et annet svar på bakgrunn av at han sier «*det ble ikke det samme*». Videre spurte vi eleven «*hva har tallet 1001 å si da*?». Da kommer eleven med et resonnement som er samsvarende med løsningssvaret på oppgaven. Ut ifra dette ser vi at eleven endret tilnærming en gang. Fra å ta utgangspunkt i informasjonen i oppgaven, og basere forklaringen på at tallet han begynte med automatisk må bli mindre når man dividerer med et tall. Til å ende opp med og se sammenhengen med at 7×11×13 er 1001 og forklare at hele tallet divideres med 1001. Tilnærmingene vi har identifisert her er at eleven går fra «*Forklarer hva som skjer på en utilstrekkelig måte*» til «*Regner ut 7×11×13*». Sistnevnte fører til at eleven forstår oppgaven og forklarer svaret på en tilfredsstillende måte. Bakgrunnen for endring av tilnærming var at eleven sto fast og skulle prøve noe nytt. Denne hendelsen kan sees i sammenheng med det Ohlsson (2011) beskriver som plutselig innsikt som er noe man oppnår etter at et løsningsforsøk feiler og en plutselig og meningsfull mental omstrukturering finner sted. Etter at man har stått fast med en oppgave blir innsikt oppnådd, og man løser oppgaven ut ifra et nytt perspektiv med en riktig tilnærming. Hendelsen der eleven «skulle bare prøve noe», fører til en slik omstrukturering og vi anser at det har oppstått plutselig innsikt. Den plutselige endringen etter eleven først har stått fast og deretter plutselig endret tilnærming fører til en plutselig omstrukturering og en ny og bedre tilnærming som var mer produktiv enn den foregående. I dette tilfellet resulterte det til at oppgaven ble løst like etter.

4.1.4 Gradvis innsikt (oppgave 1)

I denne oppgaven fant vi at 2 tilfeller av innsikt kan kategoriseres som en innsikt som forekom gjennom analytisk og gradvis arbeid. Det vi så gikk igjen i disse to tilfellene var at elevene ikke kom frem til en umiddelbar løsning, men gjorde små forbedringer på gjeldende tilnærming. Et av disse eksemplene presenteres nedenfor.

Tabell 4.4 - Hendelsesforløp Elev 12 oppgave 1

			Gradvis innsikt	
Oppgave 1	Tilnærming 1	Tilnærming 1.1	Hint 2	Tilnærming 1.2
Beskrivelse av situasjon	Forklarer at tallet egentlig deles på 31	Finner ut at dette ikke var riktig	Regn ut 7×11×13	Forklarer at han delte egentlig på 1001
Produktivitet	Lav	Litt bedre		Høy
Sitat	Har valgt tallet 466466. «Du deler det egentlig på 31. Hvis du deler det på 7 + 11+ 13 er det lik 31. Så egentlig deler du bare tallet flere og flere ganger»	«Man deler ikke tallet på 31. Man deler det på 7, også svaret på det deler man på 11, også deler man det på 13. Men hva gjør det til det samme tallet vi startet med?»		«Det var tallene jeg delte med, så jeg delte egentlig med 1001 for å få 466 igjen»

Det vi ser her er at Elev 12 får oppgaven og velger seg et utgangstall etter spesifikasjonene i oppgaven. Da velges tallet 466466 og eleven setter i gang med oppgaveløsningen. Den første tilnærmingen vi identifiserte handlet om at eleven utforsket om det er noen gjentakende mønster i oppgaven. Eleven uttrykker: «*Du deler egentlig tallet på 31. Hvis du deler det på 7+11+13 er det lik 31*».

Denne forklaringen blir sjekket. Eleven verifiserer svaret med en kalkulator og fastslår at dette ikke kan være riktig forklaring. På grunn av dette justeres tilnærmingen og forklarer at det er en sammenheng mellom tallene han delte på. Videre fastslås det at tallene ikke skal adderes. Men fastslår at det likevel må være en sammenheng. Dette fører til at eleven står fast og får det standardiserte hintet. Eleven regner ut 7×11×13 og får 1001. Her innser eleven feilen og ser løsningen på oppgaven og uttrykker: *«Det var tallene jeg delte med, så jeg delte egentlig med 1001 for å få 466 igjen».*

Oppdagelsen gjør at han justerer tilnærmingen sin gradvis fra å tro at sammenhengen ligger i å addere tallene til å multiplisere tallene. Denne justeringen førte til at eleven forsto oppgaven og fikk bevisst og gradvis innsikt i problemet. Kriteriene vi på forhånd satte om gradvis innsikt, er at det må være en hendelse hvor en tilnærming blir gradvis forbedret og øker produktiviteten gjennom systematisk arbeid. En tidligere tilnærming må ligne på den nye forbedrede eller ha noe overførbart som er nytt. Grunnen til at denne hendelsen kan kategoriseres som gradvis innsikt er fordi eleven har bearbeidet egen tilnærming og ender opp med å oppnå forståelse gjennom bevisst og gradvis arbeid. Dette samsvarer med Weisberg (2015) sin definisjon av gradvis innsikt. Den nye og forbedrede tilnærmingen eleven oppnår innsikt med, baserer seg på den samme han begynte med helt i starten.

4.2 Oppgave 2 – Romersk arveproblem

Oppgaven var følgende:

En dødende mann skrev følgende i testamentet sitt: Hvis min gravide kone føder en sønn, arver konen 1/3 av eiendommen og sønnen 2/3. Hvis konen føder en datter, skal konen arve 2/3 av eiendommen og datteren 1/3. Konen fødte tvillinger etter at mannen hennes døde. En gutt og en jente. Hvordan vil mannens eiendommer bli fordelt?

4.2.1 Anvendte tilnærminger (oppgave 2)

I tabell 4.5 nedenfor, har vi satt sammen alle tilnærmingene elevene brukte i oppgave 2. På denne måten fikk vi en oversikt som viser hvor mange ganger hver av de ble benyttet.

Tabell 4.5 - Tilnærminger oppgave 2

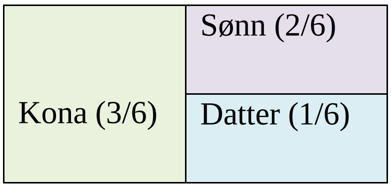
Oppgave 2			
Tilnærminger brukt	Antall	Tilnærminger brukt	Antall
Utvidelse av brøk	17	Prøver å løse oppgaven i hint 1	7
Kona skal ha 1/2 resten fordeles til barna	5	Lager en figur av fordelingen	1
Argumenterer for at oppgaven ikke kan løses	5	Argumentere for at alle skal arve like mye	1
Bytter om på hvem som skal ha mest	6	Forkorter brøken	2
Prøver å fordele 1000 kr som arv (fra hint 1) til de 3 personene	2	Fordeler 1/3 til hver	8
Gir svar med desimaler i brøk	2	Fordeler 2/3 til sønn, de andre deler resten	1
Forklare hva som skjer på en utilstrekkelig måte	4	Fordeler mest til sønn, så datter og kona	1
Utgangspunkt i begge barna	5	Fordeler mest til sønn, så kona og datter	4
Utgangspunkt i kona	8	Fordeler kun til barna, brøken er «brukt opp», kona får ingenting	1
Utgangspunkt i sønn	3	Fordeler kun til kona og sønn, begrunner at dette var normalt i romertiden	1

I oppgave 2 har vi identifisert 20 ulike tilnærminger. Totalt ble disse registrert 84 ganger. Den tilnærmingen vi har registrert flest ganger har elevene benyttet 17 ganger. Denne er «*utvidelse av brøk*» og handler om å utvide brøken høyere. Grunnen til at det er flere repetisjoner av denne tilnærmingen enn antallet elever, er fordi vi har godtatt at man kan bruke samme tilnærming flere ganger i løpet av oppgaveløsningen.

I tabellen har vi valgt å fargekode tilnærmingene som er like og omhandler det samme. I den grønne fargen samlet vi tilnærmingene som omhandlet hvem av personene i oppgaveteksten elevene anvender som utgangspunkt. I den lilla fargen samlet vi tilnærmingene som omhandlet ulike fordelinger av arven.

Av tabellen ser vi at det var flere som valgte ut en person fra oppgaven som utgangspunkt i oppgaveløsingen. Det var 8 som tok utgangspunkt i kona, 5 med utgangspunkt i begge barna og 3 med sønnen som utgangspunkt. Tilnærmingen «*kona skal ha 1/2 og resten fordeles til barna*» var det 5 elever som brukte. Grunnen til at de ga kona halvparten var fordi de oppdaget at 1/2 er midt mellom 1/3 og 2/3. Denne var det også hensiktsmessig å plassere innenfor tilnærmingen «*utgangspunkt i kona*». Dette medførte at en tilnærming ble plassert i to kategorier samtidig. Resterende halvdel av arven ble deretter fordelt til sønn og datter.

En annen interessant tilnærming som dukket opp var «*fordeler kun til kona og sønn, begrunner at dette var normalt i romertiden*». Dette ble begrunnet med at arv ble fordelt slik i romertiden og døtre fikk ikke arve noe dersom en sønn var inne i bildet. Vi registrerte 5 hendelser av tilnærmingen «*argumenterer for at oppgaven ikke kan løses*». Her argumenterte de bakgrunn av det arbeidet de hadde gjort. En vanlig begrunnelse handlet om at uansett hvilken person man har som utgangspunkt så vil oppgaven ikke kunne løses. Tilnærmingen «prøver å fordele 1000 kr som arv», ble brukt to ganger. Denne handler om å representere arven som 1000 kr og idéen til dette kom fra hint 1. Fra alle intervjuene var det bare en elev brukte tilnærmingen «*lager en figur av fordelingen*». Nedenfor vises eleven sin illustrasjon av sin fordeling i figur 4.1.



Figur 4.1 - Illustrasjon av Elev 1 sin tegning i oppgave 2

4.2.2 Tilnærminger som førte til innsikt (oppgave 2)

Blant de 84 tilnærmingene vi identifiserte var det 19 tilfeller som kan kjennetegnes med at elevene har oppnådd innsikt.

Tabell 4.6 - Tilnærminger med innsikt oppgave 2

Tilnærming	Antall registreringer	Antall hendelser med innsikt
Utvidelse av brøk	17	4
Kona skal ha 1/2, resten fordeles til barna	5	4
Argumenterer for at oppgaven ikke kan løses	5	4
Endre hvem som skal få mest	6	4
Prøver å fordele 1000 kr (fra hint 1) til personene	2	2
Gir svar med desimaler i brøk	2	1

I tabell 4.6, kan man se de 6 tilnærmingene vi fant som førte til innsikt. Et eksempel på tilnærmingen «*utvidelse av brøk*» er fra en elev som sto fast og kom på at han kunne utvide brøken fra 1/3 til 3/9. Utvidelse av brøk var en tilnærming som 4 oppnådde innsikt med. Tilnærmingen *«kona skal ha 1/2 ...»* omhandler at elevene har sett at det er to konkurrerende argumenter for hvor mye kona skal få. I det første argumentet skal kona få 1/3 og i det neste t skal kona få 2/3. Disse ble slått sammen og tatt gjennomsnitt av. Det resulterte i at kona ble tildelt 1/2. Dette har ført til 4 tilfeller av innsikt. Tilnærmingen *«endre hvem som skal få mest»* omhandler alle tilfellene der utgangspunktet for hvem som skal få arven blir endret. Denne har ført til 4 tilfeller av innsikt. Ved 2 anledninger ble det oppnådd innsikt i sammenheng med tilnærmingen *«prøver å fordele 1000 kr til personene»*. Inspirasjonen kommer som en effekt av hintet om Per og Pål som skulle dele 1000 kr. Den siste tilnærmingen «*gir svar med desimaler i brøken»,* har ført til 1 tilfelle av innsikt. Her var det en elev som svarte med brøkene 1,3/3, 0,9/3 og 0,8/3. Det var 4 elever ved 5 anledninger som argumenterte for at oppgaven ikke kan løses. Alle oppnådde innsikt og klarte å løse denne «uløselige» oppgaven. En av elevene fant tidlig ut at oppgaven ikke kunne løses og argumenterte godt for dette. Likevel ønsket eleven å undersøke problemet ytterligere for å se om det kunne løses på andre måter. Dette eksemplet presenterer vi nærmere i delkapittel 5.4.

4.2.3 Plutselig innsikt (oppgave 2)

Vi har identifisert totalt 11 tilfeller med plutselig innsikt. Vi vil presentere et disse av tilfellene her.

Tabell 4.7 - Hendelsesforløp Elev 3 oppgave 2

		Plutselig innsikt	
Oppgave 2	Tilnærming 1	Står fast	Tilnærming 2
Beskrivelse av situasjon	Kona får ingenting	Tenker og er stille	Fordeler ½ til kona
Produktivitet	Lav	Står fast	Høy
Sitat	«Hmm. Jeg tror først at konen får ingenting. Nei vent»	Sier «aha!» helt plutselig etter litt tid	«Kona får 3/6 fordi det er i midten. Sønnen får 2/6 og datteren får 1/6. Hvis du plusser alle sammen så blir det 1. Dette betyr at de har delt hele arven»

Tabell 4.7, viser hvordan Elev 3 fikk plutselig innsikt. Av tabellen ser vi at prosessen startet med at eleven leste oppgaveteksten høyt. Den første tilnærmingen eleven benytter handler om å ikke dele noe til kona. Eleven uttrykker «*Hmm. Jeg tror først at konen får ingenting. Nei vent*». Etter å ha tenkt litt, kommer han frem til at kona ikke skal få noen ting. Eleven kommer ikke med en begrunnelse, men avbryter seg selv som om han tenkte at dette måtte være feil. Deretter blir eleven stille en stund og blir stående fast. Deretter tenker og bryter han plutselig ut «*aha*!». Dette fører til at eleven plutselig kommer til en løsning på problemet og fordeler

halvparten til kona, 2/6 til sønnen og 1/6 til datteren. Begrunnelsen for at kona skal få halvparten, er fordi «*det er midt imellom 2/6 og 4/6*», sier Elev 3.

Denne hendelsen kan plasseres som plutselig innsikt. Her ser vi et tydelig eksempel på at eleven står fast etter tilnærming 1. Etter en liten stund bryter eleven ut et «*aha!*». I forhold til innsiktsekvensen til Ohlsson (2011) kan dette sees i sammenheng til punktet der eleven står fast og der det forekommer en kognitiv endring i form av en omstrukturering som blir uttrykt gjennom at eleven uttrykker noe verbalt. Det som skjer videre, er at han plutselig har forstått hvordan oppgaven kan løses og presenterer en mer produktiv tilnærming. Den forståelsen som oppsto, kan kategoriseres som plutselig innsikt. Haavold & Sriraman (2021) definerer innsikt som en aha-opplevelse eller en restrukturering av problemet i en mer produktiv retning. Når eleven endrer tilnærming, fører dette til suksess i oppgaven og oppnåelse av innsikt. I dette tilfellet observerte vi her et tydelig eksempel på en slik «aha-opplevelse», i det eleven utrykker seg etter tilnærming 1.

4.2.4 Gradvis innsikt (oppgave 2)

Det ble registrert totalt 8 tilfeller med gradvis innsikt i denne oppgaven. Nedenfor er et eksempel av et hendelsesforløp som viser hvordan den gradvise innsikten oppsto hos Elev 2, i tabell 4.8. I tilnærming 1, starter eleven med å utvide brøken til 6-deler. Deretter gis halve arven til kona i tilnærming 2. Her blir den andre halvdelen av arven fordelt likt til begge barna. I tilnærming 3, er eleven inne i en ny tankegang og vurderer om sønnen burde få mer enn søsteren, noe som begrunnes med at den dødende mannen la opp til det i testamentet. Eleven fortsetter ikke med denne tankegangen, fordi han er opptatt av rettferdighet og sier senere at det ville vært urettferdig om sønnen fikk mer. «*Kanskje sønnen kunne gi bort litt av sin andel til søsteren sin for å gjøre det rettferdig*», sier eleven. Dette gjør at prosessen stopper opp og det virker som han er på tur til å stå fast. Det neste eleven gjør er å gå tilbake et steg til tilnærming 2, der kona skal ha halvparten og barna skal dele den andre halvparten. Deretter skjer en liten produktiv forbedring av tilnærming 2 gjennom å utvide brøken til 12-deler. Dette gjør at brøkene går opp når han begynner å fordele 6/12 til kona og 3/12 til hver av barna. Etter dette forkorter eleven brøken ned til 4-deler. Årsaken til dette sa han var fordi man alltid skal forkorte ned brøker når man gir svar dersom det er mulig.

Tabell 4.8 - Hendelsesforløp Elev 2 oppgave 2

				Gradvis innsikt		
Oppgave 2	Tilnærming 1	Tilnærming 2	Tilnærming 3	Tilnærming 2	Tilnærming 2.1	Tilnærming 2.2
Beskrivelse av situasjon	Utvider brøkene	Fordeler ½ til kona	Tenker ut hvem som skal ha mest	Går et steg tilbake	Utvider brøken igjen	Forkorter brøken
Produktivitet	Starter prosessen	Forbedring	Stopper prosessen	Gjenstarter prosessen	Forbedring	Avslutter prosessen
Sitat	«Sønn: 4/6, datteren 2/6, og kona skal ha enten 2/6 eller 4/6»	«Kanskje må jeg finne ut hva som er mellom disse brøkene (til kona) altså 3/6, siden hun fikk begge deler skal hun ha 3/6» Barna kan dele resten likt»	«Men mannen ville at sønnen skulle arve mer enn datteren»	«Jeg tenker at kona skal ha halvparten og ungene kan dele den andre halvparten. Kona kan ha 3/6 og barna 3/6»	«Kona kan ha 6/12. barna kan arve 3/12 hver»	«Barna kan dele 3/12 hver. Det blir ¼ og kona arver 2/4 som er halv-parten»

Denne hendelsen kan kategoriseres som gradvis innsikt. Av tabellen ser man at tilnærming 2 blir gradvis forbedret etter eleven har stått fast med tilnærming 3. Tilnærming 2.1 og 2.2 kommer som gradvise økende og produktive forbedringer for eleven i denne sammenhengen. Eleven startet med tilnærming 2 og utbedrer denne gjennom systematisk arbeid. Med dette kan vi ut ifra kriteriene for gradvis innsikt, konkludere med at denne hendelsen best kan kategoriseres som gradvis innsikt.

4.3 Oppgave 3 – Estimeringsoppgave

Oppgaven var følgende:

> *Gjør en beregning av hvor mange sirkler, trekanter og blanke områder det er på bildet. Figuren viser en skog der sirkler er gamle trær, trekanter er unge trær og blanke områder er tomme åpne områder*

4.3.1 Anvendte tilnærminger (oppgave 3)

I dette delkapittelet skal vi presentere tilnærmingene som er benyttet i oppgave 3. Dette for å gi et grunnlag for videre presentasjon av resultatene våre.

Tabell 4.9 - Tilnærminger oppgave 3

Oppgave 3			
Tilnærminger	Antall	Tilnærminger	Antall
Estimere ut ifra et hurtig overblikk	4	Argumenterer for at det hadde vært smart å dele inn i ruter	1
Estimerer 1/3 til hver	1	Argumenterer for at det hadde vært bedre å velge en annen rute-inndeling	1
Gjør utregning ut ifra estimering	1	Argumenterer for at det er umulig å svare på oppgaven	1
Regner ut 50×50	5	Teller antallet i en rute og deretter multipliserer svaret	6
Deler figuren opp i 12×8 ruter	1	Teller to ruter og regner ut gjennomsnitt. Deretter multiplisere opp svaret	2
Deler figuren opp i 13×13 ruter	1	Teller tre ruter og regner ut gjennomsnitt. Deretter multiplisere opp svaret	1
Deler figuren opp i 10×10 ruter	3	Teller en linje og multipliserer med 50	1
Deler figuren opp i 10×5 ruter	1	Teller to ulike linjer og ser om det er likt antall og multipliserer med 50	1
Deler figuren opp i tilfeldige ruter (tegner streker)	1	Regner ut resten uten å telle (har telt to av figurtypene og regner ut rest)	5
Deler figuren i 24 ruter	1	Setter prøve på svaret	3
Forklare hva som skal skje på en utilstrekkelig måte	3	Fyller opp semi-tilfeldig de trærne som mangler. (manglet 250 trær fra utregning og fordeler disse)	1
Deler figuren opp i en loddrett rad	1	Teller alle trærne i figuren samtidig (uten å skille de)	1
Løser oppgaven i hintet	2		

I oppgave 3, har vi identifisert at elevene har benyttet til sammen 49 tilnærminger i oppgaveløsningen. Noen av disse gikk igjen flere ganger, men av unike tilnærminger registrerte vi 25. Da vi skulle se på hvilke tilnærminger som førte til innsikt, fant vi at mange av de hadde likhetstrekk. Derfor har vi valgt å fargekode de tilnærmingene som førte til innsikt og som i tillegg omhandler det samme. Fargekodingen har som hensikt å gruppere lignende tilnærminger og i tillegg tydeliggjøre tabellen. Disse fargekodede tilnærmingene blir nøyere presentert i neste kapittel.

Tilnærmingene vi observerte elevene brukte var varierende. Det var 5 elever som brukte tilnærmingen «*regner ut resten uten å telle*», fordi de skjønte at hvis de viste hvor mange det var av to av symbolene, så kunne de subtrahere dette antallet fra 2500, for å finne ut hvor mange det var av det tredje symbolet. Tilnærmingen «*estimere ut ifra et hurtig overblikk*» ble brukt 4 ganger. Her estimerte elevene antallene av hver figur nesten umiddelbart etter at de fikk oppgaven, noe som resulterte i svært upresise svar. Andre tilnærminger som elevene brukte omhandler estimering, telling og inndeling av ruter i ulike størrelser. Disse var i varierende grad enten raske og ineffektive eller langsomme og mer presise. Med dette kan man se at tilnærmingene i varierende grad var avanserte. Videre skal vi se på hvilke av disse tilnærmingene som har ført til at elevene har oppnådd innsikt.

4.3.2 Tilnærminger somførte til innsikt (oppgave 3)

Blant de 49 tilnærmingene vi identifiserte var det bare 13 tilfeller som kan karakteriseres som at elevene oppnådde innsikt. I denne oppgaven var det i hovedsak 4 fire ulike grupper med tilnærminger som førte til innsikt. Disse vises i tabell 4.10 som bygger videre fra tabell 4.9

Tabell 4.10 - Tilnærminger med innsikt oppgave 3

Tilnærmingen handler om å:	Antall registreringer:	Antall hendelser med innsikt:
Dele inn i ruter	8	6
Regne ut gjennomsnitt av flere ruter	3	3
Telle på linje og multiplisere med 50	2	2
Begrunne for hvordan oppgaven (egentlig) burde løses, etter å ha kommet frem til et svar	2	2

De tilnærmingene som er markert i grønn omhandler at elevene har delt figuren i ulike ruter for å løse oppgaven. Eksempelvis tilnærmingen *«Dele figuren opp i 10×10 ruter»* omhandler å dele figuren opp i 10×10 ruter noe som førte til 3 tilfeller innsikt med innsikt. De andre måtene elevene delte opp figuren med var ruter som var 12×8, 13×13, 10×5, tilfeldige ruter og en som delte figuren i 24 ruter. Mange av disse elevene oppnådde innsikt i det tilfellet der de oppdaget at de kunne dele inn figuren i ruter.

Noen andre interessante fremgangsmåter som kom frem i oppgaveløsningen var tre tilfeller med å dele opp figuren og regne gjennomsnitt av flere ruter. Disse fargekodet vi som lilla i figuren. Her ser vi at det var to tilfeller der eleven anvender tilnærmingen *«teller 2 ulike steder og regner ut gjennomsnitt, og deretter multipliserer opp svaret»*. Videre ser vi en elev som har tatt denne tilnærmingen videre og har telt 3 ulike steder, regnet ut gjennomsnitt og deretter ganget opp svaret og fått et resultat. Begge som løste oppgaven på denne måten, kom med overaskende presise svar. Disse elevene oppnådde innsikt i sammenheng med at de oppdaget at kunne regne gjennomsnitt av flere ruter.

Tilnærmingene som er farget i beige, viser tilfeller der elevene har delt opp figuren i linjer og ganget opp. Her ser vi et tilfelle der eleven har *«telt opp en linje og multipliserer med 50»* og en tilnærming der eleven har *«telt to linjer og undersøkt om det er likt antall og multipliserer med 50»*. Disse elevene oppnådde innsikt etter at de først strevde med å finne en fremgangsmåte og deretter endte med en ny tilnærming om å telle og multiplisere symbolene på en linje.

Tilnærmingene som er markert nederst i en lys rødfarge, handler om to elever som fikk hint etter de hadde gitt sitt svar. Etter hintet innså de en bedre måte å løse oppgaven på og argumenterte for hvordan de burde løst oppgaven og samtidig sannsynligvis fått et mer nøyaktig svar. De fikk ikke tid til å gjøre oppgaven på nytt med den nye tilnærmingen sin. Den ene eleven hadde telt en linje og multiplisert med 50, og oppdaget at han burde delt opp figuren i ruter istedenfor. Den andre eleven hadde delt figuren sin i 13×13 ruter og innser at det hadde vært mye smartere å bruke ruter på 10×10 for å gjøre prosessen enklere. Denne tilnærmingen har vi gitt navnet «*argumenterer for at det hadde vært bedre og velge en annen rute-inndeling*».

Alle disse tilnærmingene som førte til innsikt, har til felles at de omhandler å enten dele inn i et avgrenset område og deretter multiplisere for å representere hele figuren, eller så omhandler de å oppdage og argumentere for at de burde ha gjort dette.

4.3.3 Plutselig innsikt (oppgave 3)

Basert på tilnærmingene som førte til innsikt er 9 av disse tilfellene oppstått som plutselig innsikt. Vi skal presentere to av disse eksemplene. Det første eksempelet på dette er av Elev 1, som har oppnådd plutselig innsikt i oppgave 3.

Tabell 4.11 - Hendelsesforløp Elev 1 oppgave 3

		Plutselig innsikt		
Oppgave 3	Tilnærming 0	Tilnærming 1	Tilnærming 1.1	Tilnærming 1.2
Beskrivelse av situasjon	Leser oppgaven og tenker lenge	Deler opp figuren i 24 ruter	Teller og utregner	Regner ut resten (blanke områder).
Produktivitet	Lav, står fast	Høy	Høy	Høy, løser oppgaven
Sitat		«Hvis jeg deler figuren i 4, fordi da kan jeg gange svaret med 4 og få en omtrentlig beregning. Jeg deler den delen i 6 nye ruter og teller»	«Det er 40 sirkler og 25 trekanter, også ganger jeg de med 6 og 4. Så vi har ca. 600 trekanter og 960 sirkler»	600 ▲ + 960 ● = 1560 trær 2500 – 1560 = 940 blanke områder.

Tabell 4.11, viser et hendelsesforløp som viser hvordan Elev 1 oppnår plutselig innsikt gjennom å huske tilbake til noe lignende han har gjort tidligere. Eleven starter oppgaveløsningen med å lese oppgaven høyt og tenker hvordan oppgaven kan løses. Han ser ikke innlysende hvordan problemet kan løses og ender med å stå fast nesten umiddelbart. Etter en stund utrykker plutselig eleven en tilnærming problemet kan løses på. Han sier:

«*Hvis jeg deler figuren i 4, fordi da kan jeg gange svaret med 4 og få en omtrentlig beregning. Jeg deler den 4-delen i 6 nye ruter og begynner å telle*».

Figuren blir delt opp i 24 ruter. Denne tilnærmingen kommer plutselig etter eleven har stått fast. Nå har eleven en fremgangsmåte han mener fører til et svar og fortsetter på dette sporet og kommer frem til en løsning. I gul farge har vi markert det området i hendelsesforløpet der det er sannsynlig å anta at innsikten finner sted. Denne hendelsen der eleven gikk fra å stå fast til prøve ut en helt ny tilnærming kan kategoriseres som plutselig innsikt. Dette ser vi passer sammen med teori og kriterier om plutselig innsikt vi tidligere har presentert. Det er verdt å legge merke til at produktiviteten økte samtidig som eleven oppnår innsikt etter at han står fast i oppgaven. Etter eleven var ferdig med oppgaven, spurte vi om hva det var som gjorde at han fikk til denne oppgaven. Da svarer eleven: «*Jeg har gjort en lignende oppgave før og husket tilbake til hvordan jeg løste den*». Årsaken til at eleven oppnår innsikt tolker vi til å være fordi eleven husker tilbake til noe som var relevant for å løse denne oppgaven, og dette gjorde det mulig å komme ut av det Weisberg (2015) omtaler et «*impasse*» tidlig i hendelsesforløpet. Dette kommer vi tilbake til i kapittel 5.6.6, som en av årsakene til at innsikt ble oppnådd.

Det andre eksempelet på plutselig innsikt er av Elev 11, som strever med å finne en produktiv løsningstilnærming. Hendelsesforløpet i denne elevens problemløsingsprosess er presentert i tabell 4.12.

Tabell 4.12 - Hendelsesforløp Elev 11 oppgave 3

		Plutselig innsikt	
Oppgave 3	Tilnærming 1	Hint 1:	Tilnærming 2
Beskrivelse av situasjon	Regner ut 50×50, Skiller ut trekanter, sirkler og blanke områder	Anslå hvor mange sirkler det er i gjennomsnitt i figuren	Ser en løsning, deler figuren i 10×10 og teller.
Produktivitet	Lav, står fast		Høy, stor økning
Sitat	«Det er iallfall 2500 totalt i figuren»		«Ja! jeg kan dele opp figuren»

Av tabell 4.12 kan man under «tilnærming 1» lese at eleven prøver å finne en måte å skille symbolene fra hverandre. Eleven har på forhånd regnet ut 50×50, for å vite hvor mange symboler det er i figuren totalt. Uten hell med dette, ender det hele med at eleven står fast tidlig i prosessen. Etter dette ga vi hint 1, som nevnt tidligere er et visuelt hint der eleven får se en annen figur som også er det delt inn i ruter. Straks han så hintet uttrykket eleven: «*ja! Jeg kan dele opp figuren*». Dette fører til at eleven innser at man kan dele opp figuren og ender opp med å se en løsning på oppgaven. Eleven ender opp med å dele figuren opp i ruter på 10×10.

Vi observerer at eleven går inn i det Weisberg (2015) omtaler «*impasse*» og ved hjelp av å se på hintet får eleven en plutselig og ny måte å se problemet på. Dette blir uttrykket verbalt gjennom en tydelig «ja!», og fører til at eleven umiddelbart finner en langt mer produktiv tilnærming. Dette samsvarer med det Haavold & Sriraman (2021) definerte som plutselig innsikt, som var enten en aha-opplevelse eller en restrukturering av problemet i en mer produktiv retning. Grunnen til at vi inkluderte dette eksemplet var fordi vi mener dette kommer frem svært tydelig. I forhold til kriteriene for plutselig innsikt, kan man se at også her oppfylles de når eleven går fra tilnærming 1 til tilnærming 2. Blant elevene på denne oppgaven fant vi flere andre tilsvarende tilfeller som lignet på denne og som dreier seg om at elever får det samme hintet og innser at de også kunne dele inn i ruter.

4.3.4 Gradvis innsikt (oppgave 3)

Det ble registrert totalt 4 tilfeller med gradvis innsikt i denne oppgaven.. I tabell 4.13, ser man et hendelsesforløp av Elev 2, som i oppgave 3 har kommet frem til et svar og etter hintet innser en mye bedre måte å gjøre oppgaven på med å bruke en annen rutefordeling.

Tabell 4.13 - Hendelsesforløp Elev 2 oppgave 3

			Gradvis innsikt
Oppgave 3	Tilnærming 4	Hint 2	Tilnærming 5
Beskrivelse av situasjon	Setter prøve på svaret sitt. Teller i 13×13 rute og multipliserer med 16	Hvordan kan du være sikker på at området ditt er bra?	Argumenterer for at det hadde vært bedre å dele inn i en annen rute-inndeling
Produktivitet	Lav		Høy, stor økning
Sitat	«Også er det bare å se at 1200+1072+432 = 2704. Det ble litt mer, men det er jo et sånn ca. svar til oppgaven»		«Jeg kunne jo laget et område på 10×10 og funnet ut sånn ca. helt nøyaktig. Da er det 25 ruter til sammen. Dette ville blitt mye enklere siden det er 50×50»

Eksempelet starter med at eleven er i tilnærming 4 i egen løsningsprosess, der han på dette tidspunktet skal sette prøve på svaret han har kommet frem til. Ser vi dette opp imot Polya (1949) sitt steg nr. 4 i problemløsningsmodellen «*se tilbake*», som handler om å se tilbake på løsningen man har kommet frem til og alt arbeidet man har gjort. Ser vi at det er akkurat det han gjør i denne situasjonen. Eleven har tidligere delt figuren opp i ruter med størrelsen 13×13, telt antallet av hvert symbol i en rute og multiplisert med 16. Ifølge eleven så det ut som det var plass til omtrent 16 slike ruter totalt, derfor multipliserte han med 16. Etter dette fant han ut omtrent hvor mange det var av hvert symbol i hele figuren. Totalsummen ble 204 for mye, og med dette var han ikke helt fornøyd med svaret eget svar. Videre i prosessen får eleven hint 2. Eleven går igjennom egen oppgaveløsning og innser underveis et mer treffende svar til oppgaven. Han innser at han burde laget ruter på størrelsen 10×10 istedenfor, for å gjøre prosessen lettere for seg selv. Dette baserer seg på alt han har gjort tidligere. Dette var noe ikke eleven fikk ikke tid til å utføre. Men han forklarte hva han ville gjort om han skulle gjøre oppgaven på nytt med denne nye forbedrede tilnærmingen. Denne hendelsen skjer relativt plutselig, men eleven står ikke fast og det hele baserer seg på tidligere og gradvis utført arbeid. Derfor mener vi at denne hendelsen best kan kategoriseres som *gradvis innsikt.* Det som skjer, er at eleven har bearbeidet egen tilnærming og ender opp med å oppnå forståelse gjennom bevisst og gradvis arbeid.

5 Funn og drøfting

I dette kapittelet skal vi presentere funn og drøfte disse fortløpende opp imot relevant teori. Funnene vi vil presentere her baserer seg på foregående resultatkapittelet. Her vil vi først i kapittel 5.1 se på sammenhengen mellom oppgavene, antall tilnærminger og hendelser med innsikt. I kapittel 5.2 vil vi se nærmere på hvilken type innsikt som forekom flest ganger. I kapittel 5.3 presenteres et eksempel der en elev oppnår både plutselig og gradvis innsikt. I dette eksemplet dukker et annet interessant tema opp vet at en elev argumenterer for at oppgave 2 ikke kan løses, men likevel forsøker å finne et svar. Videre skal vi se på når i problemløsningsprosessen innsikt ble oppnådd på bakgrunn av tre kriterier i kapittel 5.4. Her ser vi på om innsikten forekom i starten av oppgaven, midt i eller på slutten. Etter dette skal vi i kapittel 5.5 se nærmere på hva som skjedde like før elevene fikk innsikt i oppgaveløsingene. Og til slutt i kapittel 5.6 vil vi presentere 6 ulike årsaker til at innsikt oppsto.

Med hensyn til å unngå gjentagelser og samtidig holde en ryddig struktur, har vi valgt å inkludere noen nye resultater blant annet i kapittel 5.4, der vi presenterer når innsikt ble oppnådd.

5.1 Funn 1 – Sammenhengen mellom antall tilnærminger, hendelser innsikt og oppgavetype

Nå som vi har presentert alle tilnærmingene skal vi se på sammenhengen mellom antall tilnærminger, hvor mange som førte til innsikt i de tre problemløsningsoppgavene med én, ingen og flere løsninger. Tabellen under viser et sammendrag av denne fordelingen.

Tabell 5.1 - Oversikt over tilnærminger, innsikt og antall løsninger

Oppgave	Tilnærminger som brukes	Antall unike tilnærminger	Antall tilfeller med innsikt	Antall løsninger
1	50	11	12	Én
2	84	20	19	Ingen
3	49	28	13	Mange

Tabell 5.1, er fargekodet etter antall, der grønn er flest, gul er i midterst og rød indikerer færrest antall i hver loddrette kolonnene. Unike tilnærminger er i denne sammenhengen forskjellige løsningstilnærminger.

Oppgave 1 «Gjentagende siffer», hadde kun én løsning og handlet om at eleven skulle undersøke hvorfor man returnerte til et bestemt tall etter man gjennomførte et sett med regneoperasjoner. Resultatene viser at oppgavetypen med kun én riktig løsning har ført til at elevene produserte bemerkelsesverdig færre unike løsningsstrategier enn i de andre oppgavene. Dette er noe vi tolker kan skyldes den lave graden av åpenhet i slutten av oppgaven. Oppgave 1 kan kategoriseres innenfor Becker & Shimada (1997, sitert i Yeo, 2017) *closed-ended* oppgaver fordi svaret og målet med oppgaven er lukket. Et kjennetegn på denne type oppgave er at det er få riktige fremgangsmåter når svaret og målet er lukket (Becker & Shimada, 1997, sitert i Yeo, 2017). Vi ser at antall løsningstilnærminger harmoniserer med at oppgaven bare har en riktig løsning. Oppgaven bidro i tillegg til begrensede muligheter for utforsking siden den inneholder få detaljer. Selv om det var få unike løsningstilnærminger ser vi av tabellen at det likevel ble anvendt 50 tilnærminger på denne oppgaven. Dette kommer av at i problemløsningsprosessen ble samme tilnærming anvendt flere ganger.

Oppgave 2 «Romerske arveproblemet», hadde ingen løsninger og handlet om å fordele arven fra en dødende mann til hans kone og to barn. Oppgaven kan som nevnt tidligere kategoriseres som *ill-defined* og *ill-structured*. Kjennetegn i *ill-structured* oppgaver er at fremgangsmåtene og strategivalgene ikke er åpenbare for oppgaveløseren og dette medfører at oppgavene kan løses på mange måter. *Ill-defined* oppgaver kjennetegnes ved at oppgaveløseren møter på motstridende informasjon, noe som medfører at oppgaveløseren benytter flere ulike løsningstilnærminger i oppgaven (Yeo 2015, Kitchener 1983). Av tabell 5.1 ser vi at elevene anvendte 84 løsningstilnærminger på denne oppgaven, hvorav 20 av disse var unike tilnærminger. Dette er i sammenheng med at strukturen i oppgaven inneholder motstridende informasjon, mange ulike detaljer og stor åpenhet for utforskning. Dette førte til at elevene anvende mange ulike tilnærminger. Av alle løsningstilnærmingene elevene benyttet seg av var det 19 av disse som førte til innsikt. Selv om denne oppgaven ikke kan løses, så var det gjengående at flere elever forventet at oppgaven skulle ha et svar. Vi identifiserte at elevene prøvde ut mange ulike løsningstilnærminger uten å tenke på realiteten ved vilkårene i oppgaven. Dette mener vi har en sammenheng med det Lester (1980, sitert i Yeo, 2017) skriver om at oppgaver elever vanligvis får i matematikk karakteriseres gjerne ved at de har en løsning, er lukket og har som hensikt å øve på prosedyreferdigheter. Her så vi at elevene prøvde ut flere tilnærminger og endret fremgangsmåte flere ganger før de gikk tom for ideer. På bakgrunn av dette mener vi dette er en konsekvens av at elevene aldri får et riktig svar, som igjen påvirker resultatene ut ifra egen utholdenhet og kreativitet, for hvor lenge og hvor mange forskjellige løsningstilnærminger de prøver ut.

Oppgave 3 «Telle trær», hadde flere løsninger og handler om å finne den beste strategien for å estimere hvor mange symboler det er i en stor kaotisk figur. Som nevnt tidligere kan oppgaven klassifiseres som en «*open-start*» oppgave. Monaghan et al. (2009) skriver at «*open-start*»-oppgaver kan kjennetegnes ved at fremgangsmåten ikke er presisert og at det finnes et bredt utvalgt unike strategier for å komme frem til et svar. Av tabell 5.1 ser man at oppgaven førte til at elevene benyttet seg av 28 unike løsningsstrategier. Til sammen registrerte vi at disse ble benyttet 49 ganger. Dette resultatet samsvarer med kjennetegnene Monaghan et al. (2009) viser til. Vi tolker dette til at oppgavetypens struktur hadde en stor påvirkning på antallet unike tilnærminger elevene anvendte. Av tabell 5.1 ser man at 13 av de 49 løsningstilnærmingene elevene benyttet seg av førte til at de oppnådde innsikt.

Av resultatene i oppgavene kommer det frem at oppbygging og struktur på matematikkoppgaver har en effekt på hvor mange løsningstilnærminger elevene bruker. Andelen av elevene som oppnår innsikt blir også påvirket av oppgavetypene.

5.2 Funn 2 – Plutselig innsikt forekom hyppigst

Analyseprosessen avdekket at elevene oppnådde innsikt på to ulike måter gjennom oppgaveløsningen. For å gi en oversikt over begge måtene elevene oppnådde innsikt på i oppgavene, har vi valgt å ta med en tabell som fremstiller dette.

Tabell 5.2 - Oversikt over innsikt

Innsikt	Gradvis		Plutselig		Antall løsninger
	Antall	Prosent	Antall	Prosent	
Oppgave 1	2	17 %	10	83 %	Én
Oppgave 2	8	42 %	11	58 %	Ingen
Oppgave 3	4	31 %	9	69 %	Flere
Totalt	14	32 %	30	68 %	

Tabell 5.2 viser ulikheter blant hvilken type innsikt elevene oppnådde innenfor de ulike oppgavene. For å gi et visuelt bilde av datamaterialet, har vi valgt å ta med den prosentvise fordelingen for å gi et sammenligningsgrunnlag videre.

I den første oppgaven var det en stor overvekt av elever som oppnådde plutselig innsikt i forhold til gradvis innsikt. Tabellen viser at det var 83 % som oppnådde plutselig innsikt mot 17 % som oppnådde gradvis innsikt. En mulig forklaring til dette er at oppgaven ga lite rom for utforsking med ulike tilnærminger og dette kan ha medført at flerparten av elevene plutselig fant innsiktsmomentet i innsiktsoppgaven. Vi tolker at årsaken til at det var få tilfeller gradvis innsikt i forhold til plutselig innsikt, kan sees i sammenheng med oppgavens lave grad av åpenhet.

I den andre oppgaven var det relativ like resultater mellom innsiktstypene. Oppgaven var preget av mye rom for utforskning. Dette førte til at det som ble oppdaget ofte besto av ting elevene erfarte og fant ut. Grunnen til at det er omtrent like mange tilfeller av begge typene innsikt, mener vi er fordi oppgaven er åpen, stor og inneholder mange momenter å oppdage. Dette gjorde at det var flere forutsetninger som lå til rette for at innsikt kunne oppstå på ulike måter. Tidligere forskning med akkurat denne oppgaven i en studie av Haavold & Sriraman (2021), fant at R2-elever og masterstudenter oppnådde en liten overvekt kategorien plutselig innsikt.

I den siste oppgaven var det også stor overvekt plutselig innsikt. Årsaken til dette mener vi er at oppgaven har stort rom for utforskning og at den har flere momenter i seg som man kan oppdage underveis. Det var store rom for gradvis arbeid i oppgaven, men detaljer som at man kan dele figuren inn i ruter, ble oppdaget av majoriteten av elevene helt plutselig. Dette gjorde at flertallet av elevene oppnådde plutselig innsikt.

Ser man på helheten totalt av alle oppgavene så fant vi ut at elevene oppnådde plutselig innsikt flest ganger (68 % av tilfellene). Dette resultatet samsvarer med resultatene til Haavold & Sriraman (2021) som også fant en overvekt av kategorien plutselig innsikt. Vi tolker ut fra dette at denne overvekten på plutselig innsikt kan ha en forklaring i oppgavetypene. Alle våre oppgaver har spesifikke momenter eller steg i seg som man må oppdage for å finne løsningen. Oppdagelsen av disse momentene hadde en tendens til å skje plutselig.

Funnet at plutselig innsikt oppsto flest ganger er interessant, fordi undervisningen og problemløsningsoppgavene i skolen bygger på problemløsningsmodellen til Polya (1957). Denne legger opp til at innsikt oppstår gjennom gradvis og systematisk arbeid med oppgaver. Modellene bygger opp til at elever skal løse problemer gjennom å anvende tidligere kunnskap. Dette er også noe som blir fremtredende når elever arbeider med problemløsning. Til tross for dette er det interessant at informantene oppnådde plutselig innsikt flest ganger i oppgavene.

5.3 Funn 3 – Eleven som oppnår både plutselig og gradvis innsikt

I dette kapittelet vises et utdrag fra oppgaveløsningen til Elev 11 som oppnår begge innsiktskategoriene og argumenterer for at oppgaven ikke kan løses, men fortsetter likevel å lete etter en løsning til den.

Tabell 5.3 - Hendelsesforløp Elev 11 oppgave 2

			Hint 1 og 2		
	Gradvis innsikt				Plutselig innsikt
Oppgave 2	Tilnærming 1	Tilnærming 1.1	Tilnærming 1.2 og 2.0	Tilnærming 2.1	Tilnærming 3
Beskrivelse av situasjon	Deler brøken til 9-deler (sønn som utgangspunkt).	Endrer til kona som utgangspunkt.	Utvider brøk. Oppdager at fordeling ikke er mulig.	Argumenterer for at oppgaven ikke kan løses	Fordeler arven som om den er 1000 kr
Produktivitet	Middels	Middels	Forbedring	Forbedring, står fast	Forbedring
Sitat	«Jeg gir 4/9 til sønn, 3/9 til kona og 2/9 til datteren. Jeg skjønner ikke helt hvordan jeg skal løse dette her»	«Jeg gir 6/9 deler til kona og resten til barna. men dette er jo feil»	«... hvis det blir slik mannen sier blir det en uekte brøk. Det går ikke opp»	«På en av de her er jo hele brøken brukt opp, hvis de skal følge testamentet. De trenger liksom 6/3, istedenfor 3/3»	«Jeg tror jeg kom på et nytt svar. Kona får 3/6 sønn 2/6, datter 1/6, av 1000 kr»

Tabell 5.3, gir et visuelt hendelsesforløp av Elev 11 sin fremgangsmåte. Den starter med at eleven forsøker å løse oppgaven i tilnærming 1. Her utvider han brøken til 9-deler og gjør en fordeling med sønn som utgangspunkt. Han innser at denne fordelingen ikke passer helt med oppgavens betingelser og forsøker å fordele på nytt i tilnærming 1.1, med kona som utgangspunkt. Eleven innser raskt at dette ikke blir riktig og sier at dette må være feil igjen. Deretter ga vi hint 1 om Per og Pål som skal dele 1000 kr. Eleven forsøker å løse oppgaven i hintet og sier at de er uenige. Deretter blir han usikker på hvordan hintet kan hjelpe i denne oppgaven. Etter dette får eleven hint 2: «*bruk en annen brøk*». Nå er vi på tilnærming 2, der eleven utvider brøken til 12-deler. Han prøver å fordele arven, men innser at det fortsatt ikke er mulig å oppfylle alle betingelsene i oppgaveteksten og begrunner dette med at det vil kreve en uekte brøk. I neste steg fortsetter argumentasjonen om at oppgaven ikke kan løses og nevner at man trenger seks 3-deler (6/3) for å gjøre fordelingen. På dette stadiet sier eleven selv: «*de kan*

ikke få som de er lovet i testamentet». Etter dette tenker eleven litt og kommer helt plutselig med et svar til oppgaven. Han henter inspirasjon fra hint 1 og fordeler arven som om den besto av 1000 kr. Da gir han kona 3/6, sønnen 2/6 og datteren 1/6 og sier «*det blir ikke akkurat slik de er lovet, men på den tida var vel 1000 kr ganske mye*». Dette eksemplet er interessant på to måter. Den første er at eleven oppnår både gradvis og plutselig innsikt i den samme oppgaven. Grunnen til at eleven i dette eksempelet oppnår gradvis innsikt kan man se fra tilnærming 1, der eleven gjør en fordeling med sønn som utgangspunkt. Etter dette gjør han en lignende fordeling, men med kona som utgangspunkt. En siste gang prøver han i tilnærming 1.2 å gjøre en fordeling, men med brøker i 12-deler. Ut ifra disse tre innfallsvinklene med samme tilnærming, gjør eleven seg opp en forståelse om at oppgaven ikke kan løses. Da kommer eleven inn på tilnærming 2.0, der han forsøker å argumentere for dette. Ut fra dette kan man se at tilnærmingene bygger videre på hverandre og at produktiviteten øker. Etter dette oppnår eleven plutselig innsikt imellom tilnærming 2.1 og 3. Grunnen til at dette kan kategoriseres som plutselig innsikt, er fordi i første omgang argumenterer han for at oppgaven ikke kan løses og står fast, siden han ikke har noe mer å tilføye. Etter dette tenker han og forsøker å skape mening i oppgaven. Dette resulterte i at han plutselig bryter ut: «*jeg tror jeg har et nytt svar ...*». Det som skjedde, var at eleven fikk en ide om å forsøke å fordele arven som om den besto av 1000 kr. Inspirasjonen til dette hentet han fra hintet om Per og Pål. Denne innsikten førte til at han kom på en helt ny tilnærming på oppgaven.

For det andre er dette et interessant eksempel hvor eleven kommer med en god begrunnelse på at oppgaven ikke kan løses, men forsøker likevel å komme til et svar. Det kan være sannsynlig å anta at denne eleven slik som elevene i studiet til Reusser & Stebler (1997) har en formodning om at alle matematikkoppgaver alltid har en løsning. Til tross for dette vet eleven at svaret han ga ikke er helt korrekt, men at det er tilnærmet så godt det lar seg gjøre. Reusser & Stebler (1997) fant at mange elever løser oppgaver uten hensyn til realismen og sammenhengene i dem. Elever har en uvane med å «løse» uløselige oppgaver så lenge de er i kjente kontekster. Dette kan sees i sammenheng med eksemplet som ble presentert her.

5.4 Funn 4 – Innsikt oppstår vanligst i midten eller slutten

For å kunne si noe om når i problemløsningsprosessen innsikt ble oppnådd, satte vi tre ulike perimeter. Til dette fastsatte vi at «starten» var fra eleven fikk oppgaven og hele første tilnærming. «Slutten» var fra siste tilnærming frem til svar blir gitt eller til oppgavene avbrytes. Den imellom kalte vi for «midt i» og fastsatte at den inkluderer alt mellom starten og slutten.

Deretter ble tallene fylt in i tabell 5.4 og fargekodet for å gjøre det enklere å se resultatene visuelt. Tabellen er fargekodet etter antall, der grønn er flest, gul er midterst og rød er færrest i antall. Hver rad inkluder prosent som viser forholdet mellom antall registreringer og totalsummen på hver oppgave.

Tabell 5.4 - Oversikt over når innsikt oppsto

Oppgave	Starten	Midt i	Slutten
1	3 (25 %)	2 (16,7 %)	7 (58,3 %)
2	4 (21,1 %)	7 (36,8 %)	8 (42,1 %)
3	2 (15,4 %)	7 (53,8 %)	4 (30,8 %)
Totalt	9 (20,5 %)	16 (35,8 %)	19 (43,7 %)

Gjennom undersøkelser av når i problemløsningsprosessen elevene oppnådde innsikt, har vi funnet ut at det er forskjeller. Ut ifra tabellen over, er det viktig å legge merke til at de fleste hendelsene ble registrert på «slutten» og «midt i». Med dette funnet er det rimelig å anta at innsikt kan ha en tendens til å oftere forekomme sent i oppgaveløsninger. Vi tolker dette som at det kan ha en sammenheng med at man trenger tid til å ha prøvd ut forskjellige ideer og prøve og feile før man innser en mye bedre tilnærming til problemet. En annen mulig årsak kan være at disse resultatene vil være naturlige med de kriteriene som er satt til hva som er gradvis og plutselig innsikt. Fordi gradvis innsikt krever at en tilnærming blir forbedret gjennom systematisk arbeid som krever litt tid, og den plutselige innsikten krever at eleven står fast med problemet først forså å plutselig øke produktiviteten i oppgaveløsningen.

Det er også verdt å legge merke til at vi fant ulike typer innsikt i alle tre periodene. Vi tolker dette til at begge innsiktskategorier kan oppstå når som helst i oppgaveprosessen. Dette fordi vi fant i en anledning en elev som fikk plutselig innsikt før det var gått et minutt etter at oppgaven var lest.

For å skille mellom hvilken type innsikt som oppsto i de ulike perimeterne, har vi valgt å inkludere tabellen nedenfor. Den baserer seg på tabell 5.4 men den skiller mellom de to innsiktskategoriene innenfor hvert perimeter.

Tabell 5.5 - Oversikt over hvilken type innsikt som oppsto når

Perimeter	Starten		Midt i		Slutten	
Innsikt	Plutselig	Gradvis	Plutselig	Gradvis	Plutselig	Gradvis
Oppgave 1	2	1	2	0	6	1
Oppgave 2	4	0	4	3	3	5
Oppgave 3	2	0	5	2	2	2

I tabell 5.5 er det viktig å legge merke til at begge innsiktskategoriene ble funnet i alle tre periodene. En annet ting man kan legge merke til, er at gradvis innsikt bare oppsto en gang i «starten». Det kan man se skjedde i oppgave 1 og ble presentert tidligere som eksempel i kapittel 4.1.4, i tabell 4.4. I dette hendelsesforløpet visualiserte vi den stegvise prosessen fra eleven får oppgaven og til han oppnådde gradvis innsikt i «starten» av prosessen. Innsikten handler om at eleven innså at det ikke ble riktig å dividere på 31 i den oppgaven. Grunnen til at den oppsto kun en gang i «starten», tolker vi at kan ha en naturlig forklaring med at gradvise forbedringer skjer etter man har arbeidet litt med problemet og etter man har prøvd ut forskjellige tanker, strategier og muligheter. Da ville det vært naturlig å forvente at flesteparten av slike hendelser med gradvis innsikt kommer etter «starten».

5.5 Funn 5 – Hva som skjer før innsikt

I etterkant av utarbeidelsen av detaljerte hendelsesforløp for hver enkelt elev på hver oppgave, markerte vi hvor innsikten oppsto ut ifra kriteriene. Ved å benytte denne metoden ble det mulig å se nærmere på hva som skjedde like før hvert tilfelle med innsikt. Resultater fra dette viser at i 22 av 44 hendelser med innsikt, fikk elevene hint like før innsikten ble oppnådd. Faktorer som skjedde før de resterende 22 hendelsene varierte i større grad. Vi fant noen hendelser som omhandlet misforståelse av regneoperasjoner og oppløsingen av dem, mens i andre situasjoner var det elever som strevde med informasjon i oppgaven som de ikke hadde oppdaget relevansen til enda. Det var i tillegg noen ganger at det ble brukt en mindre produktiv tilnærming som ble forbedret gjennom prøving og feiling. Det som var gjennomgående i disse hendelsene var at elevene prøvde en fremgangsmåte, sto fast og enten med hint eller med egen tankekraft klarte å omstrukturere og hente ut en bedre tilnærming til problemet som økte produktiviteten. Kriteriene på innsikt var som Haavold & Sriraman (2021) definerte enten som resultatet av analytisk tenking og gradvis fremgang, eller som resultatet av prosessen av produktiv omstrukturering etter man har stått fast. Her ser vi at kriteriet samsvarer med det vi fant som var gjennomgående for hva som skjedde før innsikt ble oppnådd. Ut ifra dette funnet, mener vi at hjelp i oppgaveløsning og måten dette gis på kan være kritisk til at innsikt oppstår i mange tilfeller. Til dette har vi sett at hjelpen vi ga gjennom hint både resulterte i negativ og positiv effekt for elevene. Dette er noe vi diskuterer videre i kapittel 5.6.1.

5.6 Funn 6 – Årsakene til innsikt

Nå som vi har sett på hvilken type innsikt som oppsto, når det oppsto og hva som skjedde før, skal vi nå presentere årsakene til at elevene i studien vår oppnådde innsikt i ulike problemløsningsoppgaver. I hovedsak fant vi seks årsaker til dette.

5.6.1 Årsak 1 - Hint (som ga både positiv og negativ effekt)

Av dataanalysen fant vi at et hint ble gitt like før mange av elevene oppnådde innsikt. Dette skjedde 7 ganger hver i de to første oppgavene og 8 ganger i den siste. Med andre ord ble hint gitt til elevene 22 ganger like før de oppnådde innsikt. Det var varierende hvilket av hintene i de ulike oppgavene som førte til innsikt. Mange elever har kommet frem til bedre løsninger og kommet seg ut av blindgater i oppgaver på grunn av noen av hintene.

I oppgave 3 oppførte vi hint 1: «*anslå hvor mange det er i hver rute*», som årsak til innsikt 7 ganger. Hint 1 besto av figur 3.5 som viser et bilde av celler i et tellekammer. Dette hintet førte til at elevene innså at de kunne dele figuren i oppgaven inn i ruter. Elev 11 sa følgende om å få dette hintet: «*... da jeg fikk hintet om at jeg kunne dele den opp, ble det litt enklere. Da kunne jeg dele opp, telle og finne gjennomsnittet*».

Til tross for dette observerte vi at hint også i noen tilfeller kunne hemme produktiviteten og heller skape forvirring og usikkerhet. Vi observerte at enkelte hint gjorde elever mer usikre siden de ikke klarte å sammenkoble relevansen i hintet til oppgaven. Vi tolket ut ifra observasjoner og transkriptet at enkelte elever virket å ha en formening om at hint alltid skal være hjelpsomme, lett forståelige og ikke minst relevante for konteksten. Eksempel på at hint bidro til en negativ produktivitet er hint 1 oppgave 1: «*fyll inn i tabellen*» (figur 3.2). Ut ifra transkriptet ser man flere elever som nevner at de ikke fikk noe produktivt ut av hintet, eksempler på dette er: Elev 8 som sier:

«*Jeg skjønte egentlig ingenting av det første hintet*»

og Elev 10 som sier:

«*Jeg syns ikke det hjalp fordi jeg forsto ikke helt hva jeg skulle finne*».

Ut ifra transkripsjonen kommer det frem at ikke alle elevene klarte å overføre de diskré detaljene fra hintene og til egne tilnærminger. Da hintet ikke førte til hjelp eller økt produktivitet, endte det opp i de fleste tilfellene med at elevene sto fast igjen. Et helt annet hint som også bidro til mest negativ produktivitet er hint 1 i oppgave 2 om Per og Pål som skulle dele 1000 kr (figur 3.4). Her observerte vi mange elever som tydelig ble mer usikre på hva de skulle gjøre da de fikk hintet. I noen tilfeller førte dette til at de mistet noe av fokuset i oppgaveløsingen. Elev 5 sa følgende om dette hintet: «*Jeg ble mest forvirret av hintet og ble mer usikker*».

Siden hint var årsaken til halvparten av innsiktstilfellene (22 av 44), så tolker vi dette til at hint i stor grad var en av de viktige faktorene til oppnåelsen av innsikt. Dette støttes opp av at mange av elevene sa selv at hintet var årsak til deres suksess i oppgaveløsningen. På den andre siden var også et funn at hint kunne bidra negativt med å hemme produktiviteten, skape forvirring og skape usikkerhet. Vi tolker ut ifra dette at dersom vi ikke hadde gitt hint så ville det vært langt færre hendelser med innsikt. Dette betyr at hint kan være en viktig forutsetning for at innsikt skal oppstå for barneskoleelever. Skånstrøm & Blomhøj (2016) skriver at det er utfordrende å hjelpe elever på en tilstrekkelig måte uten å at læringsutbytte går tapt i denne prosessen. Derfor mener vi ut ifra dette funnet at det er viktig for lærere å tenke grundig igjennom hvilke hint og hjelp som skal gis elever som arbeider med problemløsning.

5.6.2 Årsak 2 – Gradvis og systematisk arbeid

Fra datanalysen fant vi flere hendelser med innsikt der årsaken var gradvis og systematisk arbeid med prøving og feiling over tid. Her så vi flere elever som gikk frem og tilbake mellom tilnærmingene, men klarte å gjøre små stegvise forbedringer hver gang. Mange av hendelsene omhandler at man bygger opp en forståelse gjennom å prøve ut en tilnærming og gjøre små utbedringer underveis ettersom man finner ut ny informasjon. Flere slike eksempler er presentert tidligere i resultatkapitlene. Innsikt kan ut ifra kriteriene til Haavold og Sriraman (2021) oppstå som et resultat av gradvis analytisk arbeid. Dette støttes opp fra resultatene våre som viser at 14 hendelser passer innenfor denne årsaken.

5.6.3 Årsak 3 – Oppløsing av misforståelse

En annen årsak til oppnåelse av innsikt fra dataanalysen, var tilknyttet etterprøving av en misforståelse i en matematisk regneoperasjon. Eksemplet omhandler Elev 3, som ble stående fast i oppgave 1 på grunn av en misforståelse rundt et regnestykke. Han tenkte at svaret på multiplikasjonen 7×11×13 skulle bli 371. Han forvekslet 371 med det tresifrede tallet han valgte ut i starten av oppgaven. Dette resulterte i at Elev 3 ikke kom seg videre og at oppgaven ikke ga mening. Da eleven ble klar over at 7×11×13 egentlig er 1001, kom han seg ut av blindveien og innså hele løsningen på oppgaven. Denne lille misforståelsen gjorde at eleven sto fast i arbeidet, men så snart den ble oppløst, ble hele oppgaven umiddelbart løst og eleven oppnådde innsikt.

Oppløsing av denne misforståelsen tolket vi til å være årsaken til at innsikt ble oppnådd i dette eksemplet. Å misforstå eller å gjøre noe feil i matematikk er helt normalt for elever i barneskolen. Men å innse selv at det man har gjort er feil for og deretter oppløse misforståelsen, fremstår som mer sjeldent og interessant. Grunnen til at man misforstår eller gjør feil, kan være fordi man har slurvet når man leser oppgaveteksten eller fordi man er uoppmerksom. Ser vi dette opp imot problemstillingen vår, mener vi at det er viktig å gjøre elevene bevisste på viktigheten ved å forstå oppgaven godt før den skal løses. På bakgrunn av dette funnet mener vi at når man underviser i problemløsning er det viktig å utarbeide gode rutiner for hvordan elevene skal prosessere og forstå oppgavetekstene. Årsaken til dette er at misforståelser elever gjør seg ved å slurve i gjennomlesningen av oppgaver kan medføre at oppnåelse av innsikt blokkeres.

5.6.4 Årsak 4 – Oppdage små detaljer - «Noen ganger ser man bare et ord eller tall og plutselig skjønner hele oppgaven»

Ut ifra dataanalysen fra de siste spørsmålene som ble stilt i de oppgavebaserte intervjuene fant vi en ny årsak til at innsikt oppsto. Denne årsaken var at elevene opplevde å se et tall eller ord og deretter plutselig skjønne oppgaven. Til dette har vi flere eksempler fra transkripsjonene. Et av de er Elev 4, som regnet ut 7×11×13 uten å få hjelp eller hint. Han sier på slutten av intervjuet at straks han så tallet 1001, innså han hele løsningen på oppgaven.

> «*Noen ganger ser man et tall og skjønner hele oppgaven. Dette er en god følelse å få*».

Et annet eksempel er Elev 3, som etter oppgave 3 sier:

«*Med en gang jeg så ordet gjennomsnitt, så jeg at jeg måtte regne med gjennomsnitt, og at jeg måtte lage en liten sone og gange opp. Det ene ordet i hintet var til hjelp. Ordet gjennomsnitt*».

Et siste eksempel er fra Elev 13 som svarte på et spørsmål:

«*Med en gang jeg så hintet skjønte jeg hvordan det var lettest å løse oppgaven og få ca. det svaret kunne blitt. Da tenkte jeg med en gang aha! Det er sånn man løser oppgaven, ja det er så lett liksom*».

Ut ifra disse eksemplene tolker vi at en årsak til at innsikt oppsto i noen tilfeller var oppdagelse av små detaljer som ble lagt merke til, detaljer som spesifikke tall og ord. Etter man oppdager denne detaljen i oppgaven så skjer det en uforventet og plutselig prosess som medfører at innsikt oppnås og produktiviteten øker. Det var slike hendelser vi hadde som hensikt å skape gjennom valget om å bruke *innsiktsoppgaver*. Ut ifra dette funnet mener vi at det for læreren vil være nyttig å kjenne til slike detaljer og momenter i oppgavene man selv skal bruke i undervisningen. I forberedelsesfasen av en undervisningssekvens bør læreren sette seg inn i oppgavene som elevene skal løse, og gjennom dette gjøre seg kjent med mulige strategivalg som kan brukes og hvilke som fører til suksess. På denne måten kan man gi elever bedre veiledning på en slik måte at de oppdager viktige detaljer som er viktige for å oppnå innsikt.

5.6.5 Årsak 5 – Å få en plutselig og uforventet idé

Ut ifra datanalysen og transkripsjonen har vi kommet frem til en årsak som best kan beskrives som at innsikt ble oppnådd helt plutselig og uforventet. Et eksempel er fra Elev 10 i oppgave 2, som oppnådde plutselig innsikt etter å ha strevd lenge med oppgaven. Han forklarer hvordan han fikk dette til med å si:

«*Plutselig fikk jeg det bare til*».

Dette fører til at han får en uforventet idé om hvordan man kan løse oppgaven. Denne hendelsen skjer helt ut av det blå og har ingen tilknytning til konteksten. Med dette mener vi at denne nye idéen ikke ligner på tidligere arbeid, da han kommer på forslaget om å representere svaret på oppgaven som brøk med desimaltall. I denne hendelsen oppnår Elev 10, innsikt på bakgrunn av at han først sto fast etter å ha brukt en mislykket tilnærming, og deretter plutselig finner en ny måte å se på problemet gjennom en ny og bedre tilnærming.

Innsikt kan ut ifra kriteriene til Haavold og Sriraman (2021) oppstå ubevist og plutselig som resultatet etter man har stått fast med oppgaven. Dette støtter seg på resultatene som visste 30 slike tilfeller.

5.6.6 Årsak 6 – Har gjort en lignende oppgave tidligere

Fra dataanalysen kommer det frem en innsikts-årsak som omhandler å innse løsningen på grunn av noe overførbart til et annet lignende problem. Eksemplet på dette kommer fra Elev 1, som husket tilbake til en oppgave han hadde gjort tidligere som hadde flere likhetstrekk. Dette eksemplet ble tidligere presentert i kapittel 4.4.3, som eksempel av hendelsesforløp for plutselig innsikt. Forklaringen for hvordan han kom frem til en løsning var:

«*At jeg har gjort en lignende oppgave før og husket tilbake til hvordan jeg løste den*».

Fremgangsmåten eleven velger å benytte seg av gjør at han ikke lengre står fast med oppgaven og at han lykkes med å finne et svar. Innsikten eleven oppnådde i dette tilfellet handler hovedsakelig om å innse at han kunne dele figuren med trær inn i ruter.

Ut ifra dette tolker vi årsaken til oppnåelse av innsikt i dette tilfellet til å være på grunn av at eleven tidligere hadde gjort en lignende oppgave og dermed var i stand til å innhente en forhåndskjent fremgangsmåte løsningstilnærming. Hendelsen der eleven husker tilbake til noe han har gjort før, passer med det Robertson (2017) kaller transfer. Transfer er å bruke kunnskap og erfaringer som man har tilegnet seg gjennom å løse tidligere oppgaver som har flere likhetstrekk (Robertson, 2017). Ut ifra dette funnet mener vi det er viktig for lærere iblant å velge ut oppgaver som samsvarer med kunnskap elevene har tilegnet seg. På denne måten får elever muligheter til å overføre strategier gjennom «transfer», noe vi har sett kan gjøre at de oppnår innsikt i problemer.

5.7 Overførbarhet til skolen

I denne delen skal vi drøfte studiens overførbarhet til skolen. I studien brukte vi høytpresterende barneskoleelever med hensikt å lære mer om hvordan denne gruppen lykkes med å få innsikt i oppgaver. Formålet med dette valget var å undersøke hvordan man kan oppnå suksess i arbeid med problemløsning. Suksessen i problemløsning og hvordan man lykkes, er noe vi mener er overførbart og relevant for alle elever.

Vi har avdekket flere momenter lærere kan bruke, som er sentrale for at elever skal oppnå innsikt. Vi fant at grad av åpenhet, struktur og antall løsninger har noe å si for oppnåelse av innsikt og antall tilnærminger som brukes i oppgaver. I planleggingsfasen bør lærere forberede undervisningen med å skaffe seg innblikk i mulige løsningstilnærminger og momenter som kan oppdages og brukes av elever. En annen ting som bør planlegges her er hvordan hint og veiledning skal foregå. I denne fasen er det vanskelig å ikke tømme situasjonen for læringsutbytte samtidig som man gir hjelp (Skånstrøm & Blomhøj, 2016). Ved å gi gode og gjennomtenkte hint, har vi sett at dette kan bidra til å hjelpe elever inn på riktig kurs. Men vi ser også at dårlige hint kan forverre situasjonen og føre til mindre produktiviteten gjennom at elevene blir mer usikre og forvirret. På bakgrunn av dette ser vi at måten man gir hint på og innholdet i dem, er av stor betydning og bør planlegges nøye, da hint viste seg å være en viktig årsak til at mange av elevene oppnådde innsikt.

Vi mener også at lærere av og til bør velge ut oppgaver som har likhetstrekk med tidligere oppgaver slik at transfer er mulig. Gjennom undervisningen bør man fokusere på å opparbeide gode rutiner for hvordan elever skal prosessere og gå frem for å forstå oppgavene, for å unngå misforståelser. Når det gjelder å skape gode problemløsere som opplever suksess med arbeidet, har vi sett at innsiktsoppgaver har mange momenter som kan være til fordel for dette. Vi har erfart at når elevene har oppnådd innsikt i disse oppgavene, har de ofte kommet frem til et svar og opplevd suksess. Med dette mener vi at det kan ha en verdi at en del av problemløsningsoppgavene elevene får i undervisningen er innsiktsoppgaver.

Fra oppgave 2 med ingen løsning, fant vi en elev som argumenterte for at oppgaven var uløselig, men deretter forsøkte å løse den. Grunnen til at eleven likevel forsøkte å løse den, mener vi var fordi han hadde en oppfatning at «alle matematikkoppgaver alltid har en løsning». I læreplanen LK20 står det: *«Problemløsing handler om å ... vurdere om løsningene er gyldige»* (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2). Ser man funnet opp imot kjerneelementet, mener vi at dette er noe man burde ha større fokus på. Vi mener at mange elever har denne oppfatningen, og at det ville vært fordelaktig å ha innslag av oppgaver uten en løsning i undervisningen. På denne måten kan man gjøre elever oppmerksomme på viktigheten ved å vurdere gyldigheten av matematiske løsningssvar.

6 Avslutning

Problemstillingen *«Hvordan oppnår høytpresterende barneskoleelever innsikt i møte med tre problemløsningsoppgaver med én, ingen og flere riktige løsninger?»* har vært fokuset gjennom denne studien. For å besvare denne problemstillingen har vi gjennomført oppgavebaserte intervjuer med 12 høytpresterende barneskoleelever i matematikk og gitt de problemløsningsoppgaver med én, ingen og flere riktige løsninger. For å besvare problemstillingen har vi laget fire forskningsspørsmål:

1) *Når i problemløsningsprosessen oppstår innsikt? 2) Hva skjer like før innsikt oppstår? 3) Hvilken type innsikt oppnår elevene? 4) Hva er mulige årsaker til at innsikt oppstår?*

Fra det første forskingsspørsmålet fant vi at innsikt hadde en tendens til å oppstå i midten eller slutten av oppgavene. Ut ifra kriteriene for innsikt som sier at det skjer først etter man har stått fast med en oppgave eller gjennom å gradvis forbedre en løsningstilnærming, mener vi det vil være naturlig at majoriteten av tilfellene skjer etter «starten». Likevel har vi funnet innsikt i alle tre fasene. I forskningsspørsmål 2, fant vi at hint ble gitt like før innsikten ble oppnådd i halvparten av tilfellene. De resterende tilfellene omhandler oppløsing av misforståelse, prøving og feiling, streving med lite effektive tilnærminger og streving med informasjon man ikke ser relevansen til. I forhold til det tredje forskningsspørsmålet om hvilken type innsikt som ble oppnådd, fant vi et klart flertall hendelser med plutselig innsikt. Fordelingen var 30 mot 14, noe som betyr at plutselig innsikt hadde omtrent dobbelt så mange tilfeller som gradvis. Grunnen til denne overbalansen over til plutselig innsikt, mener vi kan skyldes struktur på oppgavene. Antall løsningssvar, åpenhet og struktur i oppgavene hadde innvirkning på oppnåelse av innsikt og måtene elevene løste problemene. Til det siste forskningsspørsmålet fant vi seks ulike årsaker som beskriver hvorfor elevene fikk innsikt. Årsakene var hint, gradvis og systematisk arbeid, oppløsing av misforståelser, oppdagelse av små detaljer som ord eller tall, å få en plutselig og uforventet idé og strategioverføring fra en tidligere og lignende oppgave.

For å konkludere med hvordan høytpresterende elever oppnår innsikt i arbeid med problemløsningsoppgaver, er det flere momenter vi ønsker å trekke frem. Vi fant at det var mulig å oppnå både gradvis og plutselig innsikt i en og samme oppgave. Men majoriteten av hendelsene med innsikt kom av en plutselig omstrukturering. Videre fant vi at innsikt oftest oppnås «midt i» eller ved «slutten» av oppgaveløsingen. Vi har sett at valg av oppgavetype har en innvirkning for oppnåelse av innsikt, og vi mener dette spiller inn på hvordan, hvilken type og hvor ofte elever oppnår innsikt. Ut ifra funnene våre har vi sett at innsikt kan oppstå på bakgrunn av flere ulike årsaker. Der veiledning i form av hint var en fremtredende årsak.

6.1 Videre arbeid innenfor forskningsfeltet

I vår masteroppgave har vi måttet gjøre noen avgrensinger for å holde prosjektet gjennomførbart og for å holde en rød tråd gjennom teksten. Fra starten var planen å inkludere temaene usikkerhet og innsikt for å se på hvordan elever oppnådde og håndterte dette i møte med problemløsningsoppgaver. Vi så tidlig at dette ble for omfattende da vi fikk samlet inn mer enn nok data om temaet innsikt. For videre forskning hadde det vært interessant å se nærmere på hvordan elever håndterer usikkerhet i oppgave 2 «romerske arveproblemet», fordi den har motstridende informasjon og ingen løsning. Til videre arbeid på forskningsfeltet er en erfaring vi vil dele at det var en kjempestor fordel å inkludere gode og åpne oppgaver med store rom for oppnåelse av innsikt. Vi ser også flere muligheter for videre forsking innenfor vårt tema, blant annet ved å forske videre med et større antall informanter slik at man kunne gjort en kvantitativ vinkling og gjort sammenligninger. En annen mulighet er å endre seleksjonskriterieriene fra høytpresterende elever på barneskolen til høytpresterende elever på ungdomsskolen. Så vidt vi vet på nåværende tidspunkt er dette ikke gjort før. Andre muligheter er at kan man se på elever med en annen måloppnåelse i faget. Da kan man se om de bruker like mange tilnærminger og om de oppnår innsikt på lignende eller andre måter. Det finnes også muligheter å fortsette forskningen og velge ut tilsvarende oppgaver som vi har brukt her, slik at man kan sammenligne resultatene. Da ville det også vært interessant å avdekke om det kommer frem flere årsakssammenhenger til at innsikt oppstår.

Referanseliste

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2006). Undersøgende samarbejde i matematikundervisningen: udvikling af IC-Modellen. In *Kunne det tænkes?: om matematiklæring*. Malling Beck. 110-126

Alseth, B., Breiteig, T. & Brekke, G. (2003). *Evaluering av Reform 97. Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering - matematikkfaget som kasus*. Notodden: Telemarksforsking Notodden.

Bjørndal, C. (2017). *Det vurderende øyet: Observasjon, vurdering og utvikling i pedagogisk praksis* (3. utg). Oslo: Gyldendal akademisk.

Boaler, J. (2015). *The elephant in the classroom: Helping children learn and love maths* (Revised and updated paperback ed.). London: Souvenir Press

Caelli, K., Ray, L., & Mill, J. (2003). 'Clear as Mud': Toward Greater Clarity in Generic Qualitative Research. *International Journal of Qualitative Methods*, *2*(2), 1-13.

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag AS.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education*. (8. utg.). London: Routledge.

Creswell, J. (2014). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4.utg.; International student ed.). Los Angeles, California: SAGE.

Elgrably, H. & Leikin, R. (2021). Creativity as a function of problem- solving expertise: posing new problems through investigations. *ZDM Mathematics Education, 53*, 891–904.

Elo, S., & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing*, *62*(1), 107-115.

Ericsson, K. & Simon, A. (1993). *Protocol Analysis. Verbal Reports as Data.* (Rev. utg.) Cambridge: The Mitt Press.

Fleck, J., & Weisberg, R. (2013). Insight versus analysis: Evidence for diverse methods in problem solving. *Journal of Cognitive Psychology (Hove, England), 25*(4), 436-463

Gleiss, M., & Sæther, E. (2021). *Forskningsmetode for lærerstudenter: å utvikle ny kunnskap i forskning og praksis* (1. utg.). Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Goldin, G. A. (1997). Chapter 4: Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *9*, 40–177.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (s. 517–545). Routledge.

Guest, G., Bunce, A., & Johnson, L. (2006). How Many Interviews Are Enough? *Field Methods*, *18*(1), 59-82.

Haavold, P.Ø., & Sriraman, B. Creativity in problem solving: integrating two different views of insight. *ZDM Mathematics Education 54*, 83–96 (2022)

Heinze, A. (2005). Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students. *International Education Journal*, *6*(2), 175-183.

Kitchener, K (1983). Cognition, Metacognition, and Epistemic Cognition: A Three-Level Model of Cognitive Processing. *Human Development*, *26*(4), 222–232.

Kjærnsli, M. & Jensen, F. (2016). *Stø kurs. Norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015*: Universitetsforlaget.

Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T., & Rygge, J. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

LeCompte, M. D. & Goetz, J. P. (1982). Problems of Reliability and Validity in Ethnographic Research*. Review of Educational Research*, *52*(1), s.31-60.

Lerman, S. (2014). *Encyclopedia of Mathematics Education* (1. utg. 2014. ed., Springer reference). Dordrecht: Springer Netherlands

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modelling. I F. K. Lester Jr., *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 763-804. Nord-Carolina: Information Age Publishing.

Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1), 245–278.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). *Problem solving in mathematics education.* Springer International Publishing.

Long, T. & Johnson, M. (2000). Rigour, reliability, and validity in qualitative research, *Clinical Effectiveness in Nursing*, *4*(1), 30-37

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically*. (2. utg.). Harlow: Prentice hall.

Mathematics Assesment Project, (2012), Counting trees. Hentet fra: **https://www.map.mathshell.org/download.php?fileid=1148**

Mayring P. (2015) Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures.

Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education. Dordrecht: Springer Netherlands. 365-380

Mellin-Olsen, S. (1996). Oppgavediskursen i matematikk - Rekonstruksjon av en diskurs. *Tangenten* (2), 2-4.

Merriam, S., & Tisdell, E. (2016). *Qualitative research: A guide to design and implementation* (4. utg.). San Francisco, CA: Jossey-Bass, a Wiley Brand.

Monaghan, J., Pool, P., Roper, T., & Threlfall, J. (2009). Open-start mathematics problems: An approach to assessing problem solving. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *28*(1), 21-31.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Uddannelsestyrelsens temahæfte nr. 18 - 2002. København: Undervisningsministeret

Ohlsson, S. (2011). *Deep learning: How the mind overrides experience*. Cambridge: Cambridge University Press.

Poincaré, H. (1948). *Science and method*. Dover.

Pólya, G. (1949). *How to solve it*. Princeton University Press.

Pólya, G. (1957). *How to solve it*: *A new aspect of mathematical method* (2. utg.). Garden City, N.Y: Doubleday.

Pólya, G., & Conway, J. (2014). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (New Princeton science library). Princeton, NJ: Princeton University Press

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode; en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Oslo: Universitetsforlaget

Postholm, M., Jacobsen, D., & Søbstad, R. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution—The social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction*, *7*(4), 309-327.

Robertson, S. (2017). Problem solving: Perspectives from cognition and neuroscience (2. utg.). Abingdon, Oxon: Routledge.

Robinson, T. (2016). The eureka factor: Aha moments, creative insight, and the brain. *International Journal of Evidence Based Coaching and Mentoring, 14(*2), 150.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. Academic Press.

Schoenfeld, A. (1989). Explorations of Students' Mathematical Beliefs and Behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 338-355.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillian. 334-370

Simon, M. A. (2019). Analyzing qualitative data in mathematics education. In K. R. Leatham (Ed.), *Designing, conducting, and publishing quality research in mathematics education*. Cham: Springer International Publishing. 111-122

Skilbrei, M. (2019). *Kvalitative metoder: Planlegging, gjennomføring og etisk refleksjon* (1. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Skånstrøm, M., & Blomhøj, M. (2016). *Det kommer an på….* In T. E. Rangnes, & H. Alrø (Eds.), *Matematikklæring for framtida*: festskrift til Marit Johnsen-Høines Caspar forlag.

Smedsrud, J. & Skogen, K. (2016) *Evnerike elever og tilpasset opplæring.* Bergen: Fagbokforlaget.

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitative metoder* (5. utg.). Fagbokforlaget

Utdanningsdirektoratet. (2020). Kjerneelementer (MAT01-05). Hentet 15.03.2022, fra: https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nob

Weisberg, R. W. (2015). Toward an integrated theory of insight in problem solving. *Thinking & Reasoning, 21*(1), 5–39.

Wicklin, R., (2011), *Random Points in Cells of Regular Grid*. Hentet fra: https://blogs.sas.com/content/iml/files/2011/08/bincount.png

Woods, D. (2000). An Evidence-Based Strategy for Problem Solving. *Journal of Engineering Education.* Washington, D.C, *89*(4), 443-459

Yeo, J. (2015). Development of a Framework to Characterise the Openness of Mathematical Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(1), 175-191.

Vedlegg 1: Oppgavebasert intervjuguide

Sjekkliste før intervjuet starter

- Løsreven introduksjonsprat med eleven
- Intervjuene er frivillige og anonyme.
- Tenk høyt protokoll: «Si meg alt du tenker på fra du får oppgaven og til du kommer til et svar. Jeg vil at du tenker høyt hver gang du får en oppgave og til du er ferdig. Si alt du tenker uten å planlegge hvordan du skal forklare det. Bare lat som om du er alene i rommet og snakker med deg selv. Dersom du er stille i en lengre periode, kommer jeg til å be deg tenke høyt» (Ericsson & Simon, 1993).
- Prøv å løse oppgavene så godt du klarer. Hvis du arbeider godt og er flink å dele tankene dine, og vi får gjort gode notater så kan masteroppgaven bli god og vi kan få oss jobb som lærere neste år.
- Oppgavene du får kan oppleves som uvanlige og vanskelige. Før vi gir deg disse oppgavene skal vi stille deg noen generelle spørsmål

Starter lydopptak

Spørsmål om elevens bakgrunn, (skala: 1 = jeg misliker det, 10 = jeg liker det svært godt)

1. Hvor godt liker du matematikkfaget på en skala mellom 1-10?
2. Hvor viktig synes du matematikkfaget er på en skala mellom 1-10?
3. Hva synes du om å løse vanskelige oppgaver?
4. Hvor lang tid bruker du på å arbeide med matematikk hjemme hver uke?
5. Hvor god er din innsats i matematikktimene på skolen på en skala mellom 1-10?
6. Er noen av foreldrene dine veldig flinke i matematikk? – Jobber en av de med matematikk?

Oppgave 1 Gjentagende siffer

Oppgave 1

Skriv et tresifret tall. F.eks. 371. Gjenta tallet slik at du nå har 371371. Del dette tallet på 7. Del dette tallet på 11. Del dette tallet på 13. Hva skjer?

- Hint 1: Fyll inn tallet ditt i tabellen

Hundretusen-plassen	Titusen-plassen	Tusen-plassen	Hundrer-plassen	Tier-plassen	Ener-plassen

- Hint 2: Regn ut 7×11×13
- Hint 3: Hvorfor er 1001 spesielt?

Spørsmål til oppgave 1

1. Hva synes du om oppgaven?
2. Var det noe i oppgaven som gjorde deg usikker eller skjønte du den med en gang selv?
3. Hva var det som gjorde at du ikke fikk til/ fikk til oppgaven?
4. Hvordan opplevde du å få hintet?
5. Gjorde hintet at du kom til et svar?

Oppgave 2 Romersk arveproblem

Oppgave 2

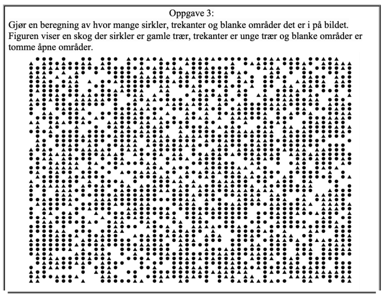
En døende mann skrev følgende i testamentet sitt: Hvis min gravide kone føder en sønn, arver konen 1/3 av eiendommen og sønnen 2/3. Hvis konen føder en datter, skal konen arve 2/3 av eiendommen og datteren 1/3. Konen fødte tvillinger etter at mannen hennes døde. En gutt og en jente. Hvordan vil mannens eiendommer bli fordelt?

- Hint 1: Per og Pål skal dele 1000 kr. Per fant pengene og skal ha 2/3. Pål mener de skal dele likt og skal ha ½. Hvor mye skal hver av dem ha?
- Hint 2: Kan man bruke en annen brøk enn 1/3?
- Hint 3: Nevn betingelsene i arven at sønnen er lovet mest.

Spørsmål til oppgave 2

1. Hva synes du om oppgaven?
2. Hva var det som gjorde at du ikke fikk til/ fikk til oppgaven?
3. Var det på noen tidspunkt du følte deg usikker på hvordan du skulle løse oppgaven?
4. Hvordan føltes det å være usikker?
5. Var det noe spesielt du gjorde når du var usikker?
6. Hvordan opplevde du å få hintet?
7. Hvordan opplevde du oppgaveteksten?
8. Gjorde hintet at du kom til et svar?
9. Synes du hintet var til hjelp?
10. Ble du mer usikker av hintet?

Oppgave 3 – Estimeringsoppgave



Hint 1: Anslå hvor mange sirkler det er i gjennomsnitt i hver rute i figuren?

Hint 2: Er det noen områder i skogen som ikke egner seg til å bruke i estimeringen? Hvordan kan du være sikker på at området du har valgt egner seg i estimeringen?

Spørsmål til oppgave 3	Avslutning på intervjuet:
1. Hva synes du om oppgaven? 2. Hva var det som gjorde at du syntes oppgaven var vanskelig? 3. Hva var det som gjorde at du ikke fikk til/ fikk til oppgaven? 4. Var det på noen tidspunkt du følte deg usikker på hvordan du skulle løse oppgaven? 5. Synes du din metode var god til å løse oppgaven, og hvorfor? 6. Hvordan opplevde du å få hintet? 7. Endret du tenkemåte etter du fikk hintet?	1. Hva syntes du om oppgavene som du fikk? 2. Hvor vanskelig synes du oppgavene var på en skala mellom 1-10? 3. Hadde du klart å løse oppgavene bedre alene (uten oss i rommet)? 4. Fikk du nok tid til å løse oppgavene? 5. Har du opplevd å plutselig skjønne hvordan du kan løse en vanskelig oppgave som du har stått fast med? - Hva gjorde at du fikk til? 6. Var det noen oppgaver du følte du var

Avsluttende ord:

- Du må ikke røpe detaljer om oppgavene til andre elever. Hvis ikke kan det hende at andre elever gjør det bedre på oppgavene enn deg.
- Repetere om anonymitet og takke for deltagelsen

Vedlegg 2: Utskriftsversjon av oppgavene og hintene

Oppgave 1 - Gjentagende siffer

Oppgave 1
Skriv et tresifret tall. F.eks. 371. Gjenta tallet slik at du nå har 371371. Del dette tallet på 7. Del dette tallet på 11. Del dette tallet på 13. Hva skjer?

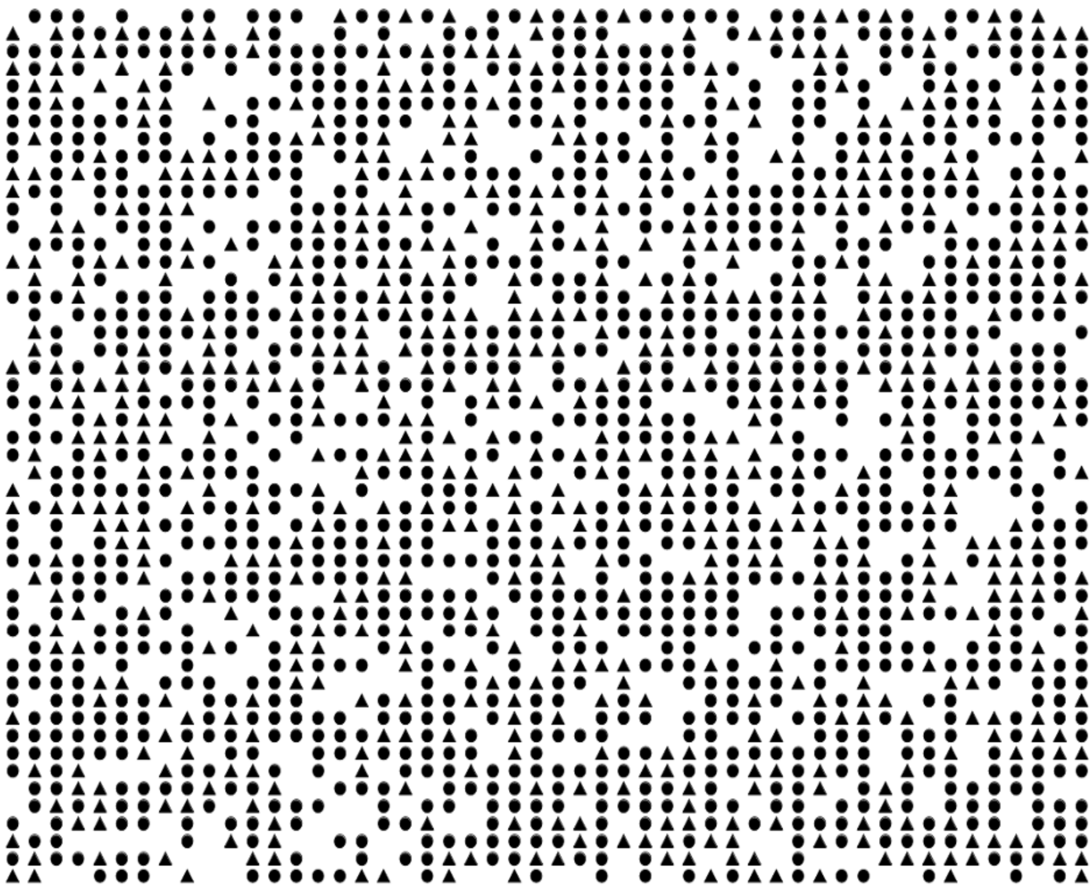
Oppgave 2: Romerske arveproblemet

Oppgave 2
En døende mann skrev følgende i testamentet sitt: Hvis min gravide kone føder en sønn, arver konen 1/3 av eiendommen og sønnen 2/3. Hvis konen føder en datter, skal konen arve 2/3 av eiendommen og datteren 1/3. Konen fødte tvillinger etter at mannen hennes døde. En gutt og en jente. Hvordan vil mannens eiendommer bli fordelt?

Oppgave 3: Telle trær

Oppgave 3:

Gjør en beregning av hvor mange sirkler, trekanter og blanke områder det er i på bildet. Figuren viser en skog der sirkler er gamle trær, trekanter er unge trær og blanke områder er tomme åpne områder.



Figuren er 50×50, med blanke områder.

Hint 1 oppgave 1

Fyll inn tallet 371371 i tabellen.

Hundretusen-plassen	Titusen-plassen	Tusen-plassen	Hundrere	Tiere	Enere

Hint 2 oppgave 1

Hint 2. Regn ut $7 \times 11 \times 13$.

Dersom eleven har gjort dette kan vi heller spørre hvorfor 1001 er spesielt.

Eller: Hva skjer om man ganger et tall med 1000 da?

Hint 1 oppgave 2

Per og Pål skal dele 1000 kr. Per fant pengene og skal ha 2/3. Pål mener de skal dele likt og skal ha 1/2. Hvor mye skal hver av de ha?

Hint 2 oppgave 2

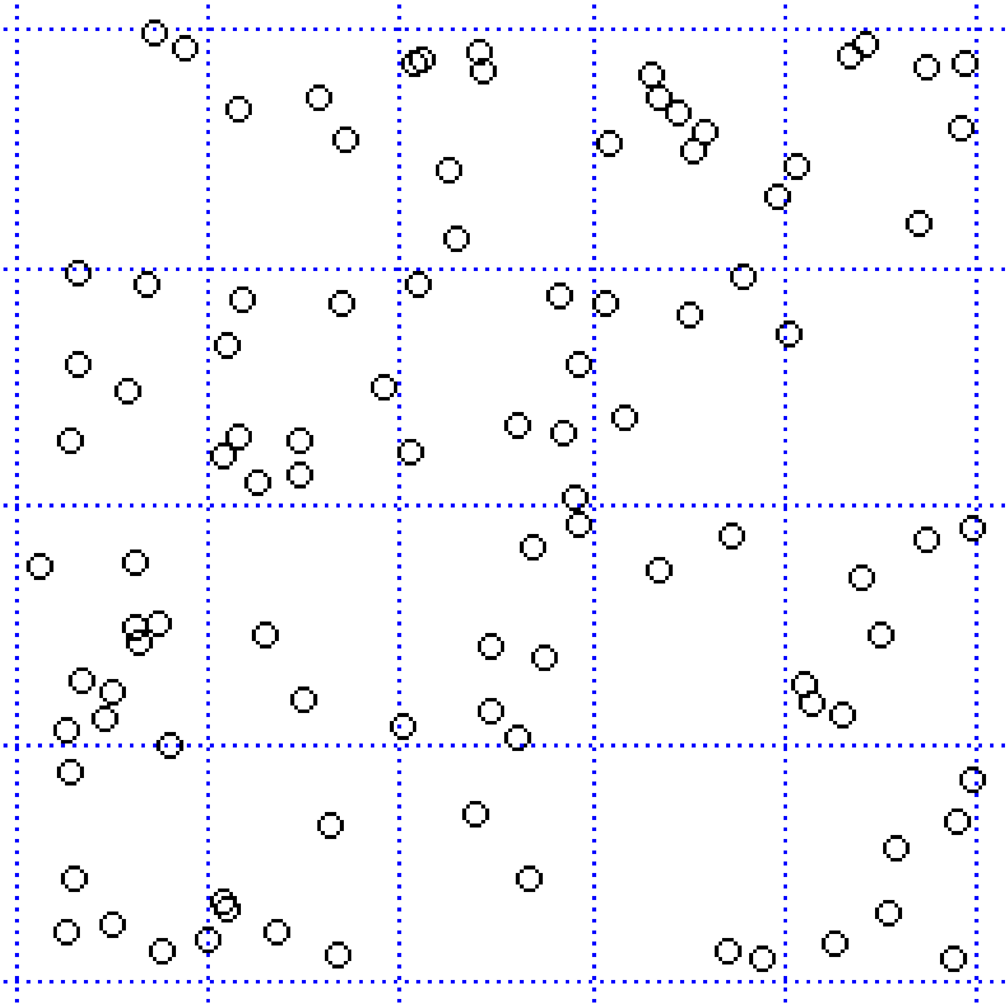
Kan man bruke en annen brøk enn 1/3.

Hint 3 oppgave 2

Nevne betingelsene i arven, at sønn er lovet mest.

Hint 1 oppgave 3

Anslå hvor mange sirkler det er i gjennomsnitt i hver av rutene i figuren



Hint 2 oppgave 3

Er det noen områder i rutenettet som ikke egner seg til å bruke i estimeringen? Hvordan kan du være sikker på at området du har valgt egner seg til estimeringen?

Vedlegg 3: NSD søknad

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

Meldeskjema

Referansenummer

465648

Hvilke personopplysninger skal du behandle?

- Lydopptak av personer

Type opplysninger

Skal du behandle særlige kategorier personopplysninger eller personopplysninger om straffedommer eller lovovertredelser?

Nei

Prosjektinformasjon

Prosjekttittel

Masteroppgave i matematikk didaktikk

Prosjektbeskrivelse

Vi er to studenter ved UiT som skal gjennomføre masteroppgave i matematikkdidaktikk.

Vi skal undersøke hvordan elever med høy måloppnåelse oppnår innsikt og håndterer usikkerhet med forskjellige typer problemløsningsoppgaver. Vi skal gjennomføre oppgavebasert intervju med 8-12 faglig sterke elever enkeltvis med lydopptak. I intervjuet gir vi elevene flere typer problemløsningoppgaver.

Begrunn behovet for å behandle personopplysningene

Vi trenger lydopptak av 8-12 oppgavebaserte intervju med enkeltelever for å sikre en grundigere datainnsamling til prosjektet vårt. Informasjonen er kun om hvilke tanker elever har til noen matematiske oppgaver, og deres fremgangsmåter og løsningsstrategier.

Ekstern finansiering

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Paul Andreas Engebakken, pen010@uit.no, tlf: 99096311

Behandlingsansvar

Behandlingsansvarlig institusjon

UiT Norges Arktiske Universitet / Fakultet for humaniora, samfunnsvitenskap og lærerutdanning / Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Per Øystein Haavold, per.oystein.haavold@uit.no, tlf: 77645587

Skal behandlingsansvaret deles med andre institusjoner (felles behandlingsansvarlige)?

Nei

Utvalg 1

Beskriv utvalget

Utvalget består av 8-12 elever på 5-7 trinn ved en skole i Tromsø kommune. Elevene vi ser etter er av de som har høy måloppnåelse i matematikkfaget. Kjønn på elevene er ikke vesentlig

Rekruttering eller trekking av utvalget

Vi rekrutterer sammen med kontaktlærere på den respektive skolen

Alder

11 - 13

Inngår det voksne (18 år +) i utvalget som ikke kan samtykke selv?

Nei

Personopplysninger for utvalg 1

- Lydopptak av personer

Hvordan samler du inn data fra utvalg 1?

Personlig intervju

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Hvem samtykker for barn under 16 år?

Foreldre/foresatte

Informasjon for utvalg 1

Informerer du utvalget om behandlingen av opplysningene? Ja

Hvordan?

Skriftlig informasjon (papir eller elektronisk)

Tredjepersoner

Skal du behandle personopplysninger om tredjepersoner?

Nei

Dokumentasjon

Hvordan dokumenteres samtykkene?

- Manuelt (papir)

Hvordan kan samtykket trekkes tilbake?

Foresatte kontakter elevens lærer og læreren kontakter oss.

Hvordan kan de registrerte få innsyn, rettet eller slettet opplysninger om seg selv?

De kan høre lydopptak og se feltnotater. Og henvende seg til oss.

Totalt antall registrerte i prosjektet

1-99

Tillatelser

Skal du innhente følgende godkjenninger eller tillatelser for prosjektet?

Behandling

Hvor behandles opplysningene?

- Maskinvare tilhørende behandlingsansvarlig institusjon
- Mobile enheter tilhørende behandlingsansvarlig institusjon

Hvem behandler/har tilgang til opplysningene?

- Prosjektansvarlig
- Student (studentprosjekt)

Tilgjengeliggjøres opplysningene utenfor EU/EØS til en tredjestat eller internasjonal organisasjon?

Nei

Sikkerhet

Oppbevares personopplysningene atskilt fra øvrige data (koblingsnøkkel)?

Ja

Hvilke tekniske og fysiske tiltak sikrer personopplysningene?

- Flerfaktorautentisering

Varighet

Prosjektperiode

01.09.2021 - 16.05.2022

Skal data med personopplysninger oppbevares utover prosjektperioden?

Nei, alle data slettes innen prosjektslutt

Vil de registrerte kunne identifiseres (direkte eller indirekte) i oppgave/avhandling/øvrige publikasjoner fra prosjektet?

Nei

Tilleggsopplysninger

Vedlegg 4: Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet vårt?

Masteroppgave om problemløsning i matematikk

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan elever løser ulike problemløsningsoppgaver. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Vi er to studenter som holder på med masteroppgave i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Tromsø. Vi skal undersøke hvordan elever løser ulike typer problemløsningsoppgaver. Dette skal vi undersøke ved å gjennomføre oppgavebaserte intervju.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Per Øystein Haavold, ved UiT er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Noen elever på din skole vil få henvendelsen

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å delta i prosjektert, kan du bli tatt ut av undervisningen i omtrent 30-60 minutter for å løse noen matematikkoppgaver. Samtidig vil det foregå et intervju med lydopptak om hvordan eleven tenker i oppgaveløsings-situasjonen.

Informasjonen som kommer frem fra intervjuet og svarene til oppgavene vil vi bruke i masteroppgaven.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis dere velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle elevens opplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser å ikke delta eller om du senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om eleven til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Opplysningene anonymiseres når prosjektet settes i gang. Lydopptak fra intervju slettes ved prosjektets slutt som er i mai 2022.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra UiT har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

Veileder ved UiT

Per Øystein Haavold

Epost: *per.oystein.haavold@uit.no*,

Tlf:77645587

Vårt personvernombud:

Joakim Bakkevold

Epost: personvernombud@uit.no

Tlf:77646322 og 97691578

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Veileder	*Studenter*	
Per Øystein Haavold	Paul Andreas Engebakken & Marcus Johnsen	
per.oystein.haavold@uit.no	pen010@uit.no	mjo288@uit.no
	99096311	90250411

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet. Jeg samtykker til:

☐ å delta i oppgavebasert intervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av foresatt, dato)

Vedlegg 5: NSD - Godkjenning

Vurdering

Referansenummer 465648

Prosjekttittel

Masteroppgave i matematikk didaktikk

Behandlingsansvarlig institusjon

UiT Norges Arktiske Universitet / Fakultet for humaniora, samfunnsvitenskap og lærerutdanning / Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Prosjektansvarlig (vitenskapelig
ansatt/veileder eller stipendiat) Per
Øystein Haavold,
per.oystein.haavold@uit.no, tlf:
77645587

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Paul Andreas Engebakken, pen010@uit.no, tlf: 99096311

Prosjektperiode

01.09.2021 - 16.05.2022

Vurdering (1)

09.11.2021 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 09.11.2021 med vedlegg. Behandlingen kan starte.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til dato 16.05.2022.

Merk at når barn skal delta aktivt er deltagelsen alltid frivillig for barnet selv om de foresatte samtykker. Barnet bør få alderstilpasset informasjon om prosjektet. Dere må sørge for at de forstår at deltakelse er frivillig og at de kan trekke seg når som helst dersom de ønsker det.

LOVLIG GRUNNLAG

Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER

NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen - formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER

NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:

https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET

NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om

behandlingen av personopplysningene er avsluttet. Kontaktperson hos

NSD: Sturla Herfindal Lykke til med prosjektet!