EUREKA
Digital
2-2010

Algorismus i Hauksbok

En norrøn regnetekst fra 1300-tallet

Otto B. Bekken
Universitetet i Agder

Marit A. Nielsen
Universitetet i Agder

Steinar Thorvaldsen
Universitetet i Tromsø

EUREKA DIGITAL 2-2010
ISSN 0809-8360
ISBN: 978-82-7389-211-9

Algorismus i Hauksbok[1]

Sammendrag
Hauksbok er ett av de få middelalderhandskrifter der vi kjenne hovedhanda ved navn. På ett av bladene navngir skriveren seg som *Haukr Erlendsson (? -1334)*. Så langt vi kan spore handskriftets historie tilbake i tida, har det derfor båret navnet *Hauksbok*. Vi vet ikke når han ble født, men vet at han ble lagmann på Island i 1294 og kom til Norge ca. 1301. I brev fra 1311 kalles han Gulatings lagmann og ridder. Fram mot 1322 ser det ut til at han har fungert som lagmann i Gulating. Den matematiske delen av Hauksbok kalles *Algorismus* og utgjør ca. 6-7 A4-sider. Dette er den eldste regnebok med "våre" tall på et nordisk språk. En oversettelse til moderne norsk med kommentarer følger til slutt i denne teksten.

1. Innledning[2]

Kildene

Munch (1847) kaller tallene i Algorismus for "arabiske tall", slik som vanlig var på 1800-tallet. Araberne kalte alltid tallsymbolene og regnemetodene for indiske. Deres første systematiske møte med dette tallsystemet som vi kjenner til, fant sted i Bagdad under Khalif al-Mansur i 773. I India går bruken av det desimale posisjonssystemet i hvert fall tilbake til ca. 300 e.Kr.

Den fremste matematikeren i Bagdad på 800-tallet var **Muhammed Al-Khwarizmi**. Bildet viser et sovjetisk frimerke gitt ut i 1983 til minne om hans 1200-års fødselsdag. Han er mest kjent for sin bok "Aljabr w'al muqabalah", opphavet til vårt ord og emne **algebra**. Al-Khwarizmi skrev også ei regnebok. Originalversjonen er gått tapt, men boka ble oversatt til latin i Toledo omkring 1130 med tittel: "**Algoritmi de numero Indorum**". En versjon finnes i dag i Cambridge, og teksten begynner slik (Vogel, 1963, s. 9):

> *Algorizmi sier: La oss gi Gud, som styrer og forsvarer oss, en ham verdig lovprisning ... at han ved sin gode vilje hjelper oss i dette vi har besluttet å legge fram og klargjøre:* ***Om indernes tall ved IX tegn*** *...*
>
> *Algorizmi sier: Da jeg så at inderne i hele sitt tallunivers gjennomførte bruken av de IX tegn ... De laget altså IX tegn hvis form er:*

[1] Tidligere gjort tilgjengelig for internett av Steinar Thorvaldsen, Høgskolen i Tromsø, 1999. Referanse: http://www.afl.hitos.no/mahist/hauksbok/
[2] Utdrag fra Nordisk matematikkdidaktikk nr 1, 1995.

Disse ni tegn mangler i Cambridge-handskriftet, og er her gjengitt fra det eldste eksempel vi kjenner i Europa, Codex Vigilanus fra 976 (Vogel 1963, s. 5l). Som vi senere skal se tar Algorismus i Hauksbok også med et tegn for null slik som var vanlig på 1300-tallet.

Ellers legger vi merke til at **Al-Khwarizmis** navn er blitt latinisert til **algorizmi**. Herfra har vi fått ordet **algoritme**, og herfra kommer Hauksboks betegnelse **Algorismus**, som navn på det araberne kaller hinduisk regning.

I middelalderens Europa finner vi på denne tiden fire typer handskrifter om tall og tallregning:

- Tallteoretiske verk som bygger på en gresk tradisjon fra Euklid og Nikomakos via Boëthius til Jordanus Nemorarius (ca. 1225).
- Abakus-verk om handelsregning på regnebrett med "calculi", "jetons" eller "counters", og med romertall.
- Computi ecclesiastici, dvs. veiledning i kirkekalenderen, for å regne ut påske og andre flyttbare helligdager.
- Algorismer - om grunnleggende regneteknikker i et desimalt, posisjonelt tallsystem, som bygger på Al-Khwarizmis tekster.

Her i Norden finner vi bare de to siste typene representert. De tre algorismene som framfor andre fikk utbredelse i Europa, ble skrevet på 1200-tallet:

- Leonardo Fibonacci fra Pisas "**Liber Abaci**" fra 1202.
- Alexander de Villa Dei's "**Carmen de Algorismo**" fra tida etter 1200.
- Johannis de Sacroboscos "**Algorismus Vulgaris**" fra ca. 1230.

I det lange løp var det Fibonaccis verk som fikk størst betydning, fordi mange trykte aritmetikkbøker fra Italia ca. 1500 bygget på det. Men i den perioden som vi nå ser på, rundt 1300, hadde de to andre størst utbredelse.

Smith og Karpinski (1911, side 99) framholder at det snarere var handelsmannen og ikke vitenskapsmannen som brakte de hindu-arabiske tall til Europa. Økt handel førte til større behov for effektive regnemetoder. Fibonaccis Liber Abaci og de første trykte italienske matematikkverkene har et slikt praktisk siktemål. Det er ikke tilfelle når det gjelder algorismene til Villa Dei og Sacrobosco. De skrev lærebøker for universitetsstudenter.

Forfatteren av "**Carmen de Algorismo**", **Alexander de Villa Dei** (? -1240), kom fra byen Villedieu i Normandie. Han underviste i Paris i 1209. Alle hans verk, også en latinsk grammatikk, ble skrevet på vers. Sjøl om de indiske regnemetodene er effektive ved regning på papir, stiller de også store mentale krav. Det ble derfor nødvendig å huske verdien av flere tallsymbol, å memorere addisjons- og multiplikasjonstabellene for disse symbolene, å huske de posisjonelle prinsippene og å automatisere regneoppsett for de ulike regningsartene ut fra dette. Det er lettere å pugge og å huske slike ting på vers, noe som forklarer denne uvante formen. En typisk læreboksform var derfor verseformen, selv om også dialogformen ble brukt.

Historikerne er enige om at alle algorismemanuskriptene bygger på en eller annen versjon av Al-Khwarizmis regnebok fra 800-tallet, men de avviker på vesentlige punkter fra det Cambridgemanuskriptet som vi har nevnt foran. Al-Khwarizmi behandler vanlige brøker og seksagesimalbrøker slik som andre indiske og arabiske kilder. Alt om brøkregning mangler hos Villa Dei, Sacrobosco og også i Hauksbok. Diktet "**Carmen de Algorismo"** ble av historikerne pekt på som den primære kilde for Algorismus i Hauksbok rundt midten av 1800-tallet.

Kampen mellom de to tallsystemer

...nothing would have astonished a Greek mathematician more than the whole population of Europe being able to perform division ... our modern power of easy reckoning is the result of a perfect notation.
(A.N. Whitehead)

Algorismus i Hauksbok er altså ei lærebok i regning med posisjonsystem. Det konkurrerende tallsystemet i Europa på Hauks tid var det enkle additive romertallsystemet der regningen foregikk på abakus, regnebrett. På Hauks tid var utfallet av kampen mellom de to systemene på ingen måte klart. Det tok nye 300 år, fram til ca. 1600, før regnebrettmetodene forsvant, til tross for de fordelene vi med våre etterpåkloke øyne kan se ved posisjonssystemet når det gjelder å effektivisere regneprosessene på papir. Vi må se Algorismus i Hauksbok også mot denne bakgrunnen. Det er snakk om en fullstendig endring av prinsipper. Illustrasjonen kalt *Typus Arithmeticae* er fra 1535.

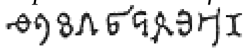
Allerede ca. 800 fantes det papirmøller i Bagdad. Først 1154 kom de til Spania. De første trykte aritmetikkbøker kom ut i Italia i 1478 og 1484. Tilgangen på papir og utviklingen av boktrykking førte til gradvis standardisering mot våre skrive- og regnemåter. Abakusregningen forsvant i Europa, og dobling/halvering forsvant fra lærebøkene etter hvert som en innså at dette bare representerte spesialtilfeller av multiplikasjon/divisjon uten egen verdi lenger.

Bortsett fra addisjon og subtraksjon, ble regneprosessene ansett som vanskelige. Fra denne tida finnes en anekdote om en ung tysker som fikk det råd at addisjon og subtraksjon kunne han nok lære seg i Tyskland, men for å lære multiplikasjon og divisjon burde han dra til Italia.

Det vokste fram et regnemester-laug som ledet skoler i handelsregning. To av de mest populære bøkene herfra var Jacob Köbels *"Rechenbuch auff linien und Ziffern"* (1514) og Adam Rieses *"Rechnung auff der Linihen und Federn"* (1525).

Det var disse to som i 1552 dannet grunnlaget for den første trykte regnebok på dansk av Herman Veigere: *"En Kaanstelig och nyttelig Regne Bog faar Schriffuere, Fogeder,* *Købmend, Och andre som bruge Købmandskaff, paa Linyerne met Regne pendinge, och Zifferne udi heelt och brødit tal..."* Av fortalen framgår det at det dreier seg om både "danske tal" = romertall, og om "Figurer (som menig Mand kalder ziffer), hvilket navn egentlig kun tilkommmer 0" (Larsen, 1952, s. 7f). Altså holdes både regning med sifre og med romertall i hevd.

Algorismus

Hér byrjar algorismum. List þessi heitir algorismus. Hana fundu fyrst indverskir menn ok skipudu med .x. stofum þeim er svá eru ritnir: 

Algorismus i Hauksbok starter med å forklare posisjonssystemet. Boka navngir bare de to første plassene. Enerne kalles *finger* og tierne kalles *ledd*, mens de andre kalles sammensatt tall. Vi finner her også norrøne navn på 7 regningsarter:

vidrlagning	**= tillegging**	**= addisjon**
afdráttr	**= fratrekking**	**= subtraksjon**
tvifaldan	**= tofolding**	**= dobling**
helmingaskipti	**= halvdeling**	**= halvering**
margfaldan	**= mangfolding**	**= multiplikasjon**
skipting	**= deling**	**= divisjon**
taka rót undan	**= ta rot av**	**= rotutdraging**

Ingen indiske kilder behandler dobling og halvering som egne regningsarter, men disse kommer til i arabiske kilder. Algorismus i Hauksbok følger Carmen når det gjelder antall regningsarter og rekkefølgen mellom dem:

> *"I sju er denne kunstens greiner delt: den første heter tillegging, den andre fratrekking, den tredje tofolding, den fjerde halvdeling, den femte mangfolding, den sjette deling, den sjuende å ta rot av. Og denne greina går i to retninger: den ene er å ta rot av firkanta tall, den andre er å ta rot av åttehjørna tall som har terningform."*

Algorismenes metoder til å finne kvadratrøtter og kubikkrøtter er helt avhengige av posisjonsskrivemåten for tall.

Det er ikke enkelt å gjøre seg bruk av de rent verbale metodene i teksten fra Algorismus i Hauksbok. Teksten sier oss noe om læring og forståelse av regning i katedral- og klosterskolene på Hauks tid. Regnemetodene gis uten illustrerende eksempler. Det er neppe mange allmennlærere i vår norske skole som vil være i stand til å forstå og gi gode regneeksempler for sine elever kun utfra oppskriftene i læreboka. Som noter til teksten er derfor forklarende *regneeksempler* tatt med. Her følger den rundt 700 år gamle norrøne teksten:

2. Algorismus

Av Haukr Erlendsson.
Manuskript på gammelnorsk fra ca. år 1310.

Oversatt til moderne norsk av Otto B. Bekken og Marit A. Nielsen.
Tidligere utgitt av Agder Distriktshøgskoles skriftserie, 1985 nr.1.

1. Her begynner algorismus

Denne kunsten heter algorismus. Den ble først funnet av inderne, som utformet den med x tegn som blir skrevet slik [1] 

På enerplass [2] står det første tegnet for én, det andre for ij, det tredje for tre og så videre bortetter, like til det siste, som heter cifra (null). Disse tegnene skal en begynne med fra høyre og skrive mot venstre som på hebraisk.

2. Om tegnenes betydning

Hvert av disse tegnene står for sin verdi på enerplass. Men hvis det settes på neste plass i forhold til der det står, betegner det x ganger seg sjøl, og på hver nye plass du setter tegnet i forhold til der det stod før, betegner det alltid x ganger mer på plassen mot venstre enn på nærmeste plass før. Cifra betegner ingenting i seg sjøl, men det markerer plass og gir de andre sifrene verdi. [3]

3. Om tegnenes inndeling

Dernest hører det til å kjenne den tregreina inndelinga av tegnene og alle tall, fordi hvert tall mindre enn x heter finger, men hvert tall som svarer til et antall tiere heter ledd, enten det er stort eller lite. Men det tallet som består av både ledd og finger, heter et sammensatt tall.

4. Om finger og siffer

Vil du skrive et tall, så tenk over om det bare er en finger, og skriv så på enerplass det sifferet som trengs, på følgende vis: 8. Men hvis du vil skrive et ledd, så sett null før [4] sifferet på dette vis: 70. Vil du skrive et sammensatt tall, så sett fingeren før leddet, som her: 65.

5. Hvordan et tall blir jamt eller ujamt [5)]

Ethvert tall som du skriver, er jamt hvis det svarer til et antall tiere eller i tillegg inneholder en jamn finger. Men tallet er ujamt hvis det i tillegg inneholder en ujamn finger. Av jamne fingre er det fire: 2,4,6,8, og av ujamne fire andre: 3,5,7,9. En er verken det ene eller det andre, fordi det ikke er et tall, snarere opphavet til alle tall.

6. (Regningsartene)

I sju er denne kunstens greiner delt: den første heter tillegging, den andre fratrekking, den tredje tofolding, den fjerde halvdeling, den femte mangfolding, den sjette deling, den sjuende å ta rot av. Og denne greina går i to retninger: den ene er å ta rot av firkanta [6)] tall, den andre er å ta rot av åttehjørna tall som har terningform.

7. Hvordan du skal trekke fra og legge til

Fra høyre skal du trekke fra, legge til og halvdele, men fra venstre skal du tofolde, dele, mangfolde og trekke ut begge slags røtter. [7)]

8. Her sies det hvordan et tall legges til et annet

Hvis du vil legge et tall til et annet, så skriv det største tallet øverst og sett det minste tallet like langt til høyre, og legg først det sifferet som står lengst til høyre, til tallet. Hvis hele det tallet til sammen er en finger, så skriv den ned på samme plass. Men hvis tallet blir sammensatt, så skriv fingeren ned på enerplass, og legg leddet til det tallet som står på neste plass fra før. Men hvis det blir et ledd av tilleggingа på enerplass, så skriv null der, og legg leddet til det tallet som står nærmest, hvis det er noe tall der, eller skriv det der aleine. Men hvis det står null der, så ta den bort og sett leddet der. Legg siden de andre sifrene til på samme måte. [8)]

9. (Om fratrekking)

Hvis du vil trekke et tall fra et annet, så skriv de to tallene som når du legger til, og sett alltid det minste tallet under, og dessuten like langt til høyre. [9)] Så trekker du fra det første sifferet det tallet som står under, hvis det går, og skriv det ned på samme plass, om det er noe igjen, eller sett null der.

Men hvis du ikke kan trekke fra det første sifferet fordi det som står under, er større, så tar du en fra neste siffer. Pass på at det betyr x på forrige plass. Trekk så fra dette hele det tallet som står under, og skriv på samme plass det [10)] som blir igjen. Hvis det står nuller øverst, så ta én fra det sifferet som står nærmest nullene og skriv ni der nullene var, like til du kommer til den plassen der du vil trekke fra.

Og trekk fra tallet fra de ti som trengs på den plassen, og skriv på samme plass det som blir igjen.

10. Hvordan en skal tofolde tall

Hvis du vil doble et tall, så skriv først ned det tallet du vil ha. Dernest dobler du sifferet lengst til venstre, og skriver det overskytende på forrige plass som når du legger til. Men hvis semistegnet står over enerplassen, legger du til en, for da var det tidligere et ujamt tall som var halvert på den plassen (teksten har her feilskrift: jamt for ujamt). [11)]

11. (Om halvdeling)

Men hvis du vil ta halvdelen av et tall, så skriv ned det tallet du vil ha, og ta halvdelen av enersifferet hvis det er jamt. Men hvis det er ujamt, så del i halvdeler det som er over én , og ta bort én, men skriv over plassen det tegnet som betyr en halv, og som vi kaller semiss, og som lages slik .

(Men hvis sifferet er en) sett null i stedet. [12)] Ta dernest halvdelen av det andre sifferet på samme måten, hvis det er jamt. Men hvis det er ujamt, så ta halvdelen av det som er jamt. Ta opp én og sett fem på forrige plass, fordi det er halvdelen av x. Men hvis det på andre plass står én, så ta den opp, skriv v på forrige plass, men sett null der den stod. Null betyr ingenting, med mindre det står et siffer til venstre for den. Gå så fram på liknende vis samme hvor mange sifrene er. [13)]

12. Om mangfolding (ganging, multiplikasjon)

Hvis du vil gange et tall med et annet, skriv da to rekker med tegn på det viset at det ytterste sifferet i det tallet du ganger med, står under første tegn i det øverste tallet, men alle de andre som står under, til venstre for dette. Dernest skal du tenke på hvor mye det største sifferet du vil gange, mangler på x. [14)] Så mange ganger skal du trekke det minste tallet du vil gange, fra tierne sine. For at du skal forstå dette, gang vij med ni. Ni mangler én på x. Derfor tar du én ganger vij (en sjuer) fra vii tiere (sytti). Da blir det igjen iij og vi tiere. Dette er vij ganger ni. På samme måte kan du prøve med andre tall. Gang det første sifferet på riktig vis med alle de som står under, og skriv over hvert siffer det mangfoldet det har, og til venstre det som ikke kan stå over det, på neste plass ved riktig addisjon. Og når dette sifferet er ganget, fører du det ytterste av de som står under, under neste siffer, og ganger med det slik som med det forrige. Hvis ganginga gir deg et ledd, sett null øverst og leddet til venstre. Men hvis det blir både finger og ledd, så skriv fingeren over det sifferet som du ganget med, og leddet på neste plass. Men hvis det bare blir en finger av ganginga, så skriv den øverst. Hvis det står en null i det øvre tallet, så hopp over den, for nullen gir ikke noe mangfold. Du må også passe på å ta bort de sifrene som står øverst, straks du har ganget dem, og (du må passe på) å skrive den rette fingeren på den plassen den hører til, eller null, om det er rettere. Men legg det som blir igjen, til det som står til venstre. Hvis det står null øverst i det sifferet du ganger med, så ta den bort hvis det blir en finger av ganginga. [15)] Ellers skal nullen stå. Hvis du lurer på om du har ganget rett, så del heile tallet med det du ganget med. Det er det tallet som stod under, og du vil få det samme tallet som du før hadde.

13. Om deling

Hvis du vil dele et tall i deler, så skriv to rekker med tegn og skriv det minste tallet under. Det største kan være dobbelt så stort, tre eller flere ganger så stort. Sett det fremste sifferet som står under, mot det første ovenfor, og de andre videre mot høyre til det tar slutt på de som står underst. Dernest skal du tenke på hvor mange ganger det første sifferet [fingeren] [16)] går opp i [er i] det som står over, og på en slik måte at like mange ganger skal de som følger etter dette sifferet, gå opp i det tallet som står over. Sett denne fingeren rett ovenfor det ytterste sifferet som står nede, og likevel ovenfor begge rekkene. Trekk siden det første (sifferet nede) fra det første sifferet (oppe), og dernest ett for ett så mange ganger (som denne fingeren tilsier,) fra det øvre tallet. Men hvis det (bare) står ett tall under, så trekk det fra det øvre tallet. Flytt deretter hele tallet som står under, én plass (mot høyre) og finn annen kvotient [17)], og sett den ved siden av den første, og trekk det nederste tallet i (dvs. ganget med) annen i kvotient [18)] fra det øvre, og gjør på samme måte så mange ganger som trengs. Men hvis du ikke får det nederste tallet til å gå opp i (sifrene i) det øvre, så sett det sifferet [fingeren] som står fremst nede, nærmest den første, og de andre på samme vis mot høyre, og finn siden kvotientene på slikt vis (som ovenfor). Flytt etter sifrene som trengs og skriv alle kvotientene øverst, så mange som trengs. Men hvis en null står nedenunder, så hopp over den, for den kan en ikke dele med. Når du kommer under det ytterste sifferet og har delt det, må du ikke dele lenger. Men pass på det tallet som står til rest, hvis det er noe. Men hvis du vil prøve om du deler rett, så gang det tallet som stod under, med kvotientene, og du vil få det tallet som du først hadde. Men hvis det ble noe til rest i delinga, så legg det til etter at det er ganget ut, og du vil finne det samme tallet.

14. (Om å ta kvadratrot)

Når du tar et tall og ganger med seg sjøl, heter det tallet du får, et firkanttall eller kvadrattall. Det første tallet som du ganget (med seg sjøl), heter rot. Ethvert tall er rot til et tall. Men ikke ethvert tall er firkanttall. Hvis du vil finne rota til et tall, så skriv først det tallet du vil. Under den første ujamne plassen (fra venstre) [19)], skriver du et siffer [20)] som du ganger med seg sjøl, og trekker fra det som står øverst, som, (når du ganger,) kommer nærmest dette. Siden dobler du det samme sifferet. Det (du da får,) heter dupl. Ta bort sifferet, det heter subdupl. Merk deg subduplet, men skriv duplet på neste plass, hvis det er en finger. Men hvis det er et ledd, så skriv det der som det forrige sifferet stod og sett en null etter, eller en finger, hvis det er et sammensatt tall. Finn siden et nytt siffer og gang det med duplet, og trekk fra det øvre tallet det tallet som du ganget (deg fram til). Siden ganger du (det siste) sifferet med seg sjøl, og trekker det tallet fra det øvre like ovenfor det. Dernest dobler du [21)] (det siste) sifferet samtidig med det forrige subduplet, men merker deg sifferet. -Sett (det nye) duplet på neste plass som før. Finn dernest et nytt siffer og gang det med begge duplene samtidig, men etter at du har flytta [og flytt] det forrige duplet [22)] én plass nærmere det siste duplet, og legg til der hvis det der stod ledd fra før i dette duplet. Gang deretter det nye sifferet med begge duplene, og trekk det tallet (du da får,) fra det øvre, like ovenfor duplet. [23)] Gjør på samme måte så ofte som det trengs, og gang et nytt siffer med alle duplene, og flytt dem alltid en plass videre inntil du kommer til den ytterste plassen (mot høyre). Hvis hele det tallet som du skreiv i begynnelsen, tar slutt, da var det tallet et firkanttall. Og rota til det tallet er alle de sifrene som du doblet, medregnet det siste sifferet du fant. Gang rota med seg sjøl, og du vil få det samme tallet som i begynnelsen, hvis du gjorde rett. Hvis det blir noe til rest av tallet når du trekker ut rota, så var det tallet ikke et firkanttall. Legg det tallet til det som du fikk når du ganget sammen røttene, og du vil få det første tallet. Det tallet som rota og resten utgjør til sammen, er rota til et større tall. [24)] Hvis den første plassen (fra venstre) i det tallet du skreiv, var jamn, så finn et siffer under neste siffer og gang på samme vis.

15. (Om å ta kubikkrot)

Hvis du ganger et firkanttall på rett vis med seg sjøl (egentlig skal det stå: med sin rot), da heter det tallet som kommer ut av ganginga, et terningtall, kubikktall. [25)] Det er like stort til alle kanter. Rota til kubikktallet var den samme som til firkanttallet. Ethvert tall er rota til et terningtall eller et kubikktall, men ikke ethvert tall er et kubikktall. Hvis du vil finne rota til et kubikktall, tenk på hvor stort tallet er, og på hvor mange plasser der er. Finn dernest en finger på den fremste tusenplassen. Tusenplasser kaller vi alle de [26)] som kan deles i bare tusener, det er den fjerde, den sjuende, den tiende og den trettende, og (du) hopper alltid (over) ij plasser. Du skal begynne dette arbeidet fra venstre. [27)] Gang den fingeren du fant, kubisk med seg sjøl, det vil si mangfoldet to ganger, først med seg sjøl og andre gang med det tallet som da framkom (i første ganging). Trekk dernest hele dette tallet fra det øvre tallet rett ovenfor fingeren sjøl. Trefold dernest fingeren, og hopp over én plass med det tallet, og sett det på tredje plass (mot høyre) etter [foran] [28)] den (fingeren), hvis det er en finger. Men hvis det er et ledd, så sett null der og leddet på forrige plass. Men hvis det er et sammensatt tall, så sett fingeren på samme plass, men leddet på den forrige. Finn dernest en ny finger på nærmeste plass til det trefoldige tallet som heter trippel, og gang med triplet [ved ganging] den (nye fingeren), samt det sifferet du først fant, som blir kalt subtrippel, slik at den (nye fingeren) står til høyre for det (sifferet). Gang. dernest (den nye) fingeren aleine med det tallet som kom ut av (den siste) ganginga, og som vi kaller produktet. Trekk så hele dette tallet fra det øvre like ovenfor der som triplet stod.

Dernest ganger du den samme fingeren kubisk med seg sjøl og trekker det fra det øvre tallet like ovenfor fingeren sjøl. Ta denne fingeren og trefold her som ved den forrige, og finn så en ny finger og gang den, samt begge subtriplene, med triplene.

Flytt alltid triplet videre etter, [29)] slik som du gjør i den mindre rotutdragningen med dupl, bortsett fra at her skal du alltid hoppe (over) én plass, men likevel legge trippel til trippel på samme vis ved rett addisjon. Fortsett på samme måte så lenge det trengs, og du kommer til den ytterste plassen (mot høyre). Men det må du omhyggelig huske på når du finner fingrene, at de ikke tar så mye fra det øvre tallet at det ikke blir plass til det tallet du får når du ganger triplene, eller til det andre tallet du får når du ganger ut fingeren seinere. Husk alltid på såvel subtriplet som triplet. Pass også på, hvis det kommer nuller i subtriplet, at disse ikke gir noe mangfold eller trefold. Men de beholder plassene sine så lenge det står et siffer til høyre for dem. Og det er minst vanskelig ved addisjon av triplene, at det alltid foregår slik som det før er skrevet i (avsnittet om) addisjonskunsten. Alle fingrene som var subtripler, og den ytterste fingeren med, er rota til det større tallet som du skreiv først, hvis hele tallet gikk opp i fratrekkinga. Og hvis du ganger subtriplene kubisk med seg sjøl, så vil du finne det første tallet. Men hvis det ble noe til rest i fratrekkinga, så er det tallet ikke kubisk, men likevel er denne resten, sammen med subtriplene, rota til et eller annet kubikktall. Hvis du ganger rota til det mindre tallet kubisk og legger resten til det tallet du får i ganginga, så vil du få det første tallet som du skreiv. Nå skriver vi ikke mer om dette for denne gang.

16. (Kvadrat- og kubikktallene)

Dette er firkanttallene av fingrene ganget med seg sjøl: av 3 (får vi) 9, kvadratet av 2 (er) 4, av 4: 16, kvadratet av 5: 25, av 6: 36, kvadratet av 7: 49, kvadratet av 8: 64, kvadratet av 9: 81. Og kunsten å finne fingrene ganget med seg sjøl er som skrevet foran. Dette er kubikktallene av fingrene ganget kubisk med seg sjøl: 3 (som) rot (gir) 27 (som) kubikktall, 2 rot: 8 kubikktall, 4 rot: 64 kubikktall, 5 rot: 125 kubikktall, 6 rot: 216 [126] kubikktall, 7 rot: 343 kubikktall, 8 rot: 512 kubikktall, 9 rot: 729 [719] kubikktall. [30)]

17. (Platonsk (pythagoreisk) kosmologi)

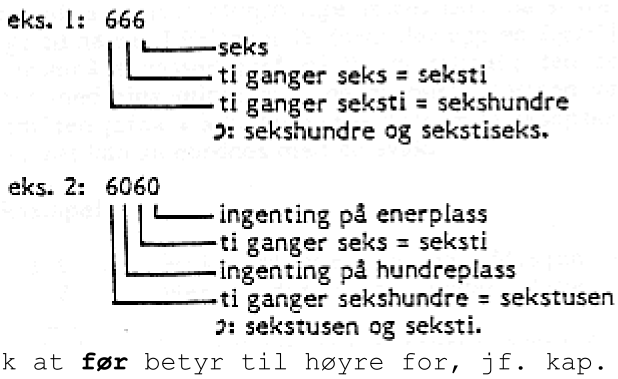
Hvert firkanttall har ij mål, som er bredde og lengde, mens kubikktall har trefoldige mål, som er bredde og lengde og tykkelse eller høyde. Og derfor sier vismennene at ethvert synlig legeme er sammensatt av disse tallene, fordi det alltid har disse trefoldige mål. Fordi den evige visdom og den eneste Gud ville skape en synlig og legemlig verden, satte han først som de ij ytterste hovedformene ild og jord, for ingenting kan være skikkelig synlig uten dem, ettersom ild gir lys og bevegelse og jord fasthet og hold. Men fordi disse har tre ulike og motstrebende egenskaper, var det en naturlig nødvendighet å sette noe mellom dem som kunne forlike deres uforenlighet. Og som det før ble sagt, at ild og jord og alt legemlig er satt sammen av de trefoldige tall som vi kaller kubikktall, så skriver vi disse to kubikktallene slik. Vi skriver jorda på dette vis: to ganger ij ganger to 2.4.8, men ilden slik: tre ganger iij ganger tre 3.9.27. Men fordi det ikke kan finnes ett midtpunkt mellom disse tallene som i samme forhold hører til hvert av disse to, og heller ikke til noen andre kubikktall, så finner vi to forholdstall mellom dem på dette vis: Vi ganger rota til det største kubikktallet med kvadratet (på rota) til det minste. Det er to ganger ij ganger tre 2.4.12, og rota til det minste kubikktallet med kvadratet (på rota) til det største. Det er tre ganger tre ganger to 3.9.18.[31] Disse to tallene forholder seg likt til de to første kubikktallene, fordi 27 har i seg 18 og halvparten av 18. Men 18 har i seg 12 og halvparten av 12. Slik har også tallet 12 i seg 8 og halvparten av 8. På samme måte skal du alltid finne forholdstall mellom to kubikktall. Slik skapte Gud to hovedformer mellom ild og jord, (nemlig) luft og vatn. Vatn har to egenskaper og ij tall fra jord, og fra ild en egenskap og ett tall. Men luft har ij egenskaper og ij tall fra ild, men en (egenskap) og ett tall fra jord. Og ild er så mye lettere enn luft som 27 er større enn 18. Men luft er så mye lettere enn vatn som 18 er større enn 12, vatn så mye lettere enn jord som 12 er større enn 8. Dette kan til fulle forstås i denne figuren (i dette talltegnet) som står nedenfor her, og som er kalt kubus perfectus.[32]

NOTER

1) I oversettelsen har vi valgt å følge originaltekstens inkonsekvente tallbruk. Vi skriver romertall der teksten har romertall, tallord der teksten har tallord osv. Vi har sløyfet punktumene rundt tallene.

2) Her står det egentlig **fyrsta stað**, i betydningen førsteplass når en begynner fra høyre. Vi oversetter med enerplass.

3) Eksemplene nedenfor viser hvordan teksten skal tolkes her.



4) Husk at **før** betyr til høyre for, jf. kap. 1 og 2.

5) Vanligere terminologi i dag er **jamn** som motsetning til **odde**, og **like** som motsetning til **ulike**. Vi har likevel valgt å følge teksten her.

6) Firkanta tall betyr kvadrattall, åttehjørna tall kubikktall. Det er egentlig snakk om å ta kvadratrot, henholdsvis kubikkrot, av disse, jf. kap. 14 og 15.

7) Her beskriver en fra hvilken retning de sju regneprosessene skal utføres, siffer for siffer.

8) Eksemplet nedenfor viser framgangsmåten ved noen av de tilfellene som teksten tar opp, illustrert på de forskjellige plassene, slik at vi ser prosessen i regnestykket samtidig. Dette vil også gjelde de andre regneprosessene vi gir eksempler på.

Hvis du vil legge tallet 365 til tallet 2674, skriver du:

2 6 7 4 <--- det største tallet øverst
3 6 5 <--- det minste like langt til høyre

Addisjon foretas fra høyre, siffer for siffer. Sifrene i det nedre tallet legges trinnvis til hele det øvre tallet som viskes ut og erstattes med nye sifre som nedenfor.

2 6 7 4 ... blir til sammen en finger, 9, som skrives på samme
3 6 5 plass istedenfor 4.

2 6 7 9 ... blir et sammensatt tall, 13. Skriv fingeren 3
3 6 5 istedenfor 7 og legg leddet 1 til 6, som står på neste plass fra før.

2 7 3 9 ... blir et ledd, 10. Skriv null der istedenfor 7 og
3 6 5 legg leddet 1 til 2 som står nærmest.

3 0 3 9 endelig resultat
3 6 5

9) **Regneeksempel**

2 0 1 3 8 6 ... Skriv tallene som ved addisjon, det største
3 5 8 2 øverst, det mindre under, like langt til høyre.

2 0 1 3 8 6 ... Du trekker fra sifferet over: 6, det tallet
3 5 8 2 som står under: 2, hvis det går, og skriver 4, som er igjen, på samme plass,

2 0 1 3 8 4 ... eller sett null der.
3 5 8 2

2 0 1 3 0 4 ... Hvis tallet under er større, ta én fra sifferet
3 5 8 2 foran, som er 1. Det betyr 10 på ☐ -plassen. Nå kan hele tallet, 5, trekkes fra dette, som da er 13. Det som blir igjen, 8, settes på denne plassen.

2 0 0 8 0 4 ... Hvis det står nuller øverst, så ta én fra det
3 5 8 2 sifferet som står nærmest nullene (én tas altså her fra 2).

1 9 7 8 0 4 ... Skriv 9 der nullene var, til du kommer til ☐ -plassen.
3 5 8 2 Trekk sifferet 3 fra de 10 som trengs på den plassen, og skriv der det som blir igjen, nemlig 7.

og du har resultatet

10) Ðeim = det; nemlig lånet pluss det som står igjen på plassen fra før.

11) **Regneeksempel**

Dobling		foregår fra venstre, jfr. kap. 7.
$\boxed{7}$ 6 4+	...	skal dobles. Du dobler først sifferet 7 lengst til venstre og får 14. Du skriver det overskytende 1 på forrige plass, dvs. plassen til venstre for der du befinner deg.
1 4 $\boxed{6}$ 4+	...	Du dobler 6 og får 12, og skriver det overskytende 1 på forrige plass, som når du legger til.
1 5 2 $\boxed{4+}$	...	Du dobler 4 og får 8, men siden semistegnet står over enerplassen, legger du til 1 og får 9.
1 5 2 9		er svaret.

12) ... **enn set cifrv i staðinn** blir bare forståelig om vi forutsetter at **sifferet er én** slik det eksplisitt kommer til uttrykk for tierplassen tre linjer nedenfor. Setningen **en ef figura er ein** mangler av en eller annen grunn her.

13) **Regneeksempel**

Halvering foregår fra høyre mot venstre. Vi illustrerer ved to eksempler.

1) 20198	...	Skriv ned tallet
4	...	Ta halvdelen av enersifferet hvis det er jamt. Hvis det andre sifferet er ujamt, tas halvdelen av det som er jamt,
49		og fem settes på forrige plass (her enerplass).
	...	Hvis det på tredje plass står 1, skriv fem på forrige
099		plass (her tierplass) og sett null der 1 stod.
0099	...	Null betyr ingenting.
10099	...	Ta halvdelen hvis det er jamt.

2) 3187	...	Skriv ned tallet
	...	Enersifferet er ujamt, del i halvdeler det som er over én
3 +		og sett semistegnet over.
43 +	...	Ta halvdelen av andre siffer hvis det er jamt.
093 +	...	På tredje plass står 1, skriv fem på forrige plass (her tierplass) og sett null der 1 stod.
	...	Det fjerde sifferet er ujamt. Da ta halvdelen av det som
1593 +		er jamt og fem skrives på forrige plass (her hundreplass).

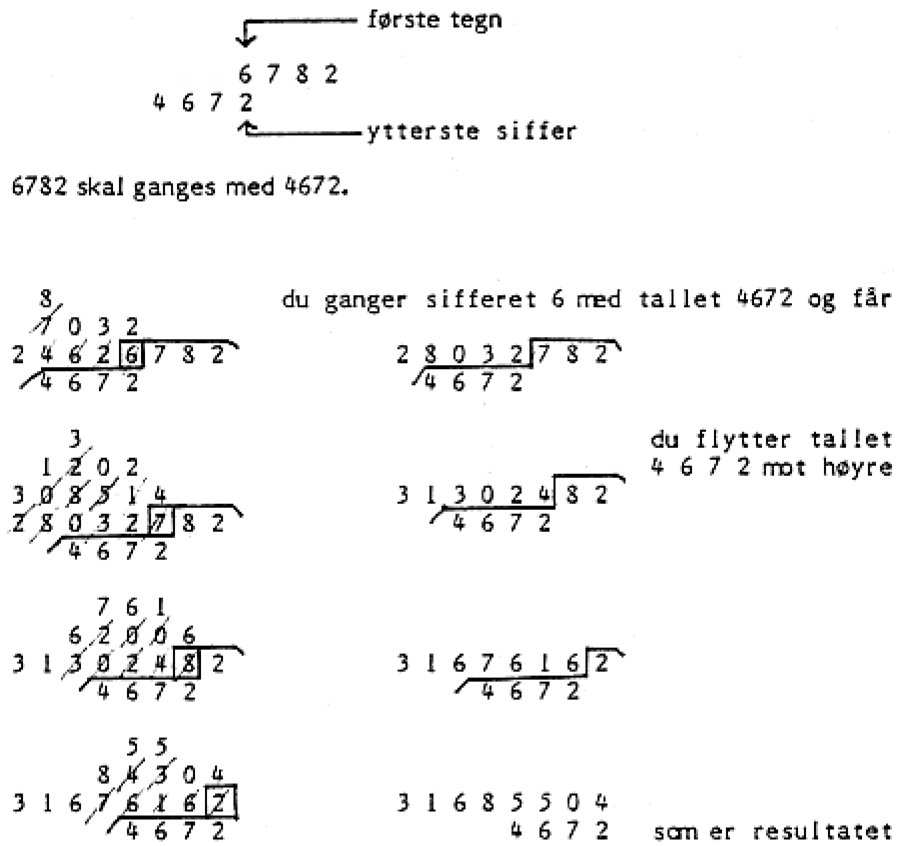
14) **Regneeksempel**

For hvert sifferpar (a, b) foregår altså ganginga v.hj.a. regelen
$a \cdot b = 10\ a - (10 - b)\ a$. Det gis ett eksempel nedenfor.
Et annet: $2 \cdot 4 = 20 - (10 - 4)\ 2 = 8$.

Sjølve ganginga foregår nå v.hj.a. denne regelen fra venstre mot høyre, siffer for siffer.

Framgangsmåten er den samme som vi finner hos Petrus de Dacia og hos Al Khwarizmi, ifølge Benedict 1914.

Ytterst må tolkes som sist, **først** som fremst i **regneretnigen**:



15) Teksten har her **ok margfallda**, som ikke gir mening. Heller ikke Munchs oversettelse: "Staar et 0 over det Tal, du multiplicerer, saa tag det bort, **hvis der skal multipliceres med en Ener, og multiplicer**; ellers skal det blive staaende" - kan være rett. Vi tror at tekstens **ok margfallda** må være en feiltolkning av **af margfalldan**, som gir mening, og som forøvrig forekommer flere ganger i teksten. Vi leser derfor **ef fingr verði ok margfalldan** som: hvis det blir en finger av ganginga.

Vår lesemåte finner rett nok ikke støtte i de to andre håndskriftene heller, disse har samme lesemåte som AM 544 qv.

16) I utgangspunktet ser det ut til at teksten bruker figura **om talltegn, siffer**, mens fingr betyr **ener.** Heilt konsekvent gjennomført er distinksjonen likevel ikke, jf. bruken av tall og siffer i moderne norsk og tilsvarende betegnelser i andre språk.

17) I denne teksten kalles **sifrene** i resultatet av divisjonen for **kvotienter.** Begrepet kvotient brukes altså på en noe annen måte enn vi gjør i dag.

Regneeksempel

Framgangsmåten i eksemplet svarer til den vi finner hos Petrus de Dacia, og hos Al-Khwarizmi i Benedict 1914. Sifrene i svaret kursiveres her for oversiktens skyld:

4 9 8 7 6 0 2 3 4 det ytterste sifferet under	Det fremste sifferet under settes mot det første over. Tenk på hvor mange ganger 2 går opp i 9, men slik at også 234 går like mange ganger opp i 987. Her må svaret bli 4 ganger.
4 5 1 6 0 2 3 4	Trekk så 234 så mange ganger (ɔ: 4) fra det som står over.
4 5 1 6 0 2 3 4	Flytt 234 én plass mot høyre
4 2 5 1 6 0 2 3 4	Finn annen kvotient - her 2 -, som settes ved siden av 4.
4 2 4 8 0 2 3 4	Trekk 234·2 fra det som står over.
4 2 4 8 0 2 3 4	Flytt 234 en plass mot høyre.
4 2 2 4 8 0 2 3 4	Finn tredje kvotient, her også 2. Trekk 234·2 fra det som står over.
4 2 2 1 2 2 3 4	Resultatet er 422 + $\frac{12}{234}$.

18) Uttrykket **.i. qvotiens** må leses som i (annen) kvotient - **annen kvotient** er den kvotienten som nettopp er nevnt - altså med .i. som feilskrift for í. Dette gjør også Munch.

19) I og med at regneretninga skal være fra venstre mot høyre, jf. kap. 7, må **envm fyrsta oiofnvm stað** være første ujamne plass fra venstre.

20) Teksten har her **fingr**, jf. note 14. Dette gjelder flere steder i kap. 14. Fingr er her brukt synonymt med **figura**, talltegn.

Regneeksempel.

Det bygger på $(ab)^2 = (10a+b)^2 = a^2 \cdot 100 + 2a \cdot b \cdot 10 + b^2$

u j u j u 5 5 2 2 5 2	... Under første ujamne plass skriver du et siffer 2 som ganges med seg sjøl og trekkes fra det som står øverst.
1 5 2 2 5 2	... Så dobler du samme sifferet til dupl = 4.
1 5 2 2 5 4	... Ta så bort subdupl 2 men husk det, og skriv duplet på neste plass.
3 2 2 5 4	... Finn nytt siffer 3, som ganges med duplet 4, og dette trekkes fra det øvre.
2 3 2 5 4	... Sifferet 3 ganges med seg sjøl, og du trekker det fra det øvre.
2 3 2 5 4 6	... Dernest dobler du 23 til 46 og setter dette nye duplet på neste plass.
	... Nytt siffer osv.

Aryabhata og Bhaskara beskriver samme metode til suksessivt å bestemme **sifrene i kvadratroten:**

Etter å ha subtrahert det størst mulige kvadrattall fra siste odde plass, del så neste jamne plass med to ganger roten av dette. Når du deler, tas kvotientsifferet så stort som mulig, men slik at resten tillater subtraksjon av dets kvadrat fra neste odde plass. Etter å ha subtrahert kvadratet av kvotientsifferet fra neste odde plass gjentas prosessen om det fortsatt er sifre igjen.

Eksempel: Vi søker kvadratroten av 55 225. Betegn da ujamne og jamre plasser med henholdsvis u og j.

u j u j u 5 5 2 2 5 4 1 5 1 2 3 2 9 2 3 2 2 3 0 2 5 2 5 0	**Første siffer er 2 etter regelen:** trekk fra størst mulig kvadrattall, del 15 med 2·2. Dette gir 3. Trekk fra 4·3 = 12. Dette er mulig fordi 32 tillater subtraksjon av 3^2 = 9. Trekk fra 3^2 = 9 Vi skal dele 232 med 2·23 = 46, det gir 5. Vi subtraherer 46·5 = 230 og får at 25 tillater subtraksjon av 5^2 = 25. Trekk fra 5^2 = 25, og da det ikke er flere sifre igjen, er vi ferdige. Vi fant at **kvadratroten er eksakt lik 235.**

21) Her framgår det ikke hvordan b^2 skal plasseres. Forfatteren burde her ha sagt at neste siffer skulle stå på neste ujamne plass.

22) **ok flyt dvflit fyRa** ... har vi oversatt med **men etter at du har flytta det forrige duplet** ..., da dette er i overensstemmelse med framgangsmåten, som vi har illustrert i note 20.

23) Her burde forfatteren gjort oppmerksom på at en må trekke fra kvadratet av det siste sifferet **før** han konkluderer med: "Gjør på samme måte så ofte som det trengs..."

24) Denne kommentaren er heilt malapropos, men knytter vel an til den generelle bemerkningen innledningsvis om at ethvert tall er rot til et tall.

25) Ganger vi firkanttallet 4 med seg sjøl, nemlig 4, får vi 16, som jo ikke er noe kubikktall. Meningen er å gange et firkanttall med **sin rot**, altså $4 \cdot 2 = 8$. Den bokstavelige tolkninga av teksten gir altså ikke rett mening her.

26) Forfatteren er meget upresis når han skal velge dette sifferet. Han sier jo ikke noe om at han må velge det så stort som mulig, og heller ikke omtaler han at hele dette tallet må plasseres riktig. Her må en rett og slett prøve seg fram, fordi en har et treleddet uttrykk som en skal få på plass. Noen av kommentarene som følger seinere i teksten, burde ha stått her.

Regneeksempel:

Vi vil finne kubikkrota til 75 686 967

tusenplasser

75 686 967		- **første finger = 4**
64	1)	ganges kubisk med seg sjøl, $4^3 = 64$, trekkes
11 68	2)	fra på fremste tusenplass[1], og vi hopper så
10 08	3)	fram to plasser[2]
1 606		- første finger trefoldes, $3 \cdot 4 = 12$ = triplet
8	4)	- **annen finger = 2**
1 598 96	5)	- gang triplet med første samt annen finger
		til produktet $12 \cdot 42 = 504$
1 598 94	6)	- og gang så med den nye fingeren aleine,
27		$504 \cdot 2 = 1008$, det hele trekkes fra[3]
27	7)	- annen finger ganges kubisk med seg sjøl,
0		$2^3 = 8$, som trekkes fra på neste
		- tusenplass[4] og vi hopper fram to plasser[5]
		- vi trefolder som ved forrige gang til
		triplet = $3 \cdot 42 = 126$
		- **tredje finger = 3**
		triplet ganges med ny finger samt begge
		subtriplene, $126 \cdot 423 = 53298$ = produktet
		- gang dernest den nye fingeren aleine med
		produktet, $3 \cdot 53298 = 15\ 9894$,
		som trekkes fra på rett plass[6]
		- den nye fingeren ganges kubisk med seg
		sjøl, $3^3 = 27$, og trekkes fra 7)
		Fortsett til du kommer til ytterste plass
		mot høyre.
		Her blir $\sqrt[3]{75\ 686\ 967} = 423$ (= første,
		annen og tredje finger).

For oversiktens skyld har vi skrevet opp regnestykket på "moderne vis". På 1300-tallet ble de kursiverte delene av regnestykket frambrakt ved utvisking. Grunnlaget for metoden er formelen

$$(10a+b)^3 = 1000a^3 + \underbrace{\overset{\text{triplet}}{3a}(10a+b)\overset{\text{den nye fingeren aleine}}{b}}_{\text{produktet}} \cdot 10 + b^3.$$

27) Jf. kap. 7. om regneretningen.

28) På grunn av regneretningen, vil det falle oss mer naturlig å si **etter** enn **foran**, som teksten har her.

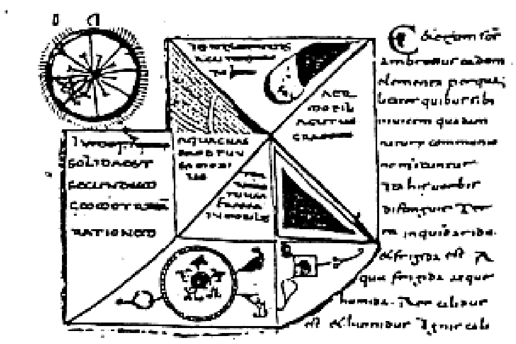
29) Her mener han at den nye fingeren skal stå til høyre for begge de nye subtriplene en har funnet.

30) I handskriftet AM 544 qv er det her to skrivefeil: tallet 126 står for 216, 719 for 729. Både Gks 1812 qv og AM 685 qv har riktige tall her. Det er pussig at forfatteren starter med 3-tallet. Dette kan kanskje skyldes den sentrale plassen dette tallet hadde innenfor tallmagien. AM 544 qv har for øvrig her et underlig tegn for 3-tallet som vi verken finner igjen i Gks 1812 qv eller AM 685 qv.

31) Her må vi presisere at det dreier seg om å gange med kvadratet **på rota** til henholdsvis det minste og det største tallet.

32) Denne figuren mangler i alle handskriftene. Ordet **figura** kan bety både talltegn og figur. I teksten for øvrig faller det naturlig å oversette ordet med talltegn. Som Detlev Jordan har gjort oss oppmerksomme på, er dette det eneste stedet i teksten figura ser ut til å bety figur. Det er vanskelig å tenke seg et talltegn som kunne gjøre det lettere å forstå forholdstallene mellom ild, jord, luft og vatn. Einar Pálsson 1985 s.181 mener at det her har stått tallet 216, som jo er lik $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 8 \cdot 27$. Vi viser for øvrig til heftet **"Algorismus i Hauksbok"** (Otto B. Bekken og Marit Christoffersen), Agder Distriktshøgskoles skriftserie, nr. 1, 1985, når det gjelder en mulig kandidat til cubus, tolket som en figur:

Tegningen av «cubus perfectus" som vi blir forespeilt i aller siste setning i dette avsnittet, mangler i alle de norrøne versjonene. En kandidat til denne tegningen kan være Isidor fra Sevillas **figura solida** (Bober 1961):



Brun (1962:34) peker på at ideen i dette avsnittet finnes hos Platon i Timaios:

> Da det faste aldri forbindes ved én, men ved to ting, så har Gud mellom ild og jord satt vann og luft og såvidt mulig brakt dem i et slikt forhold til hverandre at som ilden forholder seg til luften, således luften til vannet, og som luften til vannet, således vannet til jorden.

Dette verk finner vi ellers aldri henvist til i den norrøne litteraturen (Pedersen 1981:498).

Litteratur

Bekken, O. B. & Christoffersen, Marit (1985). *Algorismus i Hauksbok.* Agder Distriktshøgskoles skriftserie, nr. 1, 1985.
Bekken, O. B. (1986). *On the CUBUS PERFECTUS of the Algorismus in Hauksbok*. Agder Distriktshøgskoles skriftserie, nr. 2, 1986.
Bekken, O. B. (1995). *Algorismus i Hauksbok. Nordisk matematikkdidaktikk,* Vol. 3, nr 1, 7-15.
Benedict, S. R. (1914). *A comparative study of the early treatises introducing into Europe The Hindu Art of Reckoning.* Ph.D. Thesis, Univ. of Michigan.
Brun, V. (1962). *Regnekunsten i det gamle Norge.* Oslo-Bergen.
Brun, V. (1964). *Alt er tall. Matematikkens historie fra oldtid til renessanse.* Oslo-Bergen.
Helgason, J. (1960). *Hauksbok. Manuscripta Islandica,* Vol. 5. Copenhagen.
Jonsson, E, & Jonsson F. (1892-96). *Hauksbok.* Det Kongelige nordiske OldskriftSelskab, Kjøbenhavn.
Larsen, L. M. (1952). Træk af regnekunstens historie i Danmark. *Matematisk Tidsskrift* A, 1-21.
Munch, P.A. (1847). Om Ridderen og Rigsraaden Hr. Hauk Erlendssøn, Islands, Oslo og Gulatings Lagmand, og om hans literære Virksomhed. *Annaler for nordisk Oldkyndighed og Historie,* 169-216. Kjøbenhavn.
Munch, P.A. (1848). Algorismus, eller Anviisning til at kende og anvende de saakaldte arabiske Tal, efter Hr. Hauk Erlendssøns Codex meddelt og ledsaget med Oversættelse af P.A. Munch *Annaler for nordisk Oldkyndighed og Historie,* 353-375. Kjøbenhavn.
Pálsson, E. (1984). *Hypothesis as a tool in mythology: a discourse on method*. A lecture given at the Archaeological Center of the University of Oslo. Trykt: Mimir, Reykjavik.
Pálsson, E. (1985). *Hvolfþak himins* (The Dome of Heaven). Mímir, Reykjavik.
Pedersen, O.(1981). *Matematisklitteratur. Kulturhistorisk leksikon for nordisk middelalder,* 11, 491-500. Oslo 1956-78. Fotografisk opptrykk Rosenkilde og Bagger.
Rosén, F. (183l). *The Algebra of Muhammed ben Musa Al-Khwarizmi.* London.
Smith, D. E. & Karpinski, L. C. (1911). *The Hindu-Arabic Numerals.* Boston and London.
Steele, R. (1922). *The Earliest Arithmetics in English.* Oxford University Press.
The Open University (1976). *History of Mathematics, Counting, Numerals and Calculation 3. Written numbers.* The Open University Press.
Thorvaldsen, S. (2002). *Matematisk kulturhistorie*. Eureka forlag.
Vogel, K. (1963). *Muhammed ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus.* Aalen.