EUREKA
LÆREMIDDELSERIE
NR. 1 - 2006

ALV BIRKELAND


# Grunnleggende matematikk med illustrasjoner

EUREKA FORLAG

ALV BIRKELAND

# GRUNNLEGGENDE MATEMATIKK MED ILLUSTRASJONER

**EUREKA LÆREMIDDELSERIE 1/2006**

1. opplag 2006
Utgiver: Eureka Forlag, Høgskolen i Tromsø, 9293 Tromsø
Sentralbord: 77 66 03 00
Telefaks: 77 68 99 56
E-post: eureka@hitos.no
http://www.hitos.no
Tidligere utgivelser på Eureka Forlag: http://www.hitos.no/fou/eureka/publikasjoner
Trykk og omslagslayout: Lundblad Media AS, Tromsø

Omslagsbilde: ***Margarita Philosophica* of Gregor Reisch (1508)**

The new versus the old aritmetic, Boethius against Pythagoras, Hindu-Arabic numerals versus the counting board.

Eureka Læremiddelserie 01/2006
ISBN-13: 978-82-7389-087-0
ISBN-10: 82-7387-087-2
ISSN: 0809-8034

# Forord

Bildet på forsiden av denne boken er Margarita Philosophica av Gregor Reisch (1508). Den ene figuren har en kuleramme, eller kanskje en abacus, og skal antagelig forestille Pythagoras. Den andre figuren regner med tallsymboler, og ved siden av ham står navnet Boethius. Vi ser at Pythagoras ser litt plaget ut, mens Boethius utfører sitt regnearbeid uten å anstrenge seg så alt for mye. Pythagoras levde fra 569 f.Kr. til 475 f.Kr. Boethius levde fra 480 e.Kr. til 524 e.Kr. De kan derfor aldri ha møttes. Tallsymbolene våre har sin opprinnelse i India omkring det fjerde århundre. Etterhvert fikk man kjennskap til denne tallregningen i vitenskapelige kretser i Bagdad. Til Europa kom denne kunnskapen tidlig i det trettende århundre. Det betyr at hverken Pythagoras eller Boethius kjente til den. Men bildet illustrerer forskjellen mellom regning med ulike tekniske hjelpemidler, og regning for hånd med symboler. Opp gjennom historien har man brukt forskjellige tekniske hjelpemidler i regnearbeid, slik som Pythagoras på bildet. I våre dager har vi elektroniske hjelpemidler. Først og fremst gir tekniske hjelpemidler raske og nøyaktige svar, men ikke nødvendigvis den innsikt og forståelse som regning for hånd med symboler gir. I skolen, som ellers, trenger vi begge deler.

Utgangspunktet for denne boken er forfatterens egen undervisning i Matematikk 1 ved lærerutdanningen i Tromsø. Kurset Matematikk 1 er omfattende, og denne boken dekker bare en del av kurset. Vi starter med å se på tall og regning med tall. Utgangspunktet er dermed ganske konkret, men vi vil med en gang begynne å se etter sammenhenger og mer generelle egenskaper ved tall. Etter dette går vi over til algebra. Vi skal se på lineære og kvadratiske ligninger. Dette var historisk sett starten på algebraen. Til slutt skal vi også se litt på det som i matematikken kalles kalkulus, der funksjoner og ulike grensebetraktninger står sentralt.

Det som kreves av forkunnskaper er det man har av kunnskaper i matematikk når man har allmen studiekompetanse. Det betyr at de aller mest grunnleggende regneferdighetene bør være på plass før man begynner med denne boken. Det er imidlertid mulig å ha ganske gode ferdigheter i den elementære matematikken uten at forståelsen stikker så alt for dypt. Meningen med denne boken er at den skal hjelpe til med å gjøre denne forståelsen litt bedre.

Matematikk kjennetegnes blant annet av et eget fagspråk. Dette språket inneholder på den ene siden ord som også fins i det daglige språket, men som i matematikken har en presis matematisk betydning. I dagligspråket hender det for eksempel at man snakker om funksjoner. I matematikken betyr funksjoner noe helt spesielt. På den annen side gjør vi bruk av symboler, eksempelvis likhetstegnet $x$ for den ukjente i en ligning, kvadratrottegnet og mange andre symboler. Det matematiske språket hjelper oss på to måter. På den ene siden kan vi være presise og trekke presise konklusjoner. Dette kalles ofte for stringens. På den annen side kan vi løse problemer som ellers ville vært alt for vanskelige eller kompliserte.

Fra et undervisningssynspunkt derimot, gir dette en ekstra utfordring. Det matematiske språket er i utganspunktet et fremmedspråk. Å lære seg noe nytt kan være en utfordring i seg selv, men hvis man i tillegg er henvist til å gjøre det ved hjelp av et språk som er fremmed, kan det bli ekstra vanskelig. Dette betyr at det å undervise i matematikk også er en form for språkundervisning.

Svært ofte kan matematiske begreper og ideer forklares med en figur eller et diagram. Man kan også bruke konkrete eksempler. Alt dette kunne kalles illustrasjoner. Formålet med denne boken er å gi en innføring i grunnleggende matematiske ideer og begreper ved hjelp av slike illustrasjoner. Vi omgår bøygen det matematiske språket gir, ved å bruke illustrasjoner. Samtidig innføres det matematiske språket gradvis.

Boken er ment som en del av litteraturen til kurset Matematikk 1 i allmenlærerutdanningen. Den kan brukes som del av annen litteratur som allerede fins, eller som tilleggslitteratur i kurset. Til slutt vil jeg takke Per Sivertsen som leste gjennom manuset til denne boken, og kom med nyttige kommentarer. En takk også til forlagsredaktør Rita Tiller som har sett på språket.

Tromsø, februar 2006
Alv Birkeland

# Innhold

# 1 Tallfølger

De tallene vi bruker når vi teller, kalles **de naturlige tall** og er tallene

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

Her betyr skrivemåten "$\ldots$" at dette aldri stopper. Det blir aldri slutt på de naturlige tall. Dette er et eksempel på en følge av tall eller en **tallfølge.** Et annet eksempel er trekanttallene. Se figur 1.1. Følgen av trekanttall er

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \ldots$$

De fremkommer ved at

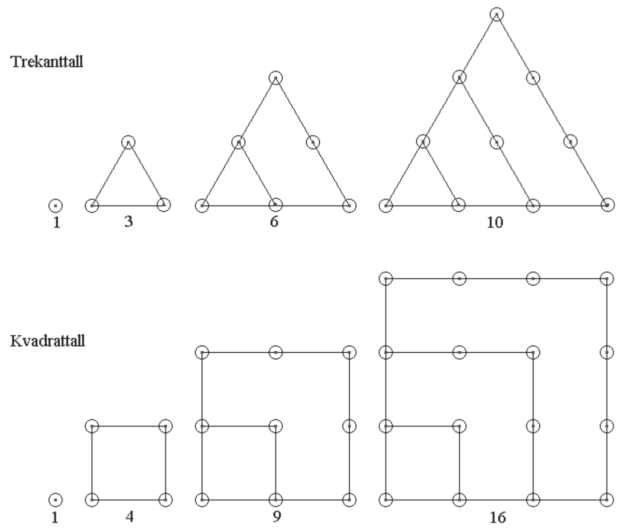


Fig. 1.1

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
1+2 &= 3 \\
1+2+3 &= 6 \\
1+2+3+4 &= 10 \\
1+2+3+4+5 &= 15 \\
1+2+3+4+5+6 &= 21 \\
1+2+3+4+5+6+7 &= 28 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Et tredje eksempel er følgen av kvadrattall. Se figur 1.1. Følgen av kvadrattall er

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots$$

Trekanttall og kvadrattall er eksempler på figurtall. Legg merke til at summen av to trekanttall som følger etter hverandre, alltid er et kvadrattall. Et fjerde eksempel er følgen av stambrøker

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$$

Et siste eksempel i denne omgang er følgen av Fibonaccitall

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

De fremkommer ved at hvert tall er summen av de to foregående tallene i følgen. Denne tallfølgen har fått navn etter Fibonacci som også er kjent under navnet Leonardo av Pisa. Han levde fra 1170 til 1250. La oss se på en egenskap ved denne følgen. Observer at

$$\begin{aligned}
1^2 + 1^2 &= 1 \cdot 2 \\
1^2 + 1^2 + 2^2 &= 2 \cdot 3 \\
1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 &= 3 \cdot 5 \\
1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 &= 5 \cdot 8 \\
1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 &= 8 \cdot 13 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Vi kan gi dette en geometrisk forklaring. Se figur 1.2.

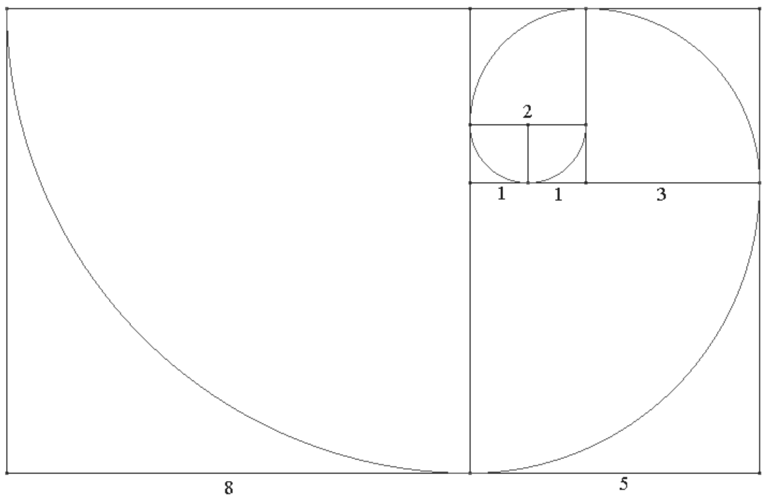



Fig. 1.2

Generelt kalles hvert av tallene i en gitt tallfølge for følgens ledd. Vi nummerer leddene i tallfølgen fra venstre mot høyre, slik at vi kan snakke om tallfølgens første ledd, andre ledd, tredje ledd, fjerde ledd etc. Eksempelvis er det første leddet i følgen av Fibonaccitall 1, det andre leddet er også 1, det tredje leddet er 2, det fjerde leddet er 3 etc. La oss betegne det første leddet i en gitt tallfølge $a_1$, det andre leddet $a_2$, det tredje leddet $a_3$ etc. Da kan vi skrive følgen ved

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$$

Et ledd i følgen betegnes da ved $a_n$ der $n = 1, 2, 3, \ldots$ Selve følgen betegnes da ved $\{a_n\}$. For følgen av Fibonaccitall betyr det at $a_1 = 1$ at $a_2 = 1$ og at

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_2 + a_1, \\
a_4 &= a_3 + a_2, \\
a_5 &= a_4 + a_3, \\
&\ \vdots \\
a_{n+1} &= a_n + a_{n-1}.
\end{aligned}$$

La oss betegne følgen av stambrøker ved $\{b_n\}$. Da får vi at

$$b_n = \frac{1}{n}.$$

Hvis vi betegner følgen av kvadrattall ved $\{K_n\}$ så får vi

$$K_n = n^2.$$

La oss betegne følgen av trekanttall ved $\{T_n\}$. For trekanttallene har vi at

$$\begin{aligned}
T_1 &= 1, \\
T_2 &= T_1 + 2, \\
T_3 &= T_2 + 3, \\
&\ \vdots \\
T_n &= T_{n-1} + n.
\end{aligned}$$

Gitt et trekanttall, så kan vi regne oss frem til det neste trekanttallet på denne måten. Vi sier at vi har gitt følgen av trekanttall på **rekursiv** form. Men vi ønsker også å kunne regne ut et hvilket som helst trekanttall uten å måtte ha det foregående trekanttallet først. La oss se nærmere på hvordan vi kan regne ut trekanttall nr. 8. Det er gitt ved summen

$$T_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$$

som også skrives

$$T_8 = 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1.$$

Ved å addere får vi at

$$\begin{aligned}
2T_8 &= (1+8) + (2+7) + (3+6) + (4+5) \\
&\quad + (5+4) + (6+3) + (7+2) + (8+1) \\
&= 8 \cdot 9.
\end{aligned}$$

Det fører til at

$$T_8 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9.$$

Generelt er trekanttall nr. $n$ gitt ved summen

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Denne summen kan skrives

$$T_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Adderer vi, får vi

$$\begin{aligned} 2T_n &= (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) \\ T_n &= \frac{1}{2} n\,(n+1)\,. \end{aligned}$$

Da har vi en direkte måte for å kunne regne ut hvert ledd i følgen av trekanttall.

## Oppgaver

1. Finn de tre neste leddene i hver av disse tallfølgene
   a) $2, 6, 10, 14, 18, 22, \ldots$
   b) $1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots$
   c) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$
   d) $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$

2. Finn rekursive uttrykk for alle tallfølgene fra oppgave 1.

3. Følgen av oddetall begynner med $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$
   a) Skriv ned de tre neste leddene i følgen av oddetall.
   b) Uttrykk følgen av oddetall på rekursiv form.
   c) Finn et direkte uttrykk for følgen av oddetall.

4. Følgen av partall begynner med $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$
   a) Skriv ned de tre neste leddene i følgen av partall.
   b) Uttrykk følgen av partall på rekursiv form.
   c) Finn et direkte uttrykk for følgen av partall.

5. Finn både et rekursivt uttrykk og et direkte uttrykk for tallfølgen

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

6. Gitt denne tallfølgen

$$1, 2, 2, 4, 8, 32, 256, 8192, \ldots$$

a) Finn det neste leddet i denne tallfølgen.
b) Finn et rekursivt uttrykk for denne tallfølgen.

7. **Tårnene i Hanoi** etter Édouard Lucas (1842-1891). I følge en legende fins det et asiatisk kloster der det står tre loddrette staver ved siden av hverandre på gulvet. Det fins 64 gullskiver av forskjellig størrelse. Gullskivene har et hull i midten, og alle sammen er tredd ned på den ene av de tre stavene, slik at den største skiven ligger nederst og med stadig mindre skiver oppover til den minste på toppen. Gudene har pålagt munkene å flytte alle de 64 brikkene over på en av de andre to stavene. Når de er ferdige, vil verden gå under. Spillet har tre regler.

1) Bare en skive kan flyttes om gangen.
2) Man kan aldri legge en skive oppå en som er mindre.
3) Man kan bruke alle tre staver under flyttingen.

La oss si at munkene bruker 10 sekunder på å flytte en skive. I denne oppgaven skal vi finne ut hvor lenge det er til verden går under dersom munkene starter nå.

a) La oss kalle det å flytte en skive fra en stav over på en annen stav for et trekk. Dersom det bare var en skive, ville vi bare trenge 1 trekk. Dersom det var to skiver, ville vi måtte gjøre 3 trekk. Dersom det var 4 gullskiver ville vi trenge 7 trekk. Vi får tallfølgen $\{a_n\}$ som begynner med

$$1, 3, 7, \ldots$$

Finn de tre neste leddene i denne tallfølgen.
b) Uttrykk følgen på rekursiv form.
c) Finn et uttrykk for $a_n$
d) Regn ut hvor lang tid munkene vil bruke på 64 gullskiver.

8. Finn et direkte uttrykk for hver av følgens ledd.
a) $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$
b) $0, 3, 8, 15, 24, 35, \ldots$
c) $1, 9, 25, 49, 81, \ldots$
d) $2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, \ldots$

# 2 Delelighet og primtall

Når vi utfører en divisjon, har vi to muligheter. Enten går divisjonen opp, eller så gjør den det ikke. Hvis vi som et eksempel deler 253 på 11, så går det opp 23 ganger. Hvis vi derimot deler 254 på 11, så går det 23 ganger, men med 1 til rest. Vi sier at 253 er delelig med 11, eller at 11 går opp i 253 eller at 11 er faktor i 253. Alt dette uttrykker at $253 = 11 \cdot 23$.

De hele tall er tallene

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

**Definisjon.** La $a$ og $b$ være hele tall og $b$ forskjellig fra null. Dersom det fins et helt tall $c$ slik at $a = bc$, så sier vi at $a$ er delelig med $b$.

Hvis vi ganger 253 med et heltall, for eksempel 3, så vil vi også få et tall som er delelig med 11. Vi har at $253 \cdot 3 = 759$, og følgelig at

$$759 = 253 \cdot 3 = 11 \cdot 23 \cdot 3 = 11 \cdot 69.$$

Dette holder helt generelt, og kan formuleres ved følgende regel:

**Regel 1.** La $a$ og $b$ være hele tall med $b$ forskjellig fra null. Dersom $b$ går opp i $a$, så vil $b$ gå opp i et vilkårlig helt tall ganget med $a$.

Vi har også at 396 er delelig med 11, fordi $396 = 11 \cdot 36$. Summen av 253 og 396 er $396 + 253 = 649$. Summen av 253 og 396 vil også være delelig med 11, fordi

$$649 = 396 + 253 = 11 \cdot 36 + 11 \cdot 23 = 11 \cdot 59.$$

Helt generelt har vi denne regelen:

**Regel 2.** La $a, b, c$ være hele tall med $c$ forskjellig fra null. Dersom $a$ er delelig med $c$ og $b$ er delelig med $c$, så vil $a + b$ også være delelig med $c$.

Differensen mellom 396 og 253 er 143. $396 - 253 = 143$. Differensen mellom 396 og 253 vil være delelig med 11, fordi

$$143 = 396 - 253 = 11 \cdot 36 - 11 \cdot 23 = 11 \cdot 13.$$

Generelt har vi følgende regel:

**Regel 3.** La $a, b, c$ være heltall med $c$ forskjellig fra null. Dersom $a$ er delelig med $c$ og $b$ er delelig med $c$, så vil $a - b$ også være delelig med $c$.

Det hender vi kan finne ut hvilke tall som går opp i et gitt heltall ved å se på tallets siffre. For eksempel vil tallet 7438 være delelig med 2 siden siste siffer er 8. Dette kan vi begrunne som følger. Vi har at

$$7438 = 743 \cdot 10 + 8.$$

Siden 10 er delelig med 2, må $743 \cdot 10$ være delelig med 2 ved bruk av regel 1. Siden 8 er delelig med 2 vil summen $743 \cdot 10 + 8$ være delelig med 2 etter regel 2.

Siden 10 også er delelig med 5 vil, på samme måte, et heltall være delelig med 5 dersom siste siffer er delelig med 5. Vi kan formulere dette ved følgende regel:

**Regel 4.** Et heltall er delelig med 2 (eller 5) dersom det siste siste sifferet i heltallet er delelig med 2 (eller 5.)

La oss se på et annet eksempel. Heltallet 6735 må være delelig med 3. Vi ser at summen av tallets siffre er $6 + 7 + 3 + 5 = 21$ og 21 er delelig med 3. Summen av tallets siffre kalles tverrsummen. Når tverrsummen er delelig med 3 vil tallet være delelig med 3. Dette kan vi begrunne på denne måten. Vi har at

$$\begin{aligned}
6735 &= 6000 + 700 + 30 + 5 \\
&= 6 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 \\
&= 6\,(999 + 1) + 7\,(99 + 1) + 3\,(9 + 1) + 5 \\
&= 6 \cdot 999 + 6 + 7 \cdot 99 + 7 + 3 \cdot 9 + 3 + 5 \\
&= 6 \cdot 999 + 7 \cdot 99 + 3 \cdot 9 + (6 + 7 + 3 + 5) \\
&= 6 \cdot 999 + 7 \cdot 99 + 3 \cdot 9 + 21.
\end{aligned}$$

Siden 999 er delelig med 3, så er $6 \cdot 999$ delelig med 3. Siden 99 er delelig med 3, så er $7 \cdot 99$ delelig med 3. Siden 9 er delelig med 3, så er $3 \cdot 9$ delelig med 3. Da må $6 \cdot 999 + 7 \cdot 99 + 3 \cdot 9$ være delelig med 3. Siden 21 er delelig med 3 må $6 \cdot 999 + 7 \cdot 99 + 3 \cdot 9 + 21$ være delelig med 3. Da er 6735 delelig med 3. Vi kan også avgjøre om et heltall er delelig med 9 på akkurat samme måte. Begrunnelsen for det blir den samme. Generelt har vi derfor denne regelen:

**Regel 5.** Et heltall er delelig med 3 (eller 9) dersom tverrsummen av heltallet er delelig med 3 (eller 9.)

Siden det siste sifferet til tallet 6735 er 5 vil dette tallet være delelig med 5 ved regel 4. Vi får at $6735 = 5 \cdot 1347$. Tverrsummen av 1347 er $1 + 3 + 4 + 7 = 15$ som er delelig med 3. Vi finner at $1347 = 3 \cdot 449$. Derimot fins det ingen tall som går opp i 449. Tallet 449 er et primtall. Vi har at $6735 = 3 \cdot 5 \cdot 449$, men det lar seg ikke gjøre å faktorisere dette videre.

**Definisjon.** Et heltall større enn 1 som ikke er delelig med andre heltall enn seg selv og 1, kalles et primtall.

Vi skal se på en metode for å finne alle primtall opp til et gitt heltall.

**Erathostenes sold.** La oss si at vi skal finne alle primtall mindre enn eller lik 100. Vi starter med å skrive opp alle heltall fra 1 til 100 og starter med 2 siden 1 ikke er noe primtall. Vi må ha at 2 er et primtall. Marker alle tall som er delelig med 2, for ingen av disse kan være primtall. Det neste tallet som ikke er markert er 3. Da må 3 være primtall. Marker alle tall som er delelig med 3, for ingen av disse kan være primtall. Det neste tallet som ikke er markert er 5. Da må 5 være primtall. Marker alle tall som er delelig med 5, for ingen av disse kan være primtall. Fortsett med dette til det ikke er flere tall å markere. De tallene som da står igjen er alle primtall under 100.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | $\underline{4}$ | 5 | $\underline{6}$ | 7 | $\underline{8}$ | $\underline{9}$ | $\underline{10}$ |
| 11 | $\underline{12}$ | 13 | $\underline{14}$ | $\underline{15}$ | $\underline{16}$ | 17 | $\underline{18}$ | 19 | $\underline{20}$ |
| $\underline{21}$ | $\underline{22}$ | 23 | $\underline{24}$ | $\underline{25}$ | $\underline{26}$ | $\underline{27}$ | $\underline{28}$ | 29 | $\underline{30}$ |
| 31 | $\underline{32}$ | $\underline{33}$ | $\underline{34}$ | $\underline{35}$ | $\underline{36}$ | 37 | $\underline{38}$ | $\underline{39}$ | $\underline{40}$ |
| 41 | $\underline{42}$ | 43 | $\underline{44}$ | $\underline{45}$ | $\underline{46}$ | 47 | $\underline{48}$ | $\underline{49}$ | $\underline{50}$ |
| $\underline{51}$ | $\underline{52}$ | 53 | $\underline{54}$ | $\underline{55}$ | $\underline{56}$ | $\underline{57}$ | $\underline{58}$ | 59 | $\underline{60}$ |
| 61 | $\underline{62}$ | $\underline{63}$ | $\underline{64}$ | $\underline{65}$ | $\underline{66}$ | 67 | $\underline{68}$ | $\underline{69}$ | $\underline{70}$ |
| 71 | $\underline{72}$ | 73 | $\underline{74}$ | $\underline{75}$ | $\underline{76}$ | $\underline{77}$ | $\underline{78}$ | 79 | $\underline{80}$ |
| $\underline{81}$ | $\underline{82}$ | 83 | $\underline{84}$ | $\underline{85}$ | $\underline{86}$ | $\underline{87}$ | $\underline{88}$ | 89 | $\underline{90}$ |
| $\underline{91}$ | $\underline{92}$ | $\underline{93}$ | $\underline{94}$ | $\underline{95}$ | $\underline{96}$ | 97 | $\underline{98}$ | $\underline{99}$ | $\underline{100}$ |

Erathostenes ble født i 276 i Kyrene og døde i 194 f.Kr. i Alexandria. Han var blant annet leder for biblioteket i Alexandria, men huskes mest for å ha laget denne metoden og for å ha regnet ut jordens omkrets. En sold er en slags sil. Vi kan tenke oss at vi siler vekk de tallene som ikke er primtall.

# Oppgaver

1. Avgjør om hvert av disse utsagnene er sanne eller gale.
   a) 42 er delelig med 6 b) 16 er faktor i 32 c) 35 går opp i 7
   d) 1 går opp i 7 e) 0 er delelig på 1 f) 0 går opp i 1

2. Avgjør om disse tallene er delelige med enten 2, 3, 5 eller 9 uten å utføre divisjonene.
   a) 2355 b) 348 c) 2289 d) 4059 e) 1620 f) 2277

3. Avgjør om tallet 45875 er delelig med 4 eller 25. Dersom vi deler 45875 på 100 får vi at det går 458 ganger med 75 til rest. Vi har at

$$45875 = 458 \cdot 100 + 75.$$

Bruk dette til å formulere en regel for når et heltall er delelig med 4 eller 25.

4. Avgjør om disse tallene er primtall. Bruk gjerne Erathostenes sold.
   a) 101 b) 107 c) 109 d) 111 e) 117 f) 119

5. a) Forklar hvorfor ingen av de følgende heltall kan være primtall:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 2,$$
$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3,$$
$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4,$$
$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 5,$$

b) Finn 10 heltall som følger etter hverandre slik at ingen av dem kan være primtall.

c) Betrakt følgende påstand: "Det fins vilkårlig mange heltall som følger etter hverandre uten at noen av dem er primtall". Avgjør om påstanden er sann eller gal, og gi en begrunnelse for ditt svar.

# 3 Algebra

Betegnelsen algebra stammer fra et ord i en arabisk boktittel. Forfatteren av denne boken var Mohammad ibn Mûsâ med tilnavnet al-Khwârizmî. Dette tilnavnet fikk han fordi han kom fra Khwarezm ved Aralsjøen. Han ble født mot slutten av 700-tallet. Bokens tittel var "al-Kitab al-mukhatasar fi hisâb al-jabr wa'l-muqâbalah" og det betyr omtrent "Lærebok i beregning ved sammensetning og motsetning". Det er ordet al-jabr som har blitt til ordet algebra. I denne boken behandler forfatteren ligninger på en mer grundig og fullstendig måte enn det som hadde vært gjort tidligere. Vi kan med en viss rett si at forfatteren legger frem en teori om ligninger. Bagdad fikk på denne tiden et vitenskapsakademi. Det ble kalt Bait el-hikma, eller visdommens hus. Det ble arbeidet med blant annet geometri og algebra ved dette akademiet, og særlig algebraen ble videreutviklet i visdommens hus. Men la oss se på et eksempel fra boken hans. På norsk naturligvis.

**Eksempel.** Et kvadrat og tjueen i tall er lik ti røtter av det samme kvadratet.

Løsning. Halver antallet røtter; halvdelen er fem. Gang dette med seg selv; produktet er tjuefem. Trekk fra dette de tjueen som er forbundet med kvadratet; resten er fire. Trekk ut roten; den er to. Trekk dette fra halvdelen av røttene, som er fem; resten er tre. Dette er roten av det kvadratet som ble krevet, og kvadratet er ni. Eller man kan legge roten til halvdelen av røttene; summen er sju. Dette er roten av det kvadratet som ble søkt, og kvadratet selv er førtini.

Dette er et eksempel på det som kalles **retorisk algebra**. Både ligningen og dens løsninger er formulert uten bruk av symboler av noe slag. Alt er formulert med ord. Vi ville ha skrevet denne ligningen slik

$$x^2 + 21 = 10x.$$

Siden den inneholder leddet $x^2$ er dette et eksempel på en kvadratisk ligning. Matematikerne i Bagdad hadde studert Euklids geometri. I tillegg hadde de fått impulser fra indisk matematikk og lært seg prinsippene for tallregning derfra. Dette gjorde at de ble i stand til å løse ligninger på en mer fullstendig måte enn andre hadde gjort før dem.

Det neste skritt i utviklingen av algebraen ble tatt i Europa. Girolamo Cardano (1501-1576) fra Milano skrev en avhandlig i algebra som han kalte Ars Magna. Den ble utgitt i 1545. Tittelen betyr "Den store kunst". Her finner vi den såkalte Cardanos regel. Det dreier seg om å løse ligningen

$$x^3 + px = q.$$

Dette kalles en kubisk ligning, siden den inneholder leddet $x^3$. Cardano brukte heller ikke symboler av noe slag. Hos ham er det formulert på følgende måte:

En kube og ting lik et tall.

Cardano viser at ligningen har en løsning som han gir ved en regel.

**Cardanos regel.** Opphøy en tredel av antallet av ting til en kube, til hvilket du adderer kvadratet på halvdelen av ligningens tall. Av det hele trekker du ut roten, det vil si kvadratroten, som du tar to av. Til den første adderer du halvdelen av tallet, som var blitt ganget med seg selv, og fra den andre trekker du den samme halvdel. Du vil da ha et binom og dets apotem. Trekk så kubikkroten av apotemet fra kubikkroten av dets binom. Den rest som kommer ut av det, er tingen som skulle bestemmes.

Det var et gjennombrudd i seg selv å finne denne løsningen. Cardano sitt bevis for denne løsningen er geometrisk, som de andre bevisene fortsatt var på denne tiden. Ettersom det dreier seg om en kubisk ligning er beviset naturligvis mer komplisert enn de tilsvarende bevisene man hadde for kvadratiske ligninger. Imidlertid finner vi noe nytt hos Cardano. Han tar i bruk forkortelser. Istedet for meno som betyr mindre eller minus skriver han $\underline{m}$ og istedet for piu som betyr mer eller pluss skriver han $\underline{p}$. Dessuten skriver han $R_x$ istedet for radix eller kvadratrot, og $R_x$ kube istedet for kubikkrot. Denne bruken av forkortelser som vi finner hos Cardano kaller vi **synkopert algebra**.

Bruken av forkortelser var et viktig skritt på veien mot våre symboler. Men det tok ennå litt tid før man kom så langt. François Viète (1540-1603) fra Frankrike var en av de aller første som gjorde dette. Han lot vokaler stå for ukjente, og konsonanter for kjente størrelser i en ligning. Eksempel på hans skrivemåte er

$$B \text{ 5 in } A \text{ quad} - C \text{ plano 2 in } A + A \text{ cub aequatur } D \text{ solido.}$$

Her betegner $A$ den ukjente og $B, C, D$ kjente størrelser. En mer moderne måte å skrive dette på ville være

$$5BA^2 - 2CA + A^3 = D.$$

Dette er altså en kubisk ligning. Viète gjennomfører ikke helt. Han har for eksempel ikke noe likhetstegn. Istedet skriver han det latinske ordet aequatur. Likhetstegnet vårt ble innført i en bok av Robert Recorde fra 1557.

Med bruken av symboler som hos François Viète, var **symbolsk algebra** introdusert.

La oss se på et eksempel på hvordan man kan regne analytisk med symboler.

**Eksempel.** Lise-Lotte hadde vunnet en premie i Lotto. Men hun hadde tre venner hun skyldte penger. Den ene ga hun en firedel av gevinsten, den andre fikk en tredel av gevinsten, og den tredje fikk det dobbelte av differensen mellom det de to andre fikk. Da hadde Lise-Lotte 1200 kr igjen til seg selv. La oss finne gevinstens størrelse. Den er altså ukjent, og vi kaller den $x$. Lise-Lotte ga en firedel til den ene av vennene. Det vil si $\frac{1}{4}x$. Så ga hun en tredel til den andre. Det blir $\frac{1}{3}x$. Den tredje fikk det dobbelte av differensen mellom det de to andre fikk. Denne differensen må være $\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x$ og det dobbelte av det er

$2\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x\right)$. Da hadde hun igjen 1200 kr til seg selv, og tilsammen blir dette hele gevinsten $x$. Det gir ligningen

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x + 2\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x\right) + 1200 = x.$$

Denne ligningen kan vi løse på følgende måte. Først ganger vi med 12 på begge sider av likhetstegnet. Det gir at

$$3x + 4x + 2\,(4x - 3x) + 12 \cdot 1200 = 12x.$$

Da kan vi trekke sammen dette og få at

$$9x + 12 \cdot 1200 = 12x.$$

Vi trekker $9x$ fra på begge sider og få at

$$12 \cdot 1200 = 3x.$$

Det er naturligvis det samme som at

$$3x = 12 \cdot 1200.$$

Til slutt deler vi med 3 på begge sider og får at

$$x = \frac{12 \cdot 1200}{3} = 4800.$$

Løsningen av denne ligningen er altså $x = 4800$. Det er dette vi kunne kalle å regne analytisk med symboler. Vi har et regnestykke, der et av tallene ikke er kjent. Derimot kjenner vi gangen i regnestykket. Vi vet hvilke addisjoner og multiplikasjoner vi skal gjøre. Siden vi har symboler både for de regneoperasjonene vi skal gjøre og for det ukjente tallet er det mulig for oss å skrive opp regnestykket i form av en ligning.

Dersom istedet gevinsten var kjent og vi skulle finne ut hvor mye hver av de tre vennene fikk, ville regnestykket sett ut som følger: Den ene hadde fått $4800 : 4 = 1200$. Den andre $4800 : 3 = 1600$. Den tredje ville fått $2\,(1600 - 1200) = 800$. Lise-lotte fikk selv 1200 kr. Tilsammen blir dette $1200{+}1600{+}800{+}1200 = 4800$.

Etter å ha løst kubiske ligninger ønsket man å finne tilsvarende løsninger til flere ligninger. Det naturlige neste steget var bikvadratiske ligninger. Et eksempel er

$$x^4 - 16x^3 + 78x^2 - 80x - 175 = 0.$$

Denne ligningen inneholder altså leddet $x^4$ og kalles derfor bikvadratisk. Problemet var altså å finne generelle løsninger til bikvadratiske ligninger. Den som løste problemet var Ludovico Ferrari (1522-1565). Han fant en metode for å tilbakeføre dette problemet til en kubisk ligning, som så kunne løses ved Cardano's regel. En ekstra vanskelighet med bikvadratiske ligninger var at de ikke kunne forståes geometrisk, slik som kvadratiske og kubiske ligninger kunne. Kvadratiske ligninger kunne forståes ved hjelp av kvadrater og rektangler, og kubiske ved hjelp av prismer og kuber. De hadde ingen tilsvarende geometrisk måte å forstå bikvadratiske ligninger på. Likevel klarte de altså å løse dette problemet. Bikvadratiske ligninger kalles også ligninger av grad fire eller fjerdegradsligninger, og dette er en mer algebraisk språkbruk. Tilsvarende kalles kubiske ligninger tredjegradsligninger og kvadratiske ligninger annengradsligninger.

Det skulle vise seg å være vanskeligere å løse ligninger av femte grad. La oss ta med et eksempel på en femtegradsligning.

$$x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0.$$

Man ønsket å finne en metode for å kunne løse en hvilken som helst ligning av femte grad. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) studerte hvilke egenskaper løsningene til en ligning kunne ha. Han hadde jo løsningene til ligninger av lavere grad enn fem. Dette var en ny innfallsvinkel. Men heller ikke han fant løsningen på problemet med femtegradsligningen. Den som løste problemet med femtegradsligningen var Niels Henrik Abel (1802-1829.) Man hadde løsningene av kvadratiske, kubiske og bikvadratiske ligninger i form av visse rotuttrykk. Niels Henrik Abel viste at femtegradsligningen ikke er generelt løsbar ved noen slike rotuttrykk. Abel sitt bevis er et motsigelsesbevis. Han antok at det var mulig å finne et rotuttrykk for løsningen av femtegradsligningen. Ved hjelp av blant annet J. L. Lagranges ideer klarte han å komme frem til en selvmotsigelse. Dermed hadde han vist at løsningen av femtegradsligningen ikke kunne finnes ved noe rotuttrykk.

N. H. Abel hadde vist at i en viss forstand kan ikke alle ligninger løses. Dette var nytt. Dermed begynte man å stille nye og andre spørsmål i algebraen. Etterhvert kom algebra til å dreie seg om andre problemer enn det å finne løsninger til ligninger.

## 3.1 Egenskaper ved regneoperasjonene på tall

Algebra dreier seg som nevnt om mer enn ligninger. Vi skal starte med å se på hvilke egenskaper regneoperasjonene på tall har. Med regneoperasjoner mener vi addisjon, multiplikasjon, subtraksjon og divisjon.

**Tallenes rekkefølge i en regneoperasjon.** En sum av tall blir den samme selv om vi bytter om på leddene i summen. For eksempel er $6 + 8 = 8 + 6$. Det er klart at hvis vi legger 8 til 6, så får vi det samme som hvis vi legger 6 til 8. Tilsvarende er et produkt av tall det samme selv om vi bytter om på faktorene i produktet. Eksempvis er $5 \times 9 = 9 \times 5$. Ganger vi 5 med 9 får vi det samme som hvis vi ganger 9 med 5. Dette holder helt generelt. Vi har at

$$a + b = b + a \text{ og } ab = ba$$

for alle tall $a$ og $b$.

**Summen og produktet av tre tall.** Vi kan bare addere eller multiplisere to tall om gangen, men vi har eksempelvis at $4+(5+7) = (4+5)+7$. Det betyr at hvis vi adderer summen av 5 og 7 til 4, så får vi det samme som hvis vi adderer 7 til summen av 4 og 5. På samme måte er for eksempel $7 \cdot (5 \cdot 8) = (7 \cdot 5) \cdot 8$. Det betyr at hvis vi ganger 7 med produktet av 5 og 8, så får vi det samme som hvis vi ganger produktet av 7 og 5 med 8. Generelt har vi at

$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ og } a\,(bc) = (ab)\,c$$

for alle tall $a, b, c$.

**Produktet av et tall og en sum.** Vi kan multiplisere et tall med en sum ved å addere produktene av tallet med hvert ledd i summen. Velg som eksempel $4\,(3+5)$. Vi må multiplisere 4 med 3 og 4 med 5 og addere disse produktene.

$$4\,(3+5) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 32.$$

I eksempelet vårt har summen bare to ledd. Hvis summen har flere ledd, blir det i prinsippet det samme. Formulerer vi dette generelt har vi at

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

for helt vilkårlige tall $a, b, c$. Vi kan gi dette en geometrisk forklaring. Vi tar utgangspunkt i et rektangel med bredde 4 og lengde $3+5$. Da kan vi åpenbart regne ut hvor mange enhetskvadrater rektangelet består av på to måter. Enten ved $4\,(3+5)$ eller ved $4 \cdot 3 + 4 \cdot 5$. Dermed vil $4\,(3+5) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5$. Se figur 3.1.1.

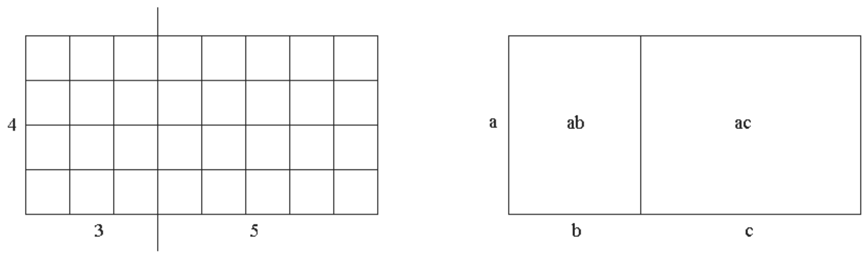



Fig. 3.1.1

**Differenser.** Vi skal se på differenser. La oss velge som eksempel differensen mellom 15 og 7. Den er 8, fordi summen av 7 og 8 er 15. Med tallsymboler er $15 - 7 = 8$ fordi $7 + 8 = 15$. Vi finner det tallet $x$ slik at $7 + x = 15$. Her er altså $x = 8$.

Generelt uttrykt er differansen mellom tallene $a$ og $b$ det tallet $x$ man må addere til $b$ for å få $a$. Skrevet med symboler betyr det at $a - b = x$ dersom $b + x = a$.

La oss se spesielt på differensen $0-1$. Med $0-1$ menes det tallet man må legge til 1 for å få null. Det vil si det tallet $x$ slik at $1+x=0$. Det tallet betegnes $-1$. Vi har altså at $-1=0-1$. Dette betyr at $-1$ bare er en kortere skrivemåte for $0-1$. Videre betyr det at $1+(0-1)=0$, eller kortere skrevet at $1+(-1)=0$. Generelt uttrykt er

$$-a=0-a$$

og

$$a+(-a)=0$$

for et hvilket som helst tall $a$. Dette betyr at vi blant annet har at

$$-1+(-(-1))=0$$

når $a=-1$. La oss addere 1 til begge sider av denne likheten.

$$\begin{aligned}1+(-1+(-(-1))) &= 1\\(1+(-1))+(-(-1)) &= 1\\-(-1) &= 1\end{aligned}$$

Vi finner at $-(-1)=1$. Generelt uttrykt er

$$-(-a)=a$$

for et hvilket som helst tall $a$.

La oss da se på hva $3+(-2)$ skal være. Vi må ha at

$$2+(3+(-2))=2+((-2)+3)=(2+(-2))+3=3$$

Men det må bety at $3+(-2)$ er det man må addere til 2 for å få 3. Da er $3+(-2)$ differensen mellom 3 og 2.

$$3+(-2)=3-2$$

Generelt uttrykt er

$$a+(-b)=a-b.$$

**Brøkregning.** Brøker og divisjon henger nøye sammen. Vi kan for eksempel dele 2 på 3. Det betyr at det fins et tall $x$ slik at $3x=2$. Det tallet skrives

$$x=\frac{2}{3}.$$

Det fins et tall vi må se bort fra, nemlig tallet null. La oss prøve å dele et tall på null. For eksempel 2. Det vil si å finne et tall som multiplisert med null blir 2. Men null multilplisert med et hvilket som helst tall blir aldri 2, det blir null. Det gir følgelig ingen mening å dele 2 på null. Det gir ikke mening å dele noe tall på null. Derfor har vi ingen nulldeler heller.

Forskjellige brøker kan ha samme verdi. Vi har for eksempel at

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}.$$

Dette kan vi forklare geometrisk. Vi lar en hel være representert ved et rektangel. La oss kalle dette rektangelet et enhetsrektangel. Dette enhetsrektangelet kan deles inn i mindre deler enten på langs eller i bredden. Dersom vi deler enhetsrektangelet i tre deler i bredden og skraverer to av delene, får vi frem to tredeler. Dersom vi deler det samme enhetsrektangelet i fire deler på langs, vil enhetsrektangelet bli delt opp i tolv deler. Da ser man at to tredeler er det samme som åtte tolvdeler. Se figur 3.1.2.

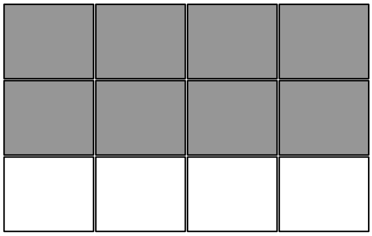


Fig. 3.1.2

Vi må ha at

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}.$$

Vi kan multiplisere med det samme tallet, bortsett fra null, over og under brøkstreken.

Vi adderer brøker. La oss se på $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ som et eksempel. Vi tar utgangspunkt i et enhetsrektangel og deler det i fire på langs, og skraverer en firedel. Deretter deler vi det i tre i bredden og skraverer to tredeler. Se figur 3.1.3. Når vi legger

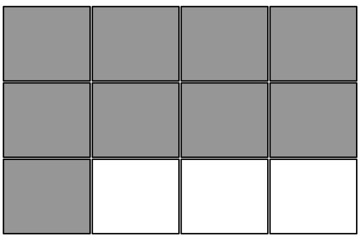


Fig. 3.1.3

sammen firedeler og tredeler, så får vi tolvdeler. Her legger vi sammen en firedel og to tredeler. Da får vi tilsammen elleve tolvdeler.

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}.$$

Vi må også kunne subtrahere brøker, men det blir helt analogt med addisjon.

Brøker kan også multipliseres. La oss se på eksempelet $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$. Vi tar utgangspunkt i et enhetsrektangel, deler det i fire på langs og skraverer en firedel. Deretter deler vi enhetsrektangelet i tre i bredden og skraverer to tredeler. Se figur 3.1.4. Vi ser at en firedel to tredels ganger er det samme som to tolvdeler,

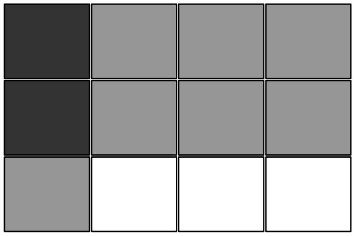


Fig. 3.1.4

eller at to tredeler en firedels gang er to tolvdeler. Da har vi at

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{12}.$$

Brøker multipliseres med hverandre ved å multiplisere teller med teller og nevner med nevner.

Vi kan også dividere brøker med hverandre. La oss se på eksempelet $\frac{1}{4} : \frac{2}{3}$. Dette kan også forklares geometrisk. Se en gang til på figur 3.1.3. En firedel svarer til 3 tolvdeler og to tredeler svarer til 8 tolvdeler. Da må

$$\frac{1}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3}{8}.$$

Her får vi 3 ved at $3 = 1 \cdot 3$ tolvdeler og 8 ved at $8 = 2 \cdot 4$ tolvdeler. Vi dividerer brøker med hverandre ved å gange med den omvendte brøk.

Vi har sett på eksempler der både teller og nevner er hele tall. Da kan vi klare oss med de geometriske forklaringene vi har sett på til nå. Men hvis for eksempel teller eller nevner selv er en brøk, strekker ikke disse geometriske forklaringene helt til. La oss vise regnereglene for brøkregningen mer generelt. Vi skal holde oss til eksempler, men begrunnelsene vil kunne gjennomføres med helt vilkårlige brøker og følgelig gjelde generelt.

Vi så først at $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$. La $x = \frac{2}{3}$. Da er $3x = 2$. Hvis vi multipliserer med 4 på hver side av likhetstegnet, vil likheten fortsatt gjelde. Det gir at $12x = 8$ som betyr at $x = \frac{8}{12}$.

Addisjon av brøker er enklest når brøkene har samme nevner. Velg som eksempel $x = \frac{2}{7}$ og $y = \frac{3}{7}$. Da er $7x = 2$ og $7y = 3$. I den første av disse to likhetene adderer vi $7y$ på begge sider. Da vil likheten fortsatt gjelde, og vi får

$$7x + 7y = 2 + 7y.$$

I den andre likheten adderer vi 2 på begge sider, bevarer likheten og får at

$$7y + 2 = 2 + 3.$$

Av disse to likhetene følger at

$$7x + 7y = 2 + 3.$$

På venstre side av denne likheten kan vi sette 7 utenfor en parentes. Da får vi

$$7\,(x + y) = 2 + 3,$$

og det fører til at

$$x + y = \frac{2+3}{7}.$$

Dette betyr at

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7}.$$

Dersom brøkene ikke har samme nevner, kan vi omforme dem til de får samme nevner. For eksempel har vi at

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}.$$

Subtraksjon kan vi vise på samme måte.

Multiplikasjon kan vises som følger. Velg $x = \frac{2}{3}$ og $y = \frac{4}{5}$. Da er $3x = 2$ og $5y = 4$. I den første av disse to likhetene multipliserer vi med $5y$ på begge sider. Likheten bevares, og vi får $(3x)\,(5y) = 2\,(5y)$. I den andre multipliserer vi med 2 på begge sider. Likheten fortsetter å gjelde, og vi får $2\,(5y) = 2 \cdot 4$. Men da må $(3x)\,(5y) = 2 \cdot 4$. Det fører til at $(3 \cdot 5)\,xy = 2 \cdot 4$ som kan skrives

$$xy = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}.$$

Det betyr at

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}.$$

Vi kan også dividere brøker. La oss se på et eksempel.

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{5} \cdot 3 \cdot 5}{\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{6}{5}.$$

Vi har altså at

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{6}{5}.$$

Vi dividerer $\frac{4}{5}$ på $\frac{2}{3}$ ved å multiplisere $\frac{4}{5}$ med $\frac{3}{2}$. Det betyr at vi dividerer brøker med hverandre ved å multiplisere med den omvendte brøken.

**Produktet av et tall og en differanse.** Vi har også bruk for å multiplisere et tall med en differense. Velg eksempelet $4\,(8-3)$. Vi har at

$$4\,(8-3) = 4\cdot 8 - 4\cdot 3 = 20.$$

Figur 3.1.5 gir en geometrisk forklaring på dette. La oss vise dette generelt. Vi holder oss til tallene i dette eksempelet, men kunne ha valgt helt vilkårlige tall. Vi har at $8-3$ er det tallet $x$ slik at $3+x=8$. Da vil $4\cdot 3+4x=4\cdot 8$. Det betyr at differensen mellom $4\cdot 8$ og $4\cdot 3$ er $4x$. Det vil si at $4x = 4\cdot 8 - 4\cdot 3$, men siden $x = 8-3$, betyr det at $4\,(8-3) = 4\cdot 8 - 4\cdot 3$. Generelt har vi at

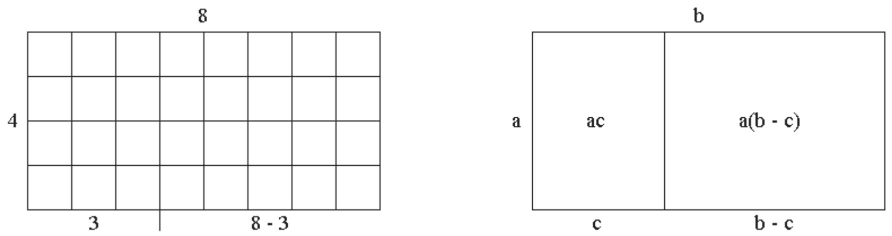


Fig. 3.1.5

$$a\,(b-c) = ab - ac$$

der $a$ og $b$ er vilkårlige tall. Da har vi eksempelvis at

$$2\cdot(-3) = 2\,(0-3) = 2\cdot 0 - 2\cdot 3 = -2\cdot 3 = -6.$$

Generelt formulert har vi at $a\,(-b) = a\,(0-b) = 0 - ab = -ab$ som medfører at

$$a\,(-b) = -ab.$$

Tilsvarende får vi også at

$$(-a)\,b = -ab$$

for helt vilkårlige tall $a, b$. Vi må også se på produkter som for eksempel $(-2)\,(-3)$. Da ser vi på differensen mellom $(-2)\,(-3)$ og $2\cdot 3$.

$$(-2)\,(-3) - 2\cdot 3 = (-2)\,(-3) + 2\,(-3) = ((-2)+2)\,(-3) = 0\cdot 3 = 0.$$

Det betyr at differensen mellom $(-2)\,(-3)$ og $2\cdot 3$ er null, og da må $(-2)\,(-3) = 2\cdot 3$. Generelt formulert har vi at

$$(-a)\,(-b) = ab$$

for helt vilkårlige tall $a, b$.

**Kvadratrot.** Et kvadrat med flateinnhold 9 har side lik 3 fordi $3 \cdot 3 = 9$. Vi sier at kvadratroten av 9 er 3. Skrivemåten for dette er at $\sqrt{9} = 3$. På samme måte er lengden av sidekanten i et kvadrat med flateinnhold 16 lik 4. Vi har altså at $\sqrt{16} = 4$ fordi $4 \cdot 4 = 16$. Et kvadratet med sidekant lik 1 kan deles i to av diagonalen. Den ene halvdelen blir en firedel av kvadratet på diagonalen. Kvadratet på diagonalen må derfor ha flateinnhold lik 2. Siden i dette kvadratet må da være $\sqrt{2}$. Vi har at $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$. Se figur 3.1.6.

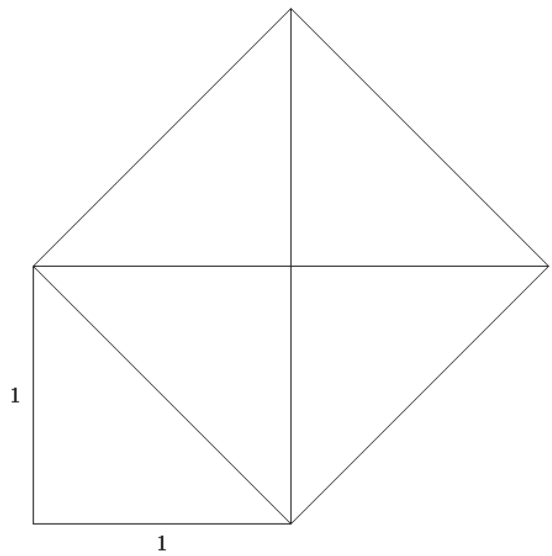



Fig. 3.1.6

**Brøker og desimaltall.** Ved divisjonsalgoritmen kan vi skrive en brøk som et desimaltall. Eksempelvis

$$\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0,666\ldots$$

Divisjonen går aldri opp og sekstallet gjentar seg i det uendelige. Et annet eksempel på et slikt desimaltall kan være 0,272727... der siffrene 27 gjentar seg i det uendelige. Vi spør oss om det er mulig å skrive dette tallet som en brøk. La oss betegne dette tallet $x$. Da er

$$\begin{aligned} x &= 0,272727\ldots \\ 100x &= 27,2727\ldots \\ 100x - x &= 27,2727\ldots - 0,272727\ldots \\ 99x &= 27 \\ x &= \frac{27}{99} = \frac{3}{11}. \end{aligned}$$

Dermed har vi skrevet dette desimaltallet som en brøk med heltallig teller og nevner.

Et desimaltall der den samme sekvensen av desimaler gjentar seg i det uendelige, kalles periodisk. Et eksempel på et desimaltalltall uten periode er

$$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\,238\,5\ldots$$

Siffrene stopper aldri og vi finner heller ingen periode. Tall som kan skrives som en brøk med heltallig teller og nevner kalles **rasjonale tall**. Vi har sett at rasjonale tall kan skrives som periodiske desimaltall. Tall som ikke er rasjonale kalles **irrasjonale**. Rasjonale og irrasjonale tall kalles alle sammen for **reelle tall**. Det svarer til alle endelige og uendelige desimaltall. Samlingen av alle reelle tall deles inn i de som er større enn null, de positive reelle tall, og de som er mindre enn null, de negative reelle tall.

De reelle tallene kan vi la svare til punktene på en rett linje. Velg et punkt som skal svare til 0. Dette punktet kalles gjerne origo. Deretter velges et punkt, vanligvis litt til høyre for 0, som skal svare til 1. Det gir en positiv retning på linjen mot høyre og en lengdeenhet lik lengden fra 0 til 1. Da kan andre tall plasseres i forhold til dette. For eksempel vil $\frac{1}{2}$ måtte ligge midt mellom 0 og 1. Se figur 3.1.7.

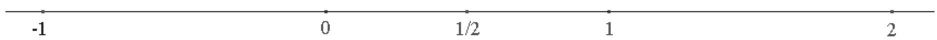



Fig. 3.1.7

# Oppgaver

Diofant levde i Alexandria, man antar omkring 250 e. Kr. Han regnes som en av de betydeligste matematikerne fra denne perioden. Av hans arbeider kjenner man "Aritmetika" og en del av "Polygonaltallene".

1. Det sies at på gravstenen til Diofant står det: "Denne gravsten dekker Diofant. Hans alder lærer stenen ved hans egen kunst. Gud lot ham være gutt en $\frac{1}{6}$ av livet. Enda en $\frac{1}{12}$ og sjegget vokste frem. Så en $\frac{1}{7}$ til, så giftet han seg. Etter fem år fikk han en sønn. Men han døde stakkar, etter å ha nådd farens halve alder. Så levde han enda fire år, hvor han slukket sorgen ved å studere tallæren." De problemene Diofant arbeidet med var nok betydelig vanskeligere enn dette, men her er oppgaven å finne alderen til Diofant [1].

Den indiske matematikeren Bhaskara levde fra 1114 til 1185 og representerer et høydepunkt i datidens indiske matematikk med sin behandling av såkalte ubestemte eller Diofantiske ligninger. Han skrev også en bok omkring år 1150 og oppkalte den etter sin egen datter Lilavati, kanskje ment som en lærebok i matematikk. De to neste oppgavene er eksempler på det [1].

2. Av en sverm bier slo $\frac{1}{5}$ seg ned på en cadambablomst og $\frac{1}{3}$ på en silindriblomst. Tre ganger differensen mellom disse flokkene slo seg ned på en cutajablomst. Resten av svermen, 1 bie, surret omkring i luften, fristet som den var både av en sjasmins og av en padanus' søte vellukt. Si meg vakre kvinne, hvor stor svermen var.

3. Et halsbånd gikk i stykker under en kjærlighetsstrid. En tredjedel av perlene falt ned, en femtedel ble liggende på løybenken, en sjettedel fant piken, og en tiendedel samlet elskeren sammen. Seks perler ble igjen på snoren. Hvor mange perler hadde det vært i halssmykket?

Mahavira levde omkring midten av det niende århundre og var en av datidens betydelige indiske matematikere. Han har etterlatt seg mange oppgaver. Blant annet denne [2].

4. Et stort fat med mangofrukter bæres frem for kongen og hans familie. Selv forsyner han seg med $\frac{1}{6}$, Dronningen tar $\frac{1}{5}$ av resten, den eldste prinsen får $\frac{1}{4}$ av det som da er tilbake, den nest eldste deretter $\frac{1}{3}$ av resten, og den tredje eldste får $\frac{1}{2}$ av slumpen. De siste tre mangoer får det minste av barna. Hvor mange mangoer var det på fatet?

5. Differensen mellom tre ganger tallet og fire er det samme som summen av tallet og to. Formuler dette som en ligning og finn tallet.

6. To ganger summen av tallet og tre er det samme som tre ganger differensen av tallet og to. Formuler dette som en ligning og finn tallet.

7. Regn ut.

a) $(x-1)(x+2)-4$
b) $2(x+1)(x-3)+(2x+1)(x-1)$
c) $3(x+1)-(x-2)(x+3)+(x+4)(2x-1)$
d) $(1-x)(x+2)+2(x-2)(x+4)(x+2)$
e) $4(2-x)(x+3)-(3x-4)(x+2)$
f) $(x-1)(x+2)+2(x+2)(x-1)(x+1)+2$

8. Regn ut.

a) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{x} + \frac{3}{3x}$ b) $\frac{2}{x-3} + \frac{4}{x+2} + 1$ c) $\frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2-1}$

9. Regn ut.

a) $\frac{4+x}{x-1} + \frac{3x}{x+2} - x - 3$ b) $\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4} - \frac{2}{x^2-16} + 2$ c) $\frac{2}{x-4} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

10. Løs disse ligningene.

a) $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2x} = 1$ b) $\frac{x-5}{x+5} = \frac{x-2}{x+2}$ c) $\frac{4}{x+4} + \frac{4}{x-4} = \frac{x^2}{x^2-16} - 1$

11. Hvis du setter inn en kapital på 5000 kr i en bank og får 3 prosent rente, så betyr det at den kapitalen du satte inn vokser med 3 prosent hvert år. Finn ut hvor stor kapitalen er blitt etter ett år, to år, tre år og etter $n$ år.

12. Skriv disse desimaltallene som brøker med heltallig teller og nevner.

a) 0,999... b) 0,99 c) 0,49 d) 0,4999...
e) 0,2272727... f) 0,639639639... g) 0,818181...

13. Vis at vi har følgende regneregel for kvadratrøtter

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

der $a, b$ ikke er negative tall.

## 3.2 Kvadratsetningene

Se på figur 3.2.1 Den viser to kvadrater. Kvadratet til venstre er delt opp i to mindre kvadrater og to rektangler. Det største kvadratet har side $a$ og det minste har side $b$. Rektanglene har lengde $a$ og bredde $b$. Siden i hele kvadratet må være $a+b$. Da ser vi av figuren at

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Dette kalles **første kvadratsetning**. Den holder helt generelt for vilkårlige tall $a$ og $b$ fordi

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b \\ &= a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Kvadratet til høyre i samme figur er delt opp på samme måte, i to mindre

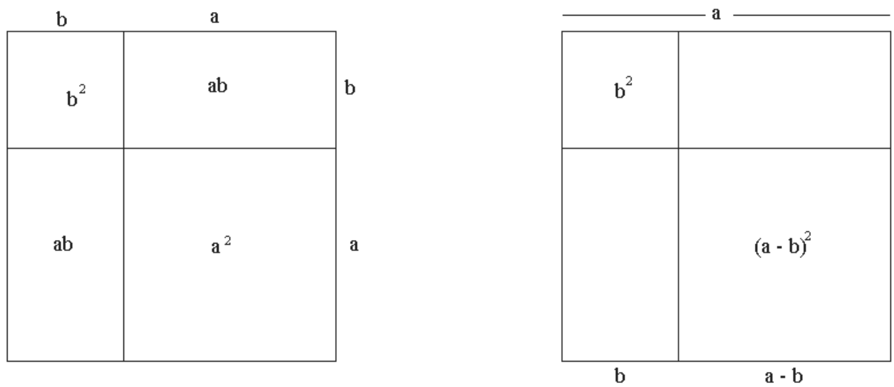



Fig. 3.2.1

kvadrater og to rektangler. Men her er siden i det største kvadratet $a-b$ og siden i det minste $b$. Siden i hele kvadratet er $a$. Da ser vi av figuren at

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Dette kalles **andre kvadratsetning**. Den holder også helt generelt for vilkårlige tall $a$ og $b$ fordi

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b) \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Se på figur 3.2.2. Den viser et rektangel som er delt opp i to kvadrater og to rektangler. Det ene av rektanglene deler det største kvadratet i to rektangler. Det største kvadratet har side $a$ og den minste har side $b$. Da ser vi av figuren at

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Dette kalles **tredje kvadratsetning.** Den holder helt generelt for vilkårlige tall $a$ og $b$ fordi

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a(a-b)+b(a-b)\\ &= a^2-ab+ba-b^2\\ &= a^2-b^2.\end{aligned}$$

Kvadratsetningene brukes på to måter. Det ene er å forenkle regnestykkene, det

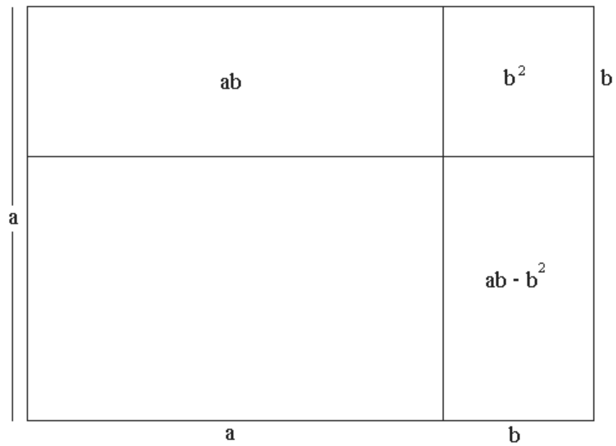



Fig. 3.2.2

andre er å faktorisere. La oss se på et eksempel på det første.

**Eksempel.**

$$(x+1)^2+(x-2)^2-(x+2)(x-1).$$

På det første leddet kan vi bruke første kvadratsetning. Vi får at

$$(x+1)^2 = x^2+2x+1.$$

På det andre leddet kan vi bruke andre kvadratsetning. Den gir at

$$(x-2)^2 = x^2-4x+4.$$

Det siste leddet kan vi ikke bruke noen av kvadratsetningene på. Vi regner det ut og får

$$(x+2)(x-1) = x(x-1)+2(x-1) = x^2-x+2x-2 = x^2+x-2.$$

Da får vi

$$\begin{aligned}&(x+1)^2+(x-2)^2-(x+2)(x-1)\\ =\;& x^2+2x+1+x^2-4x+4-\left(x^2+x-2\right)\\ =\;& x^2-3x+7.\end{aligned}$$

# Oppgaver

1. Regn ved hjelp av kvadratsetningene.
   a) $(1+x)^2$ b) $(x+3)^2$ c) $(7-x)^2$

2. Regn ved hjelp av kvadratsetningene.
   a) $(x-2)^2 - 4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) + 2(x-1)(x+2)$
   b) $(x-2)^2 - 3(x+1)^2 + (x+2)(x-3) - (x+1)(x-1)$
   c) $(1-x)^2 + 2(2-x)^2 + 4\left(2x+\frac{1}{2}\right)\left(2x-\frac{1}{2}\right) + x(x+1)$
   d) $(x-2)^2 + (2x-1)(x-3) + (x-1)(x+1)$

3. Tegn disse uttrykkene som kvadrater og faktoriser dem.
   a) $x^2+6x+9$ b) $x^2+10x+25$ c) $x^2-2x+1$ d) $x^2-1$

4. Bruk kvadratsetningene til å forkorte brøkene.
   a) $\frac{x^2-6x+9}{(x-3)(x+2)}$ b) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$ c) $\frac{4x^2+4x+1}{4x^2-1}$ d) $\frac{x^2-5}{x-\sqrt{5}}$

## 3.3 Kvadratiske ligninger

Ligningen

$$x^2 + 3x = 4$$

kalles en kvadratisk ligning siden den inneholder leddet $x^2$. Vi skal se på hvordan man kan løse slike ligninger. Ideen vi bruker har eksistert lenge i flere kulturer. Leddet $x^2$ kan vi la være et kvadrat med side $x$. Det andre leddet, $3x$, kan være et rektangel med lengde 3 og bredde $x$. Vi deler rektangelet loddrett i to like deler. Se figur 3.3.1. Det gir to mindre rektangler som vi legger til kvadratet.

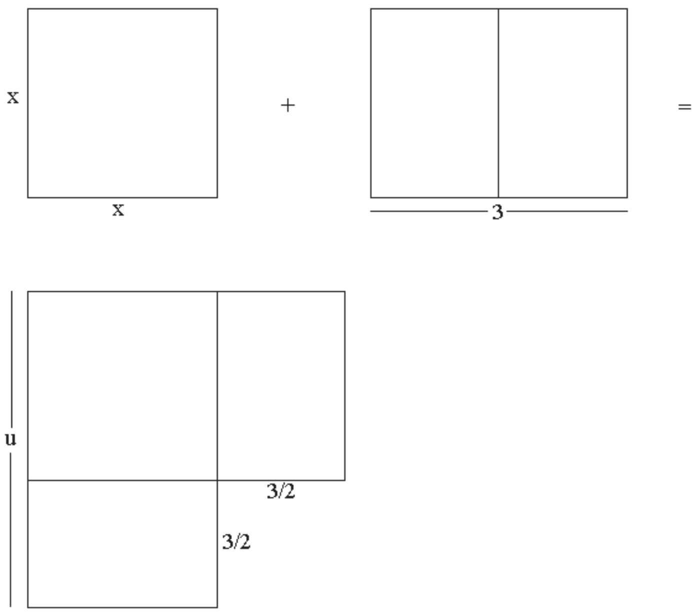



Fig. 3.3.1

Da får vi et nytt kvadrat der det mangler et hjørne. Siden i dette kvadratet er $x + \frac{3}{2}$. Dette er bakgrunnen for å innføre en hjelpestørrelse $u$ gitt ved

$$u = x + \frac{3}{2}.$$

Denne sammenhengen mellom $x$ og $u$ kan også skrives

$$x = u - \frac{3}{2}.$$

Dette kan vi sette inn i den kvadratiske ligningen.

Det gir

$$x^2 + 3x = \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(u - \frac{3}{2}\right) = u^2 - \frac{9}{4}.$$

Da er ligningen vi startet med omformet til

$$u^2 - \frac{9}{4} = 4$$

som er enkel å løse. Vi får at

$$u^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}.$$

Da må $u = \frac{5}{2}$ eller $u = -\frac{5}{2}$. For å finne verdiene av $x$ bruker vi nå at $x = u - \frac{3}{2}$. Det gir oss at $x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$ og $x = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -4$. Løsningene er følgelig $x = 1$ og $x = -4$. La oss se på et annet eksempel.

**Eksempel.**

$$2x^2 - 8x + 4 = 0.$$

Siden vi har en faktor 2 foran $x^2$ deler vi først med 2 på hver side av ligningen og får

$$x^2 - 4x + 2 = 0.$$

Siden vi nå har et minustegn foran leddet $4x$, så setter vi

$$u = x - 2$$

som er det samme som at

$$x = u + 2.$$

Innsetting gir

$$(u + 2)^2 - 4(u + 2) + 2 = 0.$$

Vi kvadrerer og ganger ut og får

$$u^2 + 4u + 4 - 4u - 8 + 2 = 0.$$

Trekker vi dette sammen får vi

$$u^2 - 2 = 0.$$

Adderer vi 2 til hver side får vi $u^2 = 2$. Tar vi kvadratroten får vi $u = \sqrt{2}$ og $u = -\sqrt{2}$. Det gir løsningene $x = 2 + \sqrt{2}$ og $x = 2 - \sqrt{2}$. Vi ser at samme ide, bare med et fortegnsskifte, gir løsningene.

# Oppgaver

1. Løs ligningene.
   a) $(x - 2)^2 = 9$ b) $(2x + 4)^2 = 4$ c) $x^2 + 4x + 4 = 0$
   d) $x^2 - 2x + 1 = 0$

2. Løs disse ligningene ved fullstendig kvadraters metode.

a) $x^2 + x = 2$ b) $2x^2 + x = 1$ c) $x^2 + 6x + 4 = 0$ d) $6x^2 - x = 1$

3. Løs ligningen

$$\frac{x}{x+3} - \frac{x+1}{2x-6} + \frac{4x}{x^2-9} = 0.$$

Vi har tidligere presentert den indiske matematikeren Mahavira fra midten av det niende århundre. De to neste oppgavene er laget av ham [2].

4. En fjerdedel av en flokk kameler ble sett i skogen. To ganger kvadratroten av flokken hadde trukket til fjellsiden, mens 3 ganger 5 kameler var igjen ved elvebredden. Si meg hvor stor flokken var.

5. Fem og en fjerdedel ganger kvadratroten av en elefantflokk drev omkring på en fjellskråning, og fem niendedeler av resten var på toppen av fjellet. Fem ganger kvadratroten av resten drev omkring i en lotusskog. Tilbake ved elven var det seks elefanter. Hvor mange elefanter var det tilsammen?

6. Finn to tall slik at summen av dem er 1 og summen av deres kvadrater er 4.

## 3.4 Lineære ligningssystemer

Han-dynastiet i Kina varte fra 206 f.Kr. til 222 e.Kr. Fra denne perioden har vi en bok med tittelen Aritmetikk i ni deler. I denne boken finner vi følgende problem: "Tre bunter av god avling, to bunter av middels avling og en bunt av dårlig avling selges for 39 dou. To bunter av god, tre av middels og en av dårlig kvalitet selges for 34 dou. En bunt av god, to av middels og tre av dårlig kvalitet selges for 26 dou. Hva er prisen for en bunt av god avling, en bunt av middels, og en bunt av dårlig avling?"[4]

La oss si at prisen på en bunt av god avling er $x$, prisen på en bunt av middels avling er $y$ og prisen på en bunt av dårlig avling er $z$. Det gir oss de tre ligningene

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26. \end{aligned}$$

Vi skal se på to metoder for å løse slike ligningssytemer. Den ene metoden kalles innsettingsmetoden og den andre addisjonsmetoden. La oss komme tilbake til problemet fra Aritmetikk i ni deler senere, og istedet se på et enklere eksempel først. La det være

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 7. \end{aligned}$$

**Innsettingsmetoden.** Den øverste av disse to ligningene er $x + y = 5$. Vi kan trekke fra $x$ på hver side av denne og få at $y = 5 - x$. Dette uttrykket for $y$ kan settes inn i den nederste ligningen. Det gir

$$2x - (5 - x) = 7.$$

Denne ligningen har bare en ukjent, og er enkel å løse. Vi får

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 7 \\ 3x &= 12 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Da er $y = 5 - 4 = 1$. Løsningen er $x = 4, y = 1$. At dette er løsningen ser vi ved at $4 + 1 = 5$ og at $2 \cdot 4 - 1 = 7$. Vi tar med et eksempel til, men nå med tre ligninger med tre ukjente. Vi ser på

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x - y + z &= 2 \\ x + y - z &= 0. \end{aligned}$$

Den nederste av disse tre ligningene er $x + y - z = 0$. Da kan vi legge til $z$ på hver side og få at

$$x + y = z.$$

Dette uttrykket for $z$ kan settes inn i de to øverste ligningene. Da får vi

$$\begin{aligned} x + y + (x + y) &= 6 \\ x - y + (x + y) &= 2. \end{aligned}$$

Det er det samme som

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 6 \\ 2x &= 2 \end{aligned}$$

Den siste av disse to gir at $x = 1$, som kan settes inn i den øverste av disse to. Det gir $2 \cdot 1 + 2y = 6$ Det gir at

$$\begin{aligned} 2y &= 6 - 2 \\ 2y &= 4 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Med $x = 1$ og $y = 2$ og $z = x + y$ som vi hadde ovenfor, får vi at $z = 1 + 2 = 3$. Løsningen er derfor $x = 1, y = 2, z = 3$. At dette er løsningen ser vi ved at

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 &= 6 \\ 1 - 2 + 3 &= 2 \\ 1 + 2 - 3 &= 0. \end{aligned}$$

**Addisjonsmetoden.** Så ser vi på den andre metoden. Vi hadde

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 7 \end{aligned}$$

Dersom vi nå adderer venstre side av den øverste ligningen med venstre side av den nederste, og videre adderer høyresiden av den øverste med høyresiden av den nederste og setter resultatene lik hverandre får vi

$$\begin{aligned} (x + y) + (2x - y) &= 5 + 7 \\ 3x &= 12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

som var den verdien vi fant ovenfor. Verdien av $y$ finner vi som før. $y = 5 - x = 5 - 4 = 1$. Vi la sammen venstre side med venstre side og høyre side med høyre side. Dette må vi undersøke om holder generelt. Vi tenker oss at vi har to ligninger

$$\begin{aligned} A &= B \\ C &= D. \end{aligned}$$

$A$ står for venstre og $B$ for høyre side i den ene ligningen. $C$ står for venstre og $D$ for høyre side i den andre ligningen. Da må vi i alle fall kunne addere $C$ på hver side av den øverste av disse og $B$ på hver side av den nederste. Da får vi

$$\begin{aligned} A+C &= B+C \\ B+C &= B+D. \end{aligned}$$

Da følger det nødvendigvis av dette at

$$A+C=B+D$$

som nettopp er resultatet av å addere venstre side med venstre side og høyre med høyre. Derfor kan vi trygt gjøre dette. Helt tilsvarende kan vi få at

$$A-C=B-D.$$

Dette er grunnlaget for addisjonsmetoden. Vi prøver den på det andre eksempelet vårt.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ x-y+z &= 2 \\ x+y-z &= 0. \end{aligned}$$

Vi adderer de to nederste av disse tre ligningene og får

$$\begin{aligned} (x-y+z)+(x+y-z) &= 2+0 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Dersom vi trekker den midterste fra den øverste får vi

$$\begin{aligned} (x+y+z)-(x-y+z) &= 6-2 \\ 2y &= 4 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Dersom vi trekker den nederste fra den øverste får vi

$$\begin{aligned} (x+y+z)-(x+y-z) &= 6-0 \\ 2z &= 6 \\ z &= 3. \end{aligned}$$

La oss avslutte med å finne løsningen til problemet fra boken Aritmetikk i ni deler.

$$\begin{aligned} 3x+2y+z &= 39 \\ 2x+3y+z &= 34 \\ x+2y+3z &= 26. \end{aligned}$$

Dersom vi trekker den midterste fra den øverste, får vi

$$\begin{aligned}(3x + 2y + z) - (2x + 3y + z) &= 39 - 34 \\ x - y &= 5.\end{aligned}$$

Dette er en ligning i $x$ og $y$, vi trenger en til. Dersom vi multipliserer den midterste med 3, får vi

$$6x + 9y + 3z = 102.$$

Dersom vi multipliserer den nederste med $-1$, får vi

$$-x - 2y - 3z = -26.$$

Adderer vi disse to får vi

$$\begin{aligned}(6x + 9y + 3z) + (-x - 2y - 3z) &= 102 + (-26) \\ 5x + 7y &= 76.\end{aligned}$$

Da har vi to ligninger i $x$ og $y$. De er

$$\begin{aligned}x - y &= 5 \\ 5x + 7y &= 76.\end{aligned}$$

Den øverste gir at $x = 5 + y$, som kan settes inn i den nederste. Da får vi

$$\begin{aligned}5\,(5 + y) + 7y &= 76 \\ 25 + 5y + 7y &= 76 \\ 12y &= 51 \\ y &= \frac{17}{4}.\end{aligned}$$

Det fører til at

$$x = 5 + y = 5 + \frac{17}{4} = \frac{37}{4}.$$

Ved å sette inn verdiene for $x$ og $y$ i den øverste av de tre ligningene, får vi

$$\begin{aligned}3 \cdot \frac{37}{4} + 2 \cdot \frac{17}{4} + z &= 39 \\ z &= \frac{11}{4}.\end{aligned}$$

Løsningen blir $x = \frac{37}{4}, y = \frac{17}{4}, z = \frac{11}{4}$.

# Oppgaver

1. Løs ligningssystemet.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

2. Løs ligningssystemet.

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= -1 \\ 3x + y &= 9 \end{aligned}$$

3. Løs ligningssystemet.

$$\begin{aligned} 5x - 4y &= 7 \\ 4x + 3y &= 18 \end{aligned}$$

4. Summen av tre ganger det ene tallet og fire ganger det andre tallet er tyve. Dessuten er summen av fire ganger det ene tallet og tre ganger det andre tallet tjueto. Finn tallene.

5. To gullgravere vil sammenligne utbytte hver av dem har fått mellom seg. Den ene sier at hvis du gir meg to gullklumper, så har jeg dobbelt så mange gullklumper som deg. Ja, sier den andre, men hvis du gir meg en gullklump, så har vi like mange. Finn ut hvor mange gullklumper hver av dem hadde.

6. Finn lengdene av sidene i $\triangle ABC$ der tre ganger lengden av $AB$ og to ganger lengden av $BC$ og en gang lengden av $AC$ er 33 lengdeenheter, videre er to ganger lengden av $AB$ og fire ganger lengden av $BC$ og en gang lengden av $AC$ 44 lengdeenheter, og to ganger lengden av $AB$ og tre ganger lengden av $BC$ og to ganger lengden av $AC$ 38 lengdeenheter.

7. Løs ligningssystemet.

$$\begin{aligned}4x+2y-z &= 9\\3x-2y+4z &= 1\\x-4y+5z &= -6\end{aligned}$$

8. Løs ligningssystemet.

$$\begin{aligned}4x+3y+4z &= 6\\3x-2y+4z &= -3\\x+4y+3z &= 10\end{aligned}$$

9. Løs ligningssystemet.

$$\begin{aligned}3x+4y+2z &= 10\\4x+2y+z &= 0\\3x-2y+6z &= 0\end{aligned}$$

10. Løs ligningssystemet.

$$\begin{aligned}3x+4y-z &= 15\\2x+2y-z &= 8\\2x-3y+2z &= 4\end{aligned}$$

# 4 Kurver og ligninger

Vi tenker oss gitt et plan. Velg to rette linjer som står vinkelrett på hverandre i dette planet. Den ene kan gjerne være vannrett og den andre loddrett. For hvert punkt på den vannrette linjen svarer det et tall. La oss kalle dette tallet for $x$. Det betyr at $x$ har forskjellige verdier ettersom vi velger ulike punkter på den vannrette linjen. Tilsvarende svarer det et tall til hvert punkt på den loddrette linjen. La oss kalle dette tallet for $y$. De to linjene krysser hverandre i et punkt som kalles origo. I origo er $x = 0$ og $y = 0$. Velg en verdi for $x$. Det gir et punkt på den vannrette linjen. I dette punktet oppreiser vi en normal. Velg en verdi for $y$. Det gir et punkt på den loddrette linjen. Vi legger en normal gjennom dette punktet også. Disse to normalene vil møtes i et punkt i det gitte planet. Dersom vi omvendt velger et punkt i det gitte planet, kan vi legge en normal gjennom dette punktet både til den vannrette linjen og den loddrette linjen. Det gir et punkt på den vannrette linjen og et punkt på den loddrette linjen. Dermed har vi en verdi for $x$ og en verdi for $y$ knyttet til det valgte punktet i planet. Vi kaller $x$ og $y$ for koordinatene til punktet og sier at vi har et koordinatsystem i det gitte planet. Den linjen verdiene for $x$ velges fra kalles x-aksen. Da andre linjen kalles y-aksen. Se figur 4.1.

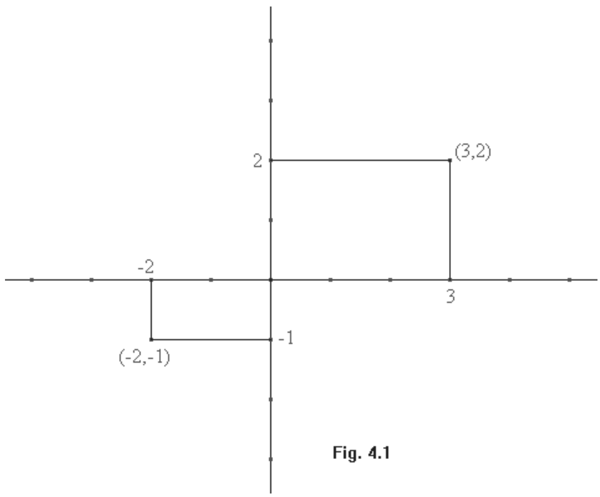



**Fig. 4.1**

Vi tenker oss at vi har en kurve i et plan med et koordinatsystem. Hvert punkt på kurven er et punkt i planet, med en verdi for $x$, og en verdi for $y$. Vi vil prøve å finne en sammenheng mellom $x$ og $y$ i form av en ligning.

## 4.1 Rette linjer

De enkleste kurvene vi kan tenke oss er rette linjer. La oss finne ligningen for den rette linjen gjennom punktet $P$ gitt ved $x = 1$ og $y = 1$, og $Q$ gitt ved $x = 3$ og $y = 5$. La $R$ være et vilkårlig valgt punkt på denne linjen med koordinater

$x$ og $y$. Se figur 4.1.1. Vi får likeformede trekanter. $\triangle PSQ$ er likeformet med $\triangle PTR$. Formlikhet betyr at $PT = kPS$ og $RT = kQS$ for et passenede tall $k$. Det fører til at

$$\frac{RT}{PT} = \frac{kQS}{kPS} = \frac{QS}{PS}$$

Siden $RT = y - 1$, $PT = x - 1$, $QS = 5 - 1$ og $PS = 3 - 1$ får vi av det at

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{5-1}{3-1} = 2$$

Det gir ligningen

$$y - 1 = 2\,(x - 1)$$

som også kan skrives

$$2x - y = 1$$

Formlikheten ga oss at

$$\frac{RT}{PT} = \frac{QS}{PS} = \frac{5-1}{3-1} = 2$$

Vi sier at linjens **stigningstall** er 2. Legg merke til at dersom stigningstallet

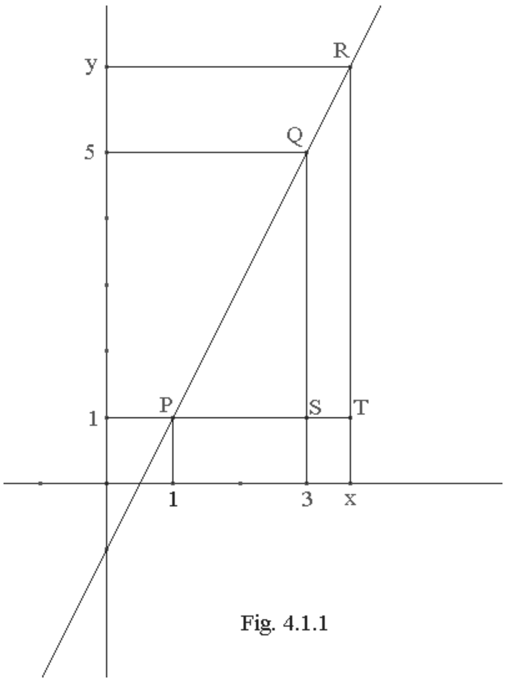


Fig. 4.1.1

for en gitt linje er positivt må $Q$ ligge over $P$. Det betyr at linjen er stigende med økende verdier av $x$. Hvis stigningstallet er negativt, må $Q$ ligge lavere enn $P$. Da vil linjen være fallende med økende verdier av $x$. Hvis stigningstallet er null, vil linjen hverken falle eller stige.

**Eksempel.** Betrakt ligningen

$$2x + 3y = 5.$$

Da er $x = 1$ og $y = 1$ en av mange løsninger. Det betyr at

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5.$$

Dersom vi trekker denne siste ligningen fra den første ligningen får vi

$$2(x-1) + 3(y-1) = 0.$$

Trekker vi $2(x-1)$ fra på begge sider får vi at

$$3(y-1) = -2(x-1).$$

Dersom $x-1$ ikke er null kan vi dele med $3(x-1)$ på begge sider. Da får vi at

$$\frac{y-1}{x-1} = -\frac{2}{3}.$$

Geometrisk betyr det at $2x + 3y = 5$ er en rett linje med stigningstall lik $-\frac{2}{3}$ gjennom punktet med koordinater $x = 1$ og $y = 1$. Siden stigningstallet er negativt er dette en fallende linje. Helt generelt vil en ligning på formen

$$ax + by = c$$

der $a$,$b$, $c$ er faste tall, være en rett linje.

**Eksempel.** La to linjer være gitt ved $8x - 3y = 4$ og $2x + y = 8$. La oss finne skjæringspunktet mellom dem. Skjæringspunktet er et punkt som ligger på begge linjene. Da må vi finne en verdi av $x$ og en verdi av $y$ som løser ligningssytemet

$$\begin{aligned} 8x - 3y &= 4 \\ 2x + y &= 8. \end{aligned}$$

Løsningen er $[x = 2, y = 4]$. Skjæringspunktet er gitt ved $x = 2$ og $y = 4$.

## 4.2 Sirkler

La oss også se på en sirkel. Vi velger som eksempel en sirkel med radius 2, og sentrum i punktet $S$ med koordinater 2 og 1. Det betyr at $x = 2$ og $y = 1$.Velg et vilkårlig punkt $P$ på sirkelen med koordinater $x$ og $y$. Da vil verdiene av $x$ og $y$ variere med hvilket punkt $P$ vi velger. Normalen gjennom $P$ på x-aksen, og normalen gjennom $S$ på y-aksen, møtes i punktet $Q$. Se figur 4.2.1. Da har vi en rettvinklet trekant med hjørner $S$, $Q$ og $P$, der $Q$ er hjørnet med den rette vinkelen. Da kan vi bruke Pythagoras setning. Kvadratet på lengden $SQ$

er $(x-2)^2$ og kvadratet på lengden $PQ$ er $(y-1)^2$. Siden radius skulle være 2 gir det ligningen

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4.$$

Dersom vi kvadrerer ut får vi

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4.$$

Her kan vi trekke fra 4 på hver side og få at

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$$

Det blir denne sirkelens ligning.

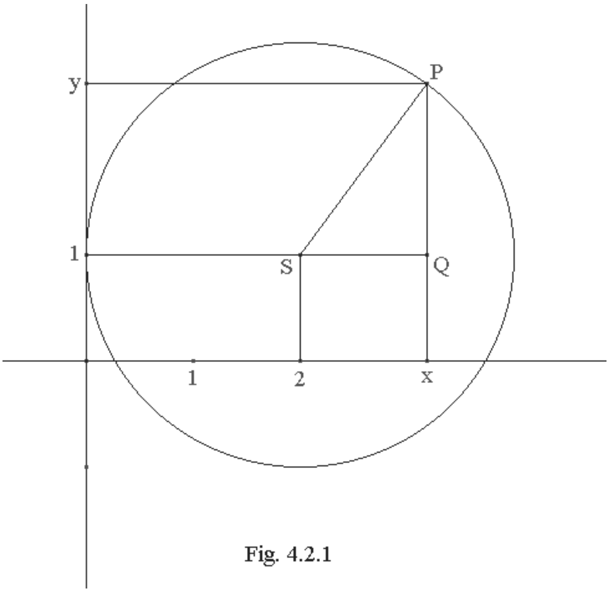



Fig. 4.2.1

**Eksempel.** Betrakt en kurve gitt ved ligningen

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0.$$

Siden $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ kan ligningen skrives

$$(x-2)^2 + y^2 - 6y = 0.$$

Legg til 9 på hver side av likhetstegnet. Det gir at

$$(x-2)^2 + y^2 - 6y + 9 = 9.$$

Siden $y^2 - 6y + 9 = (y-3)^2$ kan denne ligningen skrives

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3^2.$$

Da ser vi at kurven er en sirkel med sentrum i $x = 2$ og $y = 3$ og med radius lik 3.

# Oppgaver

1. Tegn inn punktene $P$ og $Q$ i et koordinatsystem, og tegn linjen mellom dem. Bruk formlikhet til å finne ligningen for denne rette linjen.
a) $x = 2$ og $y = 3$ for $P$ og $x = 4$ og $y = 5$ for $Q$
b) $x = 0$ og $y = 1$ for $P$ og $x = 4$ og $y = 0$ for $Q$
c) $x = -1$ og $y = 1$ for $P$ og $x = 3$ og $y = 9$ for $Q$

2. Finn evt. skjæringspunkter mellom de rette linjene gitt ved

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ x + 4y &= 9 \end{aligned}$$

3. Finn evt. skjæringspunkter mellom de rette linjene gitt ved

$$\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ 2x + 4y &= 3 \end{aligned}$$

4. Finn evt. skjæringspunkter mellom de rette linjene gitt ved

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 2 \\ 6x - 8y &= 1 \end{aligned}$$

5. Finn sentrum og radius i sirkelen gitt ved

$$x^2 + y^2 - 4y = 0$$

6. Finn sentrum og radius i sirkelen gitt ved

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

7. Finn sentrum og radius i sirkelen gitt ved

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$$

8. Vis at den rette linjen $x + y = \sqrt{2}$ er tangent til sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, og finn tangeringspunktet.

# 5 Funksjoner

Hvis vi har gitt en ligning, prøver vi å finne alle verdier av den ukjente som passer i ligningen. Betrakt eksempelvis ligningen

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Dette er en kvadratisk ligning. Vi kan løse den ved å sette $u = x - \frac{1}{2}$. Det er det samme som at $x = u + \frac{1}{2}$. Innsatt i ligningen gir det

$$\begin{aligned}
\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(u + \frac{1}{2}\right) - 2 &= 0 \\
u^2 + u + \frac{1}{4} - u - \frac{1}{2} - 2 &= 0 \\
u^2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2 \\
u^2 &= \frac{9}{4} \\
u &= \pm\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Da finner vi løsningene $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ og $x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$. Setter vi inn $x = 2$ i ligningen, får vi $2^2 - 2 - 2 = 0$, og lar vi $x = -1$ får vi $(-1)^2 - (-1) - 2 = 0$, som viser at $x = 2$ og $x = -1$ er løsningene til ligningen. Hvis vi derimot betrakter uttrykket $x^2 - x - 2$ alene, kan vi la $x$ ha en hvilken som helst verdi. Vi kan sette

$$y = x^2 - x - 2$$

og velge forskjellige verdier av $x$. Hver gang får vi en verdi av $y$. Da har vi en sammenheng mellom $x$ og $y$. Verdien av $y$ er gitt av den valgte verdien av $x$. Velg for eksempel $x = 1$. Da er $y = -2$. En slik sammenheng mellom to størrelser kaller vi en funksjon. Siden $x$ og $y$ her er størrelser som varierer kaller vi dem for variable.

**Definisjon.** En sammenheng mellom variable størrelser $x$ og $y$, slik at enhver verdi av $x$ gir en bestemt verdi av $y$, kalles en funksjon. Vi sier at $y$ er en funksjon av $x$. Hvis vi betegner funksjonen med $f$ så skriver vi

$$y = f(x).$$

Vi kaller $x$ uavhengig variabel og $y$ avhengig variabel.

**Eksempel.** La oss uttrykke omkretsen av et rektangel med flateinnhold 25 kvadratmeter som en funksjon av grunnlinjens lengde i meter. Vi kaller grunnlinjen $x$ og høyden $y$. Da er omkretsen $2(x + y)$. Siden flateinnholdet er 25 kvadratmeter, så er $xy = 25$. Dersom $x \neq 0$, så er $y = \frac{25}{x}$. La $f(x)$ være omkretsen som funksjon av $x$. Da er

$$f(x) = 2\left(x + \frac{25}{x}\right) = \frac{2\left(x^2 + 25\right)}{x}.$$

Dersom $x = 5$, så er $y = 5$. Da har vi et kvadrat. Omkretsen til kvadratet blir $4 \times 5 = 20$.

Vi kan også oppfatte $y = x^2 - x - 2$ som en ligning, men da som en ligning i to ukjente, $x$ og $y$, som vi heller skriver

$$x^2 - x - y - 2 = 0.$$

En løsning av denne ligningen, er en verdi for $x$ og en verdi for $y$, som oppfyller ligningen sammen som et par. For eksempel er $x = 1$ og $y = -2$ en løsning fordi $1^2 - 1 - (-2) - 2 = 0$. Geometrisk er ligningen $x^2 - x - y - 2 = 0$ en kurve i planet, og en løsning, et punkt på denne kurven. Dersom vi oppfatter $y = x^2 - x - 2$ som en funksjon, snakker vi heller om kurven til funksjonen eller bare funksjonskurven. Funksjonskurven kalles også grafen til funksjonen.

# Oppgaver

1. Finn et uttrykk for arealet av et rektangel når omkretsen er 100 meter som funksjon av grunnlinjens lengde i meter.

2. Av et kvadratisk stykke papp med sidekanter 30 centimeter skal det lages en eske ved at man i hvert hjørne klipper bort et kvadrat med sidelengde $x$ i centimeter. Finn et uttrykk for volumet av esken som funksjon av $x$.

3. Tegn disse to funksjonene i samme koordinatsystem.

$$f(x) = 2x + 1, \qquad g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

4. Tegn disse to funksjonene i samme koordinatsystem

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = x^2 + 1$$

5. La

$$f(x) = x^2 - 1$$

a) Finn $x$ slik at $f(x) = 0$. Dette kalles funksjonens nullpunkter.
b) Tegn funksjonen i et koordinatsystem med sine nullpunkter.

6. La

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

a) Vis at

$$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

b) Finn funksjonens nullpunkter.
c) Tegn funksjonen i et koordinatsystem med sine nullpunkter.

7. La

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

a) Vis at

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x-3)(x+2)$$

b) Finn funksjonens nullpunkter.
c) Tegn funksjonen i et koordinatsystem med sine nullpunkter.

# 6 Grenseverdier

Funksjoner kan ha grenseverdier. Vi skal se på hva det betyr, ved å se på noen eksempler som illustrerer det som kan skje.

**Eksempel.** La $f$ være funksjonen gitt ved

$$f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}.$$

Denne funksjonen er ikke definert for alle reelle tall. Siden $x$ forekommer under et rottegn kan vi ikke velge negative verdier for $x$. Dessuten må nevneren være forskjellig fra null. Det betyr at $x$ må være forskjellig fra 1. Ellers kan vi velge alle andre verdier for $x$. Spesielt kan vi velge verdier for $x$ vilkårlig nær $x = 1$. Da kan vi spørre hva som skjer når $x$ nærmer seg verdien 1. Når $x$ nærmer seg 1, vil verdien av både teller og nevner nærme seg null. Dermed er det i utgangspunktet uklart hva som skjer med verdien av brøken. For å finne ut av det, gjør vi en liten omforming av brøken. Vi kan multiplisere med $x + \sqrt{x}$ over og under brøkstreken. Da får vi

$$\begin{aligned} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1} &= \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}{(x - 1)(x + \sqrt{x})} = \frac{x^2 - x}{(x - 1)(x + \sqrt{x})} \\ &= \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(x + \sqrt{x})} = \frac{x}{x + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Når vi har skrevet brøken på denne formen, er det klarere hva som skjer. Verdien av telleren vil nærme seg 1 og verdien av nevneren vil nærme seg 2. Dermed må verdien av brøken nærme seg $\frac{1}{2}$. Grenseverdien av brøken når verdien av $x$ nærmer seg 1, er $\frac{1}{2}$. Dette skrives

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1} = \frac{1}{2}.$$

Her står lim for det latinske ordet limes som betyr grense. Dette betyr at vi kan få verdien av funksjonen vilkårlig nær $\frac{1}{2}$ ved å la verdien av $x$ være tilstrekkelig nær 1. La oss se på en litt annen situasjon.

**Eksempel.** La funksjonen $f$ være gitt ved

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2}.$$

Denne funksjonen er definert for alle verdier av $x$ forskjellig fra null. Vi kan se på hva som skjer når $x$ nærmer seg null. Først gjør vi en liten omforming.

$$\frac{x^3 - x^2}{x^2} = \frac{x^2(x - 1)}{x^2} = x - 1.$$

Dette kan vi gjøre så lenge $x$ er forskjellig fra null. Lar vi nå $x$ nærme seg null, ser vi at

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}(x-1)=-1.$$

Grenseverdien er dermed $-1$. Det betyr at verdien av funksjonen er vilkårlig nær $-1$ når verdien av $x$ er tilstrekkelig nær null. La oss se på et eksempel til.

**Eksempel.** La funksjonen $f$ være gitt ved

$$f(x)=\frac{1}{x}.$$

Denne funksjonen er definert for alle reelle tall bortsett fra null. Her kan vi se på hva som skjer når verdien av $x$ vokser over alle grenser. Verdien av funksjonen er gitt ved at vi deler 1 på $x$. Dersom verdien av $x$ vokser over alle grenser, vil verdien av funskjonen nærme seg null. Vi sier da at grenseverdien for denne funksjonen er null når $x$ går mot uendelig og skriver

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Dette betyr at verdien av funksjonen vil være vilkårlig nær null, dersom $x$ er tilstrekkelig stor. På samme måte kan vi se på hva som skjer når $x$ går den andre veien. Det vil si, når $x$ går mot minus uendelig. Da vil også grenseverdien være null. Vi skriver dette

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$$

I den første situasjonen, når $x\to\infty$, vil verdien av funskjonen nærme seg null gjennom positive verdier. I den andre situasjonen, når $x\to-\infty$, vil verdien av funksjonen nærme seg null gjennom negative verdier. Men i begge tilfelle vil verdien av funksjonen nærme seg null.

# Oppgaver

1. Finn grenseverdiene.

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+1}{4x-2}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}$

2. Finn grenseverdiene.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x}{x-1}$

3. Finn grenseverdiene.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{4\sqrt{x}-8}$

# 7 Derivasjon

Vi har sett på hvordan man kan avgjøre om en rett linje er stigende eller fallende. Dette kan vi overføre til funksjoner. Det vi da kan finne ut er om en funksjon er voksende eller avtagende. Det vil si om verdiene av den avhengige variable er voksende eller avtagende med stigende verdier av den uavhengig variable. Dette er enklest for lineære funksjoner. Eksempelvis vil funksjonen gitt ved $f(x) = 2x + 1$ være voksende, fordi den rette linjen $y = 2x + 1$ er stigende. På samme måte vil funksjonen gitt ved $f(x) = -x + 1$ være avtagende, siden den rette linjen $y = -x + 1$ er fallende.

La $y = f(x)$ være en mer vilkårlig funksjon. Vi antar at dersom vi fremstiller denne funksjonen i et koordinatsystem, så får vi frem en sammenhengende kurve. Vi kunne naturligvis velge to punkter på denne kurven, trekke en rett linje gjennom disse punktene og undersøke om denne linjen var fallende eller stigende. Men da ville valget av punkter gi forskjellige resultater. Vi kunne velge punkter som ligger nær hverandre, eller punkter lengre fra hverandre, men det ville ikke nødvendigvis gi samme resultat. Istedet velger vi et punkt på kurven og ser om kurven har en tangent i dette punktet eller ikke. Hvis kurven har en tangent i det gitte punktet, undersøker vi om tangenten i dette punktet er stigende eller fallende. Da må vi se på hvordan vi kan finne tangenten til en kurve i et gitt

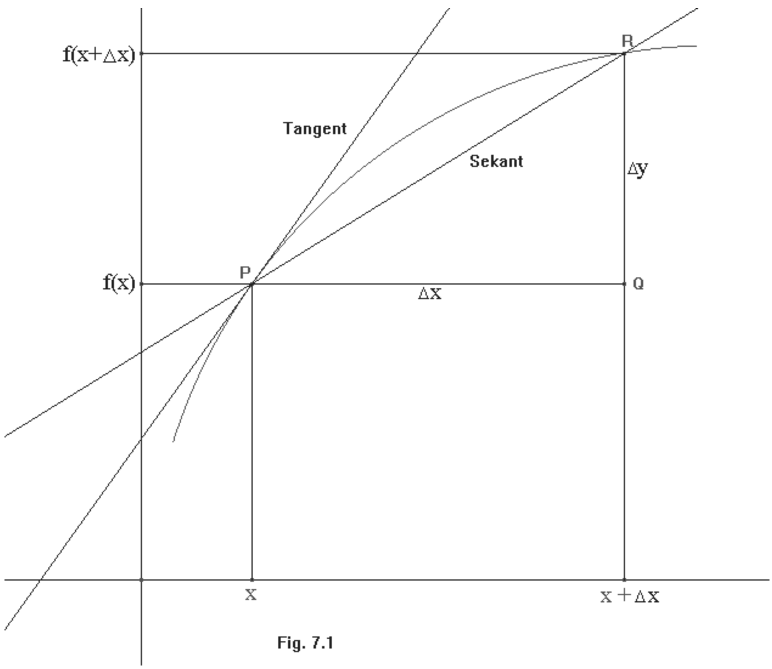


Fig. 7.1

punkt. Vi starter med å velge et punkt $P$ og vil finne tangenten i dette punktet. Se figur 7.1. Velg et annet punkt $R$ på kurven helt vilkårlig. Så trekker vi den rette linjen gjennom disse to punktene. Denne rette linjen vil være en sekant til kurven, siden den går gjennom to punkter på kurven. La $R$ bevege seg langs kurven mot $P$. Idet $R$ faller sammen med $P$ blir sekanten en tangent. Sekanten gjennom $P$ og $R$ nærmer seg tangenten gjennom $P$ som en grense. Det er denne tangenten vi ville finne. Koordinatene til $P$ er gitt ved en bestemt verdi for $x$ og en tilhørenede verdi for $y$, der $y = f(x)$. For å finne koordinatene til $R$ gir vi $x$ et tillegg som betegnes $\triangle x$. Symbolet $\triangle$ kalles delta. Da kommer vi til $x + \triangle x$. Den tilsvarende verdien for $y$ er gitt ved $y = f(x + \triangle x)$. Sett

$$\triangle f = f(x + \triangle x) - f(x)$$

$\triangle f$ blir endringen i funksjonsverdien fra $P$ til $R$. Da er det naturlig å se på forholdet mellom endringen av funskjonsverdien og tillegget i $x$. Vi ser med andre ord på brøken

$$\frac{\triangle f}{\triangle x}.$$

Fortegnet til denne brøken vil avgjøre om sekanten gjennom $P$ og $R$ er stigende eller fallende. La nå $\triangle x$ nærme seg null. Da vil samtidig $R$ bevege seg mot $P$. Dersom verdien av denne brøken nærmer seg en grenseverdi når $\triangle x$ går mot null, så sier vi at funksjonen er deriverbar og setter

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}.$$

Vi kaller $f'(x)$ den deriverte av $f$ i punktet $P$.

**Eksempel.** La

$$f(x) = 2.$$

Funksjonsverdien er altså konstant lik 2. Da er

$$\triangle f = f(x + \triangle x) - f(x) = 2 - 2 = 0.$$

Følgelig er

$$\frac{\triangle f}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = 0.$$

Verdien av $\frac{\triangle f}{\triangle x}$ er konstant lik 0. Grenseverdien av denne brøken når $\triangle x$ nærmer seg null må da være 0. Det betyr at den deriverte er 0 for alle verdier av $x$.

$$f'(x) = 0$$

for alle verdier av $x$.

**Eksempel.** La

$$f(x) = x.$$

Da er

$$\triangle f = f(x + \triangle x) - f(x) = (x + \triangle x) - x = \triangle x.$$

Følgelig er

$$\frac{\triangle f}{\triangle x} = \frac{\triangle x}{\triangle x} = 1.$$

Det betyr at den deriverte er

$$f'(x) = 1.$$

Vi skal se på litt mer generelle derivasjonsresultater.

**Den deriverte av en sum.** La

$$f(x) = u(x) + v(x).$$

Da er

$$\begin{aligned} \triangle f &= f(x + \triangle x) - f(x) \\ &= u(x + \triangle x) + v(x + \triangle x) - [u(x) + v(x)] \\ &= [u(x + \triangle x) - u(x)] + [v(x + \triangle x) - v(x)] \\ &= \triangle u + \triangle v. \end{aligned}$$

Følgelig er

$$\frac{\triangle f}{\triangle x} = \frac{\triangle u + \triangle v}{\triangle x} = \frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{\triangle v}{\triangle x}.$$

Lar vi $\triangle x$ gå mot null, ser vi at

$$f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

**Eksempel.** La

$$f(x) = x + 2.$$

Da lar vi $u(x) = x$ og $v(x) = 2$ og deriverer denne funksjonen som en sum. Da er $u'(x) = 1$ og $v'(x) = 0$. Det fører til at

$$f'(x) = 1 + 0 = 1.$$

**Den deriverte av en differens**. La

$$f(x) = u(x) - v(x).$$

Da får vi helt tilsvarende at

$$f'(x) = u'(x) - v'(x).$$

**Den deriverte av et produkt.** La

$$f(x) = u(x)\, v(x).$$

Da får vi at

$$\begin{aligned}
\triangle f &= f(x+\triangle x) - f(x) \\
&= u(x+\triangle x)\, v(x+\triangle x) - u(x)\, v(x) \\
&= [u(x)+\triangle u]\,[v(x)+\triangle v] - u(x)\, v(x) \\
&= \triangle u v(x) + u(x)\triangle v + \triangle u \triangle v.
\end{aligned}$$

Se figur 7.2.

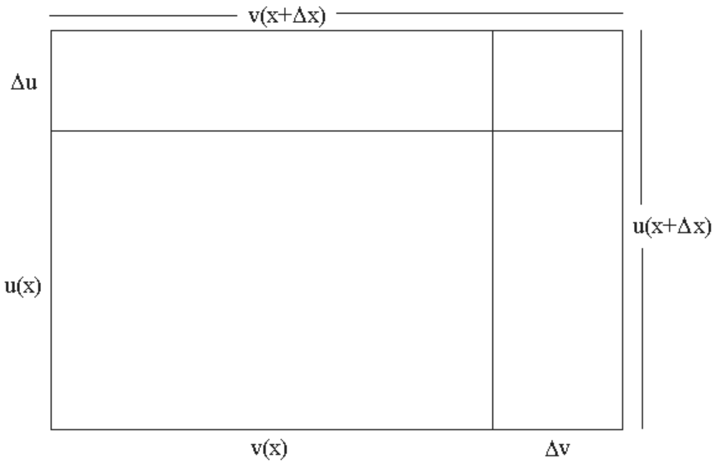



Fig. 7.2

Det fører til at

$$\begin{aligned}
\frac{\triangle f}{\triangle x} &= \frac{\triangle u v(x) + u(x)\triangle v + \triangle u \triangle v}{\triangle x} \\
&= \frac{\triangle u}{\triangle x} v(x) + u(x)\frac{\triangle v}{\triangle x} + \frac{\triangle u}{\triangle x}\triangle v.
\end{aligned}$$

La $\triangle x \to 0$. Da vil $\triangle v \to 0$. Det gir at

$$f'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x).$$

**Eksempel.** La

$$f(x) = 2x.$$

Vi kan derivere dette som et produkt ved å sette $u(x) = 2$ og $v(x) = x$. Da er $u'(x) = 0$ og $v'(x) = 1$. Det gir at

$$f'(x) = 2.$$

På samme måte finner vi at med $f(x) = ax$, så er $f'(x) = a$, der $a$ er et vilkårlig fast tall.

**Eksempel.** La
$$f(x) = (2x+1)(x-1).$$
Vi setter $u(x) = 2x+1$ og $v(x) = x-1$ og deriverer denne funksjonen som et produkt. Det gir at $u'(x) = 2$ og $v'(x) = 1$. Da er
$$f'(x) = 2(x-1) + (2x+1)1 = 4x-1.$$

**Eksempel.** La
$$f(x) = x^2.$$
Vi kan derivere denne funksjonen som et produkt ved å sette $u(x) = x$ og $v(x) = x$. Da er $u'(x) = 1$ og $v'(x) = 1$. Det gir at
$$f'(x) = x + x = 2x.$$
La oss derivere funksjonen
$$g(x) = x^3$$
ved å sette $u(x) = x^2$ og $v(x) = x$. Vi får at $u'(x) = 2x$ og $v'(x) = 1$, som gir at
$$g'(x) = (2x)x + x^2 = 3x^2.$$

**Den deriverte av en brøk.** La
$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
der $v(x) \neq 0$. Da er
$$f(x)v(x) = u(x).$$
Vi deriverer begge sider og får
$$f'(x)v(x) + f(x)v'(x) = u'(x).$$
Trekk fra $f(x)v'(x)$ på begge sider av likhetstegnet. Det gir
$$f'(x)v(x) = u'(x) - f(x)v'(x).$$
Deler vi med $v(x)$ på begge sider, så får vi at
$$f'(x) = \frac{u'(x) - f(x)v'(x)}{v(x)}.$$
Deretter setter vi inn $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ i telleren. Det gir
$$f'(x) = \frac{u'(x) - \frac{u(x)}{v(x)}v'(x)}{v(x)}.$$

Til slutt multipliserer vi med $v(x)$ over og under hovedbrøkstreken. Da får vi

$$f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}$$

som blir den deriverte av brøken.

**Eksempel.** La

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}.$$

Her må vi forutsette at $3x + 2$ ikke er lik null. Det er det samme som at $x$ er forskjellig fra $-\frac{2}{3}$. Vi lar $u(x) = 2x + 1$ og $v(x) = 3x + 2$ og deriverer denne funksjonen som en brøk. Det gir at $u'(x) = 2$ og $v'(x) = 3$. Da er

$$f'(x) = \frac{2(3x+2) - (2x+1)3}{(3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}.$$

**Eksempel.** La

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Her må vi holde oss til verdier av $x$ som er større enn null. For å finne den deriverte til denne funksjonen, kan vi ta utgangspunkt i at

$$f(x)\,f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x} = x$$

og derivere $f(x)\,f(x)$ som et produkt. Da får vi at

$$(f(x)\,f(x))' = f'(x)\,f(x) + f(x)\,f'(x) = 2f'(x)\,f(x) = 2f'(x)\sqrt{x}.$$

Siden den deriverte til $x$ er 1, gir det at

$$\begin{aligned} 2f'(x)\sqrt{x} &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

**Maksimum og minimum.** Vi startet med å se på brøken $\frac{\triangle f}{\triangle x}$ og sa at fortegnet til denne brøken vil avgjøre om sekanten gjennom punktene $P$ og $R$ vil være stigene eller fallende. Vi lot $\triangle x$ gå mot null. Da ble sekanten til en tangent, og fortegnet til $f'(x)$ vil da avgjøre om tangenten er stigende eller fallende. Anta at den deriverte er positiv for alle verdier av $x$ i et intervall. Da vil tangenten i hvert punkt av intervallet være stigende, og det medfører at funksjonen er voksende i dette intervallet. Dersom den deriverte er negativ i et intervall, vil på samme måte tangenten være fallende i dette intervallet og funksjonen følgelig avtagende.

Dersom den deriverte endrer fortegn for en verdi av $x$ vil vi enten ha et maksimum eller et minimum for funksjonen i dette punktet. Dersom den deriverte endrer fortegn fra å være positiv til å være negativ, vil funksjonen endre seg fra å være voksende til å være avtagende. Da vil funksjonen ha et maksimum for den verdien av $x$ der den deriverte skifter fortegn. Tilsvarende vil funksjonen ha et minimum dersom den deriverte endrer fortegn fra negativ til positiv. Det betyr at vi kan finne eventuelle maksima og minima ved å finne ut hvor den deriverte er null.

**Eksempel.** Vi fant tidligere at omkretsen av et rektangel med flateinnhold 25 var gitt ved funksjonen

$$f(x) = \frac{2\left(x^2+25\right)}{x}.$$

Her er $x > 0$. La oss derivere denne funksjonen og finne den maksimale eller minimale omkretsen rektangelet kan ha. Vi deriverer den som en brøk ved å la $u(x) = 2\left(x^2+25\right)$ og $v(x) = x$. Det gir $u'(x) = 4x$ og $v'(x) = 1$. Da er

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 2\left(x^2+25\right)}{x^2} = \frac{2\left(x^2-25\right)}{x^2}.$$

Faktoriserer vi telleren får vi at

$$f'(x) = \frac{2(x+5)(x-5)}{x^2}.$$

Ved å faktorisere, kan vi finne ut om den deriverte er positiv og negativ ved hjelp av fortegnsreglene. Når $0 < x < 5$ så er $x-5$ negativ. Da må brøken være negativ, og følgelig er den deriverte negativ. Når $x > 5$ så er $x-5$ positiv. Da må brøken være positiv, og følgelig må den deriverte være positiv. Av det følger at funksjonen er avtagenede når $0 < x < 5$ og voksende når $x > 5$. Det fører til at funksjonen har et minimum når $x = 5$. Vi hadde funnet at når $x = 5$ så er rektangelet et kvadrat.

Det viser at av alle rektangler med gitt flateinnhold, vil kvadratet være det med minst omkrets.

# Oppgaver

1. Deriver disse funksjonene.

a) $f(x) = 4x + 2$ b) $f(x) = x - 3$
c) $f(x) = x^2 + x + 1$ d) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

2. Deriver disse funksjonene.

a) $f(x) = (4x-1)(3x+2)$ b) $f(x) = (x-1)\left(x^2+1\right)$
c) $f(x) = \left(x^2+x+2\right)(x-1)$ d) $f(x) = 2\left(x^3+5\right)(x-5)$
e) $f(x) = (x+1)(x-1)\left(x^2+1\right)$ f) $f(x) = (x+1)^2(x-1)^2$

3. Deriver disse funksjonene.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ der $x \neq 1$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

4. Vi fant at med $f(x) = x^2$ så er $f'(x) = 2x$ og at med $g(x) = x^3$ så er $g'(x) = 3x^2$.

a) La $h(x) = x^4$ og finn $h'(x)$

b) La $p(x) = x^n$ der $n$ er et vilkårlig positivt heltall. Generaliser det vi har funnet om de tre funksjonene $f, g, h$ for å finne den deriverte av $p$.

5. La $f(x) = x^2 - x - 2$

a) Finn $x$ slik at $f(x) = 0$. Disse verdiene av $x$ kalles funksjonens nullpunkter.

b) Finn den deriverte til $f$.

c) Finn eventuelle maksima eller minima for funksjonen.

d) Lag en skisse av funksjonen i et koordinatsystem.

6. La $f(x) = (x+1)\left(x^2 - 6x + 8\right)$

a) Finn $x$ slik at $f(x) = 0$.

b) Finn den deriverte til $f$.

c) Finn eventuelle maksima eller minima for funksjonen.

d) Lag en skisse av funksjonen i et koordinatsystem.

7. La $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

a) Finn $x$ slik at $f(x) = 0$.

b) Finn den deriverte til $f$.

c) Finn eventuelle maksima eller minima for funksjonen.

d) Finn grenseverdien $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2+1}$

e) Lag en skisse av funksjonen i et koordinatsystem.

8. Finn lengde og bredde i det største rektangelet du kan lage med et tau som er 20 meter langt.

9. Denne oppgaven har betydning innen statistikk.

a) La $a$ og $b$ være to tall. Vis at summen $(x-a)^2 + (x-b)^2$ er minst når $x = \frac{a+b}{2}$.

b) La $a, b, c$ være tre tall. Vis at summen $(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2$ er minst når $x = \frac{a+b+c}{3}$

c) Formuler dette for fire tall.

10. Vi skal finne det største rektangelet med hjørner $A, B, C, D$ som lar seg innskrive i en gitt likesidet trekant med hjørner $E, F, G$ og med sidelengde lik 1. Rektangelsiden $AB$ faller sammen med trekantens grunnlinje $EF$. Hjørnet $C$ ligger på $FG$ og hjørnet $D$ ligger på $EG$. La $EA = x$ og $AD = y$.

a) Vis at $ED = 2 \times EA$, og bruk det til å vise at $y = \sqrt{3}x$.

b) Vis at flateinnholdet av rektangelet er gitt ved funksjonen

$$f(x) = \sqrt{3}\left(x - 2x^2\right)$$

c) Finn den deriverte til $f$.

d) Bruk den deriverte til å finne sidene i det største rektangelet som kan innskrives i trekanten.

# 8 Integrasjon

Hvis vi deriverer en funksjon, så får vi en ny funksjon. La for eksempel funksjonen være

$$f(x) = x^2.$$

Den deriverte av denne funksjonen er $f'(x) = 2x$ og

$$g(x) = 2x$$

er i sin tur en ny funksjon. Vi kan naturligvis gå motsatt vei. La oss si at vi har oppgitt en funksjon. Da kan vi prøve å finne en funksjon slik at den deriverte er den gitte funksjonen. Hvis den gitte funksjonen er $g(x) = 2x$ så er $f(x) = x^2$ en slik funksjon.

**Definisjon.** La $y = f(x)$ være en funksjon. En hvilket som helst funksjon slik at den deriverte er $f$ kalles et ubestemt integral av $f$ og betegnes

$$\int f(x)\,dx.$$

Det betyr at et ubestemt integral av $f$ er en funksjon, og at den deriverte av denne funksjonen er funksjonen $f$. Vi har altså at

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

La $f$ være en gitt funksjon, og anta at $F$ og $G$ begge er funksjoner slik at den deriverte er $f$. Det betyr at både $F'(x) = f(x)$ og at $G'(x) = f(x)$. Deriverer vi differensen mellom $G$ og $F$, får vi

$$[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = 0.$$

Dersom den deriverte av en funksjon er null, må funksjonen selv være konstant. Det fører til at $G(x) - F(x) = C$ for en passende konstant $C$. Det er det samme som at

$$G(x) = F(x) + C$$

for en passende konstant $C$.

La $F$ være et ubestemt integral av $f$. Et hvilket som helst ubestemt integral av $f$ vil da være gitt ved $F(x) + C$ der $C$ er en konstant. Vi har altså at

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

der $C$ er en konstant.

**Eksempel.** La $f(x) = x$. Da vil

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

der $C$ er en konstant. Dette ser vi, ved at den deriverete til $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ er $f(x) = x$

**Eksempel.** La $f(x) = x^2$. Da vil

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

der $C$ er en konstant. Fordi den deriverte til $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, er $f(x) = x^2$.

Vi vet at hvis vi deriverer en sum av funksjoner så kan vi gjøre det leddvis. Da får vi at

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx + C.$$

For med $F(x) = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$ får vi at

$$F'(x) = \left(\int f(x)\, dx\right)' + \left(\int g(x)\, dx\right)' = f(x) + g(x).$$

**Eksempel.** La $f(x) = x + x^2$. Da er

$$\int f(x)\, dx = \int \left(x + x^2\right) dx = \int x dx + \int x^2 dx + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C.$$

På samme måte får vi at

$$\int [f(x) - g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx + C.$$

**Eksempel.** La $f(x) = 1 - x$. Da er

$$\int (1 - x)\, dx = \int 1 dx - \int x dx + C = x - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

# Oppgaver

Bestem integralene.

1. a) $\int 2dx$ b) $\int (4x + 1)\, dx$ c) $\int \left(1 + x + x^2\right) dx$

2. a) $\int 3\left(x^2 + 1\right) dx$ b)$\int 2x\left(x^2 + x\right) dx$

3. c) $\int (x + 1)(x - 1)\, dx$ d) $\int (1 + 2x)\left(x^2 - 1\right) dx$

4. e) $\int (x - 1)^2\, dx$ f) $\int (x + 1)(x - 1)^2\, dx$

5. a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ b) $\int \frac{1 + 4x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

## 8.1 Integraler og arealer

Vi skal til slutt se på hvordan integralregning kan brukes til å bestemme arealer av ulike områder i planet. Vi tenker oss da at vi har en funksjon

$$y = f(x)$$

definert på et intervall fra $a$ til $b$. Vi gjør en oppdeling av intervallet fra $a$ til $b$. Det betyr at vi velger voksende verdier $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ der $x_0 = a$ og $x_n = b$. Se figur 8.1.1 der $n = 5$. Velg en verdi fra hvert delintervall. Det betyr at vi

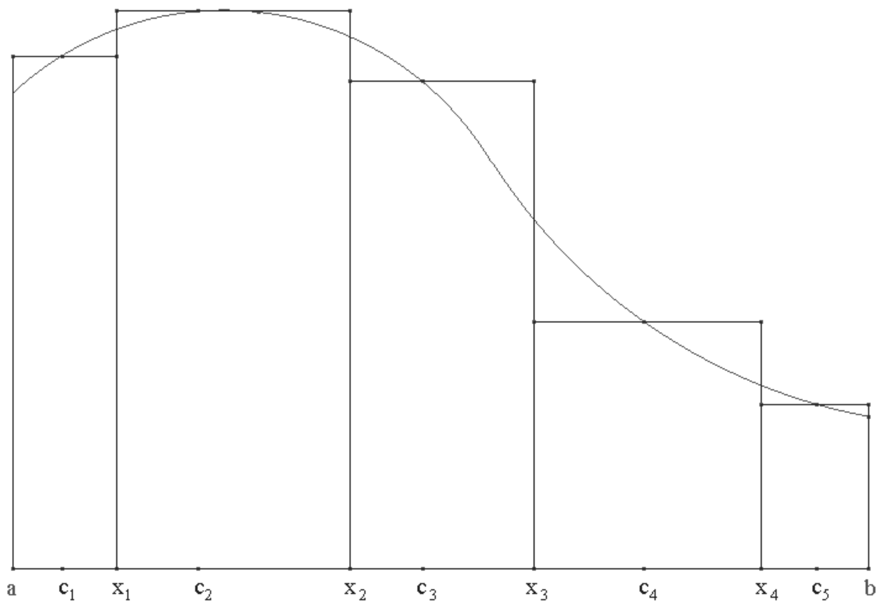



Fig. 8.1.1

velger en verdi $c_1$ mellom $x_0$ og $x_1$, en verdi $c_2$ mellom $x_1$ og $x_2$ etc. Dette gir de $n$ verdiene $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$. Over intervallet fra $x_0$ til $x_1$ får vi et rektangel med høyde $f(c_1)$. Over intervallet fra $x_1$ til $x_2$ får vi et rektangel med høyde $f(c_2)$. Hvert delintervall gir oss på denne måten et rektangel. Det siste delintervallet fra $x_{n-1}$ til $x_n$, gir oss et rektangel med høyde $f(c_n)$. Så ser vi på summen

$$f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Denne summen vil gi oss det samlede arealet av alle rektanglene. Summen kalles en Riemannsum etter den tyske matematikeren Bernhard Riemann (1826-1866). Den er bestemt av funksjonen, oppdelingen $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ og verdiene $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$. La nå oppdelingen bli finere og finere. Det vil si at vi lar $n$ vokse mot uendelig, samtidig som delintervallene blir smalere og smalere.

Dersom Riemannsummen da går mot en grense, kaller vi denne grenseverdien for integralet av funksjonen over intervallet fra $a$ til $b$, og betegner den ved

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Integralet av en funksjon over et intervall er altså en grenseverdi, det vil si et tall. Et ubestemt integral derimot, er en ny funksjon. Dette har en geometrisk betydning. Hvis funksjonen $f$ er positiv over intervallet fra $a$ til $b$, vil arealet mellom funksjonskurven $y = f(x)$ og linjen $y = 0$ over intervallet fra $a$ til $b$ være det samme som integralet av funksjonen $f$ over intervallet fra $a$ til $b$. Hvis derimot funksjonen er negativ over intervallet fra $a$ til $b$, vil arealet mellom funksjonskurven $y = f(x)$ og linjen $y = 0$ over intervallet fra $a$ til $b$ være det samme som minus integralet av funksjonen $f$ over intervallet fra $a$ til $b$.

Vi kan nå innføre funksjonen

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Funksjonen $A$ er gitt ved integralet av funksjonen $f$ over intervallet fra $a$ til $x$. Det betyr at øvre integrasjonsgrense er ny variabel. Vi skal se at den deriverte til $A$ faktisk er $f$.

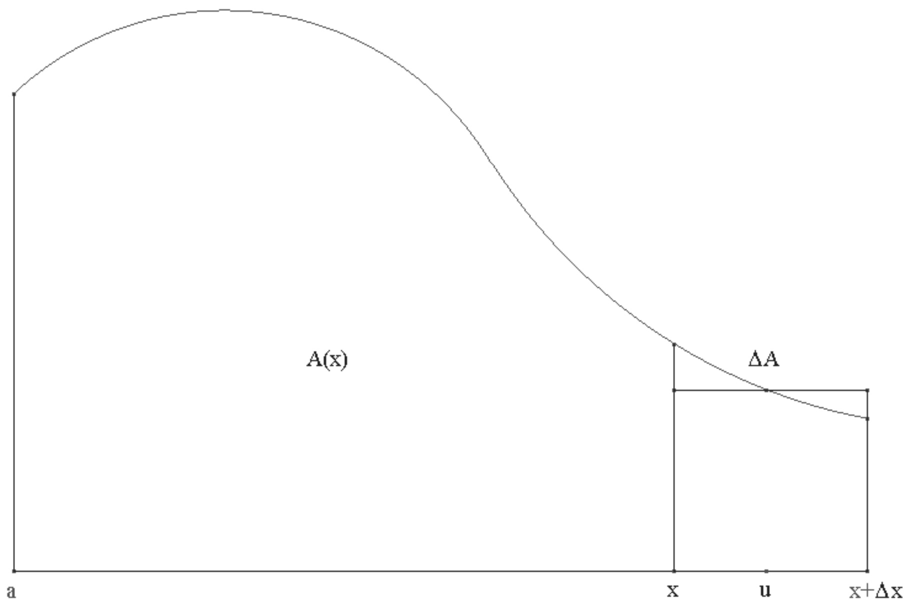



Fig. 8.1.2

La $x$ få tillegget $\triangle x$ og sett $\triangle A = A(x + \triangle x) - A(x)$. Vi ser av figur 8.1.2 at det fins en verdi $u$ mellom $x$ og $x + \triangle x$ slik at $\triangle A$ er det samme som arealet av rektangelet over intervallet fra $x$ til $\triangle x$. Det betyr at

$$\triangle A = f(u) \triangle x$$

som gir at

$$\triangle A = A(x + \triangle x) - A(x) = f(u) \triangle x.$$

Deler vi med $\triangle x$ på begge sider av likhetstegnet får vi at

$$\frac{\triangle A}{\triangle x} = \frac{A(x + \triangle x) - A(x)}{\triangle x} = f(u).$$

Lar vi nå $\triangle x$ gå mot null, må $u$ nærme seg $x$, og vi får at

$$A'(x) = f(x).$$

Vi får altså at den deriverte til $A$ er $f$. Det er det samme som at $A$ er et ubestemt integral av $f$. Anta at $F$ er et ubestemt integral av $f$. Da vet vi at

$$A(x) = F(x) + C.$$

Siden vi vet at $A(a) = 0$ må vi ha at $F(a) + C = 0$. Men da må $C = -F(a)$. Da får vi av dette at

$$A(x) = F(x) - F(a).$$

Spesielt har vi da at $A(b) = F(b) - F(a)$ som betyr at

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Det er vanlig å bruke skrivemåten

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Da skriver vi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Dette viser oss hvordan vi finner integralet av en funksjon over et intervall. Vi går veien om å finne et ubestemt integral.

**Eksempel.** La $f$ være funskjonen gitt ved

$$f(x) = x^2.$$

La oss finne integralet av $f$ over intervallet fra 0 til 1. Vi får at

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

som gir at

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Det betyr samtidig at arealet under funksjonskurven til denne funksjonen over intervallet fra null til 1 er $\frac{1}{3}$.

# Oppgaver

1. Bestem verdiene av disse integralene.

a) $\int_{-1}^{1}\left(1+x^2\right)xdx$  b) $\int_0^1\left(1+x+x^2\right)dx$

c) $\int_0^1(1+x)^2\,dx$  d) $\int_{-2}^{2}\left(1+x^3\right)dx$

e) $\int_0^1(1+x)\left(1+x^2\right)dx$

f) $\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx$  g) $\int_1^3 x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

2. La $f$ og $g$ være de to funksjonene

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+2x-3 \\ g(x) &= 2x+1 \end{aligned}$$

a) Finn skjæringspunktene mellom funksjonskurvene til $f$ og $g$
b) Tegn $f$ og $g$ i samme koordinatsystem.
c) De to funksjonskurvene bestemmer et lukket område i planet. Finn arealet av dette område.

3. La funksjonen $f$ være gitt ved

$$f(x)=\frac{15x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

for alle reelle verdier av $x$.
a) Finn funksjonens nullpunkter.
b) Finn ut hva som skjer med funksjonsverdien, både når $x$ går mot $\infty$ og når $x$ går mot $-\infty$.
c) Bestem den deriverte til $f$.
d) Finn evt. maksima og minima for funksjonen.
e) Lag en skisse av funksjonen i et koordinatsystem.
La

$$g(x)=-\frac{15}{2x^2+2}$$

f) Finn den deriverte til funksjonen $g$.
g) Finn arealet under funksjonskurven til $f$ over intervallet fra null til 2.
h) La $t$ være et gitt positivt reelt tall, og bestem arealet under funksjonskurven til $f$ over intervallet fra null til $t$.
i) Bestem grensen for arealet under funksjonskurven til $f$ over intervallet fra null til $t$ når $t$ går mot uendelig.

# Fasit

## Kapittel 1

1. a) $26, 30, 34, \ldots$ b) $19, 22, 25, \ldots$ c) $64, 128, 256, \ldots$
d) $486, 1458, 4374, \ldots$
2. a) $a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + 4$ for $n = 2, 3, \ldots$
b) $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 3$ for $n = 2, 3, \ldots$
c) $a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1}$for $n = 2, 3, \ldots$
d) $a_1 = 2, a_n = 3a_{n-1}$for $n = 2, 3, \ldots$
3. a) $11, 13, 15, \ldots$ b) $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2$
c) $a_n = 2n - 1$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$
4. a) $12, 14, 16, \ldots$ b) $a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + 2$
c) $a_n = 2n$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$
5. Rekursivt uttrykk er $a_1 = 1, a_n = (-1)\, a_{n-1}$. Eksplisitt uttrykk er
$a_n = (-1)^{n+1}$.

6. a) $2097152, \ldots$ b) $a_1 = 1, a_n = a_{n-1}a_{n-2}$
7. a) $15, 31, , 63, \ldots$ b) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ for $n = 2, 3, \ldots$ c) $a_n = 2^n - 1$
d) 5 849, 4 milliarder år.
8. a) $a_n = (n-1)^2$ b) $a_n = n^2 - 1$ c) $a_n = (2n-1)^2$
d) $a_n = n\,(n+1)$

## Kapittel 2

1. a) Sant b) Sant c) Usant d) Sant e) Sant
f) Ikke definert.
2. a) 3 og 5 b) 2 og 3 c) 3 d) 3 og 9 e) 3 og 9
f) 3 og 9
3. Det hele tallet 45875 er delelig med 75, men ikke med 4.
Regel. Et heltall er delelig med 4 (eller 25) dersom de siste to siffrene gir et heltall som er delelig med 4 (eller 25)
4. a) Primtall b) Primtall c) Primtall d) Ikke primtall
e) Ikke primtall f) Ikke primtall.
5. a) Det første tallet i listen er delelig med 2, det andre tallet i listen er delelig med 3, det tredje tallet er delelig med 4 og det fjerde tallet i listen er delelig med 5.
b) Vi kan fortsette listen til vi har 10 tall.
c) Vi kan lage listen vilkårlig lang. Derfor fins det vilkårlig mange heltall etter hverandre der ingen av dem er primtall.

## Kapittel 3

### Avsnitt 3.1

1. Diofant ble 84 år.
2. Svermen var på 15 bier
3. Halssmykket hadde 30 perler.
4. Det var 18 mangoer på fatet.
5. Tallet er 3.
6. Tallet er 12
7. a) $x^2 + x - 6$ b) $4x^2 - 5x - 7$ c) $x^2 + 9x + 5$
d) $2x^3 + 7x^2 - 9x - 30$ e) $-7x^2 - 6x + 32$ f) $2x^3 + 5x^2 - x - 4$

8. a) $\frac{1}{2x}$ b) $\frac{x^2+5x-14}{(x+2)(x-3)}$ c) $\frac{2x^2-3x+3}{x^2-1}$
9. a) $\frac{-x^3+2x+14}{(x-1)(x+2)}$ b) $\frac{2x^2+2x-34}{x^2-16}$ c) $\frac{2x^2+2x-10}{(x-4)(x+1)(x-1)}$

10. a) $x = \frac{5}{6}$ b) $x = 0$ c) $x = 2$
11. Etter ett år er kapitalen vokst til kr. 5150. Etter to år til kr. 5304.5. Etter tre år til kr. 5463.6 Etter $n$ år er kapitalen vokst til $5000\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n$

12 a) 1 b) $\frac{99}{100}$ c) $\frac{49}{100}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{22}$ f) $\frac{71}{111}$ g) $\frac{9}{11}$
13 $\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = (\sqrt{a})^2 \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$

### Avsnitt 3.2

1. a) $x^2 + 2x + 1$ b) $x^2 + 6x + 9$ c) $x^2 - 14x + 49$
2. a) $-x^2 - 2x + 1$ b) $-2x^2 - 11x - 4$ c) $20x^2 - 9x + 8$ d) $4x^2 - 11x + 6$
3. a) $(x + 3)^2$ b) $(x + 5)^2$ c) $(x - 1)^2$ d) $(x - 1)(x + 1)$
4. a) $\frac{(x-3)}{x+2}$ b) $\frac{(x+2)}{x-2}$ c) $\frac{(2x+1)}{2x-1}$ d) $x + \sqrt{5}$

### Avsnitt 3.3

1. a) $x = 5, x = -1$ b) $x = -1, x = -3$ c) $x = -2$ d) $x = 1$
2. a) $x = -2, x = 1$ b) $x = -1, x = \frac{1}{2}$ c) $x = -3 \pm \sqrt{5}$
d) $x = -\frac{1}{3}, x = \frac{1}{2}$
3. $x = -1$
4. Flokken var på 36 kameler
5. Flokken var på 144 elefanter.

6. De to tallene er $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{7}\right)$ og $\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{7}\right)$

### Avsnitt 3.4

1. $x = 3, y = 1$

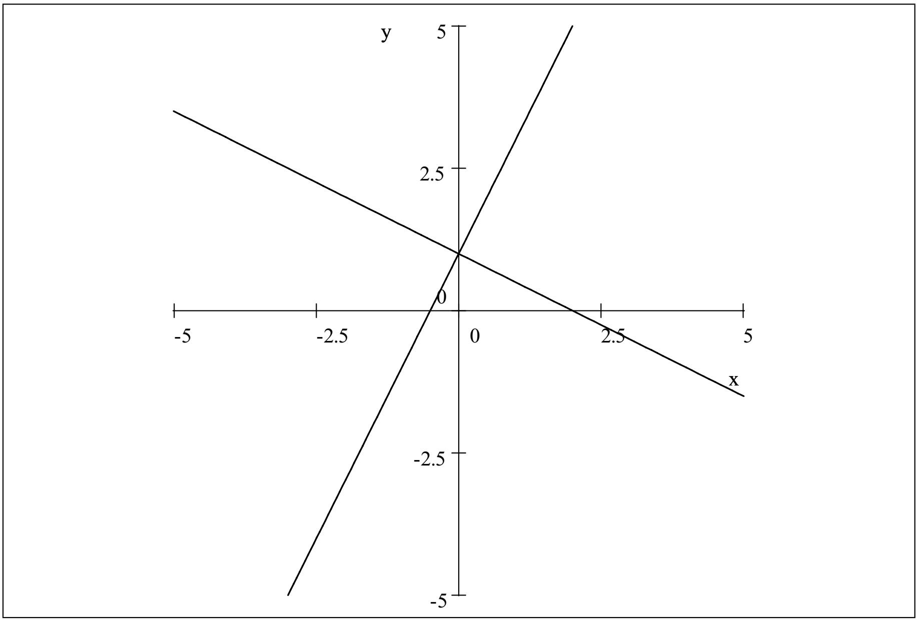
2. $x = 2, y = 3$
3. $x = 3, y = 2$
4. Det ene tallet er $\frac{20}{7}$ og det andre er $\frac{74}{21}$.
5. Dene ene gullgraveren hadde ingen gullklumper og den andre hadde en gullklump.
6. $AB = 5, BC = 8, AC = 2$.
7. $x = 1, y = 3, z = 1$
8. $x = -1, y = 2, z = 1$
9. $x = -2, y = 3, z = 2$
10. $x = 3, y = 2, z = 2$

## Kapittel 4

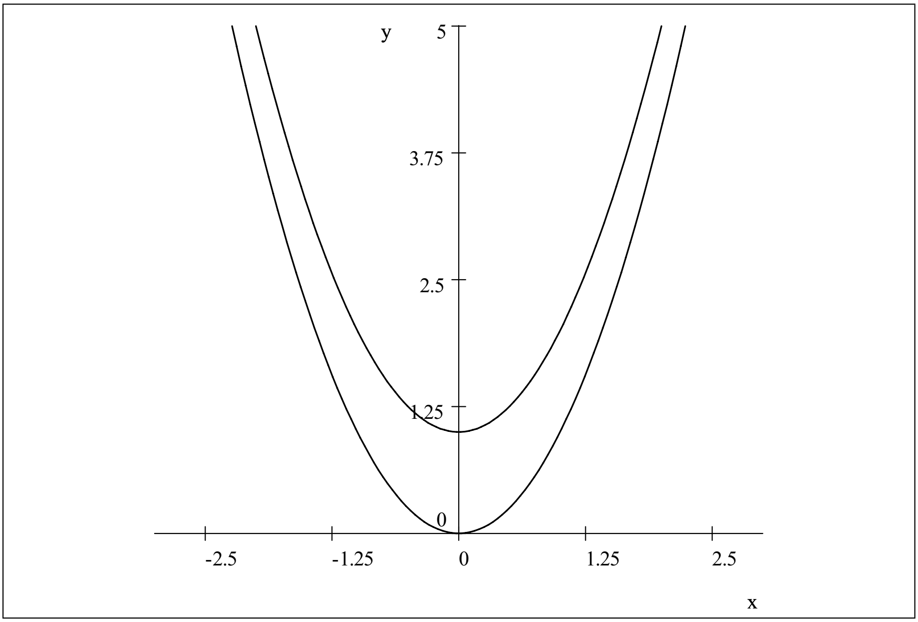
1. a) $y - x = 1$  b) $4y + x = 4$  c) $y - 2x = 3$
2. Skjæringspunktet er gitt ved $x = 1, y = 2$
3. Skjæringspunktet er gitt ved $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$
4. Ingen skjæringspunkter.
5. Sentrum er $x = 0, y = 2$. Radius er $r = 2$.
6. Sentrum er $x = 1, y = 1$. Radius er $r = 1$.
7.Sentrum er $x = 2, y = 1$. Radius er $r = 1$.
8. Tangeringspunktet er, $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}, y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

## Kapittel 5

1. $f(x) = x(50 - x)$
2. $f(x) = 4x(15 - x)^2$
3.



4.



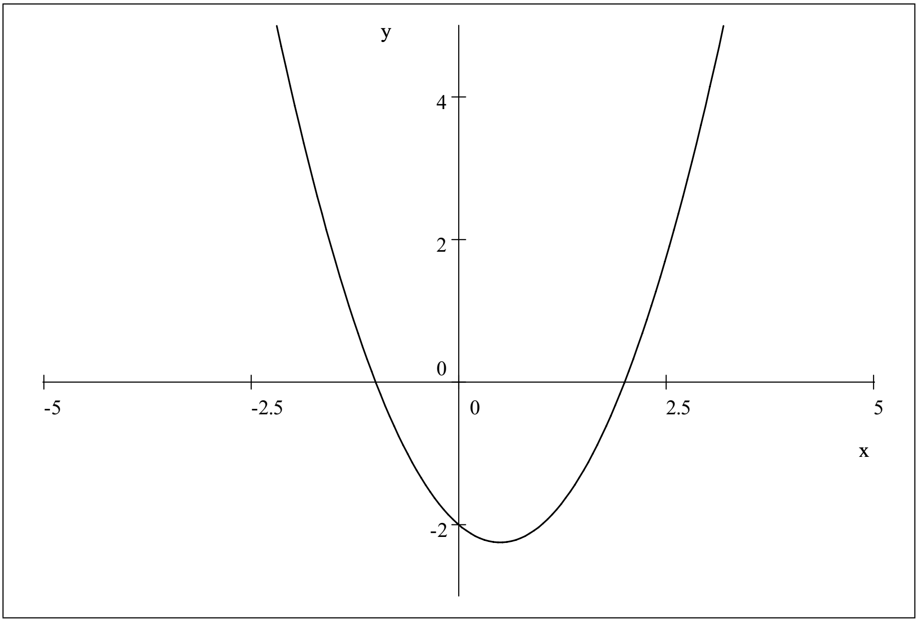

5. a) $x = 1, x = -1$
6. b) $x = 1, x = -2$
7. b) $x = 1, x = 3, x = -2$

## Kapittel 6

1. a) 5 b) 0 c) $-\frac{1}{2}$ d) 1
2. a) 1 b) 2 c) 2
3. a) 5 b) $\frac{1}{4}$ c) 8

## Kapittel 7

1. a) $f'(x) = 4$ b) $f'(x) = 1$ c) $f'(x) = 2x + 1$
d) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$
2. a) $f'(x) = 24x + 5$ b) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ c) $f'(x) = 3x^2 + 1$
d) $f'(x) = 8x^3 - 30x^2 + 10$ e) $f'(x) = 4x^3$ f) $f'(x) = 4x^3 - 4x$
3. a) $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$ når $x \neq 1$ b) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ c) $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$
4. a) $h'(x) = 4x^3$ b) $p'(x) = nx^{n-1}$
5. a) $f(x) = 0$ når $x = -1, x = 2$.
b) $f'(x) = 2x - 1$
c) $x = \frac{1}{2}$, gir et minimum. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$.
d)




6. a) $f(x) = 0$ når $x = -1, x = 2, x = 4$

b) $f'(x) = 3x^2 - 10x + 2$

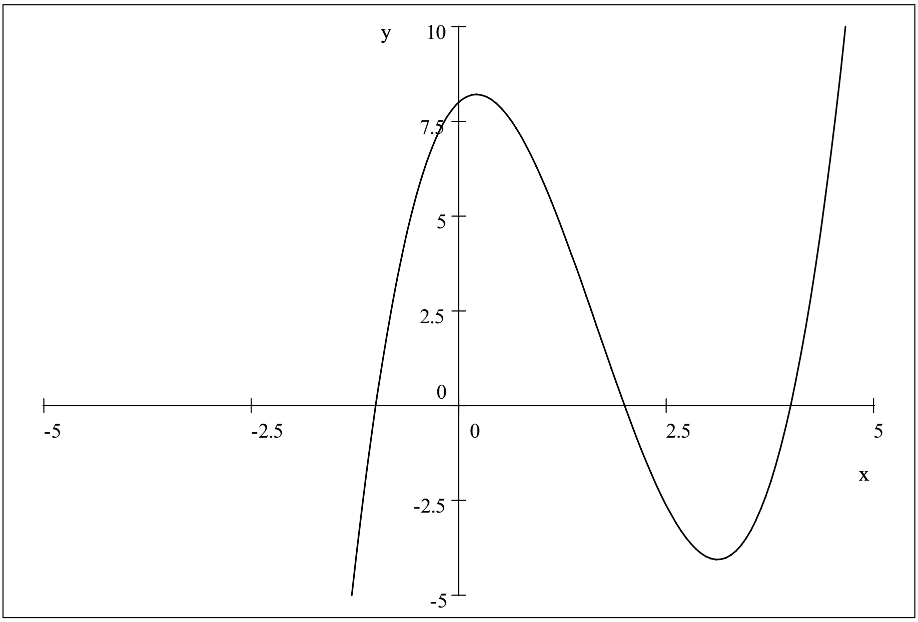
c) Vi har et maksimum for $x = \frac{1}{3}\left(5 - \sqrt{19}\right)$.

Da er $f\left(\frac{1}{3}\left(5 - \sqrt{19}\right)\right) = \frac{1}{9}\left(380 - 70\sqrt{19}\right) = 8.3197$.

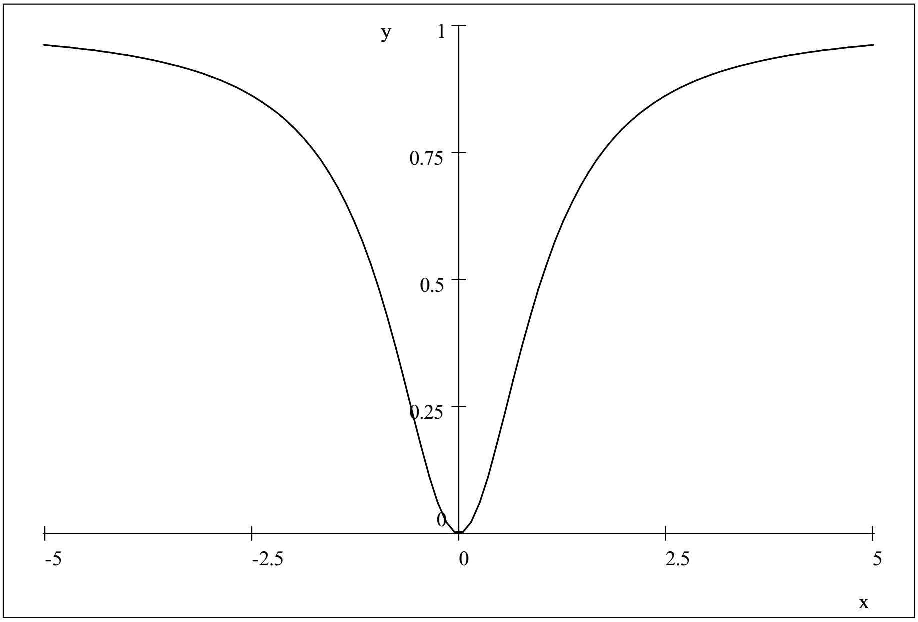
Videre har vi et minimum for $x = \frac{1}{3}\left(5 + \sqrt{19}\right)$ gir et minimum.

Da er $f\left(\frac{1}{3}\left(5 + \sqrt{19}\right)\right) = \frac{1}{9}\left(380 + 70\sqrt{19}\right) = 76.125$

d) $(x+1)\left(x^2 - 6x + 8\right)$



7. a) $f(x) = 0$ når $x = 0$.
b) $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$
c) $f$ har et minimum for $x = 0$. Da er $f(0) = 0$
d) 1
e)




8. Det største rektangelet har lengde og bredde lik 5 meter.
9. c) Summen $(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 + (x-d)^2$ er minst når $x = \frac{a+b+c+d}{2}$
10. a) Får at $x^2 + y^2 = (2x)^2$ som gir at $y = \sqrt{3}x$
b) Flateinnholdet av rektangelet er gitt ved
$(1-2x)\,y = (1-2x)\sqrt{3}x = \sqrt{3}\left(x - 2x^2\right)$
c) $f'(x) = \sqrt{3}(1-4x)$
d) $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

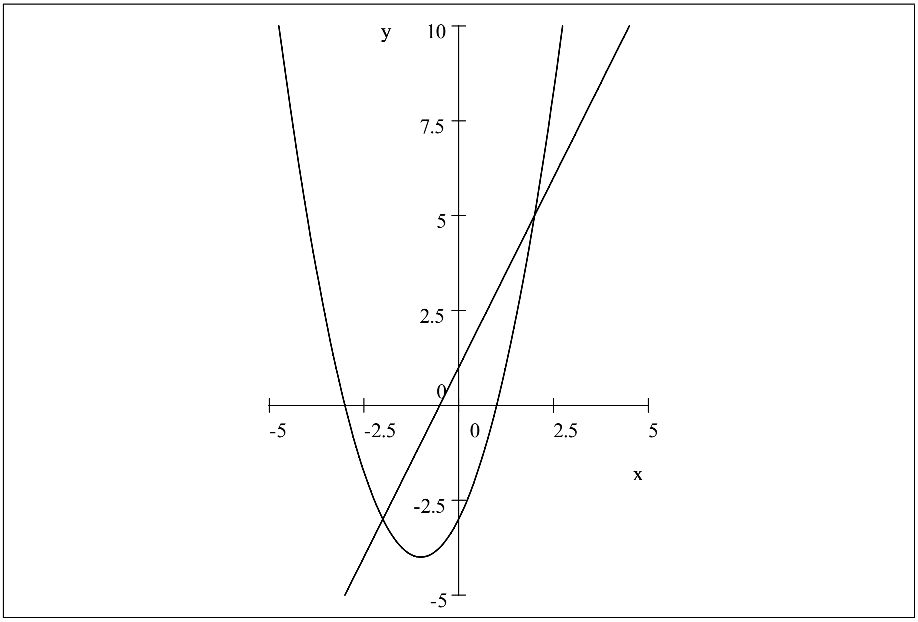
## Kapittel 8

1. a) $\int 2dx = 2x + C$ b) $\int (4x+1)\,dx = 2x^2 + x + C$
c) $\int \left(1 + x + x^2\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$
2. a) $\int 3\left(x^2+1\right) dx = x^3 + 3x + C$
b)$\int 2x\left(x^2+x\right) dx = \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + C$
3. c) $\int (x+1)(x-1)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - x + C$
d) $\int (1+2x)\left(x^2-1\right) dx = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + C$
4. e) $\int (x-1)^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C$
f) $\int (x+1)(x-1)^2\,dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$
5. a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$ b) $\int \frac{1+4x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\left(x^2 + \sqrt{x}\right) + C$

## Avsnitt 8.1

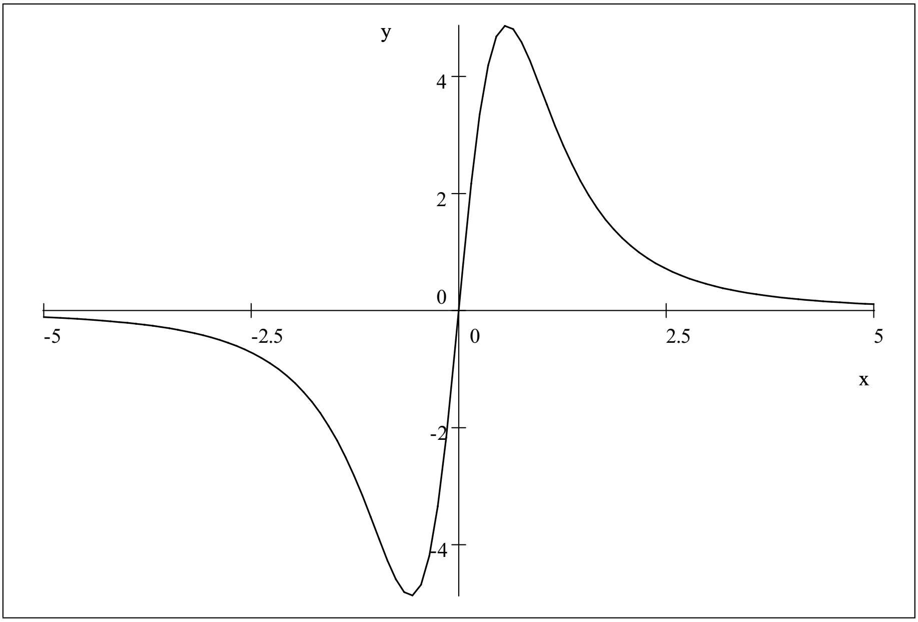
1. a) $\int_{-1}^{1}\left(1+x^2\right)xdx=0$
   b) $\int_0^1\left(1+x+x^2\right)dx=\frac{11}{6}$
   c) $\int_0^1(1+x)^2\,dx=\frac{7}{3}$
   d) $\int_{-2}^{2}\left(1+x^3\right)dx=4$
   e) $\int_0^1(1+x)\left(1+x^2\right)dx=\frac{25}{12}$
   f) $\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{2}-2$
   g) $\int_1^3 x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=2$

2. a) Skjæringspunktene vil være $x=2,y=5$ og $x=-2,y=-3$.
   b)




   c) $\frac{32}{3}$

3. a) $f(x)=0$ når $x=0$
   b) Funksjonsverdien nærmer seg null
   c) $f'(x)=\frac{15\left(1-3x^2\right)}{(x^2+1)^3}$
   d) $f$ har et minimum når $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Da er $f(x)=-\frac{45}{16}\sqrt{3}$. Videre har $f$ et maksimum når $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Da er $f(x)=\frac{45}{16}\sqrt{3}$
   e)




f) $g'(x) = \frac{15x}{(x^2+1)^2}$

g) Arealet over intervallet fra null til 2 er $\frac{3}{2}$.

h) Arealet over intervallet fra null til $t$ er $\frac{15}{2t^2+2}$

i) $\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$

# Litteratur

[1] Viggo Brun, *Alt er tall. Matematikkens historie fra oldtid til renessanse,* Universitetsforlaget, 1964, ISBN 82-13-00151-6.
[2] Audun Holme, *Matematikkens historie. Fra Babylon til mordet på Hypatia,* Fagbokforlaget, 2001, ISBN 82-7674-678-0,
[3] Audun Holme, *Matematikkens historie. Fra de arabiske vise til Niels Henrik Abel,* Fagbokforlaget, 2004, ISBN 82-7674-814-7.
[4] Howard Eves, *An introduction to the history of mathematics,* Fourth Edition, Holt, 1976, ISBN 0-03-089539-1.
[5] Torgeir Onstad, *Fra Babel til Abel. Likningenes historie,* NKS-Forlaget 1994, ISBN 82-508-1468-1.
[6] Tor Gulliksen, *Matematikk i praksis*, Universitetsforlaget, 2004, ISBN 82 - 00 - 42411 - 1.

*ALV BIRKELAND er høgskolelektor ved Høgskolen i Tromsø på avdeling for lærerutdanning, med Cand. Scient. graden i matematikk fra universitetet i Oslo. Han har vært seksjonsleder i matematikkseksjonen og har undervist i det obligatoriske kurset Matematikk 1, samt i valgfagene Matematikk 2 og Matematikk 3. Han har også flere ganger vært sensor for ulike kurs i matematikk gitt ved Universitetet i Tromsø.*

## Grunnleggende matematikk med illustrasjoner

Matematikken har sitt eget språk. Det består av egne faguttrykk og symboler og har en lang utviklingshistorie.

For å forstå matematiske ideer som er uttrykt i et matematisk språk, må man forstå dette språket. Ved bruk av illustrerende figurer og eksempler kan denne boken bidra til å føre leseren inn i matematikkens verden.

Gjennom hele historien har nye faguttrykk og symboler kommet til. For eksempel ble likhetstegnet innført av Robert Recorde i hans bok om algebra: "The Whetstone of Witte" fra 1557. Robert Recorde mente at likhetstegnet skulle være to parallelle linjestykker fordi, som han uttrykte det, "noe 2 thynges can be moare equalle".

Boken henvender seg først og fremst til studenter i lærerutdanningen som følger kurset Matematikk 1, men kan også brukes av andre studenter innenfor høgskolesystemet og av elever i videregående skole.

9 788273 890870

EUREKA LÆREMIDDELSERIE
NR. 1/2006
ISBN-13: 978-82-7389-087-0
ISBN-10: 82-7389-087-2
ISSN 0809-8034

HØGSKOLEN I TROMSØ
EUREKA FORLAG