

Avhandling for den
filosofiske doktorgrad

MÅLING AV PRODUKTIVITET.

En sammenligning av ulike metoder,
med spesiell vekt på Data Envelopment Analysis.

av

TERJE VASSDAL

NORGES FISKERIHØGSKOLE,
UNIVERSITETET I TROMSØ

Postboks 3083 GULENG,
9001 TROMSØ.





MÅLING AV PRODUKTIVITET.

En sammenligning av ulike metoder,
med spesiell vekt på Data Envelopment Analysis.

av

TERJE VASSDAL

**NORGES FISKERIHØGSKOLE,
UNIVERSITETET I TROMSØ
Postboks 3083 GULENG,
9001 TROMSØ.**

Tromsø, 1. september 1988.

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

INNHALDSFORTEGNELSE

KAPITTEL 1: PRESISERING AV PROBLEMSTILLINGEN.

1.	Innledning	1
1.1	Hva er problemstillingen	1
1.2	Metoder for å beregne det effektive referansesettet	11
1.3	Hva er et effektivitetsmål?	15
1.4	Målsettinger med dette arbeidet	15

KAPITTEL 2: OM MÅLING AV EFFEKTIVITET. EN FORMELL GJENNOMGANG
AV ULIKE METODER.

1.	Definisjoner	18
1.1	Definisjon av produksjonsteknologien	18
1.2	Formell beskrivelse av produksjonsteknologien	20
1.3	Mer om "strong" og "weak disposability" av input og output	23
1.4	Definisjon av tre effektive undermengder	24
1.5	Innføring av priser på innsatsfaktorene og på sluttproduktene	28
1.6	Produktfunksjoner	29
1.7	En stykkevis lineær produksjonsteknologi	30
1.8	Graf- framstilling av produksjonsstrukturen	33
2.	Effektivitetsmål	36
2.1	De rene radiale effektivitetsmålene	36
2.1.1	En kort oversikt	36
2.1.2	Fem radiale innsatseffektivitetsmål med LP formuleringer	36
2.2	De rene radiale produkteffektivitetsmålene	40
3.	Graf mål for effektivitet	41
3.1	Innledning	41
3.2	Farrells grafmål for teknisk effektivitet	44

3.3	Det svake grafmål for teknisk effektivitet	45
3.4	Øvrige graf effektivitetsmål	48
4.	Ikke-radiale effektivitetsmål	51
4.1	Innledning	51
4.2	Russell inputeffektivitetsmål	52
5.	Skalaeffektivitet	55
5.1	Innledning og definisjoner	55
5.2	Graf målet for skalaeffektivitet	58
5.3	LP formuleringer for å måle skalaeffektivitet	59
5.4	Identifisering av årsakene til skalaineffektivitet	61
6.	En sammenligning av effektivitetsmålene	64
6.1	Krav til effektivitetsmål	64
6.2	En praktisk angrepsvinkel	67

KAPITTEL 3: PARAMETRISKE FRONTFUNKSJONER.

1.	Innledning	69
2.	Eksempler på frontestimering av produkt- og kostnadsfunksjoner	72
2.1	Innledning	72
2.2	Deterministisk frontestimering med LP og QP	74
2.3	Fra LP og QP til ML metoden	76
2.3.1	Ekspensielt fordelt restledd	76
2.3.2	Halvnormalt fordelt restledd	80
2.3.3	ML og homotetiske produktfunksjoner	81
2.3.4	Oppsummering	85
2.4	Stokastisk frontestimering og teknisk ineffektivitet	86
2.5	Allokeringsineffektivitet	89
2.6	En ML metode som tilfredsstillter regularitetsbetingelsene	96
2.7	Frontestimering og målprogrammering	98
2.7.1	Deterministisk målprogrammering	98

2.7.2	Stokastisk estimering og "Chance Constrained" teknikken	102
2.8.	En generell modell med tosidig restledd	105

KAPITTEL 4: DATA ENVELOPMENT ANALYSIS METODEN.

1.	Innledning	110
2.	Formell presentasjon av DEA	111
2.1	Et enkelt eksempel	111
2.2	Mer om "free disposability" forutsetningen	115
2.3	DEA formulert som brøkprogrammeringsproblem	118
2.4	Omformingen til en lineær programmeringsmodell	121
2.5	Eksakt definisjon av en fullt effektiv DMU	124
3.	Tolking av formulering og av løsning	126
3.1	Teknisk effektivitet kontra priseffektivitet	126
3.2	Den marginale substitusjonsraten og den marginale transformasjonsraten	128
3.3	Grenseproduktiviteter	131
4.	Utvidelser av basismodellen	133
4.1	Skalaeffektivitet i tillegg til teknisk effektivitet	133
4.2	Om programeffektivitet	143
4.3	Ikke-lineær DEA	148
4.4	Paretooptimalitet og DEA	152
4.5	DEA med eksogen input eller output	155
4.6	DEA med ikke-kontinuerlig input eller output	158
4.7	Oppsummering	161

KAPITTEL 5: EMPIRISKE ANALYSER.

1.	Innledning	163
1.1	Datamaterialet: Driftsundersøkelsen for fiskeindustrien	165
2.	Modellene som analyseres	168

2.1	Data Envelopment Analysis modellen (DEA)	169
2.2	Parametriske produktfunksjoner	171
2.3	Effektivitetsmål relatert til en parametrisk produktfunksjon	173
2.4	Definering av variabler	178
2.5	Definisjon av kapitalavkastningsraten	184
3.	Empirisk bruk av modellene	185
3.1	Estimering av parametriske frontfunksjoner – innledning	184
3.2	Simulert stokastisk frontestimering	186
3.3	Deterministisk frontestimering med ulike forutsetninger for restleddet	195
3.4	Parametrisering av vektene på restleddet i produktfunksjoner	197
3.4.1	Cobb–Douglas produktfunksjoner	197
3.4.2	Homotetiske produktfunksjoner	202
3.5	Konklusjoner og oppsummeringer	210
4.	Estimering av ikke–parametriske frontfunksjoner	211
4.1	Detaljanalyse av en enkelt DMU	211
4.2	Oppdeling i underutvalg	218
4.3	Endring av antall input og output	222
4.4	Konsistens i effektivitet over tid	225
4.5	50 gjennomgangsbedrifter over tid	228
4.6	Analyse av skalaeffektivitet	232
4.6.1	Modell	232
4.6.2	Beregning av optimal skala (MPSS)	233
4.6.3	MPSS for DMU2	234
4.6.4	Detaljstudie av DMU82	234
4.6.5	Stabilitet av MPSS over tid	239
4.7	Grenseprodukt og tekniske transformasjonsrater	243
5.	Sammenligning av ulike effektivitetsmål	248
5.1	Innledning	248
5.2	Beregning av kapitalavkastning	249
5.3	Sammenligning av kapitalavkastningsmål med DEA	250
5.4	Effektivitet med parametriske produktfunksjoner	252

5.5	Sammenligning mellom DEA og best practice effektivitetsmål	255
6.	OPPSUMMERING –KONKLUSJONER	257
	LITTERATURLISTE	263
	Appendiks 1: En kompakt oversikt over effektivitetsmål	270
	Appendiks 2: Oversikt over variablene i en standard datafil	290
	Appendiks 3: Tabell- og figurvedlegg	295

MATEMATISK NOTASJON

La A og B være to mengder. Vi definerer da:

- $:=$ $A := B$ A er definert av B
 \in $a \in A$ a er et element i A
 \notin $a \notin A$ a er ikke et element i A
 \subseteq $A \subseteq B$ A er en undermengde av B
 \subset $A \subset B$ A er en ekte undermengde av B
 \cap $A \cap B$ A snitt B (de elementer som er felles for A og B)
 \cup $A \cup B$ A union B (elementene i A og B til sammen)
 \emptyset $A = \emptyset$ A er en tom mengde
 \mathbb{R}^ℓ Det Euklidske rom av dimensjon ℓ .
 \geq Dersom x og $y \in \mathbb{R}^\ell$, da er $x \geq y$ hvis og bare hvis $x_i \geq y_i$
 for alle $i=1, 2, \dots, \ell$
 \geq $x \geq y$ hvis og bare hvis $x \geq y$ og $x \neq y$.
 $>$ $x > y$ hvis og bare hvis $x_i > y_i$ for alle $i=1, 2, \dots, \ell$
 $>^*$ $x >^* y$ hvis og bare hvis $x_i > y_i$ eller $x_i = y_i = 0$, $i=1, 2, \dots, \ell$
 \mathbb{R}_+^ℓ $\mathbb{R}_+^\ell := \{x: x \in \mathbb{R}^\ell, x \geq 0\}$
 \mathbb{R}_{++}^ℓ $\mathbb{R}_{++}^\ell := \{x: x \in \mathbb{R}^\ell, x > 0\}$
 $[,]$ $[a, b] := \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$
 $[,)$ $[a, b) := \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$
 \exists det finnes (det eksisterer)
 \odot $\lambda, x \in \mathbb{R}^\ell$, $\lambda \odot x := (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_\ell x_\ell)$
 $p \cdot x$ $p \cdot x$ (eller $p \cdot x$) = $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m$, p og $x \in \mathbb{R}^m$
 \Rightarrow $x \in A \Rightarrow x \in B$, x tilhører A bare hvis x tilhører B .

1. INNLEDNING.

1.1 Hva er problemstillingen.

Dette arbeidet handler om måling av produktivitet i produksjonen av varer eller tjenester. Ordet produktivitet vil jeg bruke helt synonymt med ordet effektivitet. I engelsk språkbruk skilles mellom "effectiveness" og "efficiency". Enkelt sagt viser det første begrepet til det å "gjøre de rette tingene", mens det andre viser til å "gjøre tingene riktig". Mitt begrep effektivitet tilsvarer det engelske "efficiency". En kort drøfting av forskjellene mellom disse to begrepene finnes i Sherman (1981, s 1.8), som bl.a. oppsummerer sin drøfting slik: ".. it is possible for an organization to be effective in attaining all its prescribed objectives, but to be inefficient in doing so."

Den implisitte forutsetningen bak analysene jeg vil gjøre, er at det rent faktisk er forskjeller i produksjonseffektivitet mellom ulike produsenter, og at denne forskjellen ikke kan forklares med markedsimperfeksjoner. Forskjeller i produksjonseffektivitet vil jeg kalle slakk i produksjonen, og denne slakken er et mål på ineffektiviteten. Jeg vil presentere og sammenligne metoder for å måle denne ineffektiviteten.

Leibenstein (1966) hevdet i en artikkel som ble utgangspunkt for sterk debatt, at det han kalte "X-efficiency"¹ var av betydelig større økonomisk betydning enn såkalt allokeringseffektivitet. Den siste typen ineffektivitet er ofte sentral i mikroøkonomiske analyser. Leibensteins synspunkter var kontroversielle, og ble imøtegått av flere økonomer. Stigler (1976) kan sies å representere den tradisjonelle oppfatning. Han mente at eventuell observert "X-efficiency" kan ses på som et uttrykk for markedsimperfeksjon, spesielt når en tar hensyn til at informasjon bør betraktes som en produksjonsfaktor, og at markedet for informasjon kan være imperfekt. Debatten dreide seg egentlig ikke om hvorvidt ineffektivitet

¹Leibenstein (1973) definerte "X-efficiency" som : ".. the extent to which a given set of inputs do not get to be combined in such a way so as to led to maximum output." (Leibenstein, 1973, s 766). I samme artikkelen skriver han : "I use the term 'X-efficiency' for what some writers may mean when they speak of 'technical efficiency' [...] see [...] Farrell (1957)".

kunne måles, men om å forklare (eller bortforklare) den målte ineffektiviteten. Kanskje kan denne debatten oppsummeres med følgende sitat fra P. Schmidt (1985–86, s 353–354):

"One issue raised in my paper [...] is the extent to which efficiency measurement is a reasonable objective, and I will take this occasion to make a few comments on this point. [One of the commentators] is quite right when he says that "the existence of inefficiency flies in the face of the classical microeconomics," and I believe this explains the lack of enthusiasm for the efficiency measurement exercise on the part of most economists. (By way of contrast, there is no such lack of enthusiasm on the part of management scientists.) Given a strong enough faith in optimizing behavior, measured inefficiency must represent the effects of unmeasured inputs, unrecognized constraints faced by the firm, and so forth. One rather specific such point of view is the "putty-clay" argument [...]; measured inefficiency may just reflect the fact that it is not optimal for the firm to invest continuously in new technology.

As an economist, I have sympathy for these arguments. On the other hand, people who truly do not believe in inefficiency must live in a different world than I do, because I see it as a pervasive fact of life. People make mistakes, and people manage firms. Their mistakes have consequences, and these may be measurable." Schmidt (1985–86; s 353–354).

Som utgangspunkt for mitt arbeid forutsetter jeg at ineffektivitet i produksjonsprosessen er til stede. Jeg ser det som interessant å utforske metoder for å måle denne ineffektiviteten. Dette utgangspunktet fører til at jeg vil legge størst vekt på å studere problemene forbundet med måling av slike forskjeller i økonomisk tilpasning som kalles ineffektivitet. Jeg har derfor lagt noe mindre vekt på å forklare den målte forskjellen. Selv om jeg her har gjort en prioritering i de problemstillingene jeg har tatt opp, vil det framgå av arbeidet at også forklaring av forskjeller i effektivitet er tatt med. Jeg er imidlertid av den oppfatning at forklaringsaspektet kunne trenge en separat behandling.

I praksis blir produktivetsbegreper ofte anvendt upresist, og med flere ulike tolkninger. Ofte er produktivetsbegrepet ensbetydende med å måle arbeidskraftproduktivitet. Produktivetsmålet kan være bruttoproduksjon i forhold til antall arbeidstimer som medgår. Produktivetsmålingen blir da utført ved å sammenligne forholdet mellom et produksjonsresultat og en innsatsfaktor på følgende enkle form

$$(1) \quad \frac{y_i}{x_j}$$

dvs man sammenligner mengden y av produksjonsresultat i (forkortet til y_i) i forhold til en valgt innsatsfaktor (kalt x_j for mengde x av innsatsfaktor j) og sier at produksjonsprosessen er effektiv hvis det kan produseres meget av et produkt med liten innsats av en innsatsfaktor. Normalt er arbeidskraft den innsatsfaktoren man studerer, i følge Holmøy (1986), som selv imidlertid estimerer total faktorproduktivitet på sektornivå. Fiskerinæringen er den næringssektoren jeg i denne studien henter mitt empiriske materiale fra. I denne næringen blir det ofte framhevet at selve fiskeprosessen er blitt meget mer effektiv etter andre verdenskrig, siden det nå er langt færre fiskere enn før, mens fiskeresultatet målt i vekt er noe større.

I dette arbeidet vil jeg sammenligne produktivitet på bedriftsnivå og ikke på produksjonssektornivå. Når en sammenligner effektivitet for bedrifter, sammenlignes gjerne forholdet mellom produksjonsresultat og innsatsfaktorer² for en bedrift med tilsvarende brøk for en annen bedrift. Matematisk uttrykkes at bedrift j er mer produktiv enn bedrift k når

$$(2) \quad \frac{y_j}{x_{ij}} > \frac{y_k}{x_{ik}}$$

hvor vi forutsetter at produktet (y) er det samme for begge bedriftene.

Normalt vil bedriftene (eller mer generelt: beslutningsenhetene, på engelsk forkortet til DMU, en forkortelse jeg vil benytte) bruke flere ulike innsatsfaktorer, f.eks. arbeidskraft, råvarer, energi og kapitalvarer. Det er heller ikke uvanlig at en bedrift produserer så ulike produkter at det vil være grov forenkling å veie de ulike produktene sammen til ett sluttprodukt. En sammenligning som (2) er problematisk fordi den ikke tar hensyn til at bedriftene kan bruke mye av en innsatsfaktor samtidig som de bruker lite av en annen innsatsfaktor. De vil derfor ved en slik enkel brøksammenligning kunne være relativt

²I den videre framstillingen vil jeg periodevis bruke betegnelsen "output" i stedet for "produksjonsresultat" eller "produkt". På samme måte vil jeg bruke betegnelsen "input" i stedet for "innsatsfaktorer". De språklige angloismer "output" og "input" er oppført i nye norske ordbøker. Ved å bruke ordene har jeg ikke tatt stilling til hva som er god norsk språkbruk.

effektive målt med utgangspunkt i en bestemt innsatsfaktor, mens de kan være relativt ineffektive målt med en annen faktor. For fiskeflåten er dette nettopp tilfelle, idet moderne båter nå bruker mer kapital og energi, men mindre arbeidskraft pr volumenhet produksjonsresultat enn båter basert på gammel teknologi. Når flere innsatsfaktorer inngår i produksjonsprosessen, er det vanskelig å si rent normativt hvilke konklusjoner en kan trekke av slike enkle analyser av teknisk produktivitet. Dersom det finnes markedspriser for produktene og for innsatsfaktorene, kan en i mange tilfeller i stedet sammenligne det bedriftsøkonomiske resultat eller produksjonskostnadene pr enhet produkt. Den totale effektivitet er imidlertid, som vi skal komme grundigere tilbake til, et bruttomål hvor teknisk effektivitet er en av komponentene. Skal en derfor kunne forklare observert totaleffektivitet, må teknisk ineffektivitet kunne måles. Det sentrale i denne avhandlinga er ulike måter å måle teknisk ineffektivitet i produksjonsprosesser.

Frisch (1971) påpeker sterkt forskjellen mellom produksjon i teknisk forstand og produksjon i økonomisk forstand. Han definerte produksjon i teknisk forstand som enhver transformasjonsprosess dirigert av mennesker hvor innsatsfaktorer går inn i produksjonsprosessen og produkter kommer ut. Produksjon i økonomisk forstand vil si at en forsøker å skape et produkt som er mer verdifullt enn innsatsfaktorene. Normalt brukes markedspriser som vurderingskoeffisienter. Teknisk effektivitet kan ha en naturlig økonomisk tolkning som graden av kostnadsminimaliserende eller inntekstmaksimerende mål oppfyllelse. De effektivitetsmålene jeg kommer til å presentere, måler hovedsaklig produksjonseffektivitet i teknisk forstand. Med dette utgangspunktet vil jeg også komme inn på økonomisk tolkning av produksjonseffektivitet.

Når en vil måle produksjonseffektivitet, er det normalt nødvendig å definere hva som er "mest effektiv produksjon". Den mest effektive produksjonsteknologien kan kalles "front-teknologi" eller "best practice" produksjonsteknologi. Det er flere måter å beregne en slik effektiv produksjonsteknologi. Man kan ta utgangspunkt i ingeniørbetraktninger/designstudier av produksjonsprosessen. Denne metoden kan man egentlig føre tilbake til svært tidlige økonomer, bl.a. Frisch. Standardreferansen til eksplisitt konstruksjon av produktfunksjoner ved en slik metode er Chenery (1949). En sentral og forholdsvis moderne

studie for slike "engineering" produktfunksjoner er Eide (1979). Eide estimerte imidlertid ikke det vi vil kalle for frontfunksjoner.

Vanligvis bruker ikke økonomer detaljerte ingeniørdata når de skal konstruere produktfunksjoner eller finne fram til "best-practice" produksjonsteknologier. I stedet brukes data på mer aggregert nivå. I mitt arbeid skal jeg konsentrere meg om produktfunksjoner beregnet med utgangspunkt i mikrodata, hvor mikroenheten er en enkelt bedrift eller produksjonsenhet. Slike data avspeiler den faktiske produksjonstilpasningen til de bedriftene som studeres. Det totale tekniske produksjonsmulighetsområdet for bedriftene vi analyserer, vil kunne være større enn det vi observerer. Det vil bli et sentralt poeng i min analyse å vise ulike måter å ekstrapolere fra observasjonssettet til mulighetsområdet, og vise at ulike forutsetninger om ekstrapolering har virkninger for de effektivitetsmålene som beregnes.

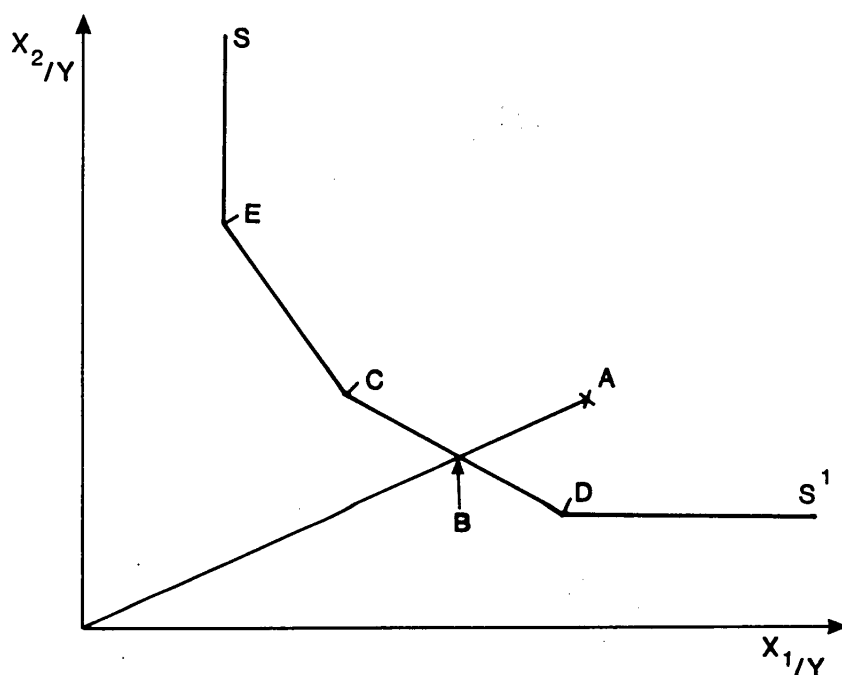
Produktivitetsmålinger sett fra en bedrifts side må oftest utføres uten at en kan basere målet på sammenligning med andre bedrifter. Forklaringene av produktivitetstall må finnes i interne forhold i bedriften, som f.eks. kapasitetsutnyttelse, investering og kostnader i forbindelse med produksjon av halvfabrikata til eget bruk o.l., se f.eks. Balke (1983). Interne produksjonsdata vil oftest ikke være tilgjengelige i forbindelse med eksterne analyser, og når de er tilgjengelige, kan det være vanskelig å sammenligne mellom bedrifter. Bedriftsinterne analyser er ofte basert på forholdsvis korte tidsserier, eksempelvis kvartalsdata over 2–3 år for en enkelt bedrift. Målet er å kunne gi en indikasjon på hvilke endringer i driften (eng.: "operations adjustments") som vil kunne forbedre sluttresultatet. Sluttresultatet måles vanligvis i form av et kapitalavkastningsmål, f.eks. ROI (Return On Investment.). Totalfaktorproduktivitet ved bruk av ROI vises av Miller (1987). Jeg vil ikke bruke denne framgangsmåten i mine effektivitetsmålinger, bortsett fra i kapittel 5, hvor et ikke-parametrisk effektivitetsmål vil bli sammenlignet med bedriftsøkonomisk avkastningsmål.

Den viktige distinksjon mellom ex-ante og ex-post produktfunksjoner er klargjort av Johansen (1972). En ex-ante produktfunksjon viser den største produksjon som kan

produseres når en har valg mellom ulike produksjonsteknologier. Dette er betraktninger før investeringen blir foretatt. Etter at investeringen er foretatt, er produksjonsteknologien i stor grad låst. Substitusjonsmulighetene er da også begrenset. Produktfunksjonen beregnet for en gitt teknologi, kalles en *ex-ante* produktfunksjon. Skillet mellom disse to typene produktfunksjoner er av stor praktisk betydning både for definering og for tolkning av produktfunksjonene, og er spesielt viktig i skillet mellom korttidstilpasning og langtidstilpasning. En klargjørende diskusjon om dette finnes i Førstund og Hjalmarsson (1974), som påpeker at produksjonsmuligheten for en industri ikke er bestemt av *ex-ante* produktfunksjonen. De påpeker at det reelle effektivitetsmålet da ikke er noe statisk effektivitetsmål, men må heller finnes som den optimale dynamiske tilpasningen til en produksjonsmulighetsfront som skifter over tid.

En metode for å beregne teknisk effektivitet ble presentert av Farrell (1957). Mange etterfølgende arbeider bygger på Farrelles ide. Derfor vil jeg kort referere hoveddelen av hans analyse. Følgende figur 1 vil illustrere framstillingen. x-aksen og y-aksen måler innsatsfaktorer pr enhet sluttprodukt. Vi forutsetter for enkelthets skyld at det bare produseres ett produkt med bruk av to innsatsfaktorer, og at vi har en produktfunksjon som er homogen av grad en i innsatsfaktorene³.

³Den opprinnelige analysen ble av Farrell og Fieldhouse (1962) utvidet til også å omfatte skalaineffektivitet.



Figur 1: Farrells diagram: innsatsfaktormengde pr outputenhet.

Punktet merket A og knekkpunktene på kurven SS' representerer observerte mengder av innsatsfaktorer og produkt for bestemte bedrifter, som vi har kalt A, C, D og E. En kurve trukket som $S-S'$ i figur 1 vil avgrense observasjonssettet på "den effektive siden". For eksakt å definere produksjonsfronten i ytterpunktene horisontalt langs x_1/y og x_2/y aksene, definerte Farrell i tillegg punktene $(\infty, 0)$ og $(0, \infty)$, kalt "points at infinity". Ved å inkludere disse punktene i tillegg til de faktiske observasjonene av input/output, vil produksjonsmulighetsområdet bli ytterligere avgrenset (i to input – en outputtilfellet) av en horisontal linje fra punktet D og en vertikal linje fra punktet E. Generalisering til flere innsatsfaktorer enn to er opplagt. Generalisering til flerdimensjonal output er vist i Farrell (1957, s 256–258).

Effektive bedrifter bruker lite innsatsfaktorer pr produsert enhet, og er derfor avmerket i figur 1 nærmere origo enn mindre effektive bedrifter. Teknisk effektivitet for en bestemt bedrift kan beregnes ved å sammenligne bedrifter langs radialer ut fra origo.

Farrell skriver:

"The curve SS' , then, will be taken as the estimate of the efficient isoquant. It will be seen that this method of measuring the technical efficiency of a firm consists in comparing it with a hypothetical firm which uses the factors in the same proportions. This hypothetical firm is constructed as the weighted average of the two observed firms, in the sense that each of its inputs and outputs is the same weighted average of those of the observed firms, the weights being chosen so as to give the desired factor proportions." (Farrell, 1957, s 256)

For å måle effektiviteten til bedrift A som ikke ligger på effektivitetsfronten (SS'), trekkes en linje fra A til origo. I punktet B vil linjen skjære SS' -kurven. I skjæringspunktet kan det konstrueres en ny "bedrift", kalt B, slik at den nye bedriften bruker innsatsfaktorer i samme relative forhold som bedriften A, men i mindre mengder. "Bedriften" B er effektiv, dvs den viser det minimale innsatsforbruk som kan produsere produktet, når innsatsfaktorene skal brukes i samme forhold som for bedrift A. Den konstruerte bedriften B er en lineær konveks kombinasjon av det observerte innsatsfaktorforbruket til bedriftene C og D. Effektivitetsmålet for bedrift A kan da uttrykkes som

$$(3) \quad E_A = \frac{OB}{OA}$$

Bedrifter som er effektive vil ha $E = 1$, mens de ineffektive vil ha $E < 1$. Den beregnede verdien for E_A kan brukes som et mål for den tekniske effektiviteten til DMU_A . Det er naturligvis ikke sikkert at faktorsammensetningen langs linjen $0-B-A$ er den kostnadsminimaliserende faktorsammensetningen, som vil avhenge av de relative prisforhold på innsatsfaktorene.

Innenfor Farrells analyseskjema kan vi operere med fire forskjellige typer effektivitet, som er gjensidig avhengige av hverandre. Disse er:

- a) Totaleffektivitet (engelsk: overall efficiency),
- b) Teknisk effektivitet,
- c) Skalaeffektivitet,
- d) Priseffektivitet (også kalt allokeringseffektivitet).

I tillegg defineres også en femte type kalt

e) Strukturell ineffektivitet.

I tillegg kan alle disse effektivitetsmålene deles opp i h.h.v. inputeffektivitet og outputeffektivitet. Utenfor Farrells analyseramme, som er basert på radiale effektivitetsmål, finnes en rekke typer ikke-radiale effektivitetsmål, som skal behandles grundigere i kapittel 2.

Jeg vil definere en produsent som teknisk effektiv hvis han er på fronten av produksjonsmulighetssettet. I figur 1 er kurven SS' en slik front. Produsenten er tilsvarende teknisk ineffektiv dersom produksjonen skjer i det indre av produksjonsmulighetssettet. Dette siste tilsvarer det som med et allment ord kalles sløsing. Punktet merket med A i figur 1 representerer en slik bedrift.

Strukturell ineffektivitet betyr at produksjonen finner sted i en del av produksjonsfronten som ikke tilhører det økonomiske området. Det betyr at produsenten er på en del av produksjonsfronten hvor innsatsfaktorene har ikke-positivt grenseprodukt. Produksjonen er da karakterisert av det som på engelsk kalles "congestion". Denne delen av effektivitetsfronten vil bare eksistere hvis vi ikke har fri "disposability" av input eller output. Dersom produsenten har muligheter til kostnadsfritt å kvitte seg med en eller flere innsatsfaktorer, så vil ikke strukturell ineffektivitet kunne eksistere. For output betyr det at en må kunne kvitte seg med output uten kostnader, dvs output må være "goods", ikke "bads". Det er verd å merke seg at strukturell ineffektiv produksjon, slik vi har definert den, alltid vil finne sted på produksjonseffektivitetsfronten. Dersom produsenten er på den uøkonomiske delen av produksjonsmulighetsområdet, og heller ikke er på fronten i dette området, så vil den være både strukturelt og teknisk ineffektiv.

Allokeringseffektiv vil en produsent være hvis han tilpasser seg på effektivitetsfronten i et slikt område at det tilfredsstiller produsentens økonomiske målfunksjon. Under visse forutsetninger kan det uttrykkes slik at han skal tilpasse seg slik at det relative prisforhold

mellom to vilkårlige input skal være lik den negative marginale tekniske transformasjonsraten mellom det samme par av innsatsfaktorer (dette bestemmer optimal sammensetning av innsatsfaktorer). Samtidig skal grenseinntekten av hvert produkt være lik verdien av grensekostnad for hver innsatsfaktor. Dette er førsteordensbetingelser for optimal produsenttilpasning. I tillegg sikrer 2.ordens betingelsen at denne tilpasningen gir maksimalt økonomisk resultat. Produsenten kan også ha andre målsettinger som ikke kan uttrykkes som 1.ordens marginaltilpasninger under fritt optimum. Jeg skal ikke komme konkret inn på hva slike mål kan være, mitt poeng er at dersom slike mål finnes, vil de være med på å definere det området på effektivitetsfronten som kan kalles det allokeringseffektive området. En produsent som befinner seg på effektivitetsfronten, og derfor er teknisk effektiv, vil da bli kalt allokeringsineffektiv når han ikke er på den del av fronten som oppfyller betingelsene for optimal pristilpasning.

Skalaineffektiv vil en produsent være dersom han ikke har riktig størrelse på sin produksjonsprosess. Det forutsettes da at det finnes en optimal størrelse eller størrelsesintervall for en bestemt type produksjonsteknologi, og at bedrifter som er mindre har tilpasset seg i et område med lokalt økende utbytte m.h.p. skalaen. For disse bedriftene vil det lønne seg å øke skalaen. Bedrifter som er større enn optimal skala har tilpasset seg på et område hvor det er avtakende utbytte m.h.p. skalaen. En produsent kan i prinsippet være skalaineffektiv selv om den er både teknisk, allokering og strukturell effektiv.

Med utgangspunkt i den analysen som ble gjort av Farrell, er det publisert mange analyser basert på begrepet "best practice" produksjonsteknologi. Salter (1960) presenterte en banebrytende analyse av teknisk endring. Han tok utgangspunkt i den meste effektive produksjonsstruktur og endringer i denne "best practice" produksjonsisokvanten. Han definerte og målte en rekke endringer i produksjonsstruktur som kunne forklares som teknologiske endringer. Han presenterte imidlertid ikke noen numeriske metoder for å beregne effektivitetsfronten ut over det som allerede var blitt vist av Farrell.

Av spesiell interesse i forhold til min problemstilling, er arbeidene av Finn Førsund og Lennart Hjalmarsson, spesielt Førsund og Hjalmarsson (1979a, 1979b, 1983 og 1987) og

Førsund, Lovell og Schmidt (1980). Et godt sammendrag av de tidlige arbeidene til Førsund, hvor han gjennomgår teorien rundt produktfunksjoner og også viser eksempler på empirisk bruk, er gitt i Førsund (1974). Førsund og Hjalmarsson (1987) integrerer frontfunksjonsanalyser med putty-clay produksjonsteknologier, og viser spesielt hvordan mikro produktfunksjoner kan aggregeres til industrinivå eller makronivå.

De to trinnene i effektivitetsmålinger.

Når en skal lage en indeks for effektivitet, står en overfor to problemer. For det første må en finne et referansesett bestående av effektiv produksjon. Det kan gjøres ved å estimere en produktfunksjon eller kostnadsfunksjon som frontfunksjon eller "best practice" funksjon. Normalt velger man først en matematisk funksjonsform og så estimeres parametrene i denne funksjonen. Et slikt økonometrisk estimeringsarbeid er i seg selv ikke trivielt. Det forholdet at funksjonsformen skal estimeres som en frontfunksjon, fører til spesielle estimeringsproblemer. Som alternativ til en parametrisk frontfunksjon, kan en bruke ikke-parametriske fronter som effektive referansesett.

Det neste trinnet er å beregne en indeks, eller et mål, som viser om innsatsforbruket til en konkret bedrift er effektivt når det sammenlignes med det effektive referansesettet. Det finnes mange tenkelige måter å konstruere et slikt effektivitetsmål. Farrells mål – å finne den maksimale proporsjonale endring av innsatsfaktorene – er kanskje det vanligste effektivitetsmålet. Farrells mål kan gis en økonomisk tolkning som et mål på mulig kostnadsreduksjon. Det finnes også andre effektivitetsmål, med andre økonomiske tolkninger.

1.2 Metoder for å beregne det effektive referansesettet.

Det vanligste effektive referansesettet er en estimert produktfunksjon eller kostnadsfunksjon. Som kjent fra produksjonsteorien er det en nær sammenheng mellom kostnadsfunksjoner og produktfunksjoner. Denne sammenhengen blir også ofte kalt dualiteten mellom

kostnadsfunksjoner og produktfunksjoner. Betegnelsen "dualitet" kan være noe forvirrende. Charnes, Cooper og Schinnar (1982) skriver om denne typen dualitet:

"...Hence we shall hereafter refer to these [dvs dualitetsegenskapene] as 'transform relations'. This will help to avoid confusion with the 'duality theory' of 'mathematical programming'." (CCS 1982,s 209)

I denne avhandlinga vil jeg ikke benytte CCSs anbefalte terminologi, men i stedet bruke ordet "dualitet", siden det later til å ha etablert seg som gjengs språkbruk for å betegne sammenhengen mellom kostnadsfunksjoner og produktfunksjoner.

Jeg skal i mine empiriske analyser hovedsaklig avgrense meg til analyse av produktfunksjoner, og vil i noen grad trekke på sammenhengen med kostnadsfunksjoner. Jeg vil ikke bruke profittfunksjoner som produksjonsteoretisk begrep, men som en regnskapsmessig definisjon.

For mange typer produktfunksjoner, men ikke alle⁴, kan man uttrykke en entydig sammenheng mellom produktfunksjonen og den tilhørende kostnadsfunksjonen. Diewert (1974) setter opp regularitetsbetingelser som må gjelde for at det skal være dualitet mellom kostnadsfunksjonen og produktfunksjonen. Sammenhengen mellom kostnadsfunksjoner og produktfunksjoner kan en bruke når en skal velge hvilken modell som er best, gitt datagrunnlag og økonomisk virkelighet. Står en overfor markedsforhold som skulle tilsi at output er eksogent gitt, vil det være mest rett å estimere en kostnadsfunksjon med eksogen output. Har man imidlertid ikke prisdata, eller prisene er endogent gitt (f.eks. at virkelige markedsforhold avviker fra forutsetningene om prisfast kvantumstilpasning), da bør en estimere en produktfunksjon.

Kostnadsfunksjonen formulert med eksogen output er definert som den minste oppnåelige

⁴Den generelle translog produktfunksjonen er et eksempel på en mye brukt produktfunksjon som ikke har en dual kostnadsfunksjon. Det betyr at den generelle duale kostnadsfunksjonen ikke kan utledes av produktfunksjonen ved optimaliseringsantakelser. Se f.eks. Heathfield og Wibe (1987, s 110).

kostnad gitt output og priser på innsatsfaktorene. Kostnadsfunksjonen er derfor også en ekstremalfunksjon (eller frontfunksjon) på samme måten som produktfunksjonen. I prinsippet kan en derfor benytte samme metode for ekstremalfunksjonsestimering når en skal finne parametrene i disse funksjonene.

En parametrisk frontfunksjon, enten det er en produktfunksjon eller en kostnadsfunksjon, er konstruert slik at de observerte endogene variablene enten er på fronten eller på den ene siden av fronten. Bedriftene som ikke er på fronten kan kalles ineffektive, de som er på fronten kan være effektive, men ikke nødvendigvis. Siden frontfunksjonen er det referansesettet som ineffektive bedrifter sammenlignes med, er en eksakt og bevisst definering av dette referansesettet av betydning for de følgende effektivitetsmålinger, se S. Grosskopf(1986).

Farrells effektive referansesett er ikke-parametrisk. Den metoden han benyttet for å beregne det effektive referansesettet var lite praktisk. Imidlertid kan vi se av diskusjonen etter Farrells presentasjon (se Farrell, 1957 s 284) at Dr. A.J. Hoffman påpekte at det estimeringsproblemet Farrell stilte opp ".. is a problem of linear programming, and the dual simplex method [...] is particularly adapted to solve this problem.". Det tok likevel flere år før LP⁵ eller lignende metoder ble brukt i empiriske effektivitetsstudier for å beregne effektive referansesett.

Farrells metode for å beregne en ikke-parametrisk effektivitetsfront ved bruk av LP er tatt opp av forskere med faglig utgangspunkt i operasjonsanalyse. Spesielt vil jeg framheve Data Envelopment Analysis teknikken (DEA) utviklet av Charnes, Cooper og Rhodes (1978) og Rhodes (1978). De fleste publiserte arbeidene innen frontfunksjonsestimering har likevel omhandlet metoder for å estimere parametriske frontfunksjoner. De første som beregnet "frontier" produktfunksjoner ved bruk av LP var Aigner and Chu(1968). Seinere er det publisert en rekke arbeider innen dette området. De fleste modellene som er estimert, er av

⁵Jeg vil i dette arbeidet la forkortelsen LP bety lineær programmering og forkortelsen QP vil stå for kvadratisk programmering.

Cobb–Douglas type (heretter kalt C–D produktfunksjoner) eller homotetiske av typen presentert av Nerlove (1963,1965) og Zellner og Revankar (1969). Det er også frontestimert produktfunksjoner av trans–log typen, se f.eks. Greene (1980).

Parametrene i deterministiske parametriske frontfunksjoner kan forholdsvis enkelt estimeres ved bruk av LP eller QP. Tankegangen med bruk av LP eller QP er grovt sett at man lar den ukjente parametriske frontfunksjonen danne en nedre grense for observerte kostnader eller en øvre grense for observert output. Ved å minimalisere det lineære avvik, eller alternativt kvadratavviket mellom frontfunksjonen og observasjonssettet, vil man kunne beregne parametrene i parametriske frontfunksjoner. Det er også utviklet metoder for å beregne stokastiske parametriske produktfunksjoner, ved bruk av statistiske metoder. Slike metoder skal jeg komme tilbake til i kapittel 3.

Sammenligning mellom parametriske og ikke–parametriske frontfunksjoner vil bli et sentralt tema i denne avhandlingen. I valget mellom parametriske og ikke–parametriske frontfunksjoner, vil, etter min mening, de ikke–parametriske frontfunksjonene ha en del fordeler. Et slikt syn støttes av Hildenbrand (1981), som i en analyse av korttids produksjonssammenhenger for industrisektorer konkluderer med:

"Disregarding the above objections, I find the conclusion of the present analysis is quite clear: it suggests a parameter–free approach based on technical information on the micro level. [...] The econometric data which are needed for the conventional econometric approach are often, in principle, unobtainable. In any case, the studies start with an ad hoc specification of the structure of the production function, a specification which might not reflect the actual underlying structure." (Hildenbrand 1981,s 1124. Hans uthevelser.)

Det er imidlertid også ulemper med å bruke ikke–parametriske frontfunksjoner. Så vidt meg kjent er det ikke utviklet metoder for å estimere ikke–parametriske stokastiske fronter. Bruk av operasjonsanalytiske metoder for estimering av ikke–parametriske fronter kan til en viss grad bøte på denne svakheten, siden en kan anvende teorien for sensitivitetsanalyse i LP modeller til å anslå stabilitet i de estimerte frontfunksjonene.

1.3 Hva er et effektivitetsmål?

Forskjellen mellom den faktiske tilpasningen for en bedrift og det effektive referansesettet, er uttrykk for ineffektivitet. Det er mange måter å måle denne ineffektiviteten på. I prinsippet kan teknisk effektivitet måles på to måter; ett mål som viser hvor mye man maksimalt kan øke produksjonen gitt input, og et annet som viser hvor mye man bør kunne redusere input med gitt output. Disse to betraktningene kan kalles for input-effektivitet og output-effektivitet. Dersom produktfunksjonen har homogenitet ulik en, vil disse to målene ikke falle sammen. Man kan løse på kravet om proporsjonal endring av input eller output. Da åpnes opp for en rekke effektivitetsmål basert på ikke-proporsjonale⁶ endringer. Det er naturligvis ikke opplagt hvordan man skal veie en ikke-proporsjonal endring i f.eks. input (med mindre man bruker markedspriser). Ikke-proporsjonale effektivitetsmål vil kunne miste egenskapen av økonomiske mål. Jeg vil i kapittel 2 spesielt komme inn på generelle prinsipper for hvordan man kan måle slik avstand fra en observert bedrifts tilpasning fram til en gitt effektivitetsfront og hvordan slike avstandsmål kan gis økonomiske tolkninger.

1.4 Målsettinger med dette arbeidet.

Jeg skal i dette arbeidet konsentrere meg om metoder for å estimere parametriske og ikke-parametriske produksjonsmulighetsfronter og beregne ulike typer effektivitetsmål relatert til slike effektive referansesett. Etter min mening har ikke-parametriske fronter mange fordeler framfor parametriske fronter, både beregningsmessig og teoretisk, siden de bygger på få, enkle og lett akseptable forutsetninger. Effektivitetsmålene beregnet ved bruk av ikke-parametriske deterministiske fronter vil bli sammenlignet med effektivitetsmål basert på ulike typer parametriske produktfunksjoner. Ikke-parametriske effektivitetstall vil også bli sammenlignet med rene finansielle avkastningstall. Disse analysene blir gjennomført

⁶"Proporsjonalt effektivitetsmål" bruker jeg som norsk betegnelse for det som på engelsk heter "radial measure of efficiency". Tilsvarende vil betegnelsen "ikke-proporsjonal" finnes i engelsk faglitteratur som "non-radial".

på samme utvalgsundersøkelse for åtte etterfølgende år.

Effektivitetsanalyser med ikke-parametriske metoder, spesielt Data Envelopment Analysis-teknikken, gir muligheter for mer detaljerte bedriftsindividuelle analyser enn man kan oppnå med parametriske frontfunksjoner. Av den grunn vil jeg gå spesielt grundig gjennom DEA-teknikken. Det er min oppfatning at effektivitetsmål basert på ikke-parametriske effektive referansesett er mindre kjent og mindre benyttet enn rimelig er, gitt mulighetene slike metoder har. Spesielt virker DEA-metoden meget anvendbar på analyser av ikke-kommersielle organisasjoner og ved analyser av bedrifter med flerdimensjonal output.

Mange produktfunksjoner og kostnadsfunksjoner blir fremdeles estimert som gjennsnittsfunksjoner, til tross for at dette ikke er i overensstemmelse med økonomisk teori. Jeg har videre demonstrert at estimering som frontfunksjon og som gjennomsnittsfunksjon kan gi svært ulike resultater for parametrene i en produktfunksjon. Avvikene er så store at de klart påvirker de typer konklusjoner man kan trekke. Det bør derfor reises tvil om normative utsagn basert på gjennomsnittsestimerte produktfunksjoner, f.eks. utsagn om skala- og faktorelastisitet, er holdbare.

Hoveddelen av de analysene jeg har gjennomført, er basert på studier av deterministiske effektive referansesett. I mange praktiske analysesituasjoner kan det være rimelig å anta at observasjonene kan være påvirket av stokastiske forhold. Det vil da være et behov for å kunne skille mellom de bedriftene som framtrer som meget effektive pga. målefeil eller stokastiske, forbigående forhold, og dem som virkelig er effektive. Jeg har derfor også forsøkt å videreutvikle en enkel metode for å estimere stokastiske effektive referansesett uten å gå veien om full maksimum likelihood estimering med sammensatt restledd. En metode som tidligere er benyttet, er basert på "chance constrained"-teknikken. Jeg vil foreslå en forbedring av denne metoden slik at en bedre klarer å skille mellom rene "outliers" og effektive bedrifter. Langs samme linjer har jeg undersøkt mulighetene for å anvende såkalt "stochastic goal programming", som med noen spesialforutsetninger angående typen av stokastiske avvik, kanskje kan være en praktisk metode å estimere stokastiske

ikke-parametriske frontfunksjoner. Jeg vurderer også en nylig utviklet metode for lineær approksimering av en eventuell stokastisk front. Ved en slik approksimering unngår man det problemet at produksjonsmulighetsområdet ved stokastisk frontestimering kan bli ikke-konvekst.

Bruk av sensitivitetsanalyser i LP er en annen metode for å få informasjon om en mulig stokastisk ikke-parametrisk frontfunksjon. Sensitivitetsanalyser i LP kan betraktes som en parallell til signifikanstesting i statistiske analyser. For DEA-modeller er det noe vanskeligere enn man skulle tro å foreta sensitivitetsanalyser, siden den variabelen man skal foreta sensitivitetsanalyse på, opptrer samtidig både i objektfunksjonen og i restriksjonsettet. En metode for å foreta slik analyse for effektive bedrifter er presentert av Charnes et al (1985). Metoden synes ikke på nåværende trinn å være praktisk implementerbar på store modeller. I stedet vil jeg benytte mer pragmatiske metoder, basert på en detaljert studie av de bedriftene som inngår i det effektive referansesettet.

Kapittel 2. OM MÅLING AV EFFEKTIVITET – en formell gjennomgang av ulike metoder.

1. DEFINISJONER

1.1 Definisjon av produksjonsteknologien.

Jeg vil i dette kapitlet gi formelle definisjoner av produksjonsmulighetsområdet, de effektive undermengdene av produksjonsmulighetsområdet og flere indekser/avstandsmål for måling av ulike typer effektivitet. Definisjonen av produksjonsmulighetsområdet og avstandsmål følger den fundamentale framstillingen som er gitt av Shephard (1953 og 1970) og videreført i Fuss og McFadden (1978). En nyere framstilling, som spesielt er orientert mot måling av effektivitet, finnes i Färe, Grosskopf og Knox Lovell (1985).

Produksjonsteknologien jeg vil gjennomgå i dette kapitlet, er ikke-parametrisk og generell fleroutput-flerinput. På dette viset er den mer generell enn den produksjonsstrukturen som blir beskrevet med vanlige parametriske produktfunksjoner. I eksemplene vil jeg benytte meg av en stykkevis lineær produksjonsteknologi.

Produksjonsteknologien er de restriksjoner som produsenten må arbeide innenfor når han skal transformere en vektor av innsatsfaktorer, $x \in \mathbb{R}_+^m$, til en vektor av produkter, $y \in \mathbb{R}_+^s$. Denne transformasjonsprosessen mellom input og output vil bli beskrevet av en input eller output korrespondanse¹ (eng: "correspondence"). Med "input korrespondanse" menes en avbilding fra output til inputrommet; med "output korrespondanse" menes en avbilding fra input til outputrommet.

En input korrespondanse er derfor den funksjonen som viser mengden av inputvektorene som kan produsere en bestemt outputvektor. Jeg forutsetter derfor normalt at det er mulig

¹En korrespondanse er en funksjon som avbilder fra en til mange (på engelsk: point-to-set map).

for mer enn en inputvektor å produsere en bestemt mengde output. Samtidig er det normalt også slik at av den totale mengde av inputvektorer, er det bare en ekte undermengde som kan produsere en bestemt output.

På helt samme måte kan vi forklare begrepet output korrespondanse som en funksjon som viser den undermengden av outputvektorer som er mulig å produsere fra en bestemt inputvektor. Det betyr at flere ulike output, men normalt ikke alle i mengden av output, kan produseres av en bestemt inputmengde.

Disse begrepene har en åpenbar anvendelse i måling av effektivitet, idet vi med utgangspunkt i hvert av disse kan komme fram til resultater for enten inputeffektivitet eller outputeffektivitet. Input korrespondansen kan brukes for å finne inputeffektivitet. En inputvektor som er best til å produsere et bestemt output, må kunne identifiseres. På samme måte skal output korrespondansen brukes til å finne den outputvektoren som er best i relasjon til en eller annen målsetting.

Definisjon av produksjonsmulighetsområdet i input – output rommet er avgjørende for definisjon av de effektive undermengdene som skal være referansesettene når vi skal sammenligne en faktisk produksjonsvektor mot en effektiv norm. Jeg skal i dette kapitlet definere to produksjonsmulighetsområder; ett hvor det er fri mulighet til å bli kvitt unødvendig input eller output, et annet hvor man ikke har en slik fri mulighet, og hvor det derfor kan være sammentrenging (eng.: congestion) av input eller output. For begge disse to mulighetsområdene er der fri forutsetning om homogenitet. En lineær teknologi, som jeg vil bruke til eksemplifisering, har homogenitet lik en i input og output korrespondansen. Produksjonsmulighetsområdet har da globalt skalaelastisitet lik en. I slutten av dette kapitlet løser jeg på restriksjonen om skalaelastisitet lik en. Det er da mulig å definere et mulighetsområde hvor vi kan ha stigende, avtakende eller konstant skalaelastisitet.

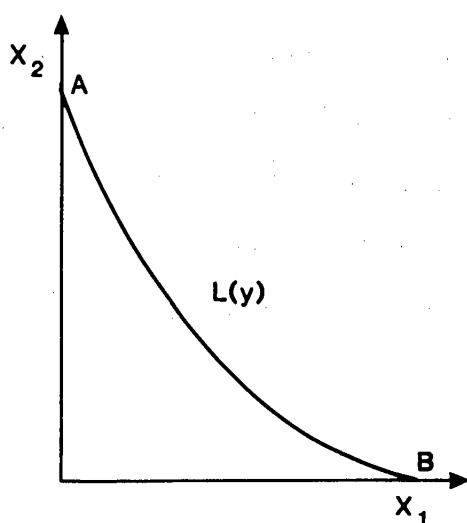
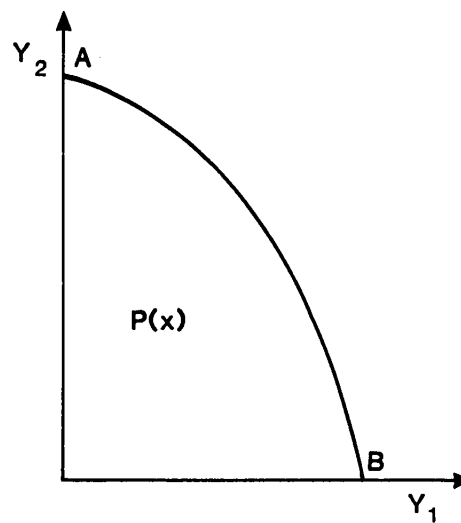
Produksjonsteknologien vil bli definert ved å introdusere et sett aksiomer (=egenskaper). Disse aksiomene defineres dualt, dvs jeg setter opp to sett med aksiomer, ett for input korrespondansen og ett for output korrespondansen.

Input og output korrespondansene definerer mengdene av teknologisk mulige input og outputvektorer. De definerer altså mulighetsområdet (engelsk: "feasibility set") av input- og outputvektorer. For å kunne foreta effektivitetsmålinger må vi kunne identifisere en undermengde av dette mulighetsområdet som det effektive mulighetsområdet (eng.: "efficient feasibility set") av input- og outputvektorer. Det finnes flere definisjoner av et slikt effektivt mulighetsområde; jeg skal definere tre ulike slike sett av effektive input-output vektorer. Definisjonene er laget slik at disse settene er undermengder av hverandre.

1.2 Formell beskrivelse av produksjonsteknologien.

En produksjonsteknologi som omformer input $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}_+^m$ til output $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{R}_+^s$ kan beskrives av inputkorrespondansen $\mathbf{y} \rightarrow L(\mathbf{y}) \subseteq \mathbb{R}_+^m$ eller inverst med outputkorrespondansen $\mathbf{x} \rightarrow P(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}_+^s$.

Derfor vil for enhver $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^s$, $L(\mathbf{y})$ betegne undermengden av inputvektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^m$ som produserer minst \mathbf{y} . Og omvendt, for enhver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^m$ vil $P(\mathbf{x})$ betegne undermengden av outputvektorer som er oppnåelige fra \mathbf{x} . Dette kan vises i figur 1a og 1b i to dimensjoner i både input og output (figurene er tatt fra Färe, Grosskopf and Lovell, 1985, fig 2-11, side 24).

Figur 1a: InputkorrespondansenFigur 1b: Outputkorrespondansen

I figur 1a vises inputkorrespondansen, dvs settet av inputvektorer som korresponderer med minst en bestemt mengde y . Som vi ser av figuren danner linjen AB en nedre grense for denne mengden av ikke-negativ input. I figur 1b er tegnet inn outputkorrespondansen $P(x)$, som er alle outputvektorene som lar seg produsere av en bestemt inputvektor. Denne mengden er også ikke-negativ og er begrenset ovenfra av linjen AB.

Ved å stille opp et sett av 5 aksiomer som inputkorrespondansen må tilfredsstille, skal jeg nå definere teknologien som hører sammen med inputkorrespondansen. Disse aksiomene vil bli kalt L1 – L5 i den videre framstillinga.

- L1: $0 \notin L(y)$ for $y \geq 0$, og $L(0) = \mathbb{R}_+^m$.
- L2: Dersom $\|y^\ell\| \rightarrow +\infty$ når $\ell \rightarrow \infty$, da er $\bigcap_{\ell=1}^{+\infty} L(y^\ell)$ tomt.
- L3: Dersom $x \in L(y)$, da er $\gamma \cdot x \in L(y)$ for $\gamma \geq 1$.
- L4: L er en lukket korrespondanse.²

²Charnes, Cooper, Rousseau og Semple (1987) påpeker svakheter med L4. De mener at definisjonen burde vært for en lukket avbildning, og foreslår følgende korrekte definisjon (CCRS, 1987, s 8): "Let S and T denote topological spaces and $S \times T$ their topological product space. Let f be a map from S into T . The graph of f , $G(f)$, is the set of pairs $\{(s, f(s)) : s \in S\}$. Definition: S is a "closed map" iff $G(f)$ is a closed subset of $S \times T$ in the product topology."

$$L5: \quad L(\theta y) \subseteq L(y) \text{ for } \theta \geq 1$$

Det første aksiomet betyr at en semi-positiv output ikke kan oppnås med utgangspunkt i en null inputvektor, dvs produksjon uten input er ekskludert. Siste leddet i L1 betyr at enhver ikke-negativ inputmengde skal produsere minst null output. Det betyr at $L(0)$ (dvs inputkorrespondansen til en null outputvektor) definerer hele inputrommet (se figur 1a, hvor i det tilfellet linjen AB blir punktet 0). Det andre aksiomet betyr at endelig inputmengde kan ikke produsere uendelig output.

Aksiom L3 betyr at en proporsjonal økning i input alltid er mulig, dvs det vil ikke redusere output. Dette aksiomet kalles på engelsk aksiomet om "weak disposability of inputs".

Aksiom L4 er et rent matematisk aksiom, som gjør det mulig å definere input isokvanten som undermengde av grensene for inputsettet $L(y)$. Aksiomet sikrer at effektivitetsfronten til $L(y)$ tilhører $L(y)$, se Fuss og McFadden (1978, s 226)

Det siste aksiomet, L5, betyr at en proporsjonal økning i output ikke kan oppnås hvis input reduseres. Dette siste aksiomet kalles på engelsk for "weak disposability of outputs".

Det finnes et sett aksiomer for outputkorrespondansen $P(x)$ som er ekvivalente til dem vi nettopp har vist for inputkorrespondansen. Disse aksiomene vil vi kalle P1 – P5, og de er:

$$P1: \quad P(0) = \{0\}.$$

$$P2: \quad P(x) \text{ er begrenset (eng: "bounded") for } x \in \mathbb{R}_+^m.$$

$$P3: \quad P(\gamma x) \supseteq P(x) \text{ for } \gamma \geq 1.$$

$$P4: \quad P \text{ er en lukket korrespondanse.}$$

$$P5: \quad y \in P(x) \Rightarrow \theta y \in P(x) \text{ for } \theta \in [0,1].$$

Tolkningen av disse fem aksiomene for outputkorrespondansen er som følger:

Det første betyr at en null inputvektor produserer null output. Det andre aksiomet sier at en endelig inputvektor ikke kan produsere uendelig output. Det tredje aksiomet (P3) sier at en proporsjonal økning av input ikke kan redusere output. Dette er forutsetningen om "weak disposability" av input. P4 er, på samme måte som L4, et matematisk aksiom, tatt med for å muliggjøre definisjon av outputisokvanter. Aksiom P5 sier til slutt at en proporsjonal reduksjon av output er mulig å produsere uten endring i input (betyr "weak disposability of outputs").

1.3 Mer om "strong" og "weak disposability" av input og output.

Aksiomene L1–L5 og P1–P5 inneholder forutsetninger om såkalt "weak disposability" av h.h.v. input og output. Det innebærer at man ikke ekskluderer muligheten for sammentrengning³ av input eller output. "Congestion" av input vil medføre at man produserer mindre av output når ett input øker. Congestion av output kan bety at en output er en såkalt "bad". Forurensing er et eksempel på slik output. Den kan bare reduseres ved å øke input. Produksjonsstrukturen kan være slik at disse mulighetene blir tatt vare på i defineringen av produksjonsmulighetsområdet. Da må slike muligheter kunne tillates i settet av aksiomer som definerer produksjonsteknologien. Denne muligheten er tatt vare på i forutsetningen om "weak disposability", dvs i aksiomene L3, L5, P3 og P5.

Vi må ha med den muligheten at produsenten kort og godt kvitter seg med "congesting" input og output. Denne muligheten øker produksjonsmulighetsområdet, siden vi tar bort en restriksjon. Vi kaller den nye forutsetningen for "strong disposability" eller alternativt "free disposability". For inputkorrespondansen kan det derfor defineres to alternative aksiomer som definerer "strong disposability" av input og output. Disse aksiomene kan

³Det engelske ordet for "sammentrengning" er "congestion", og de to betegnelsene vil bli brukt om hverandre seinere i teksten.

erstatte L3 og L5. De nye aksiomene kalles L3.S og L5.S. De er:

$$\text{L3.S:} \quad u \geq x \in L(y) \Rightarrow u \in L(y) \quad (\text{"strong disp" av input}).$$

$$\text{L5.S:} \quad v \geq y \Rightarrow L(v) \subseteq L(y) \quad (\text{"strong disp" av output}).$$

Det første nye aksiomet (dvs L3.S) betyr at en økning i input (ikke nødvendigvis proporsjonal) fremdeles er et element i den samme inputkorrespondansen, dvs det fører ikke til noen reduksjon i output. Det siste betyr at en større output ikke kan produseres med mindre input, eller sagt på annen måte: en reduksjon i output, ikke nødvendigvis proporsjonal, alltid kan oppnås uten noe endring i input.

For outputkorrespondansen blir de nye aksiomene, som tillater "strong disposability" av h.h.v. input og output, slik:

$$\text{P3.S:} \quad u \geq x \Rightarrow P(u) \subseteq P(x) \quad (\text{"strong disp" av input}).$$

$$\text{P5.S:} \quad y \leq v \in P(x) \Rightarrow y \in P(x) \quad (\text{"strong disp" av output}).$$

Forutsetningene om "strong disposability" utelukker såkalt såmmentrengning (eng.: "congestion") i input og output, dvs man kan fritt og uten kostnader bli kvitt overflødig input eller output. Hvis input og output følger forutsetningen om "strong disposability" så innbefatter denne "strongly disposable" teknologien også teknologien beskrevet som "weakly disposable". En av de få studier som har benyttet dette skillet i empiriske analyser er Byrnes, Färe og Grosskopf (1984), som bl.a. beregnet mål for "input congestion" i gruveindustrien i Illinois, USA.

1.4 Definisjon av tre effektive undermengder.

Produksjonsteknologien defineres derfor av $P(x)$ og $L(y)$ når en tar hensyn til aksiomene L1 – L5 og P1 – P5, og under spesielle forhold de alternative aksiomene L3.S og L5.S, og

tilsvarende for P . Dette gir to ulike definisjoner av produksjonsmulighetsområdet. I tillegg må defineres undermengder av mulighetsområdet kalt settet av effektive produksjonsvektorer, eller det effektive referansesettet.

Tre typer effektive referansesett defineres. De tre ulike effektivitetsettene blir definert for hvert av de to mulighetsområdene $L(y)$ og $P(x)$. Vi kaller disse effektivitetssettene for:

- 1) Isokvantmengden for $L(y)$ og $P(x)$.
- 2) Den svake effektivitetsmengde for $L(y)$ og $P(x)$.
- 3) Den strenge effektivitetsmengde for $L(y)$ og $P(x)$.

De effektive undermengder er referansesettene som observasjonene av innsatsfaktorer-/produkter sammenlignes med, når effektivitetsmålene defineres. Det som noe upresist blir kalt "yttergrensen" av produksjonsmulighetsområdet skal defineres til helt presise referansesett. Derfor stiller jeg opp følgende seks definisjoner for undermengder av $L(y)$ og $P(x)$ som definerer de effektive settene. De seks effektive undermengdene er parvis symmetriske for input og output korrespondansen. Det er derfor egentlig bare tre ulike definisjoner.

Definisjon 1a: Inputisokvanten for $L(y)$ er definert for $y \geq 0$, som

$$\text{Iso } L(y) := \{x : x \in L(y), \gamma \cdot x \notin L(y), \gamma \in [0,1]\} \text{ og } \text{Iso } L(0) = \{0\}.$$

Definisjon 1b: Outputisokvanten for $P(x) \neq \{0\}$ er definert som:

$$\text{Iso } P(x) := \{y : y \in P(x), \theta \cdot y \notin P(x), \theta > 1\}, \text{ og for } P(x) = \{0\} \text{ er } \text{Iso } P(x) := \{0\}.$$

Dette betyr at isokvanten, $\text{Iso } L(y)$, for inputvektoren definert i mulighetsområdet $L(y)$, er den minste mengde x som er i mulighetsområdet, gitt proporsjonal reduksjon av x . Tilsvarende for y . Man tar utgangspunkt i det definerte mulighetsområdet $P(x)$, og finner den maksimale vektor y som er i mulighetsområdet, gitt proporsjonal ekspansjon.

Definisjon 2a: Den svake effektive undermengde for $L(y)$ er definert for $y \geq 0$ som:

$$\text{Weff } L(y) := \left\{ x : x \in L(y), u <^* x \Rightarrow u \notin L(y) \right\} \text{ og } \text{Weff } L(0) := \{0\}.$$

Definisjon 2b: Den svake effektive undermengde av $P(x) \neq \{0\}$ er definert som:

$$\text{Weff } P(x) := \left\{ y : y \in P(x), v >^* y \Rightarrow v \notin P(x) \right\} \text{ og for } P(x) = \{0\} \text{ defineres}$$

$$\text{Weff } P(x) := \{0\}.$$

Dette effektivitetsmålet reduserer den isokvanteffektive undermengde slik at en eventuell tilbakebøyd del av isokvanten ikke vil være med i mengden av effektive vektorer, noe den kan være under visse betingelser som element av $\text{Iso } L(y)$ og $\text{Iso } P(x)$ ved definisjon 1a og definisjon 1b.

Til slutt defineres den strengt effektive undermengde av effektive vektorer.

Definisjon 3a: Den strengt effektive undermengde av $L(y)$ er definert for $y \geq 0$ som:

$$\text{Eff } L(y) := \left\{ x : x \in L(y), u \preceq x \Rightarrow u \notin L(y) \right\}, \text{ og } \text{Eff } L(0) := \{0\}.$$

Definisjon 3b: Den strengt effektive undermengde av $P(x) \neq \{0\}$ er

$$\text{Eff } P(x) := \left\{ y : y \in P(x), v \geq y \Rightarrow v \notin P(x) \right\}, \text{ og for } P(x) = \{0\} \text{ defineres}$$

$$\text{Eff } P(y) := \{0\}.$$

I forhold til effektivitetssettet $\text{Weff } L(y)$ og $\text{Weff } P(y)$ ser vi nå at i tilfeller hvor en isokvant går parallelt med en av aksene, er det bare ett punkt på denne parallelle del av linjen som er effektivt. Dette ene punktet indikerer minimum input eller maksimum output.

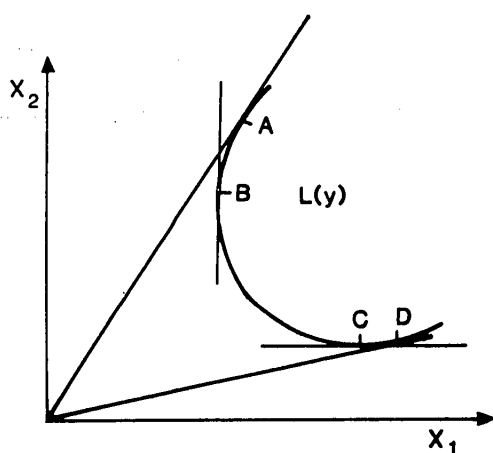
Disse definisjonene kan illustreres i inputrommet i følgende to figurer. Sammenhengen mellom de seks effektive undermengdene vi har definert, er

$$\text{Iso } L(y) \supseteq \text{Weff } L(y) \supseteq \text{Eff } L(y)$$

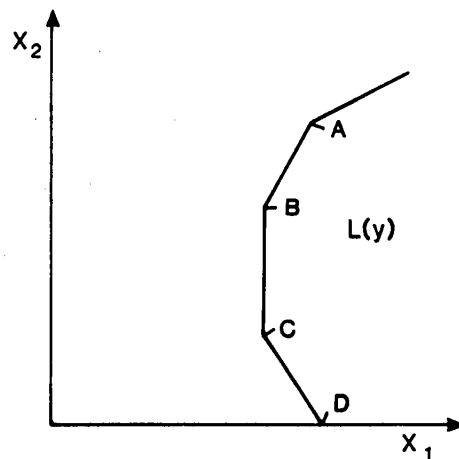
og

$$\text{Iso } P(x) \supseteq \text{Weff } P(x) \supseteq \text{Eff } P(x).$$

I figur 2 a er tegnet inn en kontinuerlig deriverbar front, og i figur 2 b en kontinuerlig front, men med lineære segmenter og knekkpunkter mellom segmentene.



Figur 2a: Effektive undermengder;
kontinuerlig deriverbar front



Figur 2b: Stykkevis lineær front

I figur 2b er linjestykket BC forutsatt å være parallelt med x_2 akse. I figur 2a er linjestykket ABCD Iso-effektivt, linjestykket BC er både Weff-effektivt (svakt effektivt) og strengt effektivt. I figur 2a er derfor $\text{Iso } L(y) \supset \text{Weff } L(y) = \text{Eff } L(y)$. I figur 2b vil linjestykket ABCD være $\text{Iso } L(y)$, BCD vil være $\text{Weff } L(y)$ og CD vil være $\text{Eff } L(y)$.

For noen produksjonsstrukturer vil disse tre ulike effektive undermengdene være sammenfallende. La $f(x)$ være produktfunksjonen for inputvektoren x . Forutsetningen om fri "disposability" av input betyr $x' \geq x \Rightarrow f(x') \geq f(x)$, se Kopp (1981). Det følger da også at gitt $x' \geq x \Rightarrow f(x') > f(x)$ så er $\text{Eff } L(y) = \text{Iso } L(y)$. Mange neoklassiske produktfunksjoner tilfredstiller forutsetningen om fri disposabilitet som vist ovenfor. Et eksempel på det er Cobb-Douglas typer produksjonsteknologier, hvor $\text{Iso } L(y) = \text{Weff } L(y) = \text{Eff } L(y)$ og hvor inputsettet $L(y)$ er definert av

$$L(y) = \left\{ x : \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha_i} \geq y, \alpha_i > 0 \right\}.$$

Färe og Lovell (1981) påpeker hvilke produktfunksjoner som ikke tilfredsstill forutsetningen om fri disposabilitet. Det er for det første opplagt alle produktfunksjoner av Leontief type. Dessuten gjelder det visse typer produktfunksjoner med variabel substitusjonselastisitet. Produktfunksjoner som er "ray"-homogene eller "ray"-homotetiske⁴ vil ikke tilfredsstill forutsetningen. Heller ikke trans-log produktfunksjoner tilfredsstill forutsetningen om fri disposabilitet globalt, men vil kunne gjøre det med de vanlige settene av restriksjoner som legges på trans-log produktfunksjoner ved estimeringen. Selv om det finnes mange produktfunksjoner som derfor ikke tilfredsstill kravet om fri disposabilitet, så er de mest brukte av en slik type at $Iso L(y) = Eff L(y)$.

1.5. Innføring av priser på innsatsfaktorene og på sluttproduktene.

De seks effektivitetsmengdene jeg har definert, har det til felles at de definerer undermengder av produksjonsmulighetsområdet uten at priser på innsatsfaktorer eller sluttprodukter blir tatt med i definisjonene. Det er derfor bare tekniske egenskaper ved produksjonsstrukturen det er tatt hensyn til i avgrensingen av de effektive mengdene.

Det er naturlig å bruke den ytterligere informasjonen som prisvektorene gir i definisjon av effektive sett, idet vi ønsker å definere en kostnadsminimaliserende innsatsvektor og en inntekstmaksimerende produktvektor.

La $p \in \mathbb{R}_{++}^m$ være en prisvektor for innsatsfaktorene, og $r \in \mathbb{R}_{++}^s$ en prisvektor for sluttproduktene. Den kostnadsminimaliserende innsatsvektoren, gitt eksogen prisvektor p på innsatsfaktorene og eksogent gitt produksjon, kan defineres som (CM betyr i det følgende "cost minimization"):

⁴Om "ray"-homogene og "ray"-homotetiske produktfunksjoner, se Färe (1975).

$$CM(y,p) := \{x \in L(y) : px = Q(y,p)\}$$

hvor kostnadsfunksjonen $Q(y,p)$ er definert som:

$$Q(y,p) := \min \{px : x \in L(y)\}.$$

For inntekten kan det defineres et sett av inntektsmaksimerende outputvektorer gitt priser r på output, som:

$$RM(x,r) := \{y \in P(x) : ry = R(x,r)\},$$

der den totale inntekten er definert av funksjonen:

$$R(x,r) := \max \{ry : y \in P(x)\}.$$

$CM(y,p)$ og $RM(x,r)$, oppfattet som mengden av effektive tilpasninger, vil stå i følgende forhold til det svake effektivitetsmålet som vi tidligere har definert:

$$CM(y,p) \subseteq \text{Weff } L(y)$$

og

$$RM(x,r) \subseteq \text{Weff } P(x).$$

1.6. Produktfunksjoner.

Jeg har behandlet transformasjonsteknologier i produksjonsprosessen, og definert output- og inputkorrespondanser. Med utgangspunkt i disse definisjonene er det nærliggende å definere en produktfunksjon, som jo er det vanlige begrepet for å beskrive sammenhengen

mellom innsatsfaktorer og produksjonsresultatet i en produksjonsprosess.

En skalar produktfunksjon, dvs med bare ett sluttprodukt, defineres som:

$$F(x) := \max \{y : x \in L(y)\} = \max \{y : y \in P(x)\} .$$

Det er meget mer vanskelig å definere en produktfunksjon som beskriver en flerdimensjonal outputfunksjon, avledet av egenskapene til settene av input og output korrespondansene. Det er mulig, i følge Färe, Grosskopf og Lovell (1985) og Shephard (1970), å definere en fleroutput produktfunksjon I som:

(Definisjon:) Funksjonen $I: \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^S \rightarrow \mathbb{R}_+$ slik at (1) for $y^0 \geq 0$, $L(y^0) \neq \emptyset$, $\text{Iso } L(y^0) = \{x \in \mathbb{R}_+^m : I(y^0, x) = 0\}$, og (2) for $x^0 \geq 0$, $P(x^0) \neq \{0\}$, $\text{Iso } P(x^0) = \{y \in \mathbb{R}_+^S : I(y, x^0) = 0\}$ blir kalt en Isokvant fleroutput produktfunksjon (eng : "Isoquant Joint Production Function" forkortet til "IJPF").

Siden produktfunksjonen er en ekstremalfunksjon, så defineres en fleroutput produktfunksjon som transformasjonen av to tidligere definerte ekstremalsett, nemlig $\text{Iso } L(y)$ og $\text{Iso } P(x)$. Resultatet er en isokvant fleroutput produktfunksjon. Det er også mulig å definere fler-output produktfunksjoner med utgangspunkt i mengdene $\text{Weff } L(y) - \text{Weff } P(x)$, eller $\text{Eff } L(y) - \text{Eff } P(x)$. Om dette, se f.eks. Färe (1986).

1.7 En stykkevis lineær produksjonsteknologi.

De effektive mengdene som er definert, kan brukes når man numerisk skal beregne effektivitetsmålene konkret for en observert input/outputvektor (x^0, y^0) . Samtidig skal jeg vise en LP prosedyre for å beregne dem, i relasjon til en lineær teknologi. Denne teknologien beskriver en fler-output fler-input produksjonsstruktur.

Jeg bruker følgende betegnelser:

M – er en $n \times s$ matrise som gir outputkoeffisientene i produksjonsstrukturen. Elementet m_{ij} i matrisen M er bedrift i 's produksjon av sluttproduktet j .

N – er en $n \times m$ matrise som beskriver inputmatrisen i produksjonsstrukturen. Elementene n_{ij} i matrisen N er bedrift i 's bruk av innsatsfaktor j .

n – antall bedrifter eller produksjonsprosesser.

s – antall produkter.

m – antall innsatsfaktorer.

Videre brukes følgende fire forutsetninger:

- 1) Hver output lar seg produsere.
- 2) Hver bedrift produserer minst en output.
- 3) Hver input er nødvendig for minst en output.
- 4) Hver bedrift bruker minst en input.

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ er en intensitetsvektor som beregnes i de etterfølgende modellene. λ gir et skalart intensitetstall for hver av de n bedriftene. Den beregnede verdien for vektoren λ brukes når en skal konstruere en effektiv referanseteknologi som observerte input-outputsett skal måles mot.

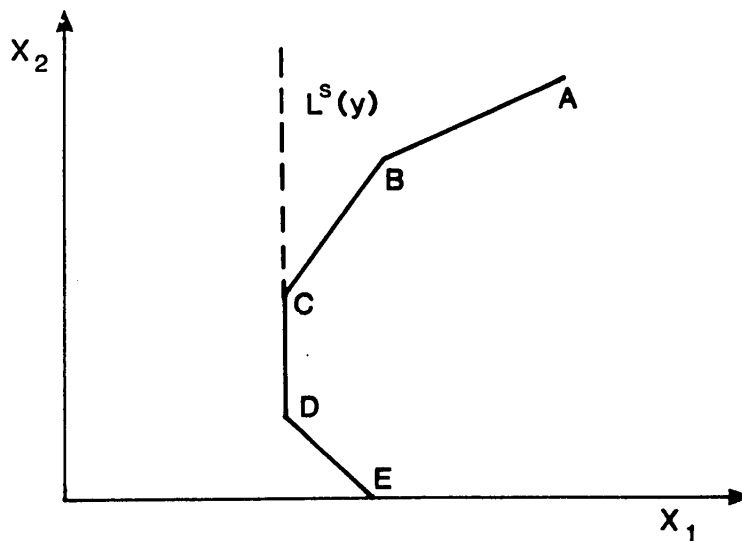
Den lineære produksjonsstrukturen vil bli, når vi forutsetter "free disposability" av input og output og konstant skalautbytte:

$$L^S(y) := \left\{ x : \lambda \cdot M \geq y, x \geq \lambda \cdot N, \lambda \in \mathbb{R}_+^n \right\}$$

og for output korrespondansen:

$$P^S(x) := \left\{ y : \lambda \cdot M \geq y, x \geq \lambda \cdot N, \lambda \in \mathbb{R}_+^n \right\}.$$

Dersom outputkorrespondansen er som vist i figur 3, så vil teknologien jeg definerer i $L^S(y)$ bli som linjen EDC pluss vertikal ekspansjon fra C. Punktene B og A vil da ligge i det indre av $L^S(y)$.



Figur 3: $L(y)$ i to dimensjoner.

Dersom jeg spesifiserer en teknologi med såkalt "weak disposability", vil den bli for h.h.v. inputkorrespondansen og outputkorrespondansen (konstant skalautbytte forutsettes):

$$L^W(y) := \left\{ x : \mu \cdot \lambda \cdot M = y, \lambda \cdot N = \delta \cdot x, \mu, \delta \in (0, 1], \lambda \in \mathbb{R}_+^n \right\}$$

og

$$P^W(x) := \left\{ y : \mu \cdot \lambda \cdot M = y, \lambda \cdot N = \delta \cdot x, \mu, \delta \in (0, 1], \lambda \in \mathbb{R}_+^n \right\}.$$

Parametrene μ og δ tillater radial skalering av observasjonene til isokvanten. Forutsetningen om "weak disposability" er tatt vare på ved at ulikheten i formuleringen er

byttet om til likhet ("="), og ved innføring av skaleringsparametrene μ og δ .

Skalaelasticiteten kan manipuleres ved å legge restriksjoner på $\sum_{i=1}^n \lambda_i$. I definisjonene av $L^S(y)$ og $L^W(y)$, og tilsvarende for outputkorrespondansen, har vi ikke lagt noen restriksjoner på $\sum_{i=1}^n \lambda_i$. Dette innebærer at man for teknologiene har spesifisert skalaelasticitet lik en, også kalt "ray unboundedness" eller "pari passu" produksjonsstruktur.

Hvis referanseteknologien er definert ved $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, så har vi en teknologi hvor mulighetsområdet er konvekse kombinasjoner av vektorer i input og output korrespondansene. Det definerte mulighetsområdet tillater da stigende, konstant og fallende utbytte m.h.p. skalaen. En stykkevis lineær teknologi vil ha stykkevis stigende, konstant eller synkende utbytte m.h.p. skalaen. Det er viktig å være klar over at i den teknologien som da er definert, kan alle disse tre mulighetene være til stede samtidig, men ikke på samme "sted". En nærmere analyse av forutsetningene for å kunne analysere skalaeffektivitet skal tas opp i avsnitt 5 i dette kapitlet, og også i kapittel 4, hvor jeg vil gjennomgå DEA metoden.

1.8 Graf–framstilling av produksjonsstrukturen.

Normalt framstilles sammenhenger mellom input og output som en graf i input–output planet. Jeg skal nå med utgangspunkt i FGL definere en slik graf–sammenheng og en rekke effektivitetsmål for en slik graf.

En graf er definert som:

$$GR := \left\{ (x, y) : x \in L(y), y \in \mathbb{R}_+^S \right\} = \left\{ (x, y) : y \in P(x), x \in \mathbb{R}_+^M \right\}$$

dvs GR definerer en vektormengde i (x,y) planet slik at $x \in L(y)$ og $y \in P(x)$.

Dersom $(x,y) \in GR$, så er $x \in L(y)$ og $y \in P(x)$. Med utgangspunkt i de aksiomene jeg har stilt opp for mulighetsområdene $L(y)$ og $P(x)$, følger 5 tilsvarende aksiomer for GR som gjelder for "weak disposability". Siden disse fem aksiomene er forholdsvis like dem jeg har presentert tidligere for $L(y)$ og $P(x)$ i form av aksiomene L1 – L5 og P1 – P5, skal jeg bare liste opp aksiomene, uten noen drøfting.

$$GR1: 0 \in GR, (0,y) \in GR \Rightarrow y = 0.$$

$$GR2: (GR \cap \{(x,y) : x \leq \bar{x}\}) \text{ er begrenset for enhver } \bar{x} \in \mathbb{R}_+^m.$$

$$GR3: \text{ Dersom } (x,y) \in GR, \text{ da er } (\lambda x, y) \in GR \text{ for } \lambda \geq 1.$$

$$GR4: GR \text{ er lukket (eng: "closed set").}$$

$$GR5: \text{ Dersom } (x,y) \in GR, \text{ da er } (x, \theta y) \in GR \text{ for } 1 \geq \theta \geq 0.$$

Det kan også defineres et sjette aksiom, som i tillegg pålegger teknologien å være "strongly disposable". Dette aksiomet kan skrives som:

$$GR6: (x,y) \in GR \Rightarrow (u,v) \in GR \text{ for } (u, -v) \geq (x, -y).$$

Tre ulike effektive undermengder av GR er effektive i en bestemt forstand, på samme måte som for $L(y)$ og $P(x)$. De effektive graf-definerte undermengdene er:

1. Graf isokvant effektivitet er definert ved:

$$\text{Iso GR} := \left\{ (x,y) : (x,y) \in GR, (\gamma \cdot x, \gamma^{-1}y) \notin GR \text{ for } 0 < \gamma < 1 \right\}.$$

2. Det svake graf effektivitetssettet (dvs "Weak efficient") er definert som:

$$\text{Weff GR} := \left\{ (x,y) : (x,y) \in GR, (u, -v) \overset{*}{<} (x, -y) \Rightarrow (u, -v) \notin GR \right\}.$$

3. Den sterke effektive undermengde av GR er:

$$\text{Eff GR} := \left\{ (x,y) : (x,y) \in GR, (u, -v) \leq (x, -y) \Rightarrow (u, -v) \notin GR \right\}.$$

GR er den kombinasjonen av (x,y) hvor $y \in P(x)$ og $x \in L(y)$ samtidig. Det kan lages et effektivitetsmål som kombinerer informasjon om priser på innsatsfaktorene, prisene på sluttproduktene og de prisuavhengige effektive undermengdene for GR som er definert ovenfor. Dette er oppnåelig i definisjonen av en profittfunksjon som relativt til det brukte begrepsapparatet blir:

$$\Pi(r,p) = \text{Max} \left\{ r \cdot y - p \cdot x : (x,y) \in \text{GR} \right\}.$$

Den profittmaksimerende input/outputvektoren skrives da:

$$\Pi M(r,p) = \left\{ (x,y) \in \text{GR} : r \cdot y - p \cdot x = \Pi(r,p) \right\}.$$

Dette betyr at $\Pi(r,p)$ er en linje som tangerer GR, mens $\Pi M(r,p)$ er det punktet (den vektor av input og output) i GR som blir tangert av $\Pi(r,p)$.

I første delen av dette kapitlet er ulike produksjonsmulighetsområder blitt definert. Tre ulike typer effektive referansesett er definert relativt til disse produksjonsmulighetsområdene. En klar beskrivelse av disse referansesettene har vært det sentrale i denne delen. I neste avsnitt skal gis flere definisjoner av effektivitetsmål, dvs indekser som beskriver effektiviteten til en konkret bedrift eller produksjonsprosess, relatert til de ulike effektive referansesettene. Alle disse effektivitetsmålene blir definert i relasjon til en lineær teknologi med skalaelastisitet lik en. I avsnitt 5 i dette kapitlet skal jeg vise effektivitetsmål som også kan måle mulig skalaineffektivitet.

2. EFFEKTIVITETSMÅL

2.1 De rene radiale effektivitetsmålene.

2.1.1 En kort oversikt.

I prinsippet finnes to typer radiale effektivitetsmål: et inputreducerende og et outputøkende. Et effektivitetsmål som viser mulig proporsjonal reduksjon av alle innsatsfaktorer for en gitt produksjonsmengde, er et mål for innsatseffektivitet. Som outputøkende effektivitetsmål kan det lages en indeks som måler mulig proporsjonal økning av produktene, gitt en innsatsmengde. Begge disse målene kan gis klare kostnadsminimerende eller inntektsmaksimerende tolkninger. Jeg skal nå kort gjennomgå effektivitetsmålene både for innsatsreducerende og produktøkende tilpasning. De forskjellige effektivitetsmålene vil bli eksemplifisert i relasjon til en lineær teknologi ved bruk av enkle LP-formuleringer. LP formuleringene gir også en numerisk metode for å beregne effektivitetene. I den tekstlige framstillinga viser jeg bare en mindre mengde av slike mål. I appendiks 1 vil bli gitt en forholdsvis komplett oversikt.

Det er fem radiale effektivitetsmål, hvorav tre avhenger av definisjonen av den effektive undermengde av $L(y)$ og to er avledede mål. To av målene er prisavhengige, mens tre er teknologiske, og derfor uavhengige av relative prisforhold på inputprisene. Målene er relative mål, dvs dimensjonsløse indekser.

2.1.2 Fem radiale innsatseffektivitetsmål med LP formuleringer.

Følgende betegnelser vil bli brukt:

$F_j(x,y)$ – Farrell tekniske innsatseffektivitet for beslutningstaker i (DMU_j). Dette målet avhenger av Iso $L(y)$ og observert (x^0, y^0) .

$W_i(x,y)$ – "svake" input effektivitetsmål. Dette avhenger av $W_{eff} L(y)$ og observert (x^0, y^0) .

$O_i(x,y,p)$ – totalt inputeffektivitetsmål for DMU_i . Dette målet avhenger av $Eff L(y)$, observert (x^0, y^0) og i tillegg prisvektoren på input $p \in \mathbb{R}_{++}^m$.

De avledede effektivitetsmålene blir:

$A_i(x,y,p)$ – allokeringseffektivitet, som beregnes som

$$O_i(x,y,p)/W_i(x,y).$$

$C_i(x,y)$ – "congestion" effektivitetsmål, som beregnes som

$$W_i(x,y)/F_i(x,y).$$

For de tre første effektivitetsmålene trenges eksplisitte LP-formuleringer.

Jeg har tidligere spesifisert inputkorrespondansen for en teknologi med "weak disposability" som:

$$L^W(y) = \left\{ x : \mu \cdot \lambda \cdot M = y, \lambda \cdot N = \delta \cdot x; \mu, \delta \in (0,1], \lambda \in \mathbb{R}_+^n \right\}$$

og inputkorrespondansen for en teknologi med "free disposability" av input er definert som:

$$L^S(y) = \left\{ x : \lambda \cdot M \geq y, \lambda \cdot N \leq x, \lambda \in \mathbb{R}_+^n \right\}.$$

$L^S(y)$ er inputkorrespondansen i en lineær teknologi, gitt forutsetningen om "strong disposability". Med (x^0, y^0) menes den observerte input/output vektoren til en bestemt produsent.

LP-formuleringen for Farrells mål for teknisk innsatseffektivitet gitt $L^W(y)$, blir da:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \gamma \\ \text{Når:} \quad & \gamma \cdot \delta \cdot x^0 = \lambda \cdot N \\ & \mu \cdot \lambda \cdot M = y^0 \\ & \mu, \delta \in (0, 1] \\ & \gamma \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned}$$

hvor λ er en intensitetsvektor som beregnes.

Fra figur 3 kan man observere at Farrell effektivitet og Weak effektivitet (teknisk) er identiske hvis og bare hvis (se også teorem 3.3.10 i FGL) teknologien tilfredsstiller betingelsene for fri disposability av input (dvs det er ingen "congestion" i teknologien). Hvis det ikke er sammentrengning i teknologien, så er settene for inputkorrespondansene lik for sterke og svake "disposable" teknologier. Derfor kan jeg bruke den definisjonen av "strongly disposable" inputkorrespondanse som nettopp er vist, sammen med LP-formuleringen av Farrells tekniske innsatseffektivitet, til å definere en LP-formulering for W_i , det svake innsatseffektivitetsmålet, som følger:

$$\begin{aligned} \text{Min:} \quad & \gamma \\ \text{Når:} \quad & \gamma \cdot x^0 \geq \lambda \cdot N \\ & \lambda \cdot M \geq y^0 \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^n, \gamma \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Denne LP-formuleringen er den samme som Charnes, Cooper og Rhodes (1978) bruker i den numeriske løsningen av et Data Envelopment Analysis problem. I Charnes, Cooper og Rhodes (1979) ble denne formuleringen noe modifisert for entydig å kunne skille mellom de effektive referansesettene $W_{eff} L(y)$ og $Eff L(y)$ når disse er ulike. I kapittel 4 kommer jeg tilbake til dette poenget.

Det totale effektivitetsmålet for innsatsbesparing $O_i(x,y,p)$ beregnes som

$$O_i(x,y,p) = Q_i(x,y)/p \cdot x^0$$

hvor

$$Q_i(x,y) = \text{Min} \{p \cdot x : x \in L(y)\} .$$

Totaleffektiviteten (som er et mål på samlet priseffektivitet og teknisk effektivitet) er minimumskostnad i inputtransformasjonen dividert med faktisk inputkostnad for DMU_i. $Q_i(x,y)$ må beregnes som en optimumsverdi.

Hvis vi forutsetter en teknologi uten sammentrengning av hverken innsatsfaktorer eller produkter, dvs vi har en såkalt "freely disposable" teknologi, fås følgende LP-modell for å beregne $Q_i(x,y)$:

$$\begin{array}{ll} \text{Min:} & px \\ \text{Når} & x^0 \geq \lambda \cdot N \\ & y^0 \leq \lambda \cdot M \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^n, p \in \mathbb{R}_{++}^m \\ & \text{og } x \text{ i objektfunksjonen er } x := \lambda^* \cdot N \end{array}$$

$Q_i(x,y)$ beregnes for hver bedrift, og den faktiske totaleffektiviteten framkommer ved å sammenligne minimumskostnadene med observerte kostnader for den bestemte bedriften.

De to avledede effektivitetsmålene kan utledes som kombinasjoner av de tre effektivitetsmålene jeg nettopp har vist LP-formuleringene for.

Allokeringseffektiviteten blir:

$$A_i(x,y,p) = O_i(x,y,p)/W_i(x,y)$$

og "congestion" effektivitetsmålet er:

$$C_i(x, y) = W_i(x, y) / F_i(x, y).$$

2.2. De rene radiale produkteffektivitetsmålene.

Jeg har til nå vist inputeffektivitet i relasjon til inputtransformasjonen og alternative definisjoner av teknologi. To av inputeffektivitetsmålene er prisavhengige, og baserer seg på forutsetningen om kostnadsminimalisering gitt en bestemt produksjon. Disse prisbaserte effektivitetsmålene kan anvendes fordi jeg implisitt har forutsatt en adferd som betyr at den aktuelle DMU som studeres, driver kostnadsminimalisering ved gitt produksjon. Output er derfor eksogent gitt.

I mange tilfeller vil en slik forutsetning ikke være rimelig. I stedet for eksogent gitt produksjon, kan en tenke seg at mengden innsatsfaktorer er gitt eksogent, og at en maksimerer salgsinntektene med en slik restriksjon. En slik betraktning leder til måling av outputeffektivitet av radial type. Utgangspunktet nå er outputkorrespondansen $P(x) \subseteq \mathbb{R}_+^S$, og vi skal finne effektivitetsmål for output som kan produseres av en gitt inputvektor $x \in \mathbb{R}_+^m$.

Produkt effektivitetsmålene er svært like dem vi nettopp har vist for inputeffektivitet. Ved LP-formuleringer kan vi eksemplifisere målene for to ulike definisjoner av teknologier og ett inntektsmaksimerende totaleffektivitetsmål. Alle disse målene er vist i appendiks 1. Nedenfor skal jeg bare eksemplifisere det svake effektivitetsmålet i relasjon til en lineær teknologi. Dette effektivitetsmålet er det resiproke av CCRs innsatsminimaliserende effektivitetsmål for mulighetsområdet $L^W(y)$, og er også vist i CCR (1978).

Outputkorrespondansen relativt til fri "disposable" output blir:

$$P^S(x) = \left\{ y : \lambda \cdot M \geq y, \lambda \cdot N \leq x, \lambda \in \mathbb{R}_+^n \right\}.$$

Det svake outputmål for teknisk effektivitet, $W_0(x,y)$ er likt Farrells mål for outputeffektivitet når teknologien er "strongly disposable". Jeg benytter meg av denne sammenhengen, idet jeg nå bruker samme formulering som for Farrells effektivitetsmål, men relatert til en annen teknologi. LP formuleringen for $W_0(x,y)$ blir da:

$$\begin{aligned} \text{Max: } & \theta \\ \text{Når: } & \theta \cdot y^0 \leq \lambda \cdot M \\ & \lambda \cdot N \leq x^0 \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^n \\ & \theta \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Sammenhengen mellom allokeringseffektivitet, teknisk produksjonseffektivitet og totaleffektivitet beregnes på samme måte som for den tidligere viste innsatseffektiviteten.

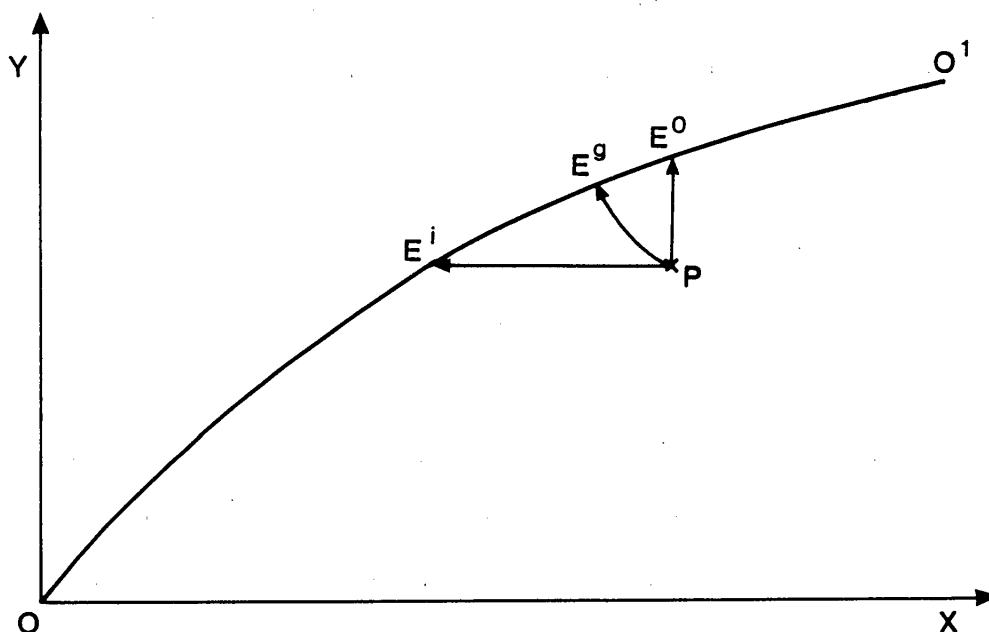
3. GRAF MÅL FOR EFFEKTIVITET.

3.1 Innledning.

Ved gjennomgangen av inputeffektivitetsmålene forutsettes at man beregner effektiv produksjon gitt en bestemt produktmengde. Den økonomiske tolkninga av dette effektivitetsmålet er kostnadsminimalisering. Da jeg gjennomgikk outputeffektivitet, forsøkte jeg å finne en konkret DMU's effektivitet gitt at innsatsfaktorene var fastsatt eksogent. Adferdsantagelsen som er konsistent med denne forutsetningen, er inntektsmaksimering. Det vil imidlertid i mange praktiske situasjoner være en ganske

spesiell forutsetning at enten input eller output er gitt. Oftest vil en kunne variere både input og output samtidig, og i det mulighetsområdet som teknologien beskriver, skal en maksimere profitten.

Jeg skal nå, med utgangspunkt i mulighetsområdet GR definert tidligere, vise en del nye effektivitetsmål som på fundamentale punkter skiller seg fra dem som allerede er gjennomgått. De tidligere effektivitetsmålene var basert på sammenligninger mellom en effektiv front (hvor jeg har vist flere alternative definisjoner), og den observerte input/outputkombinasjon i form av proporsjonale endringer i input eller output. De effektivitetsmålene som jeg nå skal vise, er ikke proporsjonale (radiale) i input/outputrommet. De er heller ikke lineære, men kan bedre kalles hyperbolske. Disse effektivitetsmålene skal gis en enkel forklaring, og jeg vil i første omgang bruke en grafisk framstilling i x - y planet. Jeg skal deretter gå noe nærmere inn på en presis matematisk definisjon av de ulike effektivitetsmålene, før jeg til slutt gir konkrete eksempler på hvordan effektivitetsmål for en DMU kan beregnes med LP. I figur 4 er problemstillinga illustrert. Området mellom kurven $0-0'$ og x -aksen er mulighetsområdet, kalt GR. Punktet P er en observasjon $(x^0, y^0) \in GR$, og slik jeg har tegnet figur 4, er dette punktet teknisk ineffektivt.



Figur 4: Graf-framstilling av tre direkte effektivitetsmål

Inputeffektivitet av Farrell type kan illustreres ved å sammenligne punktet $P \in GR$ med punktet E^i . Output forutsettes gitt og input reduseres proporsjonalt til en effektiv undermengde i $L(y)$. På tilsvarende måte kan outputeffektivitet illustreres ved å sammenligne observert (x^0, y^0) avmerket i punktet P med E^0 . Dette målet viser hvor mye y proporsjonalt kan økes med når x forutsettes gitt.

Grafmålet av Farrells type, dvs teknisk effektivitet hvor det ikke forutsettes "free disposability" av input og output, vil f.eks. kunne bli i punktet (x^g, y^g) , som jeg kaller E^g for å betegne at det er effektivt og ligger i GR . E^g er definert som det punktet i GR som kan nås med maksimal proporsjonal endring i x og y samtidig (h.h.v. reduksjon av x og økning for y).

Det foregående er en noe løs definisjon både av effektive undermengder av GR og av hvordan proporsjonal endring faktisk skal forstås. Jeg skal nå gå over til en mer formell beskrivelse av graf-effektivitet, som alternativt vil kunne kalles hyperbolsk effektivitet. Først skal jeg behandle Farrell Graf effektivitetsmål, deretter vises Graf effektivitetsmålet

relatert til et svakt "disposable" mulighetsområde. Til slutt vises det totale Graf effektivitetsmål hvor en også tar hensyn til relative prisforhold i målingen av effektivitet. Adferdsrelasjonen bak det totale graf effektivitetsmålet er profittmaksimering med fri tilpasning av innsatsfaktorer og produkter. Med utgangspunkt i de tre første effektivitetsmålene kan en definere to avledede mål: det ene som viser tap i teknisk effektivitet hvis forutsetningene om "free disposability" ikke gjelder; dvs det måler tap pga at man ikke har mulighet til fritt å kvitte seg med overflødige innsatsfaktorer/produkter. Det andre viser endringer i totaleffektivitet hvis det blir hindringer på fri allokeringstilpasning. Det er grunn til å være klar over at en bedrift kan være graf allokering ineffektiv, selv om den er både input og output allokeringseffektiv. Dette er synonymt med at en bedrift kan ha valgt input i riktig miks i forhold til relative priser på innsatsfaktorene og også produserer riktig miks av output i forhold til de relative prisene på output, men at volumtilpasningen ikke er riktig.

3.2 Farrells grafmål for teknisk effektivitet.

Først defineres det effektive området, som man får når teknologien tilfredsstiller forutsetningene G1 – G5 vist i avsnitt 1.8. :

$$D(F_g) := \left\{ (x, y) : \exists \gamma \geq 0, \text{ slik at } (\gamma x, \gamma^{-1} y) \in GR \right\}.$$

Funksjonen F_g som beregner Farrells grafeffektivitetsmål defineres som:

$$F_g(x, y) := \begin{cases} \min \left\{ \gamma \geq 0 : (\gamma x, \gamma^{-1} y) \in GR, (x, y) \in D(F_g) \right\} \\ + \infty, (x, y) \in \text{komplementet til } D(F_g) \end{cases}$$

$D(F_g)$ sikrer oss at det finnes en mulighet for en proporsjonal økning/reduksjon av input og

output slik at (x,y) etter endring fremdeles er i GR. Dersom $(x,y) \notin D(F_g)$, så er en slik transformasjon ikke teknisk mulig og det kan ikke beregnes noe fornuftig effektivitetsmål. $F_g(x,y)$ defineres da til å bli $+\infty$.

Dersom imidlertid $(x,y) \in D(F_g)$, slik at vi når $\gamma \geq 0$ får $(\gamma x, \gamma^{-1}y) \in GR$, da er det to muligheter, avhengig av om $\gamma < 1$ eller $\gamma > 1$ (Man kan i denne sammenhengen se bort fra $\gamma = 1$, siden det jo ikke medfører noen transformasjon).

Tilfellet $\gamma < 1$: I dette tilfellet viser γ den maksimale proporsjonale reduksjon av input og proporsjonale økning av output som kan gjøres og samtidig etter endringen være teknisk mulig, dvs være i GR.

Tilfellet $\gamma > 1$: I dette tilfellet viser γ den maksimale proporsjonale økning i x og samtidig proporsjonale reduksjon i y som må gjøres for at $(\gamma x, \gamma^{-1}y)$ skal bli teknisk mulig, dvs være i GR. $\gamma > 1$ bare når $(x,y) \notin GR$ i utgangspunktet.

Farrells graf effektivitetsmål, $F_g(x,y)$, kan også gis en verditolkning i form av proporsjonal reduksjon i kostnadene eller proporsjonal økning i inntektene for output. Imidlertid kan ikke målet gis en tolkning som endring i profitt. Dette kan vises i følgende sammenheng:

$$F_g(x,y) = \lambda = \frac{r \cdot y}{r \cdot \gamma^{-1} \cdot y} = \frac{p \gamma x}{p \cdot x} \neq \frac{r \cdot y - p \cdot x}{(r \gamma^{-1} y - p \gamma x)}$$

Dette betyr at prosentvis inntektsøkning er lik prosentvis kostnadsreduksjon, men dette er generelt ikke lik relativ endring i profitt. Man kan enkelt forvise seg om at $F_g(x,y)$ ikke kan tolkes som relativ profittendring ved å tenke seg en DMU_i som i utgangspunktet hadde null profitt ($ry - px = 0$). Anta nå at $\gamma = 0,8$, dvs forbruk av input (og kostnadene ved input), minker til 80 % av utgangspunktet og produsert output (og dermed salgsinntekt) øker til $y \cdot 0,8^{-1}$, dvs 1,25 av utgangspunktet. Da vil begge de to første leddene i ligningen ovenfor bli 0,8, men samtidig vil siste leddet være null fremdeles.

$F_g(x,y) = 1$ hvis og bare hvis $(x,y) \in \text{Iso GR}$, dvs Iso GR er det effektive referansesettet

for (x,y) ved Farrells graf effektivitetsmål.

3.3 Det svake grafmål for teknisk effektivitet.

La oss først definere tre sett, kalt $K(x)$, $M(y)$ og $D(W_g)$, som:

$$K(x) := \{u : u \leq x\}$$

$$M(y) := \{v : v \geq y\}$$

$$D(W_g) := \{(x,y) : \exists \gamma \geq 0, \text{ slik at } (K(\gamma x) \times M(\gamma^{-1}y)) \cap GR \neq \emptyset\}$$

$D(W_g)$ er det effektive området til det svake grafmålet W_g . $K(x)$ er mengden av inputvektorer mindre enn eller lik x , og $M(y)$ er settet av outputvektorer større enn eller lik y .

Definisjonen av det svake effektivitetssettet blir da:

$$W_g(x,y) := \begin{cases} \min \{ \gamma \geq 0 : K(\gamma x) \times M(\gamma^{-1}y) \cap GR \neq \emptyset \}, & (x,y) \in D(W_g) \\ + \infty, & (x,y) \in \text{komplementet til } D(W_g) \end{cases}$$

Effektivitetsmålet $W_g(x,y)$ flytter settet $M(y) \times K(x)$ langs en hyperbolsk linje fra $(x,y) \in GR$ til et punkt på yttersgrensen for GR . En observert vektor (x^0, y^0) er W_g effektiv ($\Rightarrow \gamma = 1$) hvis og bare hvis observasjonen tilhører den svakt effektive undermengde av GR , se FGL (1985, s 115). Den svakt effektive undermengde er tidligere definert og kalt $W_{eff} GR$.

Farrells graf effektivitetsmål, F_g , var basert på sammenligning med Iso GR . Det svake

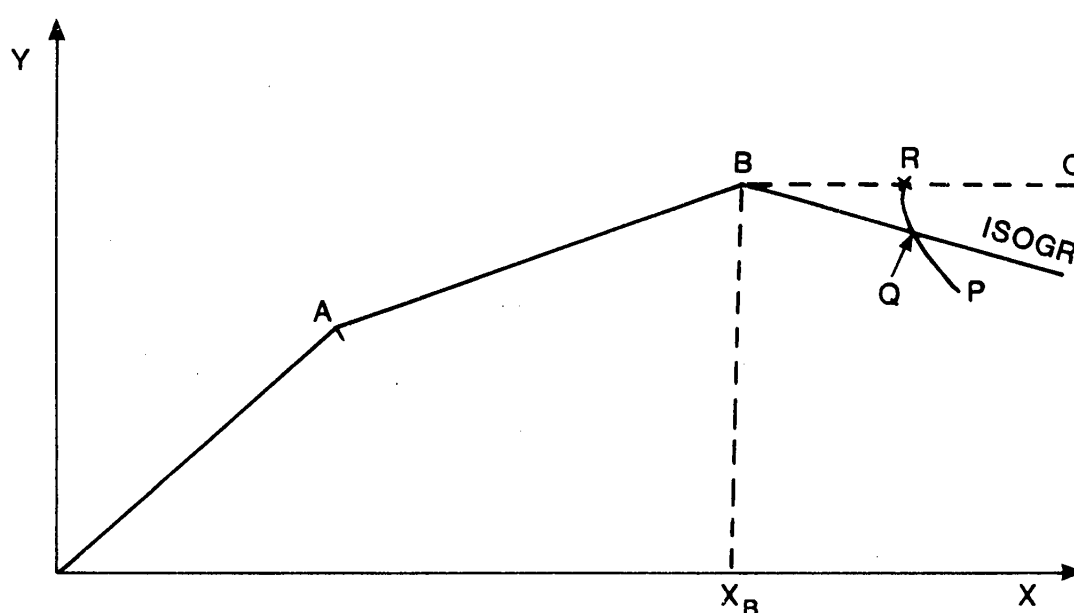
effektivitetsmålet, W_g , er basert på en sammenligning av observert (x,y) med Weff GR. Generelt er sammenhengen mellom disse to mengdene:

$$\text{Weff GR} \subseteq \text{Iso GR}$$

Dette impliserer

$$W_g(x,y) \leq F_g(x,y)$$

Disse to målene kan være like. Siden dette er et interessant tilfelle, skal jeg vise tilstrekkelig og nødvendig betingelse for likhet. Først en enkel figur:



Figur 5: Strong og weak disposability ved GR.

Utgangspunktet er observasjonen (x,y) avmerket som $P \in \text{GR}$. Dersom forutsetningen om "strong disposability" av input ikke holder, vil produksjonen i et område av mulighetsområdet kunne avta når input øker. I figur 5 er dette tilfelle med input større enn x_B . Iso GR er kurven fra 0 til B og videre gjennom Q. Q er punktet som brukes for å måle Farrell effektivitet til F_g . Det svake effektivitetsmålet finnes ved å sammenligne P med punktet R, dvs (x,y) endres til $(\gamma x, \gamma^{-1} y)$, som er punktet R. Kall den γ som definerer F_g i Q for γ^0 og den γ som definerer W_g i R for $\bar{\gamma}$. Da er $\gamma^0 > \bar{\gamma}$. Det betyr at $F_g(x,y)$ er mer effektiv enn $W_g(x,y)$. Følgende teorem kan da formuleres:

Teorem: $F_g(x,y) = W_g(x,y)$ for alle $(x,y) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^s$ hvis og bare hvis input og output er "strongly disposable" (For bevis, se FGL, s 118).

Figur 5 viser at input ikke er "strongly disposable" og derfor er $F_g(x,y) > W_g(x,y)$ i vårt eksempel. Dersom man derimot hadde forutsatt at teknologien var "strongly disposable", ville GR ha blitt avgrenset av 0ABC, og da ville $F_g = W_g$.

3.4 Øvrige graf-effektivitetsmål.

Graf-effektivitetsmålene F_g og W_g er begge uavhengige av priser. På samme måte som for input og outputeffektivitetsmål, kan man for graf-effektivitet definere en effektivitet som er prisavhengig. Denne avhengigheten vil være til både inputprisvektoren $p \in \mathbb{R}_{++}^m$ og outputprisvektoren $r \in \mathbb{R}_{++}^s$. Siden jeg ikke vil gjøre bruk av det totale graf-effektivitetsmålet i den seinere analysen, viser jeg til appendiks 1 for en drøfting av dette målet.

Input-output tap på grunn av mangel på full "disposability" i input og output.

Slike tap lar seg lett beregne som forholdstallet mellom Farrells graf-effektivitet og "weak" graf-effektivitet. Siden man med graf-effektivitetsmålet samtidig ser på effektiviteten til input og output, får man bare ett slikt effektivitetsmål.

Definisjon: For $(x,y) \in GR$, $y \geq 0$, er målet for eventuelt input/outputtap pga mangelen på fri "disposability":

$$C_g(x,y) := W_g(x,y)/F_g(x,y).$$

Dette målet er uavhengig av prisene på input og output.

Mål for grafallokeringseffektivitet.

Jeg har tidligere vist allokerings effektivitetsmål for h.h.v. input og output, og definert disse som:

$$A_i(y, x, p) = O_i(x, y, p) / W_i(x, y), \text{ og}$$

$$A_o(y, x, r) = O_o(x, y, r) / W_o(x, y) .$$

Dette er mål for allokeringsseffektivitet for input og output sett hver for seg. Dersom $A_i(y, x, p) = 1$ og $A_o(y, x, r) = 1$, vil målene for allokeringsseffektiviteten for input og output vise at det ikke er noen slik allokeringsineffektivitet for input eller output separat.

Imidlertid er det mulig at det blir brukt for mye eller for lite input og output i forhold til det optimale, når en tar hensyn til prisene for input og output, selv om h.h.v. input og output blir produsert hver for seg i riktig forhold. Man definerer allokeringsseffektivitet for Graf som et avledet mål:

Definisjon: For $(x, y) \in GR$, $y \geq 0$, så er graf allokerings effektivitet definert som:

$$A_g(x, y, p, r) = O_g(x, y, p, r) / W_g(x, y).$$

På denne måten er allokeringsseffektivitetsmålet basert på to definisjoner av graf effektivitet. Det svake effektivitetsmålet er vist i teksten, og $O_g(x, y, p, r)$ er vist i appendiks 1.

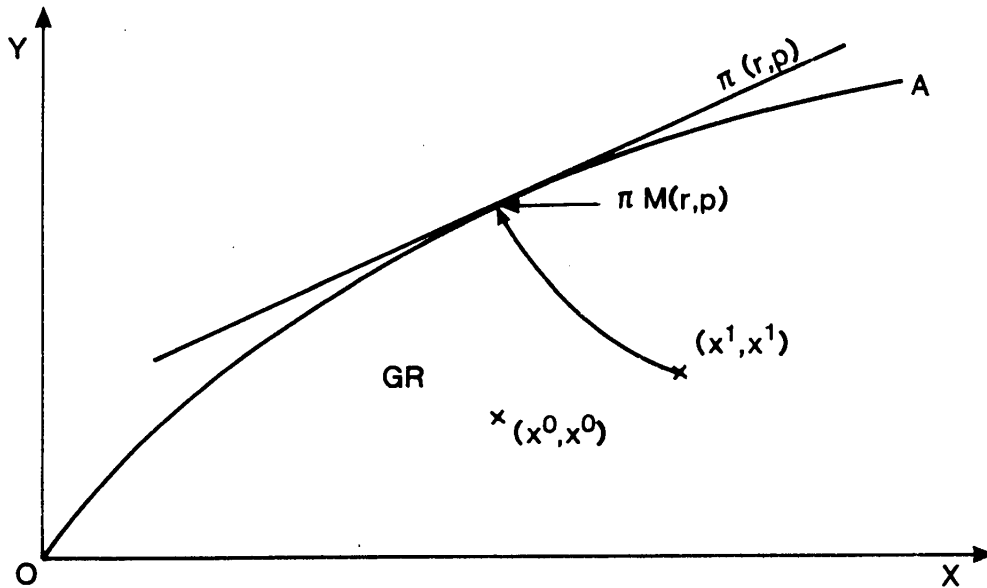
Vi definerer en profittfunksjon som :

$$\Pi(r, p) = \max \{ r \cdot y - p \cdot x : (x, y) \in GR \}.$$

Mengden av profittmaksimerende input og outputvektorer er tidligere definert som:

$$\Pi M(r, p) = \left\{ (x, y) \in GR : ry - px = \Pi(r, p) \right\}.$$

Sammenhengen mellom $\Pi M(r, p)$ og $\Pi(r, p)$ kan vises i følgende figur i x - y planet.



Figur 6: Sammenheng mellom $\Pi M(r, p)$ og $\Pi(r, p)$.

Den grafdefinerte teknologi er begrenset av OA kurven og x -aksen. Profittfunksjonen $\Pi(r, p)$ er et støttende hyperplan til GR , og mengden av profittmaksimerende vektorer $\Pi M(p, r)$ er skjæringspunktet med GR .

Med denne definisjonen av profittmaksimerende produksjon kan det nå gis en annen alternativ definisjon av allokerings grafeffektivitetsmål.

Definisjon: En input-outputvektor $(x, y) \in GR$, $y \geq 0$, er allokeringseffektiv for $(p, r) \in \mathbb{R}_{++}^m \times \mathbb{R}_{++}^s$ hvis det eksisterer en $\gamma \in (0, 1]$ slik at $(\gamma x, \gamma^{-1} y) \in \Pi M(r, p)$.

Dette betyr at dersom $\theta_g(x, y, p, r) \neq F_g(x, y)$, så er ikke (x, y) allokeringseffektiv. I figur 6 framkommer dette slik at man kan tenke seg en output-inputkombinasjon $(x^1, y^1) \neq (x^0, y^0)$ som er slik at $(\gamma x^1, \gamma^{-1} y^1) \in \Pi M(p, r)$, dvs (x^1, y^1) er allokeringseffektivt. Punktet

(x', y') er selvsagt hverken svakt graf effektivt, Farrell graf effektivt eller totaleffektivt. men siden $F_g(x, y) = O_g(x, y, p, r)$, så vil all ineffektivitet for (x', y') kunne forklares som teknisk ineffektivitet.

Dekomponering av effektivitetsmålene.

Det totale grafektivitetsmålet kan dekomponeres som følger:

$$O_g(x, y, p, r) = F_g(x, y) \cdot C_g(x, y) \cdot A_g(x, y, p, r) .$$

Siden $C_g(x, y) = W_g(x, y) / F_g(x, y)$, kan vi alternativt skrive:

$$O_g(x, y, r, p) = W_g(x, y) \cdot A_g(x, y, p, r) .$$

4. IKKE-RADIALE EFFEKTIVITETSMÅL.

4.1 Innledning.

De effektivitetsmålene jeg har behandlet til nå, har kunnet blitt dekomponert i multiplikative ledd. De kan også gis inntekts- eller kostnadstolkninger. Grunnen til dette er at alle disse målene har det til felles at de er basert på enten en proporsjonal endring i input, en proporsjonal endring i output eller begge deler.

Dette er en restriksjon som gjør det lett å tolke effektivitetsmålene, men det er også en metode som har visse ulemper. Muligheten er derfor at de radiale effektivitetsmålene kan framstille en produksjonsprosess som effektiv, mens dette ikke er tilfelle hvis man tillater

ulik (dvs ikke-proporsjonal) endring i input eller output for å nå en definert effektiv referansefront. Denne muligheten skal jeg ta opp i dette avsnittet.

Det effektivitetsmålet som jeg skal presentere her, kalles "Russell" mål for h.h.v. input, output og grafektivitet etter Färe og Lovell (1978), Färe, Lovell og Zieschang (1983) og Färe, Grosskopf og Lovell (1985). Russell effektivitetsmål har en viss teoretisk interesse, siden det på en måte danner yttergrensen for den variasjonen i effektivitetsmål som er vist i dette kapitlet. De radiale effektivitetsmålene er basert på en proporsjonal endring i input eller i output. Grafektivitetsmålene forutsetter en simultan endring i input og output, og i sin frie form trenger denne endringen ikke være like stor for inputvektoren som for outputvektoren. Input og output, hver for seg, forutsettes likevel å endres proporsjonalt. Ved Russell effektivitetsmål kan hver enkel positiv input eller positiv output endres i forhold ulikt de andre input eller output. Den mest effektive bedriften er da den som kan transformeres til det effektive referansesettet ved det laveste veide gjennomsnitt (eller sum) av alle enkeltstående endringer i input eller output. I min framstilling forutsettes alltid like vektorer for alle input og output. Dette er ikke en nødvendig restriksjon.

Russells effektivitetsmål blir av Färe og Lovell (1978) påstått å ha en del heldige egenskaper. I avsnitt 6 i dette kapitlet vises at dette trolig er av liten praktisk nytte, siden Russell-målet har den store ulempen at det ikke kan gis en klar tolkning i form av kostnadsreduksjon eller inntektsøkning. For LP formuleringer av Russells effektivitetsmål, vises til appendiks 1.

4.2 Russell inputeffektivitetsmål

Ta utgangspunkt i en vanlig inputkorrespondanse, og definer $(x_1, \dots, x_k; \dots, x_m)$ som inputvektor $x \in \mathbb{R}_+^m$ med $x_i > 0, i=1, \dots, k, k \leq m$, og $x_i = 0$ for $i = k+1, \dots, m$. Det effektive området for Russell inputmål kan så defineres som:

$$D(R_i) := \left\{ (x, y) : \exists \gamma_i \in [0, 1], i=1, \dots, k, \text{ slik at} \right. \\ \left. (\gamma_1 x_1, \gamma_2 x_2, \dots, \gamma_k x_k; \dots) \in L(y) \right\}$$

Russell inputmål defineres nå som:

Definisjon: Funksjonen $R_i : \mathbb{R}_+^S \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ definert ved:

$$R_i(x, y) := \begin{cases} \min \left\{ \sum_{i=1}^k \gamma_i / k : (\gamma_1 x_1, \gamma_2 x_2, \dots, \gamma_k x_k; \dots) \in L(y), \right. \\ \left. \gamma_i \in [0, 1] \right\}, & (x, y) \in D(R_i) \\ +\infty, & (x, y) \in \text{komplementet til } D(R_i) \end{cases}$$

kalles Russell inputmål for teknisk effektivitet.

$R_i(y, x)$ finnes ved å sammenligne observasjonen med den effektive undermengde av $L(y)$ definert som $\text{Eff } L(y)$. Tidligere har jeg vist at $F_i(y, x)$ defineres av en sammenligning med $\text{Iso } L(y)$. Selv om $\text{Iso } L(y) = \text{Eff } L(y)$, så vil ikke nødvendigvis de to effektivitetsmålene bli tallmessig like. Det kan imidlertid vises at når $\text{Iso } L(y) = \text{Eff } L(y)$, da er alltid $F_i(y, x) \geq R_i(y, x)$.

Det kan også vises (se teorem side 147 i FGL) at for $x \in L(y)$, $y \geq 0$, så er $W_i(y, x) \geq R_i(x, y)$. Sammenhengen er da følgende:

$$F_i(y, x) \geq W_i(y, x) \geq R_i(y, x)$$

Siden $R_i(y, x)$ beregnes ved en sammenligning mot $\text{Eff } L(y)$, så betyr det ikke noe om det er sterk eller svak "disposability" av input i teknologien. Russell-målet blir det samme likevel.

Det kan ikke gis en kostnadstolkning av $R_i(y, x)$ på samme måte som for $F_i(y, x)$. Dette skyldes at $R_i(y, x)$ ikke er et radialt mål for effektivitet. Dette fører til visse problemer

hvis man skal dekomponere totaleffektiviteten for inputkorrespondansen, $O_i(y,x,p)$ i enkle multiplikative mål.

La x^R betegne den vektor $x \in \text{Eff } L(y)$ som er en løsning for Russell inputmål for teknisk effektivitet. Man kan da definere:

$$R_i^C(y,x,p) := p \cdot x^R / p \cdot x$$

som Russell input kostnads mål for teknisk effektivitet.

Et mål for (kostnads) allokeringseffektivitet kan defineres som:

$$A_i^C(y,x,p) := O_i(y,x,p) / R_i^C(y,x,p)$$

eller

$$O_i(y,x,p) = A_i^C(y,x,p) \cdot R_i^C(y,x,p).$$

$O_i(y,x,p)$ vil være den samme som for $F_i(\cdot)$ og $G_i(\cdot)$. Både allokeringsmålet og kostnadseffektivitetsmålet utledet som Russell mål, vil imidlertid kunne være ulike de målene som er utledet for inputkorrespondansen (se avsnitt 1.2) og grafkorrespondansen (se avsnitt 3.4).

Russell mål for teknisk output-effektivitet er meget likt det jeg har vist i detalj for teknisk inputeffektivitet. Jeg viser derfor til appendiks 1 for en framstilling av Russell outputmål. På samme måte er Russell grafmål for effektivitet en naturlig generalisering av de grafmålene som tidligere er vist. Det henvises derfor også til appendiks 1 for en detaljert utskrivning av dette målet.

5. SKALA EFFEKTIVITET.

5.1 Innledning og definisjoner.

De effektivitetsmålene jeg til nå har gjennomgått, har alle vært relatert til produksjonsteknologier homogene av grad en. Den restriktive homogenitetsforutsetningen skyldes de lineære referanseteknologiene vi har brukt, og er ikke en generell egenskap med input/outputkorrespondanser eller grafteknologier⁵. Den effektive referansefronten er derfor også homogen av grad en. En slik forutsetning om homogenitet lik en vil i mange situasjoner være uønsket sterk. Bl.a. vil en slik teknologi forutsette at det ikke skal være noen skalafordeler eller -ulemper. En konsekvens er også at alle effektive produsenter skal ha samme enhetskostnad uavhengig av størrelse. I stedet for å forutsette en bestemt homogenitet, kan det være ønskelig å teste om det er stordriftsfordeler eller smådriftsfordeler enten globalt eller lokalt i datamaterialet.

En metode for å undersøke skalaegenskaper, er å ta utgangspunkt i profittfunksjonen, $\Pi(r,p)$. I langtidslivevikt vil en produsent som er pristaker i faktormarkedene og i ferdigvaremarkedene, ha renprofitt lik null. Ved å sammenligne den faktiske profitten for en teknisk effektiv produsent med denne ideelle situasjonen, kan man få fram om skalaen er ineffektiv. Profitten til en teknisk effektiv bedrift som opererer i frikonkurransemarkeder, men som ikke er skalaoptimal, vil være negativ.

I stedet for å argumentere med utgangspunkt i profittfunksjonen, vil jeg vise analyser basert på den tekniske produksjonsstrukturen. For å kunne beregne om den bedriften som analyseres har en skalaelastisitet større enn, mindre enn eller lik en, må man ha en referanseteknologi å sammenligne med. Jeg skal derfor først definere en teknologi som har konstant skalautbytte over hele sitt forløp. Denne teknologien kan kalles kjegle teknologi

⁵For en generell overikt over bl.a. homogenitetsegenskaper og homotetisitetsegenskaper for input- og outputkorrespondanser, se Färe, Grosskopf og Lovell (1985: s 41–45).

(engelsk: "cone technology") eller "ray unboundedness" teknologi. Definisjonene av input og output korrespondansene inneholder ikke noe spesifisert homogenitetskrav. Korrespondansene kan være både homotetiske og homogene av en vilkårlig bestemt grad. Det er sammenheng mellom homogenitet til input og output korrespondansen. Følgende teorem er vist av FGL (1985, s 42):

$$L(\theta y) = \theta^\alpha \cdot L(y) \Leftrightarrow P(\gamma x) = \gamma^{1/\alpha} \cdot P(x), \alpha > 0.$$

Konsekvensen av teoremet er at hvis man kan definere en input korrespondanse, eller en output korrespondanse homogen av grad 1, så vil også grafteknologien være homogen av grad 1. Har man derimot ikke spesifisert noen bestemt homogenitetsgrad for inputkorrespondansen (og dermed heller ikke for den inverse outputkorrespondansen), så har man heller ikke spesifisert noen bestemt homogenitet for grafteknologien.

I dette avsnittet benyttes grafteknologi, tidligere definert som

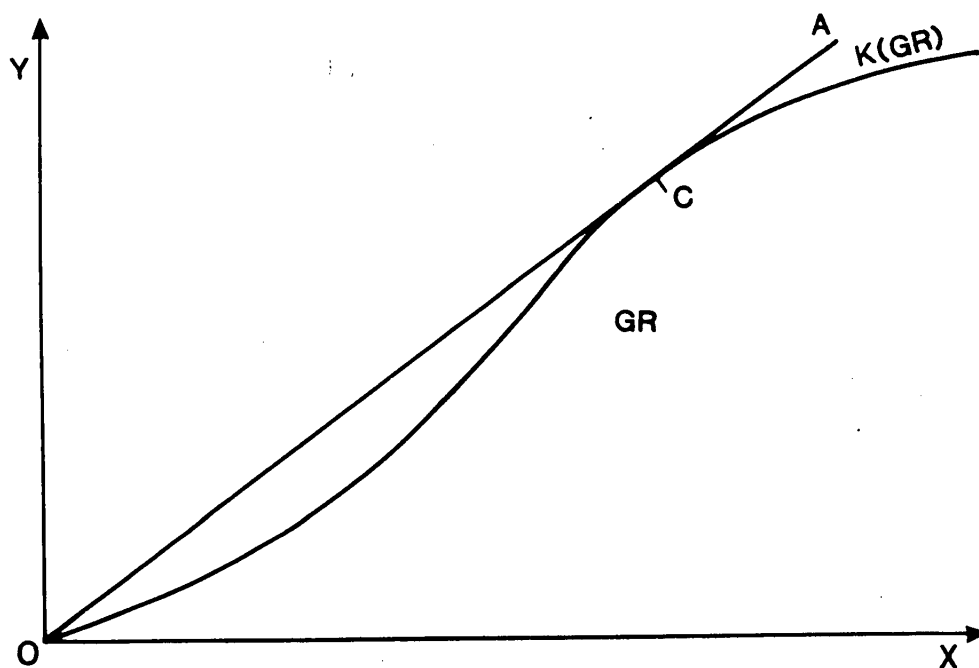
$$GR := \left\{ (x, y) : x \in L(y), y \in \mathbb{R}_+^S \right\} = \left\{ (x, y) : y \in P(x), x \in \mathbb{R}_+^M \right\}$$

for å illustrere analysen av skalaeffektivitet.

I utgangspunktet kjennes ikke homogenitetsgraden til denne grafteknologien. Det må derfor defineres en referanseteknologi som har konstant skalautbytte:

$$K(GR) := \left\{ (x, y) : (x, y) = (\gamma u, \gamma v), (u, v) \in GR, \gamma \geq 0 \right\}.$$

Sammenhengen mellom teknologiene GR og K(GR) kan vises i følgende figur.



Figur 7: Kjedge teknologi og vanlig GR teknologi.

$K(GR)$ er den kjedge-teknologien som er slik at den har minst ett kontaktpunkt med GR , dvs dersom vi har f.eks. $(u,v) \in K(GR)$, $(u,v) \notin GR$, så skal $(\gamma u, \gamma v) \in GR$, $\gamma \geq 0$. Det betyr at ved en proporsjonal transformasjon av (u,v) , skal den kunne transformeres til et punkt i GR . For alle punktene på den rette linje $0A$, vil man, ved å transformere med en egnet γ , kunne nå punktet C . Input- og outputkorrespondansene utledet av $K(GR)$ er homogene av grad n (for bevis: se FLG, 1985: 165–166).

I den videre framstillinga skal jeg vise en metode for å finne ut om skalaineffektivitet eksisterer eller ikke. Dersom slik skalaineffektivitet kan påvises for en bestemt DMU, så blir neste trinn å finne årsakene til slik ineffektivitet. Årsakene kan prinsipielt bare være en av to mulige. Enten kan en konkret DMU være skalaineffektiv fordi den er for liten i forhold til optimal skala. I figur 7 er et slikt område avmerket langs linjen OC . Eller så kan en konkret DMU være ineffektiv fordi den er for stor i forhold til optimal skala. I figur 7 er dette i området til høyre for C . I så fall har den plassert seg i en del av teknologien som er karakterisert av avtakende utbytte m.h.p. skalaen.

5.2 Graf målet for skalaeffektivitet

Måling av skalaeffektivitet for grafteknologi gjøres i to trinn. Først måles effektiviteten til en observert vektor i input/output rommet (x^0, y^0) relatert til en grafteknologi som er definert homogen av grad en, dvs relatert til $K(\text{GR})$. Vi får da et grafteknologismål for (x^0, y^0) relatert til et effektivt punkt for en referanseteknologi homogen av grad en. Dette effektivitetsmålet vil kunne kalles $K_g(x, y)$ og ville kunne defineres som det svake grafteknologismålet i avsnitt 3.3, bortsett fra at GR blir erstattet med $K(\text{GR})$. I avsnitt 3.2 og 3.3 har jeg vist hvordan grafteknologismål relatert til en "strongly disposable" eller "weakly disposable" grafteknologi med uspesifisert homogenitet beregnes. Disse effektivitetsmålene ble kalt h.h.v. $F_g(x, y)$ og $W_g(x, y)$.

Graf skala effektivitetsmålet kan nå defineres.

Definisjon: For $(x^0, y^0) \in \text{GR}$, $y \geq 0$, så er graf skala effektivitetsmålet

$$S_g(x, y) := K_g(x, y) / W_g(x, y),$$

og (x^0, y^0) er graf skalaeffektiv hvis og bare hvis $S_g(x, y) = 1$.

Følgende sammenheng vil alltid være oppfylt: $0 < S_g(x, y) \leq 1$.

$K_g(x, y)$ kan dekomponeres som

$$K_g(x, y) = S_g(x, y) \cdot W_g(x, y)$$

når en har fri disposabilitet av input og output.

5.3 LP formuleringer for å måle skala-effektivitet.

Jeg skal nå vise graffektivitet for $K_g(x,y)$, som er effektivitetsmålet relatert til en teknologi homogen av grad en, og $W_g(x,y)$, som er det svake graffektivitetsmålet relatert til en teknologi hvor vi ikke har spesifisert noe homogenitetskrav.

Man definerer en inputkorrespondanse hvor det forutsettes fri "disposability" av input og output, og viktigst – ingen begrensning på skalaen:

$$L^S(y) := \left\{ x : \lambda \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda \cdot M \geq y, \lambda \cdot N \leq x \right\}.$$

λ , N og M er definert tidligere. Det nye er restriksjonen $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. En teknologi definert på denne måten tilfredsstillter P1 – P5 (eventuelt L1 – L5), og den er konveks. Den er imidlertid ikke begrenset til å være konstant m.h.p. skalaen.

Jeg vil her vise LP-modellene for å beregne graf skala effektivitetsmålet relatert til en "strongly disposable" grafteknologi. Skalaeffektivitetsmålet relatert til "weakly disposable" teknologi, dvs basert på Farrells effektivitetsmål, vises i appendiks 1. Der vises også skala input effektivitetsmål og skala output effektivitetsmål.

LP formuleringen som beregner $W_g(x,y)$, gitt en teknologien spesifisert med muligheter for sløsing i input og output, samt krav om at mulighetsområdet skal være en konveks kombinasjon av observert input og output, vil bli når fri disposabilitet forutsettes:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \gamma \\ \text{Når} & \lambda \cdot M \geq y^0 / \gamma \\ & \lambda \cdot N \leq \gamma \cdot x^0 \\ & \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^n \end{array}$$

Denne formuleringen kan omformes (når $\gamma' = \gamma^2$, $\lambda' = \lambda \cdot \gamma$, og restriksjonen $\sum_{i=1}^n \lambda'_i = 1$)

til:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \gamma' \\ \text{Når} \quad & \lambda' \cdot M \geq y^0 \\ & \lambda' \cdot N \leq \gamma' \cdot x^0 \\ & \sum_{i=1}^n \lambda'_i = \gamma (=1) \\ & \lambda' \in \mathbb{R}_+^n. \end{aligned}$$

Restriksjonen $\sum_{i=1}^n \lambda'_i = \gamma$ blir $\sum_{i=1}^n \lambda'_i = 1$ i praksis, se FGL(1985,s. 180). LP formuleringen til $K_g(x,y)$, som er basert på en kjele graf-teknologi, har en skalalastisitet lik 1. Dette er den referanseteknologien som trenges når man skal sammenligne effektivitet under ukjent skalaelastisitet med skalaelastisitet lik 1.

$K_g(x,y) = \gamma$ beregnes av følgende LP formulering:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \gamma \\ \text{Når:} \quad & \lambda \cdot M \geq y^0 / \gamma \\ & \lambda \cdot N \leq \gamma \cdot x^0 \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^n. \end{aligned}$$

Denne formuleringen kan omskrives til lineær form , når $\gamma' = \gamma^2$, $\lambda' = \lambda \cdot \gamma$:

$$\begin{aligned} \text{Min:} \quad & \gamma' \\ \text{Når:} \quad & \lambda' \cdot M \geq y^0 \\ & \lambda' \cdot N \leq \gamma' \cdot x^0 \\ & \lambda' \in \mathbb{R}_+^n. \end{aligned}$$

Skala graf effektivitetsmål beregnes til slutt som

$$S_g(x,y) = K_g(x,y)/W_g(x,y) .$$

De to siste LP-formuleringene for å beregne $W_g(x,y)$ gjenkjennes som identiske med formuleringene (A31) og (A31)' fra gjennomgangen av grafeffektivitetsmålet i appendiks 1. Den lineære teknologien som er brukt for å illustrere beregningen av de ulike effektivitetsmålene tidligere, er derfor også homogen av grad en.

5.4 Identifisering av årsakene til skalaineffektivitet.

Jeg har nettopp vist at ved å tolke verdien på $S_g(x,y)$ har vi funnet en metode for å finne ut om en DMU er skalaeffektiv eller ikke. Eksemplifisert med LP formuleringer er vist hvordan man kan beregne om slik ineffektivitet eksisterer.

I noen tilfeller er den studerte DMU skalaeffektiv. Med det benyttede begrepsapparat betyr det at $S_g(x,y) = 1$, som bare kan være tilfelle når $K_g(x,y) = W_g(x,y) \leq 1$. Under slike forhold kan man da avslutte undersøkelsene om skalaeffektivitet ved å rapportere at den studerte prosessen er skalaeffektiv, men ikke nødvendigvis teknisk effektiv. I andre tilfeller finnes at den DMU som studeres er skalaineffektiv. I slike tilfeller vil det være interessant å påvise om årsakene til den viste skalaineffektiviteten skyldes at den konkrete DMU er av for liten skala, eller alternativt av for stor skala. Begge deler er uoptimalt. Den viste metoden for å identifisere skalaineffektivitet, kan også brukes til å skille mellom disse to tilfellene.

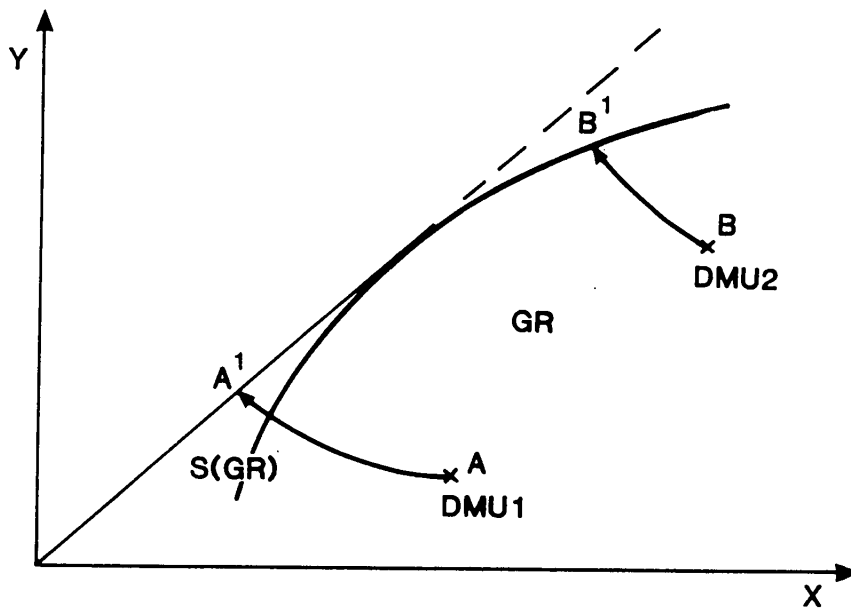
En kan skille mellom disse to ulike kildene til skala ineffektivitet ved å definere en teknologi som utelukker økende skalautbytte, men som tillater avtakende. En slik definering av grafteknologien er vist nedenfor som $S(GR)$:

$$S(GR) := \left\{ (x,y) : (x,y) = (\gamma u, \gamma v), (u,v) \in GR, \gamma \in [0,1] \right\} .$$

Definisjonen av $S(\text{GR})$ skiller seg fra definisjonen av $K(\text{GR})$ i definisjonsområdet for γ , som i $K(\text{GR})$ er definert som $\gamma \geq 0$, mens i definisjonen for $S(\text{GR})$ er $\gamma \in [0,1]$. $K(\text{GR})$ skalerer ethvert punkt i GR opp eller ned langs en rett linje gjennom origo. $S(\text{GR})$ skalerer bare vektorer i GR langs en linje fra vektoren (observasjonen) til origo, m.a.o. $S(\text{GR})$ innbefatter GR og alle lineære kontraksjoner av punkter i GR.

Poenget med $S(\text{GR})$ er å få en teknologi som ekskluderer muligheten for økende utbytte m.h.p. skalaen, men som samtidig gir mulighet for konstant og avtakende utbytte mhp skalaen. Jeg undersøker om en konkret DMU, som i utgangspunktet hadde $S_g(x,y) \neq 1$ beregnet av $S_g(x,y) = K_g(x,y)/W_g(x,y)$, fremdeles vil være effektiv når man beregner svakt effektivitetsmål relatert til $S(\text{GR})$.

Dette målet vises grafisk. To alternative DMU-er er avmerket i figur 8.



Figur 8: Identifisering av skalaeffektivitet til to ulike DMU-er

Den hyperbolske linje AA' viser transformasjonen (x,y) til $(\gamma x, \gamma^{-1}y) \in S(\text{GR})$, og denne γ er $W_g^*(x,y)$ for DMU1. Tilsvarende viser den hyperbolske linjen BB' transformasjonen av (x,y) til $(\gamma x, \gamma^{-1}y) \in S(\text{GR})$, og denne γ er $W_g^*(x,y)$ for DMU2.

For DMU1 vil $W_g^*(x,y) < W_g(x,y)$, men for DMU2 vil $W_g^*(x,y) = W_g(x,y)$. For begge er

$W_g(x,y) \neq K_g(x,y)$, som impliserer skalaineffektivitet.

Med denne illustrasjonen kan klarlegges om skalaineffektivitet skyldes stordriftsfordeler ("increasing returns to scale") eller smådriftsfordeler ("decreasing returns to scale").

Dersom $S_g(x,y) \neq 1$, dvs. grafen er skalaineffektiv ved vektoren (x,y) , da er årsaken til ineffektiviteten økende utbytte m.h.p. skalaen (= stordriftsfordeler) hvis og bare hvis $W_g^*(x,y) < W_g(x,y)$ og avtakende utbytte mhp skalaen hvis og bare hvis $W_g^*(x,y) = W_g(x,y)$.

DMU2 er skalaineffektiv pga avtakende utbytte h.h.p. skalaen (siden $W_g^*(x,y) = W_g(x,y)$), mens DMU1 er skalaineffektiv pga økende utbytte m.h.p. (siden $W_g^*(x,y) < W_g(x,y)$).

Tolkingen av $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ er sentral i forståelsen av skalaelastisitet. Dersom vi ved en LP-modell beregner input, output eller grafektivitet og får som optimalverdier av intensitetsvektoren at $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ blir en, da er den observasjonen vi studerer skalaoptimal. Er derimot $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 1$, har vi vist at den effektive referansemengde til en observasjon (x^0, y^0) ligger i $S(\text{GR})$. Av det kan en slutte at denne produksjonsenheten er plassert i en del av produksjonsmulighetsområdet som er karakterisert av lokalt økende utbytte m.h.p. skalaen. Omvendt kan vi slutte at dersom vi får som optimumsverdi at $\sum_{i=1}^n \lambda_i > 1$ når vi beregner effektivitet relativt til $K(\text{GR})$, så er det effektive referansesettet utenfor $S(\text{GR})$ og vi står overfor en observasjon som er i et område karakterisert av lokalt avtakende utbytte m.h.p. skalaen. Den enkleste måten å identifisere ulike typer av skalaøkonomi er derfor å estimere et effektivitetsmål med relasjon til en teknologi som er homogen av grad en, dvs uten restriksjoner på intensitetsvektoren λ . Deretter kan man observere optimal verdi på $\sum_{i=1}^n \lambda_i$, og trekke slutninger etter hvorvidt denne verdi er mindre enn, lik eller større enn en.

Man kan også identifisere de to ulike typene av skalaineffektivitet ved bruk av

støttehyperplan på produksjonsmulighetsområdet, se Banker (1980). Det er også påvist av Banker (1984) at man kan beregne mest optimal skala størrelse (MPSS) for ikke-optimale produksjonsprosesser, gitt en lineær flerinnsats – flerprodukters produksjonsstruktur. Dette skal jeg komme tilbake til i kapittel 4.

6. EN SAMMENLIGNING AV EFFEKTIVITETSMÅLENE.

6.1 Krav til effektivitetsmål.

Så langt er presentert flere ulike effektivitetsmål. Det kan være nærliggende å stille spørsmålet om noen av disse effektivitetsmålene er bedre enn andre. For å kunne si noe konkret om det, må man stille opp noen rimelige krav til et "godt" effektivitetsmål og se om de oppstilte effektivitetsmålene tilfredsstillers disse kravene. Färe og Lovell (1978) stiller opp fire krav til et effektivitetsmål. Effektivitetsmålet, som generelt kan kalles E , defineres for positiv produksjon i inputkorrespondansen som $E(y,x) \in L(y)$, $y > 0$. De fire kravene Färe og Lovell stiller opp for E , er:

- E1: Dersom $x \in L(y)$, $y > 0$, da er $E(x,y) = 1 \Leftrightarrow x \in \text{Eff } L(y)$.
- E2: Dersom $x \in L(y)$, $y > 0$, og $x \notin \text{Eff } L(y)$, da skal $E(x,y)$ sammenligne x med $x^* \in \text{Eff } L(y)$.
- E3: Dersom $x \in L(y)$, og $\gamma \cdot x \in L(y)$, $y > 0$, da er $E(\gamma \cdot x, y) = \gamma^{-1} E(x, y)$ for alle $\gamma \in [\gamma^0, +\infty]$, hvor $\gamma^0 \cdot x$ tilfredsstillers $\gamma^0 \cdot x \in \text{Iso } L(y)$.
- E4: Dersom $x \in L(y)$, $y > 0$, og hvis $x' \geq x$, da er $E(x, y) > E(x', y)$.

Egenskapen E1 krever at et effektivitetsmål skal kalle (x,y) for teknisk effektiv produksjon hvis og bare hvis x tilhører den strengt effektive undermengde av $L(y)$. Som tidligere er vist, vil dette kravet ekskludere alle effektivitetsmål av Farrells type. Egenskap

E2 betyr at det må finnes en inputvektor x^* som den observerte vektor x kan sammenlignes med når en skal beregne effektiviteten til (x,y) . Denne inputvektoren må være $x^* \in \text{Eff } L(y)$. E2 er, som påpekt av Russell (1985), noe uklart, siden "sammenlignes med" (eng: "compares to") ikke er noe matematisk begrep. Den tredje egenskapen, E3, er en homogenitetssegenskap, som sier at en tillatelig (engelsk: feasible) skalering av inputvektoren skal føre til en invers skalering av effektiviteten til denne inputvektoren, dvs effektivitetsmålet skal være homogent av grad minus en. Homogenitetskravet formuleres annerledes av Färe, Lovell og Zieschang (1983), som definerer $E3'$: Dersom $x \in L(y)$ og $\gamma \geq 1$, da er $E(\gamma \cdot x, y) \leq \gamma^{-1} E(x, y)$. $E3'$ kalles "sub-homogenitet av grad minus en" (se Russell, 1985, s 110), og er et betydelig svakere krav enn E3. Homogenitetskravet $E3'$ kan da tolkes som at en tillatelig skalering av inputvektoren fører til en mindre enn eller lik invers skalering av effektivitetsmålet. Egenskap E4 er en monotonitetssegenskap som krever at effektivitetsmålet skal variere inverst med inputforbruket, dvs at dersom man øker forbruket av en innsatsfaktor, så skal det nye effektivitetsmålet bli mindre.

Farrell effektivitetsmål for inputeffektivitet (og tilsvarende for outputeffektivitet) tilfredsstiller ikke egenskapene E1, E2 og E4. For E1 vet vi at Farrell effektivitetsmål indikerer effektivitet når en inputvektor $x \in \text{Iso } L(y)$, og siden $\text{Iso } L(y) \supseteq \text{Eff } L(y)$, tilfredsstilles ikke E1. På samme måte vil en ikke-effektiv $x \in L(y)$ bli sammenlignet med $x^* \in \text{Weff } L(y)$ eller $x^* \in \text{Iso } L(y)$, og E2 er derfor heller ikke oppfylt. At E4 ikke er oppfylt for Farrells effektivitetsmål, kan man lett forvise seg om ved å ta utgangspunkt i en Leontief produktfunksjon og så øke mengden av den ene innsatsfaktoren. Det fremgår klart av den tidligere framstillingen at i dette tilfellet vil effektivitetsmålet ikke endres. Farrells effektivitetsmål tilfredsstiller imidlertid E3.

Russell mål for inputeffektivitet tilfredsstiller kravene E1, E2 og E4, vist av Färe og Lovell (1978), men ikke E3⁶. Russells mål for inputeffektivitet anbefales av Färe og Lovell, siden det i en lineær teknologi forholdsvis enkelt lar seg beregne av en LP formulering.

⁶Färe og Lovell (1978) mente feilaktig at Russells effektivitetsmål også tilfredsstilte E3. Dette er feil, som påvist av FLZ (1983). Det rette er at Russells mål tilfredsstiller $E3'$.

Imidlertid kan også Farrells mål for inputeffektivitet tilfredsstillende de fire kravene, dersom vi setter strengere krav til produktfunksjonen. Hvis produktfunksjonen tilfredsstiller "strong free disposability" av input, dvs $\text{Eff } L(y) = \text{Iso } L(y)$, da vil også Farrells inputmål tilfredsstillende E1–E4. Det påpekes av Kopp (1981) at forutsetningen om "strong free disposability" ikke er en urimelig forutsetning, og er vanligvis implisitt i økonometriske studier av neo-klassiske produktfunksjoner. Hvis i tillegg produktfunksjonen er homogen av grad en, da vil også Farrell inputeffektivitet og Farrell outputeffektivitet bli identiske.

Det effektivitetsmålet som Färe og Lovell (1978) og seinere Färe, Lovell og Grosskopf (1985) kaller Russells effektivitetsmål, men som Russell selv konsekvent kaller "the Färe–Lovell measure", tilfredsstiller heller ikke kravet om streng monotonisitet, dvs E4, se Russell (1985). Derimot tilfredsstiller Russells effektivitetsmål en svakere monotonisitetsbetingelse

$$E(y, x) \geq E(y, x^*) \text{ når } x^* \geq x, x \in L(y), x^* \in L(y), y > 0.$$

Dessuten viser Russell (1985) at E2 er et dårlig definert kriterium, siden "sammenlignes med" ikke er et matematisk begrep. Omformet til veldefinerte matematiske termer, vises også at E2 er implisert av de øvrige tre betingelsene, E1, E3' og E4.

Det finnes ikke noe mål for teknisk effektivitet som tilfredsstiller E1–E4, hvor man kan se bort fra E2, som er overflødig. Det er da ifølge Bol (1986) to utveier; man kan droppe ytterligere en av betingelsene E1, E3 eller E4. Eller man kan for et gitt effektivitetsmål tilpasse betingelsene, som f.eks. vist av Russell, slik at svakere krav oppfylles.

6.2 En praktisk angrepsvinkel

Av de effektivitetsmålene som er tatt opp til drøfting i dette kapitlet, vil det såkalte Russell effektivitetsmål være nærmest til å oppfylle de forholdsvis rimelige kravene E1–E4. Det lett forståelige og intuitive Farrells effektivitetsmål oppfyller generelt få av betingelsene. Til praktiske analyser finnes det likevel gode argumenter for å bruke Farrells effektivitetsmål eller tilsvarende radiale effektivitetsmål. Disse argumentene er basert på økonomisk tolkning av effektivitetsmålene. Jeg vil i mine empiriske analyser benytte meg av beregninger av effektivitetsmål som er nære varianter av Farrells inputeffektivitetsmål. Nedenfor skal argumentene til fordel for Farrells effektivitetsmål oppsummeres.

Måling av teknisk effektivitet har sin naturlige tolkning i kostnadseffektivitet, slik at en bedrift som kan forbedre sin tekniske effektivitet med x % også bør kunne forbedre sitt økonomiske resultat med (omlag) det samme prosenttall. Farrells inputeffektivitetsmål kan, som vi har vist tidligere, gis en direkte økonomisk tolkning, siden en proporsjonal endring i input kan overføres til en tilsvarende prosentvis endring i kostnader. Det samme forholdet er tilfelle for Farrells outputeffektivitetsmål, men da som inntektsøkning.

Minimumskostnadsfunksjonen er pr definisjon:

$$C(y, p) = \min \{p \cdot x : x \in L(y)\} .$$

Denne kan sammenlignes med faktiske kostnader, som kan benevnes $x^0 \cdot p$. Reduksjonen i faktiske kostnader med en proporsjonal reduksjon i input fra observert input til fronten med Farrells inputeffektivitet, blir

$$p \cdot x^0 \cdot F_i(x, y) .$$

Som kjent er det ikke gitt at en slik reduksjon fører fram til minimumskostnadspunktet, både fordi man ikke har tatt hensyn til relative prisforhold, og fordi Farrells inputmål kan sammenligne en observasjon med et punkt på den ikke-økonomiske del av isokvanten, såfremt vi ikke forutsetter fri disposabilitet av input. I den videre framstillingen i dette

avsnittet skal derfor forutsettes fri disposabilitet.

Følgende sammenheng mellom minimumskostnader og "nye" kostnader vil gjelde når en transformerer til effektivitetsfronten med radial reduksjon av input:

$$C(y, p) \leq p \cdot x^0 \cdot F_i(x, y)$$

eller

$$\frac{C(y, p)}{p \cdot x^0} \leq F_i(x, y) .$$

Dette viser at Farrells mål for teknisk effektivitet er en øvre grense for den økonomiske effektivitet. Farrells effektivitetsmål kan derfor brukes som en øvre grense for den økonomiske effektivitet beregnet med markedspriser. Den virkelige økonomiske effektivitetsforbedring kan ikke være mindre enn den tekniske effektivitetsforbedringen.

Noen tilsvarende kostnads-/inntektstolkning kan man ikke gjøre for Russells effektivitetsmål. Det sakner derfor den egenskap som radiale tekniske effektivitetsmål har, at man kan bruke dem til anslag for den økonomiske effektivitet, som i siste omgang er det sentrale. Dette tyder på at kriteriene E1–E4 for effektivitetsmål ikke i tilstrekkelig grad tar hensyn til økonomiske tolkninger av effektivitetsmålene. Sett fra en økonomisk synsvinkel bør et teknisk effektivitetsmål ha som egenskap at det er et dualt (kvantumbasert) mål til økonomisk effektivitetsmål (som er basert på priser). Farrells tekniske inputeffektivitetsmål er et slikt dualt mål. Dessuten har det den fordel framfor Russells mål for effektivitet at det er en øvre grense for den faktiske økonomiske effektivitet.

KAPITTEL 3: PARAMETRISKE FRONTFUNKSJONER.

1. INNLEDNING

I dette kapitlet skal jeg ta opp effektivitetsmålinger relatert til parametriske frontfunksjoner. Som frontfunksjoner kan benyttes produktfunksjoner, kostnadsfunksjoner og profittfunksjoner. Jeg vil i det empiriske arbeidet bruke produktfunksjoner som frontfunksjoner, hovedsaklig på grunn av begrensning med datagrunnlaget jeg bruker i de empiriske analysene. Dualiteten mellom produktfunksjoner og kostnadsfunksjoner¹ er utnyttet i frontfunksjonsanalyser. Jeg skal poengtere forutsetninger for at en slik dualitet er gyldig, og drøfte noen sentrale studier som benytter dualitetssegenskapene.

Det er flere grunner til å frontestimere produktfunksjoner. For det første er slike produktfunksjoner, og tilsvarende kostnadsfunksjoner, i overensstemmelse med de økonomiske mikroforutsetningene for bedriftens tilpasning. Gjennomsnittsestimerte produkt- og kostnadsfunksjoner er ikke det. Den andre, og i denne framstillingen viktigste grunnen, er at en slik frontfunksjon er naturlig å bruke som det effektive referansesettet for produksjonsmulighetsområdet. Siden påvisning av et effektivt referansesett er nødvendig for effektivitetsmålinger, kan en riktig beregnet produktfunksjon være et utgangspunkt for effektivitetsmålinger. Tidligere, i kapittel 2, har jeg vist at forutsetningene som ligger til grunn for ulike definisjoner av de effektive referansesettene, er kritiske for effektivitetsmål. I dette kapitlet skal jeg ta opp forutsetningene som ligger bak plasseringen av det effektive referansesettet, når dette blir estimert som en parametrisk produktfunksjon.

Siden parametriske frontfunksjoner kan estimeres ved bruk av statistiske metoder, kan man, gitt visse forutsetninger, også estimere stokastiske frontfunksjoner. Jeg skal drøfte om det er en nyttig mulighet, eller eventuelt om det finnes enkle metoder for å oppnå noe av det samme.

¹En grunnleggende framstilling av dualitetssammenhengen mellom produktfunksjoner og kostnadsfunksjoner finnes i Ronald W. Shephard (1953 og 1970). Dette temaet er også godt dekket i noen nyere lærebøker i mikroteori, f.eks. Hal R. Varian (1984).

Mange estimerte produktfunksjoner blir beregnet med metoder som vil gi gjennomsnittsestimerte funksjoner. Det blir stundom argumentert at dersom siktemålet med estimeringen ikke er å studere effektivitet, men f.eks. bare formen på produktfunksjonen for å beregne faktorelastisitet, skalaelastisitet eller substitusjonselastisitet, så kan gjennomsnitts produktfunksjoner brukes. Jeg har testet dette på homotetiske produktfunksjoner. Mitt resultat er at en gjennomsnittsestimert produktfunksjon også i funksjonsform vil avvike fra en frontestimert. Jeg reiser derfor tvil om man i det hele bør dra noen konklusjoner fra tolkningen av parametrene til gjennomsnittsestimerte produktfunksjoner.

Standardmodellen for statistisk estimering av en produktfunksjon på lineær form kan skrives som:

$$(1) \quad y_j^0 = f(x_j^0) + u_j$$

hvor

y_j^0 er observert output for bedrift j ,

x_j^0 er observert innsatsvektor for bedrift j ,

u_j er et restledd som fanger opp avviket mellom observert output og beregnet produktfunksjon når faktisk forbruket av innsatsfaktorer blir innsatt i den beregnede funksjonsformen, og

$f(\dots)$ funksjonsformen som beskriver produktfunksjonen. Det er parametrene i denne funksjonsformen som er de ukjente variablene vi skal estimere.

Et viktig element i vanlig statistisk estimeringsteori er drøfting av egenskaper med restleddet, u_j . For at OLS (Ordinary Least Squares) skal være en BLU estimator², forutsettes det at restleddet har følgende egenskaper (se f.eks. Maddala (1977, s 75)):

1. Forventningsverdien er null, dvs $E(u_j) = 0$ for alle j .

²BLU estimator betyr Best Linear Unbiased estimator.

2. Felles og fast varians, dvs $\text{Var}(u_j) = \sigma^2$.
3. Uavhengighet, dvs u_i og u_j er uavhengige for enhver i og j , ($i \neq j$).
4. Uavhengighet av x_j : det betyr at u_i og x_j er uavhengige for alle i og j .

Merk at det ikke ovenfor er forutsatt noe om fordelingsfunksjonen til u_j . Derfor gjøres ofte følgende tilleggsforutsetning:

5. Normalitet: u_j er normalfordelt, eller mer presist, u_j er $IN(0, \sigma^2)$, dvs u_j er uavhengig normalfordelt med forventningsverdi 0 og varians σ^2 .

Den siste forutsetningen er ikke nødvendig for å få forventningsrette minimumsvarians estimater på parametrene, men er nødvendig når en skal teste estimater eller beregne konfidensintervaller rundt dem.

Det er en klar forskjell mellom de forutsetningene som gjøres for restleddet når vi foretar "vanlig" regresjonsanalyse, sammenlignet med det restleddet vi får når vi skal estimere en frontfunksjon, enten det er en produktfunksjon eller en kostnadsfunksjon. Når vi estimerer en front produktfunksjon, vil restleddet i (1), u_j , være definert som

$$u_j \leq 0 \quad \forall j.$$

En fri minste kvadraters estimering av restleddet vil derfor ikke kunne brukes til å estimere en virkelig frontfunksjon, fordi forutsetningen for OLS er at restleddet vil være fordelt på begge sider av den estimerte funksjonen. Denne forutsetningen bryter med basisforutsetningen om fordelingen til restleddet for en frontfunksjon.

For en produktfunksjon vil sammenhengen mellom observert produksjon og en beregnet best-practice produktfunksjon være $y_j^0 \leq f(x_j^0)$. I det etterfølgende av dette kapitlet vil derfor (1) omformes til

$$(1)' \quad y_j^0 = f(x_j^0) - u_j \quad ; u_j \geq 0 \quad \forall j.$$

En kan estimere produktfunksjonen eller kostnadsfunksjonen når de vanlige forutsetninger om restleddets fordeling ikke er til stede ved bruk av "maximum likelihood"-metoder (forkortet til ML). ML metoden forutsetter at vi kan stille opp en a priori fordelingsfunksjon for restleddet.³

Jeg skal gjennomgå en del publiserte arbeider hvor ML metoden er benyttet for å estimere parametre i produktfunksjoner, og skal vise sammenhenger og forskjeller mellom ML metoden og operasjonsanalytiske metoder for å estimere ekstremalfunksjoner. Empirisk bruk av modellene i dette kapitlet kommer i kapittel 5, hvor også det øvrige empiriske arbeidet er samlet.

2. EKSEMPLER PÅ FRONTESTIMERINGER AV PRODUKT- OG KOSTNADS FUNKSJONER.

2.1 Innledning

I dette avsnittet skal jeg vise eksempler på estimering av frontfunksjoner. For å avgrense til problemstillinger av interesse for meg, vil frontfunksjonene jeg behandler være enten produktfunksjoner eller kostnadsfunksjoner. En produktfunksjon på multiplikativ form og med eksplisitt formulert restledd kan skrives

$$(3) \quad y_j^0 = f(x_j^0) \cdot e^{-u_j}$$

hvor $u_j \geq 0$ kan tolkes som en effektivitetskoeffisient. Noter at (3) på logaritmisk form blir

³Gode innføringer i ML metoden er gitt i Koutsoyiannis (1977) og Johnston (1984).

formelt lik formel (1)'. Dersom $u_j = 0$, er bedriften fullt effektiv (dvs $e^{-u_j} = 1$), og dersom $u_j > 0$, vil $e^{-u_j} < 1$ bety at bedriften er ineffektiv. Tolkningen av den beregnede verdien for u_j er grunnlaget for utsagn om en individuell bedrifts observerte effektivitet.

På samme måte kan kostnadsfunksjonen uttrykkes som minimumskostnaden gitt eksogen prisvektor og output:

$$(4) \quad C_j^0 \geq c(p_j^0, y_j^0).$$

For en konkret bedrift vil dette bli

$$C_j^0 = C(p_j^0, y_j^0) \cdot e^{v_j}$$

hvor $v_j \geq 0$. v_j kan nå tolkes som effektivitetstallet som viser hvor kostnadseffektiv bedrift j faktisk er.

Den generelle dualitetsrelasjonen mellom kostnadsfunksjoner og produktfunksjoner har påvist at det for mange ulike funksjonsformer eksisterer en en-til-en sammenheng mellom kostnadsfunksjoner og tilhørende produktfunksjoner⁴. Et naturlig spørsmål er da om det også er en tilsvarende en-til-en sammenheng mellom v_j og u_j når de duale kostnads- produktfunksjonene er benyttet i estimeringsprosedyren. Det er vist av mange forfattere, se f.eks. Greene (1980 a, s 53) eller Färe, Grosskopf, Lovell (1985, s 134) at dersom produktfunksjonen er homogen av grad α , så er $v_j = u_j^{-\alpha}$. Har vi en produktfunksjon homogen av grad 1, vil naturligvis $v_j = u_j^{-1}$. Generelt avhenger sammenhengen mellom v_j og u_j av skalaelastisiteten, og, dersom funksjonsformen ikke er homogen, men f.eks. homotetisk, av funksjonsformen.

⁴Se Diewert (1974 og 1982) for en oversikt over hvilke krav som stilles for at produktfunksjoner og kostnadsfunksjoner skal være såkalt "self dual".

2.2. Deterministisk frontestimering med LP og QP.

Aigner and Chu (1968) (AC) var de første som estimerte frontfunksjoner ved hjelp av LP og QP med utgangspunkt i de ideer som tidligere var presentert av Farrell (1957) og Salter (1960). I artikkelen drøfter forfatterne AC begrepet produktfunksjon som "industry production function" og de noterer at den viser det maksimale output som kan produseres ved ulike innsatsmengder. Men mange bedrifter, kanskje alle, vil ligge lavere i faktisk output enn denne maksimale produksjonen. Det er ifølge AC tre mulige grunner til at bedriftene ligger under fronten:

1. Det kan skyldes tilfeldige uhell ("random shocks") i produksjonsprosessen. Som eksempler nevner AC bare hendelser som virker negative på produksjonsprosessen, dvs reduserer faktisk output. Vi kan imidlertid lett tenke oss at slike "random shocks" slår begge veier, dvs også kan gi overraskende positive utslag i produksjonsprosessen. Dette er tatt opp av Aigner sammen med andre forfattere, se spesielt Aigner, Lovell, Schmidt (1977).
2. Avviket kan skyldes forskjeller i teknisk effektivitet. Dette kan være forskjeller i kapitalutstyr, både i kvalitet og årgang. Det kan også skyldes ulik opplæring av arbeidskraft, med følgende forskjeller i målt teknisk effektivitet.
3. Avviket kan skyldes ulik økonomisk tilpasning. Konkret betyr det at en produsent ikke tilpasser sammensetningen av innsatsfaktorer til de rådende relative prisforhold, eller ikke velger riktig produksjonsmengde, gitt pris på output og grensekostnader i produksjonen.

Det er bare punkt 2 ovenfor som vil gi seg utslag i industriproduktfunksjonen, iflg AC :

"The technical differences in (2) above are assumed to be manifested in the attained values of technical parameters in the industry production function." (AC, 1968, s 828).

Etter å ha drøftet og forkastet empiriske estimeringer av produktfunksjonen basert på gjennomsnittsproduktfunksjonen, formulerer AC følgende modell basert på en Cobb–Douglas produktfunksjon:

$$(5) \quad \ln y_j^0 + u_j = \ln A + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ij}^0.$$

Parametrene i funksjonen kan estimeres ved bruk av LP. Dvs vi minimaliserer summen av u -ene, gitt at alle u -ene er ikke-negative:

$$(6.1) \quad \text{Min: } \sum_{j=1}^n u_j = \sum_{j=1}^n \left(\ln A + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ij} - \ln y_j \right)$$

når

$$(6.2) \quad \ln A + \sum_{i=1}^m \alpha_i \ln x_{ij} \geq \ln y_j \quad ; j=1, \dots, n,$$

$$(6.3) \quad \ln A \geq 0; \alpha_i \geq 0; \forall i.$$

Summen av avvikene minimaliseres, idet avvikene kan betraktes som en lineær tapsfunksjon. Restriksjonene sørger for at avvikene er av samme fortegn.

Alternativt viser AC at man kan minimalisere kvadratavviket. Siden man i denne modellen bare har ensidige avvik, blir resultatet ikke det samme som minimalisering av kvadratavviket i OLS. For frontestimering får en følgende kvadratiske programmeringsproblem:

$$(7.1) \quad \text{Min: } \sum_{j=1}^n u_j^2 = \sum_{j=1}^n \left(\ln A + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ij} - \ln y_j \right)^2$$

når

$$(7.2) \quad \ln A + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ij} \geq \ln y_j \quad ; j=1, \dots, n,$$

$$(7.3) \quad \ln A \geq 0, \alpha_i \geq 0 \forall i.$$

AC gjør endel omforminger på disse modellene før de estimeres; bl.a. innfører de også etterspørselsfunksjoner etter arbeid. De estimerte derfor, i tillegg til LP modeller og enlignings kvadratiske modeller, også kvadratiske simultanligningsmodeller. Resultatene som AC fikk ved å bruke de operasjonsanalytiske estimeringsteknikkene ble sammenlignet med enlignings og minste kvadraters metode og to-trinns minste kvadraters metode. I sammenligningen av gjennomsnittsmoellene med frontmodellene fikk AC spesielt store avvik i målingene av elastisiteten for kapital. Det er ikke i artikkelen oppgitt noen verdier for estimatet for konstantleddet i regresjonen. AC har i (6.3) og (7.3) feilaktig formulert $\ln A \geq 0$ mens det rette skulle være $\ln A \geq 0$ eller $A \geq 0$. Det er ikke mulig å se av resultatene som AC presenterer, om denne feilspesifiseringen har hatt noen konsekvenser for de øvrige resultater:

2.3 Fra LP og QP til ML metoden.

2.3.1 Ekspensielt fordelt restledd.

AC viser ikke hvordan deres to estimeringsprosedyrer (dvs minimalisering av det lineære avvik og minimalisering av kvadratavviket) vil bli formulert som ML. Det er imidlertid forholdsvis lett å vise at et ekspensielt fordelt restledd gir samsvar mellom ML estimering av parametrene og estimering ved bruk av LP. På samme måten kan en lett vise at dersom restleddet er halvnormalt fordelt så vil vi få ML estimatorene av koeffisientene i

produktfunksjonen ved å minimalisere kvadratet av restleddet, under bibetingelsene at restleddet skal være positivt. Dette skal nå vises.

Anta først en produktfunksjon på logaritmisk form som (5). For å unngå forveksling med et normalfordelt restledd, vil vi på lineær form kalle det ensidige restleddet for ϵ_j . Forutsett at ϵ_j er eksponensielt fordelt som følger:

$$(8) \quad f(\epsilon_j) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot \epsilon_j}.$$

Likelihood funksjonen er den simultane sannsynlighetsfunksjonen, dvs

$$(9) \quad L = \prod_{j=1}^n \mu \cdot e^{-\epsilon_j \cdot \mu}.$$

Log-likelihood funksjonen blir:

$$(10) \quad \ln L = n \cdot \ln \mu - \mu \cdot \sum_{j=1}^n \epsilon_j$$

eller, siden pr definisjon $\epsilon_j = (\ln A + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ij} - \ln y_j)$, kan vi erstatte ϵ_j med uttrykket i parenteser og får

$$(10)' \quad \ln L = n \cdot \ln \mu - \mu \cdot \sum_{j=1}^n \left(\ln A + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ij} - \ln y_j \right).$$

De parametrene i produktfunksjonen som maksimerer verdiene for likelihood funksjonen L eller $\ln L^5$ finnes ved å derivere m.h.p parametrene og sette lik null. Dette gir følgende $(m+2)$ ligninger:

⁵Siden $\ln L$ er en monoton funksjon av L , vil de samme verdier gi maksimum for L som for $\ln L$.

$$(11) \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0; \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \ln A} = 0; \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = 0.$$

α er en vektor med m elementer. Vi løser disse $(m+2)$ ligningene for parametrene. Løst for μ får vi:

$$(12) \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{n \cdot 1}{\mu} - \sum_{j=1}^n (\ln A + \sum_{i=1}^m \alpha_i \ln x_{ij} - \ln y_j) = 0,$$

som omformet blir:

$$(12)' \quad \mu = n \cdot \left(\sum_{j=1}^n (\ln A + \sum_{i=1}^m \alpha_i \ln x_{ij} - \ln y_j) \right)^{-1}.$$

Verdien for μ kan settes inn i log-likelihood funksjonen (10)', og vi får da, når vi tar bort alle konstantledd:

$$(13) \quad \ln L = n \cdot \ln \left(\frac{n}{\sum_{j=1}^n (\ln A + \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot \ln x_{ij} - \ln y_j)} \right).$$

Denne funksjonen skal maksimeres. Siden n er konstant, skal vi finne verdier for $\ln A$ og α_i som er slik at $\sum_j (\ln A + \sum_i \alpha_i \ln x_{ij} - \ln y_j)$ blir så liten som mulig, dvs uttrykket for likelihood funksjonen blir maksimert når $\sum_j (\ln A + \sum_i \alpha_i \ln x_{ij} - \ln y_j) = \sum_j \epsilon_j$ blir minimert. Siden vi fremdeles skal ha som restriksjon $\epsilon_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, blir dette følgende LP problem:

$$(14.1) \quad \text{Min} \quad \sum_{j=1}^n \epsilon_j$$

når:

$$(14.2) \quad \epsilon_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n.$$

Av definisjonen for ϵ_j vil vi ha:

$$\ln y_j - \ln A - \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ij} + \epsilon_j = 0 .$$

Vi får da følgende LP formulering:

$$(15.1) \quad \text{Min: } \sum_{j=1}^n \epsilon_j \quad (\text{eller: } \min \sum_{j=1}^n (\ln A + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ij} - \ln y_j))$$

når:

$$(15.2) \quad \ln y_j - \ln A - \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ij} + \epsilon_j = 0 \quad ; j=1, \dots, n,$$

$$(15.3) \quad \ln A, \alpha_i, \epsilon_j \geq 0 \quad \forall i, j.$$

(15.1) – (15.3) kan alternativt gis formuleringen:

$$(15.1)' \quad \text{Max: } \sum_{j=1}^n (\ln y_j - \ln A - \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ij})$$

når

$$(15.2)' \quad \ln y_j - \ln A - \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ij} \leq 0 \quad ; j=1, \dots, n.$$

Formulering (15)' betyr at vi skal finne de koeffisientene av $\ln A$ og α_i som maksimerer summen av observert output-/inputbrøk over alle bedrifter, gitt restriksjonen at observert output aldri kan bli større enn beregnet produktfunksjon med observert input.

Egentlig trenger man ikke utlede de partielle deriverte av log likelihood funksjonen og løse den for de enkelte parametre for å finne verdier for parametrene i produktfunksjonen.

Man kan ta utgangspunkt i likelihood funksjonen

$$(16) \quad L = \prod_{j=1}^n \mu \cdot e^{-\epsilon_j \mu} = \mu^n \cdot e^{-\mu \sum_{j=1}^n \epsilon_j} \quad ; \epsilon_j \geq 0$$

som skal maksimeres. Å maksimere en funksjon med en negativ eksponent, er ekvivalent med å minimere verdien på eksponenten. Denne sammenhengen kan benyttes nå. Siden μ er konstant, men ukjent, vil det si at vi skal minimere $\sum_j \epsilon_j$, når det tas hensyn til at $\epsilon_j \geq 0$ for alle j , som jo er (14.1)–(14.2).

2.3.2 Halvnormalt fordelt restledd.

Vi kan nå utlede estimeringsprosedyren dersom det ensidige restleddet er fordelt halvnormalt. En halvnormal fordeling for ϵ_j blir:

$$(17) \quad f(\epsilon_j) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{\epsilon_j^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) & ; \epsilon_j \geq 0, \\ 0 & ; \epsilon_j < 0. \end{cases}$$

Likelihood funksjonen blir:

$$(18) \quad L = \prod_{j=1}^n \frac{2}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{\epsilon_j^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \\ = 2^n \cdot \sigma^{-n} (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \sum_{j=1}^n \epsilon_j^2\right).$$

Maksimering av likelihood funksjonen (18) betyr å maksimere en funksjon med negativ eksponent. Maksimum til denne funksjonstypen oppnås når vi minimaliserer verdien av eksponenten, altså $\min \sum_j \epsilon_j^2$.

Formulert som et matematisk programmeringsproblem blir det:

$$(19.1) \quad \text{Min: } \sum_{j=1}^n \epsilon_j^2$$

Når:

$$(19.2) \quad \ln y_j - \ln A - \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ij} \leq 0 \quad ; j=1, \dots, n,$$

$$(19.3) \quad \alpha_i \geq 0 \quad \forall i, \text{ og } \ln A \geq 0.$$

ϵ_j er slakken for restriksjon j , og følgelig har vi også oppfylt $\epsilon_j \geq 0$ for alle j .

Dette er et kvadratisk programmeringsproblem, og kan lett løses ved de kvadratiske programmeringsalgoritmer eller generelle ikke-lineære optimaliseringsalgoritmer som finnes.

2.3.3 ML og homotetiske produktfunksjoner

En homotetisk produktfunksjon med skalaelastisitet

$$(20) \quad \text{el}(y) = \frac{1}{a + b \cdot y}$$

er blitt benyttet av bl.a. Førsumd og Jansen (1977) (FJ) i estimering av deterministisk frontfunksjon. Med en C-D kjernefunksjon blir dette en homotetisk produktfunksjon av en type opprinnelig formulert av Zellner og Revankar (1969). Produktfunksjonen skrives vanligvis på følgende form:

$$(21) \quad y^a \cdot e^{b \cdot y} = A \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha_i} \quad (\text{og } \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1).$$

Produktfunksjonen (21) har som sin duale kostnadsfunksjon (når y og prisene p_j på input er gitt eksogent):

$$(22) \quad C(p, y) = y^a e^{b \cdot y} \cdot B \cdot \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i} \quad ; \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \right)$$

hvor

$$(23) \quad B = \left(A \prod_{i=1}^m \alpha_i^{\alpha_i} \right)^{-1}$$

Kostnadsfunksjonen skrives på logaritmisk form:

$$(24) \quad \ln C(p, y) = a \ln y + b \cdot y + \ln B + \sum_{i=1}^m \alpha_i \ln p_i$$

Både FJ og Greene (1980) har vist hvordan koeffisientene i frontproduktfunksjonen kan estimeres med utgangspunkt i forutsetninger om fordelingen til restleddet. FJ spesifiserte i utgangspunktet en spesielt enkel fordeling for restleddet. Produktfunksjonen formuleres med restledd som:

$$(25) \quad y^a \cdot e^{b \cdot y} = A \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha_i} \cdot u$$

hvor u er et restledd som skal oppfange effektivitetsavvik. u er fordelt

$$f(u) = (1+\alpha) \cdot u^{\alpha} \quad ; \alpha > -1, 0 < u \leq 1$$

Kjernefunksjonen i (25) er spesifisert homogen av grad 1. Kostnadsfunksjonen med restledd uttrykkes da som:

$$(26) \quad C(p, y) = y^a e^{b \cdot y} \cdot B \cdot \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i} \cdot u^{-1}$$

hvor B er definert ovenfor i ligning (23). Fordelingen for u^{-1} er (når $z = u^{-1}$):

$$(27) \quad h(u^{-1}) = h(z) = f(u) \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| = (1+\alpha) \cdot z^{-(\alpha+2)}$$

hvor α er definert som for $f(u)$, dvs $\alpha > -1$, mens z da opplagt er $1 \leq z < \infty$.

Kostnadsfunksjonen (26), hvor restleddet z er et mål for kostnadseffektiviteten, omformes til:

$$(28) \quad z = (y^a e^{b \cdot y} \cdot B \cdot \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i})^{-1} \cdot C.$$

Uttrykt i kostnadsfunksjonen og observert kostnad, blir fordelingen til z , dvs $h(z)$, følgelig⁶:

$$(29) \quad h(z) = (1+\alpha) \cdot (y^a e^{b \cdot y} \cdot B \cdot \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i})^{-(\alpha+2)} \cdot C^{-\alpha-2}.$$

Likelihoodfunksjonen $L(z_1, z_2, \dots, z_n)$ er den simultane fordeling $\prod_{j=1}^n h(z_j)$, og blir:

$$(30) \quad L(z_1, z_2, \dots, z_n) = (1+\alpha)^n \cdot \prod_{j=1}^n \left\{ (y_j^a e^{b \cdot y_j} \cdot B \cdot \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i})^{-(\alpha+2)} \right\} \cdot \prod_{j=1}^n C_j^{-\alpha-2}.$$

Logaritmen til likelihood funksjonen er:

$$(31) \quad \ln L = n \cdot \ln(1+\alpha) + (\alpha+2) \sum_{j=1}^n \ln(y_j^a e^{b \cdot y_j} \cdot B \cdot \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}) - (\alpha+2) \sum_{j=1}^n \ln C_j.$$

Estimeringsproblemet består i å finne parametre som maksimerer log likelihoodfunksjonen (31). Parametrene som maksimerer funksjonen, er invariant m.h.p. verdien til parametrene i effektivitetsfunksjonen (dvs. α) siden leddet $(\alpha+2)$ kan strykes i restriksjonssettet (32.2) og vil være en multiplikativ konstant i objektfunksjonen (32.1). FJ kommer da fram til at

⁶Ligning (29) kan gjenfinnes i Førstund og Jansen (1977) som deres ligning (10). Nest siste eksponenleddet er av FJ skrevet $(\alpha+1)$, noe som antagelig er en trykkfeil. Samme (skrive-)feil går igjen i Førstund og Hjalmarsson (1987) ligning (4.36).

parametrene i kostnadsfunksjonen kan utledes via følgende formulering (som er lineær på logaritmisk form, og derfor danner et LP problem):

$$(32.1) \quad \text{Max: } \sum_{j=1}^n \ln(y_j^a e^{by_j} \cdot \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i})$$

når:

$$(32.2) \quad \ln(y_j^a e^{by_j} \cdot \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}) \leq \ln C_j \quad ; j=1, \dots, n,$$

$$(32.3) \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \\ \text{og } \alpha_i \geq 0 \forall i.$$

Ved løsning av denne LP formuleringen beregnes elastisitetene i kostnadsfunksjonen og a og b i outputleddet. Imidlertid har vi ikke fått estimert parametret α i fordelingsfunksjonen til restleddet. Et estimat for dette parametret får FJ ved klassisk ML framgangsmåte ved å beregne $\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = 0$. La ϵ_j betegne slakk i restriksjon j i LP problemet (32) ovenfor, dvs ϵ_j er forskjell mellom (på logaritmisk form) observert kostnad og minimumskostnad for bedrift j . Da kan utledes følgende formel for α :

$$(33) \quad \alpha = \frac{1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \epsilon_j}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \epsilon_j}.$$

Dersom man tar utgangspunkt i leddet u^{-1} i kostnadsfunksjonen til FJ, og transformerer fra u til $\epsilon = \ln(u^{-1})$, så kan fordelingen til ϵ_j utregnes til, ved bruk av (27):

$$(34) \quad f(\epsilon_j) = h(z) \cdot \left| \frac{\partial z}{\partial \epsilon} \right| = (1+\alpha) \cdot e^{-(1+\alpha) \cdot \epsilon_j}.$$

Videre kan vi substituere $(1+\alpha)$ med μ , og vi får

$$(34)' \quad f(\epsilon_j) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot \epsilon_j} ; \epsilon_j \geq 0.$$

Estimering av ACs modell når restleddet $\epsilon = -\ln u$ er eksponensielt fordelt, blir ekvivalent med LP estimering av en produktfunksjon med ensidig restledd, se Schmidt (1975). FJs front estimering av en homotetisk kostnadsfunksjon med LP er derfor metodisk svært lik ACs estimering av en C–D produktfunksjon ved LP.

2.3.4 Oppsummering.

Bruk av visse programmeringsteknikker (LP og QP) er ekvivalent med ML estimering av funksjonen, gitt visse forutsetninger om fordelingen til restleddet. Estimeringen er imidlertid fremdeles slik at vi får en front i den forstand at alle observasjoner av output enten er mindre enn eller lik den estimerte produktfunksjonen, eller observert kostnad er større enn eller lik den estimerte kostnadsfunksjonen. Alle avvik fra fronten blir da forklart med teknisk ineffektivitet eller også alternativt teknisk og allokeringssineffektivitet i tilfelle det er kostnadsfunksjonen vi estimerer.

Det viser seg i praksis at best–practice fronter estimert på denne måten er meget følsomme for ekstreme observasjoner, såkalte "outliers". Dette gjelder spesielt bedrifter som er spesielt effektive. Dersom de imidlertid er ekstremt ineffektive, viser det seg i praksis at bare ytterst sjelden vil inkludering/ekskludering av slike sterkt ineffektive bedrifter ha noen betydning for parametrene i den funksjonen vi estimerer. Om dette se f.eks. Vassdal (1982 b). Det å kunne påvise at de operasjonsanalytiske estimeringsmetodene er ekvivalent til ML estimeringer gitt visse fordelinger på restleddet, har først og fremst nytteverdi i det man vil på en forholdsvis enkel måte kunne beregne forventningsrette estimater for de koeffisientene man skal estimere. Metoden har imidlertid også åpenbare ulemper. Årsaken til dette er at visse regularitetsbetingelser⁷ ikke er oppfylt. Følgen er at man ikke kan utlede de vanlige

⁷Jeg viser til de regularitetsbetingelsene som er stilt opp i Greene (1980), hvorav den tredje "the range of y_j is independent of θ " normalt blir brutt ved frontfunksjonsestimering ved ML

asymptotiske egenskapene for de parametrene man estimerer. Estimatene på de parametrene vi estimerer kan derfor ikke gjøres til gjenstand for statistiske tester siden ML ikke vil gi de rette asymptotiske spredningsmål på estimatene. Selve estimatene vil imidlertid være forventningsrette.

2.4. Stokastisk frontestimering og teknisk ineffektivitet

Når restleddet avspeiler teknisk ineffektivitet, kan det være rimelig å forutsette en halvnormal (engelsk: "truncated normal") fordeling, eller eventuelt en eksponensiell fordeling. Imidlertid vil man i praksis også måtte forutsette rene tilfeldige påvirkninger i datamaterialet, såkalte "random shocks", se f.eks. pkt 1) hos AC. Slike tilfeldige påvirkninger kan være alt fra måleproblemer i variablene til naturkatastrofer. Poenget er at slike avvik vil avspeile forhold som ligger utenfor en eventuell beslutningsfatters/bedrifts mulighet til å påvirke. Det er også grunn til å tro at denne type tilfeldige påvirkninger kan være (tilnærmet) normalfordelt. Dette leder opp til tanken at restleddet bør være sammensatt for å kunne skille ut de to effektene, h.h.v. teknisk effektivitet og "rene" tilfeldige påvirkninger som er utenfor beslutningsfatters kontroll.

Analyse av frontfunksjoner med sammensatt restledd er tatt opp av Aigner, Lovell and Schmidt (1977) (ALS) og Meeusen og van den Broeck (1977) (MvdB), og vi skal nå trekke fram endel resultater fra deres analyser.

Modellen de bruker kan skrives på kompakt form som:

$$(35) \quad y_j = f(x_j, \alpha) + \epsilon_j \quad ; j=1, \dots, n$$

metoden. Ved frontfunksjonsestimering vet vi, pr definisjon, at $y \leq f(x, \theta)$, og valget av θ (som er vektoren av parametre som skal estimeres) vil derfor definere en øvre grense for y_j og påvirke det tillatelige området for enhver y_j .

Restleddet ϵ_j kan splittes opp i to ledd:

$$(36) \quad \epsilon_j = v_j - u_j$$

hvor v_j er symmetrisk fordelt og skal fange opp stokastiske avvik. Vi kan anta at v_j er fordelt uavhengig og identisk normalfordelt, $v_j \sim N(0, \sigma_v^2)$, dvs normalfordelt med forventning null og konstant varians. Restleddet u_j skal oppfange tekniske avvik, og vi vil anta at u_j er uavhengig av v_j , $\forall i$ og j . $u_j \geq 0$ kan for eksempel være fordelt som:

$$(37) \quad u_j = \begin{cases} \frac{2}{\sigma_u (2\pi)^{1/2}} \cdot e^{-\frac{u_j^2}{2 \cdot \sigma_u^2}} & \text{når } u_j \geq 0, \\ 0 & \text{når } u_j < 0, \end{cases}$$

dvs u_j er halvnormalt fordelt definert for positive verdier for u_j .

Det kan da vises at fordelingen til ϵ_j , dvs $f(\epsilon) = f(v - u)$, som er summen av en symmetrisk normalfordeling og en avkuttet normalfordeling, kan skrives som:⁸

$$(38) \quad f(\epsilon) = \frac{2}{\sigma} \cdot f\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) \cdot \left(1 - F\left(\frac{\epsilon \cdot \mu}{\sigma}\right)\right)$$

hvor

$$\sigma^2 = \sigma_v^2 + \sigma_u^2$$

$f(\epsilon/\sigma)$ – standard normalfordelt tetthetsfunksjon med parametre ϵ og σ .

$F(\epsilon \cdot \mu/\sigma)$ – den kumulative sannsynlighetsfunksjonen.

$$\mu = \sigma_u / \sigma_v.$$

⁸Grunnlaget for denne modellen finnes i James Tobin (1958) og i Takeshi Amemiya (1973). En kortfattet oversikt over Tobins ide er klart framstilt i Maddala (1977, s162–163). En meget mer utførlig oversikt er gitt i T. Amemiya (1984).

Tettheten for ϵ er asymmetrisk rundt null, og har følgende forventningsverdi og varians:

$$(39) \quad E(\epsilon) = -\frac{2^{1/2}}{\pi^{1/2}} \cdot \sigma_u$$

$$\text{Var}(\epsilon) = \text{var}(u) + \text{var}(v) = \left(\frac{\pi-2}{\pi}\right) \cdot \sigma_u^2 + \sigma_v^2.$$

Log likelihood funksjonen til denne modellen vises av ALS å bli:

$$(40) \quad \ln L(y|\alpha, \mu, \sigma^2) = n \cdot \ln \frac{2^{1/2}}{\pi^{1/2}} + n \cdot \ln(\sigma^{-1}) +$$

$$\sum_{j=1}^n \ln(1 - F(\frac{\epsilon_j \mu}{\sigma})) - \frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \sum_{j=1}^n \epsilon_j^2.$$

Med utgangspunkt i det samme tallmaterialet som AC (1968) benyttet, sammenligner ALS resultatene for vektoren α med de resultatene som framkom i analysen til AC. Tre metoder sammenlignes derfor: 1) OLS, som en kontroll for det som skal representere den tradisjonelle måten å estimere produktfunksjoner, 2) operasjonsanalytiske frontestimeringsmetoder, representert med LP og QP, og 3) ML metoden som et eksempel på stokastisk frontestimering, både når teknisk effektivitet er halvnormal og eksponensiell.

ALS finner meget god sammenheng mellom de estimerte parametrene ved bruk av OLS og ML metodene (begge variantene av restleddfordelingen for ML metoden). De får at σ_v^2 er betydelig større enn σ_u^2 . Under 1 % av den totale variansen ble forklart av u (dvs den ensidige del av restleddet). I tillegg er σ_v^2 ganske nær variansen for restleddet ved OLS (h.h.v. ca 0,069 mot ca 0,077). Dette igjen tyder på at variansen i effektivitet kan forklares med variansen i det symmetriske restleddet, og ikke i variansen i teknisk effektivitet.

Arbeidet til ALS er det første vellykkede forsøket på å estimere stokastiske front produktfunksjoner. Selv om både Førsund og Jansen (1977), og før dem Aigner og Chu (1968), benyttet estimeringsteknikker som er ekvivalent med ML, gitt spesifiserte

formuleringer for restleddet, så har ingen av disse tidligere forfatterne estimert en faktisk ML modell. De har derfor heller ikke kunnet konstruere en modell med sammensatt restledd. Av den grunn blir alt observert avvik fra den estimerte fronten tolket som teknologisk ineffektivitet.

LP har også blitt benyttet til å beregne teknisk effektivitet relativt til ikke-parametriske effektivitetsfronter, direkte i tråd med opplegget til Farrell, se Seitz (1970 og 1971). Opplegget til Seitz er betydelig mer primitivt enn den analysemetoden som skal bli presentert i neste kapittel, og vil derfor ikke bli gjennomgått her. Såvidt observert av denne forfatter, har metodene ikke fått noen vid utbredelse. Som et trinn på veien fra den hovedsaklig grafiske analysen til Farrell til de mer komplette ikke-parametriske effektivitetsmålene ved bruk av DEA, er LP beregningene til Seitz av interesse.

2.5 Allokeringsineffektivitet.

ALSs estimeringsmetodikk skiller mellom stokastisk avvik og resten, som blir tolket som teknologisk avvik. Bedriftene vil imidlertid også kunne være allokeringsineffektive, dvs de bruker ikke innsatsfaktorer i de rette forhold, gitt innsatsfaktorenes grenseprodukt og relative prisforhold. Man kan ikke utlede allokeringsineffektivitet av produktfunksjonsanalyser, siden priser ikke inngår i slike funksjoner.

Analysene til ALS og MvdB kan utvides til også å kunne beregne allokerings effektivitet i tillegg til teknisk effektivitet. På den måten kan beregnes et mål for totaleffektivitet, eller også kalt økonomisk effektivitet. En måte å gjøre dette på, er å benytte seg av dualitetsegenskapene mellom produktfunksjoner og tilhørende kostnadsfunksjoner. Ved bruk av Shephards Lemma⁹ utledes funksjonsformen til etterspørselsfunksjoner etter

⁹Shephards Lemma vil si at minimumskostnadsfunksjonen etter innsatsfaktor x_i med gitte priser, kan uttrykkes som kostnadsfunksjonen partielt derivert m.h.p. p_i , dvs pris på

innsatsfaktorer av en kostnadsfunksjon.

Utgangspunktet for framstillingen er en produktfunksjon med et sammensatt restledd. Schmidt og Lovell (1978) gir produktfunksjonen følgende form:

$$(41) \quad y = A \cdot \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha_i} \cdot e^{(v-u)}$$

hvor

v fordelt $N(0, \sigma_v^2)$,

u ikke-negativt avvik, som avspeiler teknisk ineffektivitet.

Fordelingen til u kan f.eks. være en vilkårlig fordeling som bare er definert for positive verdier. Eksempler på slike fordelinger kan være eksponensielle fordelinger, halvnormale fordelinger eller log-normale fordelinger.

Produktfunksjonen på loglineær stokastisk form skrives:

$$(42) \quad \ln y_j = \ln A + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ij} + v_j - u_j$$

Produktfunksjonen, definert som den maksimale produksjonen, skrives på stokastisk form

$$(43) \quad \ln y_j^0 \leq \ln A + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ij}^0 + v_j$$

og ulikheten kan skrives som likhet ved å innføre restleddet u_j på venstresiden av ligningen. y_j^0 og x_{ij} er h.h.v. observert produksjonsmengde og observert innsatsfaktorbruk for

innsatsfaktor x_i . Matematisk blir det: $x_i(y, p) = \frac{\partial C(y, p)}{\partial p_i}$ ($i=1, \dots, m$). Se Shephard (1953, s 11) og f.eks. Diewert (1982, s 546).

produsent j . Dette betyr at $\ln y_j$ er begrenset ovenfra av produktfunksjonen inkludert det stokastiske restleddet v_j og at u_j (≥ 0) kan tolkes som et mål på den tekniske ineffektiviteten.

Med det samme restledd som vi har hatt i produktfunksjonen (dvs $(v - u)$) på logaritmisk form, kan nå kostnadsfunksjonen skrives som (når $r = \sum_i \alpha_i$):

$$(44) \quad \ln C = \ln B + \frac{1}{r} \cdot \ln y + \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{r} \ln p_i - \frac{1}{r} (v-u)$$

hvor B er:

$$B = \left(A \cdot \prod_{i=1}^m \alpha_i \right)^{\frac{-1}{r}} .$$

Vi ser at $\ln C$ (som er en observert størrelse) blir begrenset nedenfra (dvs har en nedre grense), av den stokastiske kostnadsfunksjonen (på logaritmisk form), som følger:

$$(45) \quad \ln C \geq \ln B + \frac{1}{r} \cdot \ln y + \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{r} \cdot \ln p_i - \frac{v}{r} .$$

Leddene u/r er effektivitetsavviket målt for kostnadsfunksjonen. Det er imidlertid fremdeles et kostnadsmål for teknisk ineffektivitet, og kan tolkes som hvor mange prosent faktiske kostnader overskrider beregnede minimumskostnader.

Allokerings effektivitet kan finnes av tilpasning til første ordens marginalbetingelser for pristilpasning. Med restledd skrives marginalbetingelsene som:

$$(46) \quad \frac{x_1}{x_i} = \frac{p_i \cdot \alpha_1}{p_1 \cdot \alpha_i} \cdot e^{\epsilon_i} \quad ; i=2, \dots, m$$

og på logaritmisk form

$$(46)' \quad \ln x_1 - \ln x_i = \ln(p_i \alpha_1 / p_1 \alpha_i) + \epsilon_i .$$

ϵ_i representerer et mål som viser avviket fra riktig første ordens tilpasning.

Siden det ikke er noen grunn *a priori* til å forutsette systematisk avvik for pristilpasning, kan vi anta at ϵ_i er tilfeldig fordelt med null forventningsverdi.

Det er verd å merke seg fotskriften i i ϵ_i . Vi hadde ikke tilsvarende fotskrifter i parametrene u og v . Dette skyldes at u og v inngår som fordelingsparametre bare i en ligning, nemlig i produktfunksjonen eller i den duale kostnadsfunksjonen. Vi har imidlertid med m innsatsfaktorer ($m - 1$) ligninger for marginalbetingelsene med potensielt ulikt avvik for hver ϵ_i ($i=2, \dots, m$). I spesifikasjonen av $\epsilon = (\epsilon_2, \dots, \epsilon_m)$ forutsettes at ϵ er en vektor med null forventning og en kovariansmatrise som vi kan kalle Σ . Forutsetter vi også normalfordeling, kan vi skrive at ϵ er fordelt $N(0, \Sigma)$. Den udefinerte ϵ_1 kan i prinsippet være en hvilken som helst $i \in (1, \dots, m)$.

Etterspørselsfunksjonene etter innsatsfaktorer utledes av kostnadsfunksjonen. I ligningene (47) og (48) er vist formlene for etterspørselsfunksjonene og kostnadsfunksjonen, når leddene for allokeringseffektivitet, for teknisk effektivitet og for stokastisk avvik er tatt med. ϵ_i er definert med parvise sammenligninger. ϵ_1 forutsettes derfor ikke å eksistere.

Etterspørselsfunksjonen for x_1 og x_k ($k \neq 1$) utledet av sammenhengen $x_i = \frac{\partial C}{\partial p_i}$ kan da skrives:

(47)

$$x_1 = \cdot y \cdot \frac{1}{r} \cdot a_1 \left(\prod_{i=1}^m a_i \right)^{\frac{-1}{r}} \cdot p_1^{-1} \cdot \left(\prod_{i=1}^m p_i \right)^{\frac{1}{r}} \cdot e^{\left(\frac{-(v-u)}{r} \right)} \cdot e^{\sum_{i=2}^m \frac{a_j}{r} \cdot \epsilon_j}$$

og for x_k ($k=2, \dots, m$) på logaritmisk form, til sammenligning:

$$(47) \quad \ln x_k = \frac{1}{r} \cdot \ln y + \ln(\alpha_k (A \prod_{i=1}^m \alpha_i)^{\frac{1}{r}}) + \ln(\prod_{i=1}^m p_i^{\frac{\alpha_i}{r}} / p_k) \\ - \frac{1}{r}(v-u) - \epsilon_k + \sum_{i=2}^m \frac{\alpha_i}{r} \cdot \epsilon_i .$$

Når vi bruker den skrivemåten som er vist av SL(1979) for å samle faktorene, blir kostnadsfunksjonen på logaritmisk form:

$$(48) \quad \ln C = \ln r - \frac{1}{r} \ln A - \frac{1}{r} \ln(\prod_{i=1}^m \alpha_i^{\alpha_i}) + \frac{1}{r} \ln y \\ + \frac{1}{r} \ln(\prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}) - \frac{1}{r}(v-u) + (E - \ln r)$$

hvor

$$E = \sum_{i=2}^m \frac{\alpha_i}{r} \cdot \epsilon_i + \ln(\alpha_1 + \sum_{i=2}^m \alpha_i \cdot e^{-\epsilon_i}) .$$

Ved tolkning av den stokastiske kostnadsfunksjonen ser vi først at $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \dots = \epsilon_m = 0$ fører til at $E = \ln r$, og følgelig at kostnadsfunksjonen i dette tilfellet ikke får noe tillegg siden det ikke er noe avvik fra optimal allokeringstilpasning. Siden $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \dots = \epsilon_m = 0$ også er de verdier som minimaliserer verdien av E , så vil enhver annen verdi for ϵ_k , både positiv og negativ, føre til at $E > \ln r$, og derfor medføre et tillegg til minimumskostnadsfunksjonen.

For det andre ser vi at kostnadsfunksjonen har tre restledd, dvs

$$\ln C = \dots -v/r + u/r + (E - \ln r),$$

hvor $-v/r$ er et rent stokastisk ledd. Kostnadene kan ensidig overskride den stokastiske

kostnadsfunksjonen av to grunner; 1) Teknisk ineffektivitet som er avspeilet i faktoren u/r , og 2) prisineffektivitet (eller allokeringssineffektivitet) som er avspeilet i leddet $(E - \ln r)$.

Parametrene i kostnadsfunksjonen/produktfunksjonen kan estimeres på flere måter. Dersom vi bare er interessert i estimatene for α -ene, kan kostnadsfunksjonen estimeres som OLS. Man vil da miste mulighetene for å analysere restleddene, siden den kompliserte formen for disse (iflg SL (1979,s 357) gjør det umulig å beregne momentene for restleddene.

Parametrene i restleddet kan estimeres ved bruk av ML. Vi antar at fordelingen til de enkelte ledd i restleddet er som følger:

- ϵ fordelt $N(0, \Sigma)$,
- v fordelt $N(0, \sigma_v^2)$,
- u fordelt halvnormalt $(0, \sigma_u^2)$.

Tettheten til ϵ er da (husk simultanfordelingen av $(m-1)$ ledd)

$$(49) \quad f(\epsilon) = \left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \right)^{m-1} |\Sigma|^{-1/2} \cdot e^{-\left(\frac{\epsilon' \Sigma^{-1} \epsilon}{2} \right)}$$

hvor Σ er kovariansmatrisen.

Tettheten til $(v - u)$ er som før:

$$(38)' \quad f(v-u) = \left(\frac{2}{\sigma \cdot (2\pi)^{1/2}} \cdot e^{-\frac{(v-u)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \right) \cdot (1 - F((v-u)\mu/\sigma))$$

hvor

$$\sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2,$$

$$\mu = \sigma_u / \sigma_v.$$

F er den kumulative standard normalfordelingen.

La oss anta at ϵ og $(v-u)$ er uavhengige. Deres simultane sannsynlighet er da produktet av de respektive sannsynligheter. Likelihood funksjonen blir da (med T observasjoner i utvalget):

$$(50) \quad L = 2^T (2\pi)^{\frac{-m \cdot T}{2}} (\sigma^2)^{\frac{-T}{2}} |\Sigma|^{\frac{-T}{2}} |J|^T \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^T (\epsilon_j' \Sigma^{-1} \epsilon_j + \frac{1}{\sigma^2} k_j^2)\right) \cdot \prod_{j=1}^T (-F(k_j \mu / \sigma))$$

hvor

$|J|$ er absoluttverdien av Jacobideterminanten for transformasjonen fra $(\epsilon, v-u)$ til $(\ln x_1, \dots, \ln x_m)$

$$\epsilon_j = \begin{bmatrix} \ln x_{1j} - \ln x_{2j} - B_{2j} \\ \vdots \\ \dots \\ \ln x_{1j} - \ln x_{mj} - B_{mj} \end{bmatrix}$$

$$k_j = \ln y_j - \ln A - \sum_{i=1}^m \alpha_i \ln x_{ij}$$

$$B_{ij} = \ln\left(\frac{p_i \cdot \alpha_1}{p_1 \cdot \alpha_i}\right) \quad ; i=2, \dots, m.$$

Logaritmen til likelihood funksjonen, dvs $\ln L$, kan bli maksimert numerisk m.h.p. parametrene $A, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \sigma^2, \mu$ og Σ .

Med denne metoden beregnet SL for varmekraftbaserte elektrisitetsverk i USA at faktisk kostnad var ca 16,5 % over minimumskostnadsnivået og at 8,1 % skyldtes allokeringss-

ineffektivitet og ca 8,5 % skyldtes teknisk ineffektivitet. De fant ut at allokering-ineffektiviteten skyldtes overkapitalisering, bl.a. var kapital/energiraten ca 73 % for høy og kapital/arbeidskraftraten ca 36 % for høy.

Jeg har nå gjennomgått to typer frontfunksjoner, en deterministisk full front og en stokastisk frontestimering. Det er vist at de første fullfrontestimeringene, også kalt eksakte frontestimeringer, kan gis alternative ML formuleringer som lett lar seg løse ved bruk av LP eller QP. Stokastiske frontfunksjoner løses ved hjelp av ML metoder. Til gjengjeld står en da overfor dilemmaet at fronten ikke egentlig er en eksakt front, og man kan heller ikke beregne individuelle effektivitetsmål. Man er egentlig i et dilemma mellom på den ene siden å estimere en deterministisk frontfunksjon som har betydelig teoretisk tiltrekning, og på den andre siden å estimere en front som bedre oppfyller forutsetningene for ML, men som ikke har det samme preg av å være "best practice" front.

2.6 En ML metode som tilfredsstillir regularitetsbetingelsene

Tar en hensyn til de regularitetsbetingelsene som ML metoden bygger på, skal det mulige definisjonsområdet for y_j være uavhengig av de parametrene som estimeres. Som påpekt tidligere (se seksjon 2.3.4 i dette kapitlet), lager dette problemer når en skal estimere frontfunksjoner med bruk av ML metoden. Jeg skal nå vise til hvilke krav som må stilles til fordelingsfunksjonen til et ensidig restledd når ML metoden brukes.

I vår problemstilling er parametrene elastisitetene i produktfunksjonen eller kostnadsfunksjonen og σ^2 . Det kravet man må stille til fordelingen av restledd for at ML skal kunne brukes til estimering av parametrene, er at fordelingen er null i ytterpunktene, se W.W.Greene (1982). En annen måte å stille kravet, er at funksjonen $f(y_j, \alpha)$, hvor α er vektoren av parametrene som skal estimeres, oppfyller betingelsen at den deriverte $f_{\alpha}(y_j, \alpha)$ er null når y er på de øvre eller nedre ytterpunktene i fordelingen. Fordelinger som er f.eks. uniformfordelinger, halvnormale fordelinger eller eksponensielle fordelinger, oppfyller derfor

ikke kravene stilt opp av Greene. En fordeling som er generell nok er gammafordelingen. Greene anbefaler den brukt som en konkret fordeling for restleddet. Dersom ϵ er gammafordelt, så vil

$$(51) \quad f(\epsilon) = G(\mu) = \frac{\mu^P \cdot \epsilon^{P-1} \cdot e^{-\mu \cdot \epsilon}}{\Gamma(P)}$$

og $\epsilon \geq 0$, $\mu > 0$ og $P > 2$.

Det er kjent at gjennomsnittet (mean) for denne fordelingen er P/μ og at variansen er $\sigma^2 = P/\mu^2$. Verdien av P er av betydning, og det er nødvendig for vår anvendelse av funksjonen at $P > 2$ (om dette, se Richmond (1974)). Loglikelihood funksjonen til gammafordelingen er med n observasjoner:

$$(52) \quad \ln L = n \cdot P \cdot \ln \mu - n \cdot \ln \Gamma(P) + (P-1) \cdot \sum_{j=1}^n \ln \epsilon_j - \mu \cdot \sum_{j=1}^n \epsilon_j$$

Når $P = 1$ blir gammafordelingen identisk med eksponensialfordelingen, som ikke oppfyller regularitetsbetingelsene egnet til ML estimering.

Skjevetskoeffisienten for gammafordelingen er

$$(53) \quad \frac{E(\epsilon - E(\epsilon))^3}{\sigma^3} = \frac{2}{P^{1/2}}$$

Denne formel kan brukes til å forme gammafordelingen til den form vi tror restleddet er fordelt etter. Dersom vi tror restleddene er gruppert nær opp til fronten, slik at fordelingen blir skjev, så skal P være liten (men likevel $P > 2$). Dersom vi tror fordelingen ikke er skjev, skulle det tilsi en stor verdi for P . I ML metoden vil en estimere P , og derfor kunne teste om P er stor eller liten.

Vi kan nå trekke noen konklusjoner av dette avsnittet, og siterer Greene (1980 a,s 45):

"The Gamma Specification allows a relationship to be established between the average and frontier estimation. If the disturbances about the frontier estimator tend to be symmetrically distributed, we should expect the average estimators to be a displaced or simply a scaled version of it with the same shape. The more skewed the disturbance about the frontier are, the less it should resemble the 'average' estimators."

Det kritiske spørsmål blir derfor om en frontfunksjon har den samme form som en gjennomsnittsestimert funksjon, og at de bare skiller seg fra hverandre med ulik plassering. I dette arbeidet skal jeg seinere empirisk teste denne problemstillingen på et datamateriale ved å parametrisere fra gjennomsnittsfunksjon til frontfunksjon. De resultatene jeg kommer fram til i den analysen, tyder ikke på at frontfunksjonen kan oppfattes som en skalert variant av gjennomsnittsfunksjonen.

2.7. FRONTESTIMERING OG MÅLPROGRAMMERING.¹⁰

2.7.1 Deterministisk målprogrammering

Jeg har tidligere vist sammenhengen mellom forutsetningene om spesiell statistisk fordeling på restleddene og de tilhørende ML formuleringene for å estimere koeffisientene i produktfunksjonen. Det er en nær sammenheng mellom minimalisering av restleddene ved hjelp av LP og QP, og ML estimering ved hjelp av spesielle fordelinger på restleddene.

Nå skal jeg vise hvordan målprogrammering (GP) kan estimere produktfunksjoner som er

¹⁰Metoden målprogrammering (engelsk: Goal Programming) er mye benyttet i operasjonsanalytiske problemstillinger for å analysere flermålsettingsproblemstillinger. Lee (1972) gir en grei innføring. Charnes og Cooper (1977) gir en kompakt og stringent oversikt.

nesten frontfunksjoner. "Nesten frontfunksjoner" er et upresist begrep. I den analysen jeg skal foreta, vil det bety at et lite antall bedrifter tillates å komme på den andre siden av produktfunksjonen enn selve produksjonsmulighetssettet. Deterministiske frontfunksjoner av parametrisk type er karakterisert ved at effektivitetsfronten tangerer et fåtall bedrifter. De bedriftene som er på fronten, er også med i det effektive referansesettet, og er derfor effektive. Når man estimerer parametriske deterministiske frontfunksjoner, vil det være få bedrifter som i denne forstand er effektive. Maksimalt vil antallet være likt antall parametre som estimeres i frontfunksjonen. Frontfunksjonens form blir sterkt påvirket av disse effektive bedriftene. Dersom bedriftene fremstår som effektive pga målefeil eller rent stokastiske forhold, vil man derfor kunne argumentere med at effektivitetsfronten, og dermed det effektive referansesettet som alle bedrifter skal sammenlignes med, ikke er det effektive referansesettet vi burde bruke. Målprogrammering formulert for min problemstilling, vil kunne tillate at observert output kommer på begge sider av den beregnede produktfunksjonen. Med en spesiell vektning av avvikene fra den estimerte fronten, kan den beregnede produktfunksjon estimeres i nærheten av en ren deterministisk frontfunksjon. Med en annen vektning vil en produktfunksjon estimert med GP metoden kunne bli identisk lik en gjennomsnittsestimert produktfunksjon.

Målprogrammering er en spesiell LP (eller QP) modell, og kan gis følgende formulering:

$$(54.1) \quad \text{Min: } \sum_{j=1}^n \epsilon_j^+ + \sum_{j=1}^n \epsilon_j^-$$

når:

$$(54.2) \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} \cdot \alpha_i - \epsilon_j^+ + \epsilon_j^- = y_j \quad ; j=1, \dots, n,$$

$$(54.3) \quad \sum_{i=1}^m D_{ik} \cdot \alpha_i \leq b_k \quad ; k=1, \dots, \ell,$$

$$(54.4) \quad \begin{aligned} \epsilon_j^+ \cdot \epsilon_j^- &= 0 \quad ; j=1, \dots, n, \\ \epsilon_j^+, \epsilon_j^- &\geq 0 \quad \forall j, \end{aligned}$$

hvor

x_{ij} er forbruk av innsatsfaktor i av produsent j ,

y_j - produksjonsresultater for produsent j ,

α_i - parameter for innsatsfaktor i i den produktfunksjonen som skal estimeres,

D_{ik} - koeffisienter for restriksjoner b_k som ikke direkte inngår i målfunksjonen.

I produktfunksjonssammenheng vil vi ha at $\sum_i x_{ij} \cdot \alpha_i \geq y_j$ ($\forall j$). Vi kan derfor videre tolke

ϵ_j^+ - avvik som skyldes at observert produksjon er mindre enn effektivitetsfronten som er implisitt i den estimerte produktfunksjon for produsent j .

ϵ_j^- - avvik som skyldes at den observerte produksjon er større enn den estimerte produktfunksjonen for produsent j .

Ved estimering av en ren deterministisk front produktfunksjon forutsetter vi alltid at alle $\epsilon_j^- = 0$. GP metoden vil kunne løse på denne restriksjonen.

Generelt er formuleringen (54.1) - (54.4) den vanlige formuleringen for et målprogrammeringsproblem når vi har n mål som vi søker oppfylle, hvor vi har ℓ øvrige restriksjoner som er absolutte og ikke kan overskrides, og hvor vi har en vektor av handlingsvariabler α , av dimensjon m . Ligningssett (54.4) er en implisitt restriksjon som ikke blir eksplisitt formulert. Som vi ser er modellen (54.1) - (54.3) en spesiell LP modell, og den kan løses med algoritmer for løsning av LP modeller.

Vi kan betrakte den estimerte produktfunksjonen som et mål. Hvis vi ønsker å få best mulig måloppfyllelse, betyr det at vi må minimalisere summen av positive og negative avvik fra målene, gitt at de øvrige restriksjonene ikke blir brutt. Dette er tankegangen bak OLS, bortsett fra at vi ved OLS kvadrerer de positive og negative avvikene i objektfunksjonen (54.1). Det er imidlertid ikke gitt at alle avvik fra målene "koster" like mye. Noen mål kan være viktigere å oppfylle enn andre, eller det kan være proporsjonalt større kostnad med f.eks. å underoppfylle et mål enn å overoppfylle målet. Slike forhold kan vi trekke inn i objektfunksjonen i et målprogrammeringsproblem ved å legge vekt på de negative og positive avvikene fra målene. La oss kalle vekten på ϵ_j^+ for a_j^+ og tilsvarende vektene på

ϵ_j^- for a_j^- . Objektfunksjonen til et målprogrammeringsproblem med vekting på avvikene kan da skrives:

$$(54.1) \quad \text{Min: } \sum_{j=1}^n a_j^+ \cdot \epsilon_j^+ + \sum_{j=1}^n a_j^- \cdot \epsilon_j^-$$

hvor restriksjonen blir som (54.2) – (54.4).

Hvert mål kan ha ulik vekt. Dersom $a_j^+ \neq a_j^-$, så er det også ulik vektlegging av positive og negative avvik fra samme målsetting. Dersom $a_j^+ \neq a_j^-$, vil det være en tendens til å få lite avvik på den siden av målet som har størst vekt. Som et grensetilfelle har vi at dersom $a_j^- \gg a_j^+$ for alle j , så vil vi få en løsning nær opp til en LP løsning med alle ϵ^- null i optimum.

I relasjon til problemstillingen å estimere produktfunksjoner, vil ligningene bestående av $D \cdot \alpha \leq b$ være forholdsvis enkle. Restriksjonssettet $D \cdot \alpha \leq b$ er normalt bare de restriksjonene som legges på summen av elastisitetene i produktfunksjonen. I min problemstilling vil det være en restriksjon $\sum_j \alpha_j = 1$ i de tilfellene hvor det estimeres C–D produktfunksjoner eller homotetiske produktfunksjoner med C–D kjernefunksjon. Ved bruk av mer sammensatte produktfunksjoner, f.eks. trans–log produkt– eller kostnadsfunksjoner, vil man ha flere ligninger med restriksjoner på elastisitetene.

Den deterministiske målprogrammeringsmodellen tilpasset en problemstilling som går ut på å estimere frontfunksjoner, gir oss adgang til en teknikk hvor vi kan veie avviket fra den estimerte produktfunksjonen. Som et grensetilfelle kan vi utvikle en modell som blir helt identisk med de tidligere viste LP modeller for å fronttilpasse en produktfunksjon.

Jeg vil bruke GP til å veie avvikene så ekstremt at resultatet blir en ren best–practice frontfunksjon. Man kan imidlertid snu om vektene slik at man estimerer en "worst practice" frontfunksjon. En slik funksjonsform er naturligvis ikke en produktfunksjon. Denne metoden kan imidlertid brukes til å beregne et ikke–statistisk spredningsmål på datamaterialet. Et slikt spredningsmål mellom slike max og min funksjoner er beregnet av Rattsø (1978) på et

forholdsvis lite datamateriale av norske aldershjem. Beregning av slike spredningsmål er ikke tatt opp av andre, såvidt jeg har kunnet se.

2.7.2 Stokastisk estimering og "Chance Constrained" teknikken.

Charnes og Cooper (1959, 1963) har utviklet en metode kalt "Chance Constrained" programmering som med utgangspunkt i en LP modell kan beregne problemer av typen

$$(55) \quad P\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_{ji} \geq y_j\right) \geq \beta$$

hvor β er en prosentatsats som uttrykker sannsynligheten for at restriksjonen skal overskrides. La oss eksempelvis tenke oss uttrykket i parentesen som en produktfunksjon, og sette $\beta = 0,9$. Tolkningen er da at en med minst 90 % sannsynlighet vil at beregnet produktfunksjon skal bli større enn observert output, y_j , som vi forutsetter er stokastisk. Vi kan i det videre forutsette at y_j er normalfordelt med kjent forventningsverdi og varians, selv om en bestemt form på fordelingsfunksjonen til den/de stokastiske variable(r) på ingen måte er noen betingelse.

Når, som vist i vårt eksempel, konstanten i restriksjonen er stokastisk, kan problemstillingen ovenfor omformuleres til en deterministisk ekvivalent som følger. Restriksjonen

$$(56) \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{ji} \geq y_j$$

omformes til

$$(56)' \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{ji} \geq B_j$$

hvor B_j er det minste tallet som tilfredsstill

$$(57) \quad P(y_j \leq B_j) \geq \beta.$$

β er en på forhånd bestemt sannsynlighetsgrense. Anta at $\beta = 0,9$, dvs vi vil med 90 % sannsynlighet at den beregnede produktfunksjonen skal være større enn eller lik observert output. Kall standardavviket til y_j for σ_j , og vi forutsetter at y_j er normalfordelt. Da vil B_j kunne utregnes som

$$(58) \quad B_j = y_j + \sigma \cdot 1,28$$

hvor

1,28 er $(1-\beta)$ fraktilen i den standardiserte normalfordelingen.

$\beta = 0,5$ vil medføre $B_j = y_j$. Det betyr at med stokastisk output y_j tillater vi 50 % sannsynlighet for at beregnet produktfunksjon skal kunne overskride output, og den grensen i den deterministiske ekvivalenten blir lik forventningsverdien.

Dersom konstantleddet i restriksjonen i en LP modell er stokastisk og fordelingen er kjent, så omformes det stokastiske leddet til en deterministisk ekvivalent. Når problemet er av typen $\dots \geq y_j$, blir den deterministiske ekvivalenten til "Chance constrained" problemet av typen: $\dots \geq y_j + \sigma \cdot z$. Når problemet er av typen $\dots \leq y_j$, blir den deterministiske ekvivalenten av typen: $\dots \leq y_j - \sigma \cdot z$, hvor z i begge tilfellene er $(1-\beta)$ -fraktilen i en standard normalfordeling.

I mine problemstillinger vet jeg imidlertid ikke om det er y_j eller en eller flere x_{ij} som er stokastisk. Anta derfor at alle x_{ij} er stokastiske, men uavhengige av hverandre. "Chance constrained" problemformuleringen er da:

$$P\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_{ji} \geq y_j\right) \geq \beta.$$

Anta at x_{ij} er det beste punkttestimatet for forventningsverdien til den virkelige x_{ij} . σ_{ij} er standardavviket til x_{ij} . Den deterministiske ekvivalenten til "chance constrained" problemet

er nå:

$$(60) \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{ji} - z \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sigma_{ji}^2 \cdot \alpha_i^2 \right)^{1/2} \geq y_j$$

hvor z er $(1-\beta)$ -fraktilen i den standardiserte normalfordeling for det valgte sannsynlighetsnivå β . (60) er imidlertid ikke lineær.

Det er vist av Olson og Swenseth (1987) at det vanlige ikke-lineære uttrykket man får når mer enn to variabler er stokastiske, se eksempelvis (60), kan lineariseres. Generelt gjelder følgende sammenheng når $\sigma_i^2 \geq 0$ og $\alpha_i \geq 0, \forall i$:

$$(61) \quad \left(\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \alpha_i^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^m \sigma_i \alpha_i \right).$$

Leddene til høyre for ulikhetsstegnet i (61) er derfor en øvre grense for den deterministiske ekvivalenten til den nye ikke-lineære restriksjonen vi utviklet av den generelle "chance

constrained" problemformuleringen. Man erstatter $z \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sigma_{ji}^2 \cdot \alpha_i^2 \right)^{1/2}$ med

$z \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sigma_{ji} \cdot \alpha_i \right)$ i (60). Det gir en ny, lineær restriksjon, hvor det stokastiske elementet er

tatt hensyn til:

$$(62) \quad \sum_{i=1}^m (x_{ji} - z \cdot \sigma_{ji}) \cdot \alpha_i \geq y_j.$$

Olson og Swenseth viser at denne lineære approksimasjonen også kan brukes uendret når det er avhengighet mellom x_{ij} og x_{kj} ($i \neq k$). Hvis kovariansen er negativ (positiv), vil man få større (mindre) avvik til den lineære tilnærmingen.

Relatert til mine problemstillinger, beregning av frontfunksjoner med mulige stokastiske

elementer, så kan muligens denne metoden brukes konstruktivt til å estimere frontfunksjoner. Resultatet av å anvende denne metoden er ikke at ca 50 % av observert output vil overskride produktfunksjonen når $\beta = 1$. Resultatet er heller at (ved den deterministiske ekvivalent) den beregnede frontfunksjon vil overskride forventningsverdi til output med full sikkerhet, mens dersom vi setter $0,5 < \beta < 1$, vil den estimerte frontfunksjon bli lagt lenger bort fra origo i x_1/y faktordiagrammet. Man har imidlertid med denne metoden ikke noen spesiell måte å skille bedriftene med avvikende observasjoner som skyldes stokastiske forhold fra dem som har "normale" observasjoner. Det oppnådde skift i produktfunksjonen har etter min mening en noe begrenset nytteverdi i arbeidet med å beregne en stokastisk frontfunksjon.

2.8 En generell modell med tosidig restledd.

Aigner, Amemiya og Poirier (1976) (AAP) har formulert en generell modell med tosidig restledd. Denne modellen er basert på den ide at man kan vektlegge positive og negative restledd ulikt og på den måten påvirke plasseringen av den estimerte produktfunksjonen. Selv om AAP ikke gjør noen referanser til GP eller LP i sin artikkel, er likheten med deterministisk GP med usymmetriske vektorer åpenbar¹¹. I dette avsnittet skal jeg med utgangspunkt i AAPs metode utvikle en modell for å beregne en produksjonsmulighetsfront som en mellomting mellom ren frontestimering og gjennomsnittsestimering.

AAP formulerer følgende modell:

$$y = X \cdot \alpha + \epsilon$$

¹¹Charnes, Cooper og Sueyoshi (1986) påpeker i en fotnote (s 153 i deres artikkel) at " 'frontier estimates' as required by economic theory" kan oppnås med GP ved å beregne alle $\bar{\epsilon}_j$ i (54) til en verdi av null. Denne anvendelsen av GP ser ikke ut til å ha vært notert i økonometrisk litteratur.

hvor y , α , ϵ er vektorer og X er observasjonsmatrise av innsatsfaktorer, inkludert en kolonne med ett-tall for å beregne konstantleddet. Restleddet ϵ_j er videre definert som:

$$(62) \quad \epsilon_j = \begin{cases} \frac{\epsilon_j^*}{(1-\theta)^{1/2}} & \text{når } \epsilon_j^* > 0 \\ \frac{\epsilon_j^*}{\theta^{1/2}} & \text{når } \epsilon_j^* \leq 0 \end{cases}$$

hvor

$$\epsilon_j^* \sim N(0, \sigma^2) \text{ og } 0 < \theta < 1.$$

Når $\theta = 1$ eller $\theta = 0$ er ϵ_j^* fordelt som en avkuttet normalfordeling. Vi kan derfor skrive:

$$(63) \quad y = X \cdot \alpha + \frac{\epsilon_j^*}{(1-\theta)^{1/2}} \quad \text{når } \epsilon_j^* > 0,$$

$$y = X \cdot \alpha + \frac{\epsilon_j^*}{\theta^{1/2}} \quad \text{når } \epsilon_j^* \leq 0.$$

ϵ_j^* og ϵ_j er j -te elementer i vektorene ϵ^* og ϵ . Omformet blir uttrykket for ϵ_j^* :

$$(64) \quad \epsilon_j^* = (y - X \cdot \alpha) \cdot (1 - \theta)^{1/2} \quad \text{når } \epsilon_j^* > 0,$$

$$\epsilon_j^* = (y - X \cdot \alpha) \cdot \theta^{1/2} \quad \text{når } \epsilon_j^* \leq 0.$$

Jeg bruker formelen $f(y) = f(\epsilon) \cdot |\partial\epsilon/\partial y|$ for transformering av funksjoner, og beregner fordelingen til y_j :

$$(65) \quad f(y_j) = \frac{(1-\theta)^{1/2}}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{(1-\theta)(y_j - X_j\alpha)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \quad ; \epsilon_j > 0,$$

$$f(y_j) = \frac{\theta^{1/2}}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{\theta \cdot (y_j - X_j\alpha)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \quad ; \epsilon_j \leq 0.$$

Pr definisjon vet en at $\epsilon_j > 0$ betyr $y_j > X_j \cdot \alpha$, og $\epsilon_j \leq 0$ betyr $y_j \leq X_j \cdot \alpha$. Av dette kan utledes likelihood funksjonen for y , gitt α , σ^2 , og θ . Den blir når n_1 er antall tilfeller av $\epsilon_j > 0$, og n_2 er antall tilfeller $\epsilon_j \leq 0$ og $n = n_1 + n_2$ er totalt antall observasjoner:

$$(66) \quad L(y|\alpha, \epsilon, \sigma^2, \theta) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\sigma \cdot (2\pi)^{1/2}} \right) \cdot (1-\theta)^{\frac{n_1}{2}} \cdot \theta^{\frac{n_2}{2}} \\ \cdot \prod_{j=1}^{n_1} \exp\left(-\frac{(1-\theta)(y_j - X_j\alpha)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \cdot \prod_{j=1}^{n_2} \exp\left(-\frac{\theta \cdot (y_j - X_j\alpha)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right).$$

Log-likelihood funksjonen blir:

$$(67) \quad \ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln \sigma + \frac{n_1}{2} \cdot \ln(1-\theta) + \frac{n_2}{2} \cdot \ln(\theta) \\ - \frac{(1-\theta)}{2 \cdot \sigma^2} \cdot \sum_{j=1}^{n_1} (y_j - X_j\alpha)^2 - \frac{\theta}{2 \cdot \sigma^2} \sum_{j=1}^{n_2} (y_j - X_j\alpha)^2.$$

Tas nå bort fra (67) verdier som kan betraktes som konstanter i maksimeringen av likelihood funksjonen, ser en at dette problemet er parallelt med å minimalisere eksponentleddet i likelihood funksjonen (siden en skal finne de verdier for α som skal maksimere L).

Derfor skal minimaliseres:

$$(68) \quad S = (1-\theta) \cdot \sum_{j=1}^{n_1} (y_j - X_j \alpha)^2 + \theta \cdot \sum_{j=1}^{n_2} (y_j - X_j \alpha)^2$$

og siden $y = X \cdot \alpha + \epsilon$, skriver jeg:

$$(68)' \quad S = (1-\theta) \cdot \sum_{j=1}^{n_1} \epsilon_j^2 + \theta \cdot \sum_{j=1}^{n_2} \epsilon_j^2.$$

Følgende sammenheng mellom parametret θ og den estimerte funksjonen vil gjelde:

a) $\theta = 1$: av definisjonen av ϵ_j^* ser vi at $\epsilon_j^* = (y - X \cdot \alpha) \cdot (1 - \theta)^{1/2} = 0$ når $\theta = 1$, dvs $\epsilon_j^* = 0$ når $\epsilon_j > 0$ og $\epsilon_j^* = (y - X \cdot \alpha)$ når $\epsilon_j \leq 0$. Når $\theta = 1$ er ϵ_j^* definert som en negativ avkuttet normalfordeling.

b) $\theta = 0$: analogt med tilfellet a) ser vi at ϵ_j^* vil være fordelt som en positiv avkuttet normalfordeling. Både under a) og b) vil frontfunksjoner bli estimert.

c) $\theta = 0,5$: I dette tilfellet er vekten på positive og negative verdier av ϵ_j like, og i relasjon til maksimeringsproblemet i S eller likelihood funksjonen i L , vil ikke slike like vektorer påvirke verdiene for α . Dette tilsvarer skalering av input og output med samme tall. Man står da tilbake med normalfordelingen av ϵ_j . Når $\theta = 0,5$, vil derfor en estimering av parametrene i α ved å minimalisere S (eller maksimere L eller $\ln L$) gi samme resultat som vanlig minste kvadraters metode.

I utgangspunktet vet man ikke hvor mange positive eller negative avvik (68)' har, dvs de tallmessige størrelsene for n_1 og n_2 er ikke kjent. Via en omforming kan (68)' gjøres løselig ved bruk av vanlig kvadratisk programmeringsteknikk. Det vises i AAP at løsningen av problemet med vektor på restleddene kan formuleres som følger, når θ er kjent¹²:

¹²I overgangen fra (68) til (69) er benyttet et kjent triks innen operasjonsanalysen som sier at dersom en variabel z_i kan anta enten positive eller negative verdier, så kan variabelen omformes til $z_i = z_i^+ - z_i^-$, og hvor $z_i^+, z_i^- \geq 0$.

$$(69.1) \quad \text{Min: } S = (1-\theta) \sum_{j=1}^n (\epsilon_j^+)^2 + \theta \sum_{j=1}^n (\epsilon_j^-)^2$$

når:

$$(69.2) \quad y = X \alpha^+ - X \alpha^- + \epsilon^+ - \epsilon^-,$$

$$(69.3) \quad \epsilon^+, \epsilon^-, \alpha^+, \alpha^- \geq 0.$$

ϵ_j^+ betyr $\epsilon_j > 0$ og kan tolkes som stokastisk avvik.

ϵ_j^- betyr $\epsilon_j \leq 0$ og kan tolkes som teknologisk effektivitetsavvik.

Uten eksplisitt formulering framgår det av problemets natur at $\min(\epsilon_j^+, \epsilon_j^-) = 0$ og $\min(\alpha_i^+, \alpha_i^-) = 0$.

Det er i (69) mulig for elementene i vektoren α å anta enten positive eller negative verdier, mao fortegnet for α blir fritt. Dersom man estimerer en produktfunksjon av typen C-D, vil det være naturlig å legge restriksjoner på verdien av α_i . α_i er elastisiteten til innsatsfaktoren i , og $\alpha_i^* < 0$ vil bety at elastisiteten er negativ eller at grenseproduktet $\partial y / \partial x_i = \alpha_i \cdot y / x_i < 0$. Vi vet fra teori om pristilpasning at optimal tilpasning vil finne sted når $P \cdot \partial y / \partial x_i = p_i$. Det betyr at en negativ verdi for estimert α_i vil være utenfor området for optimal tilpasning; i et slikt område vil output øke dersom en reduserer forbruket av x_i og kostnadene vil minke (under forutsetning av positive priser). På den annen side vil en estimert produktfunksjon med null eller negativ elastisitet for en eller flere innsatsfaktorer kunne være i overensstemmelse med effektive referansesett av typen Weff $L(y)$ eller Iso $L(y)$ vist i kapittel 2.

Jeg vil i den empiriske anvendelsen av denne modellen normalt ikke tillate negative verdier for α -ene. I en del tilfeller når jeg får estimerer for $\alpha_i = 0$, har jeg endret på forutsetningen om ikke-negative faktorelastisiteter for å finne hva estimatet ville blitt i tilfellet med fri estimering og for å sammenligne med OLS, hvor man normalt ikke har denne form for restriksjoner på estimatene.

KAPITTEL 4: DATA ENVELOPMENT ANALYSIS METODEN.

1. INNLEDNING.

Charnes, Cooper og Rhodes (1978) og Rhodes (1978) har vist en metode for å måle produksjonseffektivitet relatert til en ikke-parametrisk effektivitetsfront. Metoden kalles Data Envelopment Analysis (DEA). Ved bruk av LP estimeres en stykkevis lineær eller log-lineær produksjonsmulighetsfront i overensstemmelse med fundamentet lagt av Farrell (1957). Metoden er ikke-parametrisk, og kan uten problemer analysere produksjonsprosesser med flere produkter. DEA metoden er blitt presentert som en metode spesielt godt egnet til å beregne effektivitetsmål for ikke-kommersielle (non-profit) organisasjoner med mange innsatsfaktorer og mange produkter, og med uklar matematisk sammenheng i transformasjonsprosessen fra input til output.

DEA er blitt brukt til å analysere skoleprogram (Rhodes (1978), Charnes, Cooper og Rhodes (1981), Bessent et al. (1982)), sykehuseffektivitet (Shermann (1981, 1982, 1984), Banker, Conrad og Strauss (1986), Nunamaker (1983 og 1985), Bedard (1985) og Pedersen *et al* (1987)), og effektiviteten hos offentlige organer, som f.eks. domstoler (Lewin, Morey og Cook (1982)) og engelske kemnerkontorer (Thannasoulis, Dyson og Foster (1987)). Metoden er også brukt til å analysere effektivitet til profitt- og kostnadssentra i større organisasjoner, hvor det ikke er gode interne markeder for ytelsene som produseres eller ressursene som forbrukes. Eksempelvis analyserer Charnes, Clark, Cooper og Golany (1985) effektiviteten til "non-combat" enheter i det amerikanske flyvåpenet, og Sherman og Gold (1985) effektiviteten til bankfilialer, og Banker og Morey (1986 a) analyserer 60 restauranter i en amerikansk "fast food" kjede.

2. FORMELL PRESENTASJON AV DEA.

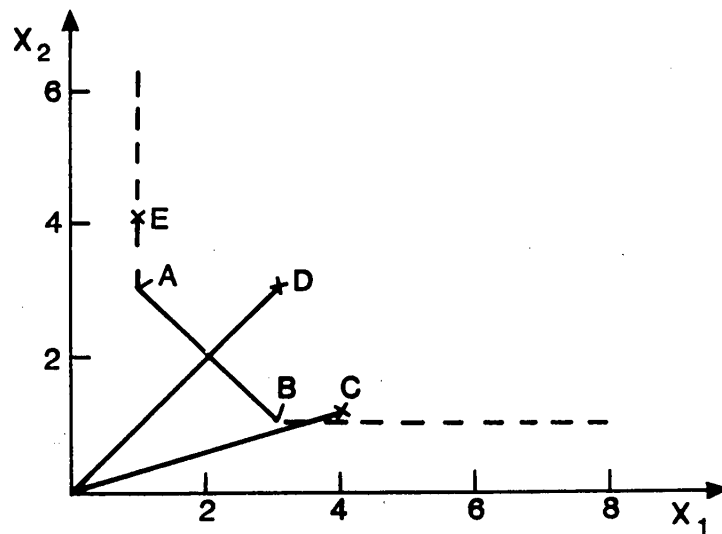
2.1 Et enkelt eksempel

Før jeg presenterer DEA på matematisk form, skal jeg illustrere med et enkelt eksempel. Anta fem bedrifter som produserer ett homogent produkt og til det bruker to innsatsfaktorer. Bedriftene kalles A, B, C, D og E. Ressursbruken er oppstilt i tabell 1. Siden teknologien er homogen av grad en, kan man for hver bedrift dividere observert input med output. Output er normert til en, slik at når vi tegner innsatsfaktorene i et faktordiagram, vil vi samtidig tegne enhetsisokvanten.

Tabell 1: Innsatsfaktorbruk og produksjon for 5 tenkte bedrifter

	A	B	C	D	E
Produksjon					
y_1	1	1	1	1	1
Forbruk av					
faktor x_1	1	3	4	3	1
faktor x_2	3	1	1,25	3	4

Talleksempel fra tabell 1 er videre illustrert i etterfølgende figur 1, hvor også den effektive front er tegnet inn med heltrukket linje mellom A og B, og med stiplet linje parallelt til x_1 og x_2 aksene. Videre er tegnet inn rette linjer fra origo til punktene C og D.



Figur 1 : Talleksemplet fra tabell 1 vist i x_1 - x_2 planet.

Bokstavene A, B, C, D og E i figur 1 angir inputkombinasjonene til de respektive bedriftene. Jeg har tegnet inn en rett linje fra origo til punktene D og C. Den rette linjen viser den radiale ekspansjon/kontraksjon av input for h.h.v. DMU_D og DMU_C . Problemstillingen er så enkel at en lett ser at A og B vil ligge på effektivitetsfronten, og at C og D er mindre effektive enn de to førstnevnte. For fullstendighets skyld skal jeg eksplisitt stille opp LP formuleringen for å beregne DEA effektivitet for C.

Minimeringsproblemet for C er stilt opp i modell (1). Når en beregner effektiviteten til de andre DMU-ene benyttes samme modell, men med andre tall for variablene til w i første og andre restriksjon.

(1) Min: $1w$

når

$$4 \cdot w - 1 \cdot \lambda_A - 3 \cdot \lambda_B - 4 \cdot \lambda_C - 3 \cdot \lambda_D - 1 \cdot \lambda_E \geq 0$$

$$1,25w - 3 \cdot \lambda_A - 1 \cdot \lambda_B - 1,25 \cdot \lambda_C - 3 \cdot \lambda_D - 4 \cdot \lambda_E \geq 0$$

$$1 \cdot \lambda_A + 1 \cdot \lambda_B + 1 \cdot \lambda_C + 1 \cdot \lambda_D + 1 \cdot \lambda_E \geq 1$$

$$w \geq 0, \text{ og } \lambda_j \geq 0 \text{ for } j=A, \dots, E.$$

Første restriksjon viser at DMU_C 's forbruk av innsatsfaktor 1 er større enn eller lik en lineær kombinasjon av den samme innsatsfaktor for alle bedriftene i utvalget, DMU_C inkludert. Restriksjon nummer 2 viser det samme for den andre innsatsfaktoren. En kombinasjon av innsatsfaktorene for DMU_A til DMU_E danner derfor en nedre grense for hvor mye DMU_C kan redusere sine innsatsfaktorer. Objektfunksjonen viser at man skal minimalisere med en vekt som i (1) er kalt w . Siste restriksjonen viser at en lineær kombinasjon av produktene for de fem produsentene i eksemplet danner en øvre grense for produksjonen. Formuleringen (1) betyr at man for DMU_C skal finne hvor mye innsatsfaktorene skal reduseres med proporsjonalt, når en ikke reduserer produksjonen til mindre enn 1 for DMU_C og heller ikke forbruker mindre enn en kombinasjon av innsatsfaktorene til de øvrige bedriftene i utvalget. Vi ser at for en effektiv bedrift (dvs en som får utregnet $w^* = 1$), vil den mest innsatseffektive sammenligning være bedriftens eget forbruk av innsatsfaktorer. Ingen kombinasjon av andre bedrifter vil forbruke mindre innsatsfaktorer. Det vil kanskje hjelpe på forståelsen å observere at kolonnene i ligningssett (1) er input-output vektoren for alle DMU-ene i utvalget. Vi har i formuleringen negative tall foran input og positive tall foran output. Det effektive referansesettet er de observerte input-outputvektorene multiplisert med de beregnede vektene λ_j^* . Den optimale verdien for w viser den beregnede input-effektivitet for en bestemt DMU. Restriksjonen i LP modellen kan i optimum være oppfylt som likhet eller med positiv slakk. I tilfelle likhet vil en optimal skyggepris bli beregnet. Denne skyggeprisen kan benyttes i økonomiske analyser, som vil bli illustrert i følgende avsnitt.

I tabellene 2 og 3 vises referansesettet, effektivitetstallet og skyggeprisene for de to restriksjonene for innsatsfaktorene og det ene produktet under to ulike forutsetninger. I tabell 2 er ulikhetene formulert som ≥ 0 , dvs tabellen viser løsningen av et standard DEA problem¹. I tabell 3 har jeg vist resultatene fra analysen når det ikke tillates slakk i

¹LP-modellen i (1) er identisk lik den LP-formuleringen som ble vist i kapittel 2, avsnitt 2.1.2, for å illustrere beregningen av det svake inputeffektivitetsmålet. Som jeg skal vise i gjennomgangen av den matematiske formuleringen av DEA-modellen, er ikke (1) helt lik den riktige formuleringen av DEA-modellen.

restriksjonene, dvs "free disposability" av innsatsfaktorene tillates ikke. Ulikhetene i ligningssett (1) er da omformet til likheter uten at man har innført slakk. Dette gir to ulike effektive referansesett avhengig av om jeg forutsetter fri disposabilitet av input eller ikke.

Tabell 2: Normal DEA-kjøring, dvs under forutsetning av "free disposability"

DMU	Eff(w)	(Ref) λ_j	u_1	v_1	v_2	Slakk
A	1	A	1	0,25	0,25	—
B	1	B	1	0,25	0,25	—
C	0,8	B	0,8	0	0,8	$x_1 = 0,2$
D	0,67	(A,B)0,5;0,5	0,67	0,17	0,17	—
E	1	A	1	1	0	$x_2 = 1$

Tabell 3: Effektivitet, når forutsatt "weak disposability".

DMU	Eff(w)	(Ref) λ_j	u_1	v_1	v_2	Slakk
A	1	A	1	0,25	0,25	—
B	1	B	1	-1	4	—
C	1	C	1	-1	4	—
D	0,67	(A,B)0,5;0,5	0,67	0,17	0,17	—
E	1	E	1	1	0	—

Når den optimale verdien for w tolkes, ser en i tabell 2 at hverken DMU_C eller DMU_D er effektive. For DMU_D er effektivitetsfronten generert av bedriftene DMU_A og DMU_B , hver med en vekt på 0,5. Dette betyr at DMU_D transformert til sin effektivitetsfront består av en konveks kombinasjon av A og B med vektene 0,5. Den "effektive" DMU_D produserer derfor en output på 1 med innsatsfaktorene $x_1 = 2$ og $x_2 = 2$. Dette er for hver av

innsatsfaktorene 67 % av det opprinnelige ressursforbruket. Når DMU_D på denne måten flyttes til effektivitetsfronten med proporsjonal reduksjon av innsatsfaktorene, er det ikke ledighet i noen innsatsfaktor mer.

2.2 Mer om "free disposability" forutsetningen.

Det beregnede effektivitetstallet for DMU_C er 0,8, noe som skulle tyde på at DMU_C ville komme på effektivitetsfronten dersom dens forbruk av innsatsfaktorer ble redusert proporsjonalt til 80 % av opprinnelig verdi. Tabell 2 viser at DMU_B er den effektive referansebedriften for DMU_C , siden $\lambda_B = 1$ og $\lambda_A, \lambda_C, \lambda_D$ og λ_E er null. Ved å redusere DMU_C s innsatsforbruk til 80 %, blir det beregnede innsatsforbruket $x_1 = 3,20$ og $x_2 = 1$. Innsatsforbruket til den effektive referansebedriften DMU_B er imidlertid $x_1 = 3$ og $x_2 = 1$. DMU_C transformert til effektivitetsfronten, bruker 0,2 enheter for mye av x_1 . Figur 1 illustrerer dette.

Problemet ved måling av effektiviteten til DMU_C , er at effektivitetsfronten ikke er veldefinert til høyre for punktet B (det samme gjelder mulige produksjoner rett over punktet A)². Under forutsetning av såkalt "free disposability of inputs" vil alle punkter på den stiplede horisontale linjen fra B og på den stiplede vertikale linjen fra A beskrive ineffektive produksjonstilpasninger, siden samme output vil kunne nås med mindre forbruk av minst en av innsatsfaktorene uten at forbruket av andre innsatsfaktorer må økes. Ved bruk av terminologien vi innførte i kapittel 2, så representerer den heltrukne linjen A-B effektivitetsfronten definert som $Eff L(y)$. De stiplede linjene horisontalt fra B og vertikalt fra 1 i figur 1 utvider effektivitetsfronten til $Weff L(y)$. Uten forutsetningen om "free disposability of inputs" vil man ved å redusere input også kunne komme til å øke kostnadene. Det er derfor av stor betydning hvordan effektivitetsfronten er definert i slike ytterpunkter

²Farrell (1957) inkluderer punktene $(0, \infty)$ og $(\infty, 0)$ som "points at infinity" i den hensikt å definere ytterkanten på mulighetsområdet parallelt med x_1 og x_2 akse. Se også min drøfting til figur 1 i kapittel 1.

som er avtegnet fra punktene A og B.

Hva vil bli resultatet dersom det er en observasjon direkte på de stiplede linjer i forlengelsen av A eller B? Som eksempel kan man studere DMU_E som bruker en enhet av x_1 og fire enheter av x_2 . I figur 1 er DMU_E avmerket som E på linjen vertikalt fra A. En nærmere studie av effektiviteten til DMU_E illustrerer hva som vil skje dersom man ikke tillater "free disposability of inputs". Når restriksjonene er formulert som ulikhet, får en som løsning at DMU_E er effektiv med effektivitetskoeffisient 1 (se tabell 2). Samtidig er DMU_A basis for DMU_E . DMU_E framstår som 100 % effektiv, men har en slakk i innsatsfaktor x_2 på en enhet. La oss så erstatte ulikhetstegnene i alle ligningene i (1) med likhetstegn " $=$ ". Den økonomiske tolkning av det er som kjent at vi ikke mer tillater "free disposability" av innsatsfaktorer eller produkter. Resultatet av beregningene med de nye forutsetningene er vist i tabell 3. Det framgår av tabell 3 at DMU_E fremdeles vil få beregnet effektivitetstall lik 1 (se tabell 3). Men nå er det DMU_E som er basis, dvs at denne siste beslutningsenheten er brakt opp i det effektive referansesettet. DMU_E har da ikke lenger noen slakk i innsatsfaktorer eller i output. Å erstatte ulikhetstegnene i LP formulering (1) med likhetstegn, fører til at man får beregnet et annet effektivitetsmål for noen DMU-er. Dette skyldes at det effektive referansesettet blir endret, noe som fører til at mengden av effektive bedrifter også blir annerledes. Av tabell 3 kan en se at DMU_C var i settet av effektive bedrifter når vi formulerte mulighetsområdet med likhet, mens den ikke var det når vi på standard DEA vis formulerte med ulikhet (den hadde ved DEA en effektivitet på 0,8). Vi kan derfor konkludere med at forutsetningen "free disposability" påvirker det effektive referansesettet og gjør det større enn ved forutsetningen "weak disposability". De to ulike effektive referansesettene kan medføre ulike effektivitetsmål for noen bedrifter. I eksemplet er observert ulike effektivitetsmål for DMU_C . Dessuten har vi også observert ulik effektiv referanse for DMU_E .

Skyggeprisene på restriksjonene i (1) er lik verdien på aktivitetene i den duale formuleringen til (1). For at en bedrift/DMU skal bli kalt effektiv, må alle ressursene være fullt utnyttet og produksjonen må også være slik at ikke mer kan produseres uten at det blir en tilsvarende økning i minst en input. Dette vil innebære at alle skyggeprisene skulle bli større enn null.

Ser man på løsningen for DMU_D i tabell 2, viser det seg at skyggeprisene for innsatsfaktorene 1 og 2 begge er 0,17, mens skyggeprisen for produktet er 0,67. Det relative forholdet mellom skyggeprisene for innsatsfaktorene er lik det negative av den marginale substitusjonsraten for de samme faktorene på produktfunksjonen. Med andre ord viser skyggeprisene den negative hellingen for den del av effektivitetsfronten som er relevant for DMU_D . Hellingen på isokvanten mellom A og B er -1 . På samme måte ser man av tabell 3, linjen for DMU_C , at hellingen for linja BC er $+0,25$. Den marginale tekniske substitusjonsraten er derfor i dette området negativ.

For både DMU_A og DMU_B er skyggeprisen på restriksjonene for de to innsatsfaktorene 0,25 for begge faktorene. Dette viser at den marginale transformasjonsraten mellom innsatsfaktorene er 1. For C er naturligvis skyggeprisen for faktor 1 lik null, siden denne faktoren ikke vil bli fullt oppbrukt når vi transformerer observasjonspunktet C fram til effektivitetsfronten langs en rett linje fra origo. For innsatsfaktor 2 er skyggeprisen 0,8. I mitt enkle eksempel produseres bare ett produkt, og noen transformasjonsrate mellom produktene kan derfor ikke beregnes. Hvis det var flere produkter i formuleringen, vil man, på samme måte som for innsatsfaktorene, kunne beregne marginale substitusjonsrater mellom produktene på relevante deler av effektivitetsfronten, med utgangspunkt i skyggeprisene for produksjonsvariablene i dualformuleringen til den primale DEA formuleringen.

E er effektiv uten slakk på noen innsatsfaktor, og har DMU_E som basis. For DMU_E er imidlertid skyggepris for x_2 null, samtidig som det ikke er noen slakk for denne ressursen. Dette er et tegn på at det finnes alternative basiser for denne aktiviteten, uten at verdien på objektfunksjonen blir endret. Som vist, er den alternative basisen DMU_A . For tilpasning på linjen mellom DMU_B og DMU_C , har en, fra økonomisk synsvinkel, en pervers tilpasning. Dersom x_2 skal substitueres for x_1 og samtidig være på enhetsisokvanten, må forbruket av begge innsatsfaktorene økes samtidig. I området B-C viser derfor effektivitetsfronten en synkende grenseproduktivitet for x_1 . Økning av x_1 med en enhet ut over $x_1 = 3$ vil derfor redusere y med mindre man samtidig kompenserer med en økning i x_2 med 0,25. Den økonomiske tolkningen av dette området innebærer at det må være negativ kostnad på en av

innsatsfaktorene for at det skal være optimalt å tilpasse seg i dette området. Eksempler på optimal tilpasning i et slikt område kan en få med ekstrem subsidiering av innsatsfaktorene slik at de får negativ pris, eller det kan være kostnader med å bli kvitt innsatsfaktorer som man har til overs. En tilpasning som for DMU_C , er derfor 80 % effektiv dersom produsenten kostnadsfritt kan kvitte seg med overflødige innsatsfaktorer. Tilpasningen er imidlertid 100 % effektiv hvis det ikke er tilfelle. DMU_D er imidlertid alltid 67 % inputeffektiv, siden den relevante delen av det effektive referansesettet er upåvirket av om man forutsetter fri disposabilitet eller ikke.

2.3 DEA formulert som brøkprogrammeringsproblem.

Det eksemplet som jeg nettopp har gjennomgått, viser noen av mulighetene til DEA-metoden. Drøftingen av tilpasningen til DMU_C og DMU_D påpeker også noen av problemene med ukritisk bruk av metoden. Jeg skal nå gi en formell matematisk beskrivelse av DEA-modellen, og videre vise noen utvidelser. Til en viss grad bærer framstillingen preg av kronologien i utviklingen av DEA metoden.

Anta at en skal analysere n beslutningsenheter (bedrifter, avdelinger, produksjonsprosesser etc.). Disse kan kalles DMU_j ($j=1, \dots, n$). Hver DMU kan produsere ett eller flere produkter. y_{rj} er produsert mengde av produkt r for beslutningsenhet j . For å produsere produktene medgår en eller flere innsatsfaktorer. La x_{ij} betegne forbrukt mengde av innsatsfaktor i for beslutningsenhet j . Innsatsfaktorer og produkter må i utgangspunktet være ikke-negative for alle bedrifter.

I tilfellet med bare en output og en input, vil det kunne være rimelig å måle produksjonseffektivitet i form av en brøk hvor output divideres med input, se formel (1) i kapittel 1. Hvis vi nå går over til det flerdimensjonale tilfellet, med flere innsatsfaktorer og flere produkter, kan vi tenke oss en veid sum av innsatsfaktorene som en ny "kunstig" input og en veid sum av produktene som en ny "kunstig" output³. La oss anta at hver produsent

³Min betegnelse "kunstig" input og "kunstig" output tilsvarer det som av noen forfattere blir kalt *virtual* input og *virtual* output f.eks. Charnes, Cooper og Rhodes (1978 og 1981).

forsøker å maksimere brøken av kunstig output over kunstig input, når en også tar hensyn til at output-input brøken også skal være mulig (eng: feasible) dvs være i produksjonsmulighetsområdet. Vektene som de flerdimensjonale innsatsfaktorene og produktene veies med for å lage de skalare "kunstige" input og output, velges slik at output-input brøken for hver DMU blir størst mulig. DEA modellen gis på brøkform følgende matematiske formulering:

$$(2.1) \quad \text{Max } h_0 = \frac{\sum_{r=1}^s \eta_r \cdot y_{r0}}{\sum_{i=1}^m \xi_i \cdot x_{i0}}$$

når:

$$(2.2) \quad \frac{\sum_{r=1}^s \eta_r \cdot y_{rj}}{\sum_{i=1}^m \xi_i \cdot x_{ij}} \leq 1 \quad ; j=1, \dots, n,$$

$$(2.3) \quad -\eta_r / \sum_{i=1}^m \xi_i \cdot x_{i0} \leq -\delta < 0 \quad ; r=1, \dots, s,$$

$$(2.4) \quad -\xi_i / \sum_{i=1}^m \xi_i \cdot x_{i0} \leq -\delta < 0 \quad ; i=1, \dots, m.$$

y_{rj} og x_{ij} er observerte størrelser, mens η_r og ξ_i er løsningen på modellen.

Objektfunksjonen (2.1) innebærer at modellen forsøker finne verdier for η_r og ξ_i slik at objektfunksjonen blir maksimert. Tar en hensyn til restriksjonssettet (2.2) ser en at det er en restriksjon for hver DMU, og at objektfunksjonen for den DMU som studeres, vil finnes igjen som en restriksjon i (2.2). Derfor kan verdien på objektfunksjonen maksimalt få verdien en. (2.2) sier at for hver DMU kan veid output maksimalt være like stor som veid input. Restriksjonen (2.3) og (2.4) sikrer at vektene vi beregner bare kan anta positive verdier. Det økonomiske poenget med disse siste restriksjonene er å oppnå det samme som

Farrell (1957) oppnådde ved å definere inn punktene "points at infinity" (se diskusjonen rundt figur 1 i kapittel 1). I kapittel 2 er det effektive referansesettet delt opp i bl.a. $\text{Eff } L(y)$ og $\text{Weff } L(y)$. Det effektivitetsmålet som beregnes når η_j, ξ_i alle tvinges til å være strengt positive, er relativt til $\text{Eff } L(y)$. Dersom man ikke setter krav til streng positivitet, vil man sammenligne med det effektive referansesettet $\text{Weff } L(y)$. Løsningsteknisk er poenget at man skal unngå visse typer ulike løsningsvektorer som gir samme verdi på objektfunksjonen. Slike problemstillinger kalles i LP terminologi for "degenerering". Restriksjonen (2.3) og (2.4) vil bringe løsningen ut av visse degenereringssituasjoner. Slike degenererte løsninger vil kunne oppstå hvis det effektive referansesettet også er definert som de stiplede linjene i figur 1 i dette kapitlet, avsnitt 2.1. δ er definert som et meget lite tall større enn null. Størrelsen på δ er av praktisk betydning i numeriske beregninger. δ skal i teorien settes som en "infinitesimal" (uendelig liten) størrelse. I praksis vil den ofte måtte velges som et lite, men endelig positivt tall. For hjelp til å anslå verdien på δ kan man bruke følgende regel: for positive input og output defineres $r := \min(x_{ij} \forall i,j; y_{rj} \forall r,j)$. Da velges δ slik at $\delta < r$. I praksis kan x_{ij} og y_{ij} skaleres slik at $r \geq 1$, og δ settes som f.eks. $\delta = 10^{-6}$.

Den optimale verdien for h_0 blir $0 \leq h_0 \leq 1$, og kan tolkes som et effektivitetsmål for DMU_0 . Dersom $h_0 < 1$, så er ikke DMU_0 effektiv. Man kan imidlertid ikke med sikkerhet si at dersom $h_0 = 1$, så er DMU_0 effektiv, da $h_0 = 1$ er et nødvendig, men ikke tilstrekkelig kriterium for full effektivitet.

I formuleringen (2.1)–(2.4) beregnes den relative effektiviteten til en bestemt DMU, kalt DMU_0 . Det må løses n slike brøkprogram for å beregne den relative effektiviteten for alle DMU.

Restriksjonen

$$(2.2) \quad \sum_{r=1}^s \eta_r \cdot y_{rj} - \sum_{i=1}^m \xi_i \cdot x_{ij} \leq 0 \quad ; j=1, \dots, n,$$

betyr at den veide sum av output alltid skal være mindre enn eller lik den veide sum av input. De optimale vektene η_r og ξ_i multiplisert med faktisk innsatsforbruk og produksjonsresultater, danner h.h.v. "virtual input" og "virtual output". Vektene η_r og ξ_i

som beregnes i DEA er med på å gi et dimensjonsløst effektivitetsmål for den DMU som studeres. De vektene som beregnes, vil gi det maksimalt positive resultat for denne DMU. Det effektivitetsmålet som beregnes med DEA metoden, blir derfor et maksimalt fordelaktig effektivitetsmål, gitt observerte innsatsfaktorer og produkter. Ingen annen kombinasjon av vektorer kan gi et høyere effektivitetsmål.

Selv om produksjonsprosessen genererer mange produkter med bruk av mange innsatsfaktorer, så blir effektivitetsmålet en endimensjonal skalar objektfunksjon med de optimale vektene. Det forhold at DEA teknikken ikke baserer seg på veiing med markedspriser eller andre vektorer, gjør metoden egnet til effektivitetsmåling for ikke-økonomiske organisasjoner hvor mange vanlige økonomiske produktivitetsmål kan være vanskelige å anvende. I de tilfeller hvor markedspriser på innsatsfaktorene eller på produktene finnes, vil vektene som beregnes i DEA modellen kunne sammenlignes med faktiske markedspriser. Det er her de relative vektorer og de relative priser som er av interesse. Dersom de relative vektene i en effektiv DEA avviker meget fra de relative prisforhold i markedet, så er dette en indikasjon på at produsenten ikke er allokeringseffektiv, selv om den kan være teknisk effektiv. Bruk av de optimale vektene η_r og ξ_i i økonomiske analyser vil jeg komme tilbake til i seinere avsnitt i dette kapitlet.

2.4 Omformingen til en lineær programmeringsmodell.

Brøkprogrammeringsmodellen (2.1) – (2.4) kan omformes til et lineært programmeringsproblem via en transformasjon (se Charnes, Cooper (1962)):

$$(3) \quad \begin{aligned} v_i &= t \cdot \xi_i & i = 1, \dots, m, \\ u_r &= t \cdot \eta_r & r = 1, \dots, s, \\ t^{-1} &= \sum_{i=1}^m \xi_i \cdot x_{i0} > 0. \end{aligned}$$

I alle etterfølgende beregninger har jeg satt $t^{-1} = 1$. Dette er en praktisk konvensjon. Det

eneste nødvendige kravet er at t^{-1} er positiv⁴. I noen publiserte studier med DEA er t^{-1} satt til 100. Det beregnede effektivitetstallet vil da bli et tall mellom 0 og 100. Med mitt valg av t^{-1} omformes (2) til følgende LP problem:

$$(4.1) \quad \text{Max: } h_0 = \sum_{r=1}^s u_r \cdot y_{r0}$$

når:

$$(4.2) \quad \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{i0} = 1,$$

$$(4.3) \quad \sum_{r=1}^s u_r \cdot y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{ij} \leq 0 \quad ; j=1, \dots, n,$$

$$(4.4) \quad -u_r \leq -\delta < 0 \quad ; r=1, \dots, s,$$

$$(4.5) \quad -v_i \leq -\delta < 0 \quad ; i=1, \dots, m.$$

Den duale formuleringen til (4.1) – (4.3) er⁵:

$$(5.1) \quad \text{Min: } W_0 = w_0 - \delta \cdot \left(\sum_{i=1}^m s x_i + \sum_{r=1}^s s y_r \right)$$

når:

$$(5.2) \quad w_0 \cdot x_{i0} - \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_{ij} - s x_i = 0 \quad ; i=1, \dots, m,$$

⁴Charnes og Cooper (1962) viser at verdien på t^{-1} avhenger av verdien på telleren i objektfunksjonen for brøkprogrammeringsproblemet. Når telleren er positiv, skal $t^{-1} > 1$, mens negativ teller fører til $t^{-1} < 0$. Charnes og Cooper (1973) viser videre at omformingen bare gjelder som vist hvis restriksjonene er av typen $0 \leq Ax \leq b$, men ikke vil gjelde generelt hvis restriksjonene er av typen $a \leq Ax \leq b$, ($a, b \neq 0$), dvs at LP problemet er av typen "Interval Programming".

⁵Det gjøres stundom den feilen at restriksjonen om streng positivitet vist i (2.3) og (2.4) blir formulert som $\eta_r, \xi_i \geq \delta > 0 \quad \forall i, r$, i stedet for (4.4)–(4.5). Färe og Hunsaker (1986) formulerer (feilaktig) DEA med restriksjonene $u_r, v_i \geq \delta \quad \forall i, r$ i en modell tilsvarende vår modell (2.1)–(2.4).

$$(5.3) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - s y_r = y_{r0} \quad ; r=1, \dots, s,$$

$$(5.4) \quad w_0 \geq 0, \lambda_j, s x_i, s y_r \geq 0 \quad ; \forall j, i, r.$$

Formulering (4) betyr at vi maksimerer den veide sum av produktene for en bestemt DMU, gitt at den veide sum av innsatsfaktorer er summert til en, at den veide sum av produktene alltid er mindre enn eller lik den veide sum av innsatsfaktorene for alle produsenter (inkludert den som analyseres) og til slutt at de beregnede vektorer er strengt positive. Dualformuleringen (5) sier at, for en bestemt DMU₀, skal vi minimalisere denne DMUs forbruk av innsatsfaktorer, gitt at en kombinasjon av alle produsenters innsatsfaktorer danner en nedre grense (ligningssett (5.2)) og en kombinasjon av alle produsenters produksjon danner en øvre grense. Elementene λ_j er det som vi i kapittel 2, i gjennomgangen av de lineære modellene, kalte intensitetsvektoren λ . $s x_i$ og $s y_r$ er slakker på h.h.v. innsatsfaktor i og produkt r . $\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_{ij}$ og $\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj}$ genererer yttergrensene i mulighetsområdet for den teknologien vi studerer. Formulering (5) sier at innsatsforbruket til en bestemt DMU minimaliseres, gitt en output for denne samme DMU, spesifisert som vektoren y_{r0} ($r=1, \dots, s$).

u_r og v_i i (4) er skyggeprisene på restriksjonene for produkter og innsatsfaktorer i (5)⁶. Skyggepris på restriksjonene for (4.3) er verdien for λ_j i (5). I den videre framstillinga vil LP-formuleringene (4) og (5) bli brukt i numeriske beregninger. Formulering (5), med unntak fra objektfunksjonen, er identisk med effektivitetsmålet som i kapittel 2 ble kalt svakt input effektivitetsmål. Et outputeffektivitetsmål tilsvarende inputeffektivitetsmålet vist i (4.1)–(4.4) og (5.1)–(5.3), vil bli det resiproke av inputeffektivitetsmålet. En DEA modell formulert som (5) avspeiler en teknologi homogen av grad en.

⁶Vektene η_r og ξ_i fra (2.1)–(2.4) vil med mitt valg av verdi for t^{-1} få samme verdi som vektene u_r og v_i fra (4.1)–(4.5).

2.5 Eksakt definisjon av en fullt effektiv DMU.

I modell (5) er formulert inn slakk, slik at sx_i viser hvor mye innsatsfaktor i kan ytterligere reduseres når muligheten for proporsjonal reduksjon er uttømt. Dvs at denne slakken blir beregnet etter en sammenligning mellom et punkt på den effektive referansefronten og beregnet minimums innsatsfaktorer for den DMU som blir studert. Tilsvarende viser slakk sy_r hvor stor forskjell det er mellom den studerte DMUs faktiske produksjon og mulig maksimal produksjon på denne effektive del av effektivitetsfronten. Normativt kan vi derfor tolke slakk i restriksjonene på innsatsfaktorene eller produktene ved å si at det blir brukt for mye ressurser eller blir produsert for lite produkter. Forutsetter man fri "disposability" av output eller input, kan f.eks. mengden av innsatsfaktorer som det brukes for mye av, reduseres tilsvarende slakken, dvs uten at verdien på w_0 eller λ_j endres.

Kravet at det ikke skal være ledige ressurser, er et pareto-optimaliseringskrav; man er ikke i optimum hvis man kan gi bort ressurser uten å redusere output, eller hvis man kan øke produksjonen uten å bruke mer av innsatsfaktorene.

Charnes, Cooper og Rhodes (1981, s. 669) gir følgende definisjon av en effektiv DMU:

" i) Output Orientation: A Decision making Unit (=DMU) is not efficient if it is possible to augment any output without increasing any input and without decreasing any other output.

ii) Input orientation: A DMU is not efficient if it is possible to decrease any input without augmenting any other input and without decreasing any output.

A DMU will be characterized as efficient if, and only if, neither (i) nor (ii) obtains."

Dette betyr at en DMU bare er effektiv hvis $h_0 = 1$ ved løsning av (4) og alle slakkene i (5) er null samtidig. Det er vanlig å bruke (5.1) – (5.4) i empiriske analyser. En får da et klart kriterium for optimum, idet $W_0 = 1$ i (5.1) hvis og bare hvis den aktuelle DMU er effektiv.

DEA metoden beregner for hver DMU et effektivitetsmål som et radiaalt skaleringsmål. Dette målet viser mulig reduksjon i innsatsforbruket for en bestemt mengde output. Alternativt kan beregnes mulig økning i output gitt en bestemt mengde innsatsfaktorer. En observasjon $(x^0, y^0) \in GR(x, y)$ blir sammenlignet med $W_{eff} L(y)$. Som drøftet i kapittel 2, er det ønskelige å sammenligne med $Eff L(y)$ når en skal måle innsatseffektivitet. Boyd og Färe (1984) foreslår at man i stedet stiller svakere krav til effektivt referansesett, dvs at man i praksis sammenligner med $W_{eff} L(y)$ eller $W_{eff} P(x)$. Det betyr at restriksjonen på aktivitetene $\eta_r > 0$ og $\xi_i > 0$ i (2) endres til $\eta_r \geq 0$ og $\xi_i \geq 0$, og tilsvarende endringer i (4.4) og (4.5). For ligningssett (5) vil konsekvensen bli at objektfunksjonen ikke vil inneholde leddet $-\delta \cdot \left(\sum_{i=1}^m s x_i + \sum_{r=1}^s s y_r \right)$. Formuleringene som i (4) med $\delta > 0$ som et ikke-arkimediske lite tall, er ikke i egentlig forstand et LP problem, se Charnes og Cooper (1984). Et ikke-arkimediske problem kan løses eksakt ved spesielt tilpassede algoritmer⁷, men ikke med program beregnet for å løse LP-formuleringer. I praksis vil DEA formuleringer bli løst med standard LP algoritmer ved å fastsette $\delta > 0$ som et lite, endelig tall. F.eks. foreslår CC (1984) $\delta = 10^{-5}$ samtidig som alle input og output forsøkes skalert til å være i området 1 til 100, og $\sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{i0} = 100$, (i stedet for 1 som jeg bruker). Med disse endringene vil LP-løsning av DEA modellen av type (5) gi en god tilnærming til det ikke-arkimediske utgangspunktet.

Det må imidlertid slås fast at den ikke-arkimediske konstruksjonen som ble brukt av Charnes, Cooper *et al* i flere arbeider, har hatt vanskelig for å bli fullt ut forstått, spesielt av økonomer og økonometrikere.⁸ Riktige effektivitetsmål, gitt det ønskede effektive referansesettet, kan imidlertid beregnes uten å ty til såkalt ikke-arkimediske optimalisering. Via en totrinns prosedyre, kan det lages en algoritme som først beregner en pareto-optimal

⁷CC (1984) viser til algoritmen NONARC utviklet av Dr. Iqbal Ali ved Center for Cybernetic Studies, University of Texas at Austin.

⁸Charnes og Cooper (1984, s 333) gir en livlig oversikt over noen av de problemene som oppsto rundt begrepet "ikke-arkimediske" da DEA først ble introdusert til fagjournalene i økonomi og operasjonsanalyse. Det påvises at så langt tilbake som 1952 presenterte Charnes (1952) ikke-arkimediske metoder for å oppnå en degenereringsfri simplex-metode.

effektivitetsfront. Deretter beregnes så en individuell beslutningsfatters effektivitet relatert til denne fronten. Beregning av en pareto-optimal front som referansesett er vist i Charnes *et al* (1985). En ytterligere klassifisering av effektive referansesett i relasjon til DEA er gjort i Charnes, Cooper og Thrall (1986).

3. TOLKNING AV FORMULERING OG AV LØSNING.

3.1 Teknisk effektivitet kontra priseffektivitet.

DEA måler individuell teknisk effektivitet relatert til andre beslutningsenheter av samme type. Den effektive referanseteknologien blir en stykkevis lineær produktfunksjon. Som poengtert flere ganger i kapittel 2, er en normalt ikke utelukkende interessert i beregning av teknisk effektivitet. En teknisk effektiv produsent kan også være pris- (allokerings-)ineffektiv. Ved effektivitetsmålinger er det derfor ønskelig i prinsippet også å kunne skille ut priseffektiviteten til en beslutningsfatter. Først når en har kombinert priseffektivitet og teknisk effektivitet, kan en komme fram til den såkalte totaleffektiviteten.

Allokeringseffektivitet kan beregnes ved først å beregne totaleffektivitet, og så beregne allokeringseffektivitet ved å huske at i vår modellverden er totaleffektivitet produktet av allokeringseffektivitet og teknisk effektivitet, se f.eks. slutten av avsnitt 2.1.2 i kapittel 2. Totaleffektivitet i betydningen kostnadsminimaliserende innsatsfaktorkombinasjon, kan beregnes av følgende modell:

$$(6.1) \quad \text{Min: } \sum_{i=1}^m p_i \cdot x_i$$

når:

$$(6.2) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_{ij} \leq x_{i0} \quad ; i=1, \dots, m,$$

$$(6.3) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} \geq y_{r0} \quad ; r=1, \dots, s,$$

$$(6.4) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_{ij} - x_i = 0 \quad ; i=1, \dots, m,$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j.$$

I denne modellen er p_j pris på innsatsfaktor j . Objektfunksjonen (6.1) sier at modellen skal beregne den kostnadsminimaliserende kombinasjonen av innsatsfaktorer. Ligningssett (6.4) er derfor balanseligninger eller definisjonsligninger for variabelen x_i . Ligningssettene (6.2) og (6.3) sikrer at den prisoptimale innsatsvektoren x_j er i produksjonsmulighetsområdet, generert av observasjonene av innsatsfaktorene og produksjonen for alle DMU_j.

Totaleffektivitet er et mål for forholdet mellom den kostnadsminimaliserende kombinasjon av innsatsfaktorer, og den faktiske kostnad en produsent har (gitt en bestemt output). La oss på vektorform kalle de eksogene prisene på innsatsfaktorer for p og vektoren av kostnadsminimaliserende innsatsfaktorer beregnet etter modell (6) for x^* . La x^0 være den faktiske innsatsfaktorforbruk for DMU₀. Da kan total effektivitet for DMU₀ beregnes som $p \cdot x^* / p \cdot x^0$. Teknisk inputeffektivitet kan beregnes fra modell (5), og det er da elementært å beregne allokeringseffektivitet for en bestemt DMU. Eksplisitt beregning av allokeringseffektivitet er sjelden i publiserte DEA studier. Et unntak er Banker (1985). Det kan være grunn til å merke seg at Farrell (1957) eksplisitt frarådet å beregne priseffektivitet på bedrifts nivå⁹. I den empiriske delen av mitt arbeid har jeg ikke beregnet eksplisitt allokeringseffektivitet. I stedet har jeg basert mine prisanalyser på tolkning av skyggeprisene for restriksjonene i modell (5).

⁹Farrell (1957) skriver om dette: " .. price efficiency is very sensitive to the introduction of new observations and to errors in estimating factor prices, so that it is likely to be rather unstable." (s 260). Han oppsummerer sin analyse på dette punktet med: " Thus, price efficiency is a measure that is both unstable and dubious of interpretation .. " (s 261). Teknisk effektivitetsmål er derimot fri for slike feilkilder og representerer "the undisputed gain" som kan oppnås av en produsent.

3.2 Den marginale substitusjonsraten og den marginale transformasjonsraten.

For en produktfunksjon med flere produkter og flere innsatsfaktorer, kan en generelt regne seg fram til de marginale substitusjonsratene for innsatsfaktorer og de marginale transformasjonsratene for produkter. En kan også regne seg fram til sammenhengen mellom innsatsfaktorer og produkter, ved å beregne grenseproduktiviteten for produktene m.h.p. hver innsatsfaktor. Som kjent skal verdien av grenseproduktet for hver innsatsfaktor være lik prisen på denne innsatsfaktor i et fritt ("unconstrained") kostnadsminimaliserende optimum.

DEA er en analysemetode der en ikke bruker prisene på innsatsfaktorer eller eventuelt sluttproduktene som informasjon i beregning av tekniske effektivitetsmål. I den generelle løsningen av (4) eller (5) får man beregnet vektorer på innsatsfaktorene. Disse kan brukes i økonomiske analyser.

v_i^* i (4), som også er de optimale skyggeprisene på restriksjonene i (5), kan tolkes som marginalproduktivitene til innsatsfaktor i . Det kan derfor utledes at

$$\frac{d x_i}{d x_k} = - \frac{v_k^*}{v_i^*}$$

for alle k, i ($i=1, \dots, m$ og $k \neq i$), se Charnes, Cooper og Rhodes (1978, s 437 ff).

Dette er det normale uttrykket for den marginale tekniske substitusjonsraten mellom to innsatsfaktorer. Fra generell teori for lineær programmering vet en at $v_i^* \geq 0$, og i DEA modellen at $v_i^* > 0$. Den marginale tekniske substitusjonsraten for den fronten vi genererer, er derfor positiv. Brøken ovenfor viser i hvilket forhold innsatsfaktorene k og i ($j \neq k$) kan substitueres på den effektive delen av produksjonsmulighetsfronten. De beregnede forholdene $-v_k^*/v_i^*$ for ulike innsatsfaktorer i og k skal i allokeringsoptimal tilpasning være lik de relative priser for de samme innsatsfaktorer. La meg kalle de virkelige prisene for innsatsfaktorene i og k for h.h.v. p_i og p_k . Dersom sammenhengen mellom den

beregnete tekniske marginale substitusjonsraten og det faktiske relative prisforhold for innsatsfaktor i og k er $p_i/p_k = v_i^* / v_k^*$, så vil tilpasningene til de bedriftene som genererer dette lineære segmentet av den estimerte isokvanten også være priseffektive. Den totale ineffektiviteten til en DMU er i så tilfelle bare teknologisk ineffektivitet. I motsatt fall vil det være til stede en prisineffektivitet i tillegg til en eventuell teknisk ineffektivitet.

Sammenhengen mellom de beregnede vektene v_i og u_i , den marginale substitusjonsraten og den marginale transformasjonsraten, kan vi illustrere med følgende sitat fra CCR (1981, s 675):

"Borrowing from natural science terminology in physics and engineering, we shall refer to the numerator values for the functional in (2) as providing a "virtual output" and the denominator as providing a "virtual input". The u_i and v_i will be regarded as "virtual rates of transformation" from the observed input and output values into these virtual inputs and outputs. The result will be a dimensionless ratio which transforms into the actual (efficiency measure) ratio when these u_i^* and v_i^* are optimal. The v_i^* are interpretable as marginal productivities relative to this virtual input as a measure of "output potential". Similarly, for any such output potential as may be specified, the u_i^* may be interpreted as efficient marginal rates of transformation from the observed outputs to the virtual output with a resulting output-to-input ratio that will not exceed unity." (Referansen til ligningssett (2) er til mine numreringer.)

Få empiriske analyser er gjort av den marginale substitusjonsraten og den marginale transformasjonsraten i DEA. To unntak er Banker og Maindiratta (1986) og Banker, Conrad og Strauss (1986). I den siste studien ble beregnet gjennomsnittlige marginale transformasjonsrater for ulike pasientgrupper. Resultatene kunne tolkes slik at det var betydelige ulike marginale substitusjonsrater for ulike pasientgrupper. Det bildet stadfester at noen behandlingsformer er mer ressurskrevende enn andre. De tallmessige størrelsene viser hvor mye man potensielt kan øke produksjonen i en gruppe når man reduserer produksjonen i en annen. Banker, Conrad og Strauss viste også at de marginale output substitusjonsratene var signifikant ulike mellom de mest effektive og de minst effektive avdelingene.

3.3 Grenseproduktiviteter.

De optimale verdiene u_r^* og v_i^* viser hver for seg grenseproduktiviteter for de virtuelle output og input, noe som framgår av sitatet fra CCR fra slutten av avsnitt 3.2 foran.

Tolkningen av u_r^* er da at den viser den marginale endring i total output ved en endring i produktet y_{r0} , gitt at alle input er uendret. Tilsvarende vil v_i^* kunne tolkes som et mål for endring i total input gitt output konstant. Konkret er derfor u_r^* og v_i^* den marginale endringen i effektivitetstallet til en gitt DMU ved partielle endringer i h.h.v. output y_{r0} og input x_{i0} . Forutsetningen for denne tolkningen er at B^{-1} i LP løsningen ikke endres¹⁰. Forutsetningen vil normalt være oppfylt for alle ineffektive DMU-er, i hvert fall ved marginale endringer av y_{r0} og x_{i0} .

Hva er så grenseproduktet $\partial y_{r0} / \partial x_{i0}$ for vilkårlig i og r ? Den implisitte produktfunksjonen i fler output – fler input tilfellet kan uttrykkes som:

$$F(y_1, y_2, \dots, y_s; x_1, x_2, \dots, x_m) = 0.$$

La $F(Y, X) = 0$ være uttrykket for et vilkårlig lineært segment av produksjonsmulighetsfronten beregnet ved DEA. La videre (\bar{X}, \bar{Y}) være et indre punkt på et slikt segment¹¹. Da kan grenseproduktet til output y_{r0} m.h.p. innsatsfaktor x_{i0} (i punktet (\bar{X}, \bar{Y})) uttrykkes som:

¹⁰Matrisen B er i standard LP-terminologi vektorene til alle initielle basisvariabler. Initielt er $B = B^{-1} = I$. I løsningsprosedyren fram til optimum, vil både B og B^{-1} endres. B^{-1} er sentral i beregning av den optimale løsning, og i tolkning av denne, deriblant

sensitivitetsanalyser. For forklaring av den sentrale betydningen av B^{-1} i LP, kan vises til enhver litt viderekommen bok om LP, f.eks. Hillier og Lieberman (1974) kap. 16.

¹¹Vi er interesserte i "indre punkter" fordi $F(X, Y)$ skal være deriverbar i en liten omkrets rundt (\bar{X}, \bar{Y}) .

$$\partial y_{r0} / \partial x_{i0} = -(\partial F / \partial x_{i0}) / (\partial F / \partial y_{r0}).$$

I DEA vil, siden segmentene på $F(X, Y) = 0$ er stykkevis lineære, grenseproduktet $\partial y_{r0} / \partial x_{i0}$ være stabilt (dvs uendret) over hele det lineære segmentet, dvs så lenge ikke endringer i X og Y fører til basisendringer i LP modellen som beregner fronten. Sagt i en annen terminologi, så vil grenseproduktet være stabilt så lenge bedriftene i det effektive referansesettet til en ineffektiv DMU₀ er de samme.

Et punkt på den pareto-optimale delen av effektivitetsfronten kan uttrykkes som:

$$U^* Y - V^* X = 0^{12}$$

og dette er DEA modellens uttrykk for det generelle $F(\cdot) = 0$.

En ser da at

$$\frac{\partial (U^* Y - V^* X)}{\partial y_{r0}} = u_{r0}^*$$

og

$$\frac{\partial (U^* Y - V^* X)}{\partial x_{i0}} = -v_{i0}^*.$$

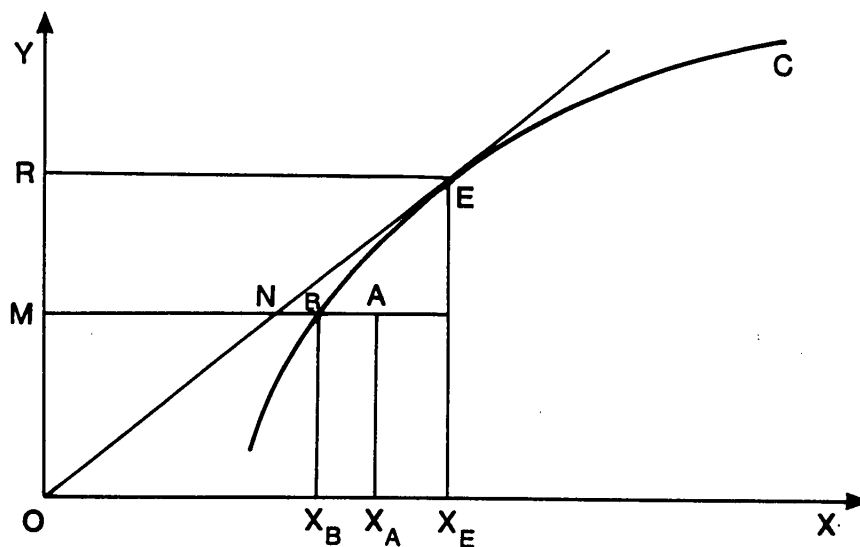
Følgelig vil $\partial y_{r0} / \partial x_{i0} = v_{i0}^* / u_{r0}^*$ være DEA uttrykket for grenseproduktet for produktet y_{r0} m.h.p. innsatsfaktoren x_{i0} målt i den effektive vektor (X, Y) .

¹²Alternativt kan et punkt på effektivitetsfronten uttrykkes som $U^* X - V^* Y - u_0^* = 0$, under forutsetning at man bruker en annen definisjon av produksjonsmulighetsområdet, se avsnitt 4.1.

4. UTVIDELSER AV BASISMODELLEN.

4.1 Skalaeffektivitet i tillegg til teknisk effektivitet.

DEA metoden for å måle teknisk effektivitet er utviklet ytterligere for å identifisere skalaeffektivitet. I framstillingen videre i dette avsnittet skal vi se bort fra allokeringseffektivitet. Den totale effektiviteten kan splittes opp i to faktorer; en faktor som måler teknisk effektivitet gitt en bestemt skala, og en annen som måler skalaeffektiviteten. De prinsipielle forskjellene mellom disse to målene ble tatt opp i kapittel 2, og vil i dette kapitlet bli illustrert ved figur 2 nedenfor. Figuren er bearbeidet fra lignende figurer som finnes i Banker, Charnes og Cooper (1984,s 1089) og i Banker (1984,s 38).



Figur 2: Framstilling av produksjonsmulighetskurven i x - y diagrammet.

Forklaring:

$A = (x_A, y_A)$ representerer den DMU som jeg analyserer,

$B = (x_B, y_B)$ representerer et teknisk innsatseffektivt referansepunkt med den samme skalastørrelse,

$E = (x_E, y_E)$ representerer et teknisk og skalaeffektivt punkt ved den mest effektive skalaen.

I tilfellet med én innsatsfaktor og ett produkt blir den optimale skalaen definert som det punktet hvor en rett linje fra origo tangerer produksjonsmulighetsområdet. Det er punktet E i figur 2. Man kan med en gang se at DMU_A ikke er effisient. Den ligger ikke på effektivitetsfronten jeg har tegnet opp, representert ved punktene B, E og C.

Den tekniske effektiviteten er definert som:

$$(7) \quad \frac{MB}{MA} = \frac{Y_A}{X_A} / \frac{Y_B}{X_B} = \frac{X_B}{X_A}.$$

Skalaeffektiviteten er:

$$(8) \quad \frac{MN}{MB} = \frac{Y_B}{X_B} / \frac{Y_N}{X_N} = \frac{X_E \cdot Y_B}{X_B \cdot Y_E}.$$

Teknisk og skalaeffektivitet samlet blir opplagt:

$$(9) \quad \frac{MN}{MA} = \frac{Y_A}{X_A} / \frac{Y_N}{X_N} = \frac{X_E \cdot Y_A}{X_A \cdot Y_E}.$$

Identifisering av skalaineffektivitet i en DEA modell kan enkelt gjøres ved å endre på de aksiomer DEA bygger på. Banker (1980), og seinere utvidet i Banker (1984) og Banker, Charnes og Cooper (1984), har definert produksjonsmulighetsområdet for DEA som:

$$T := \{(x,y): y \geq 0 \text{ kan bli produsert av } x \geq 0\}.$$

Mulighetsområdet T har følgende egenskaper, formulert som de fire etterfølgende postulater:

- 1) Mengden er konveks, dvs dersom $(x_j, y_j) \in T, j=1, \dots, n$ og $\gamma_j \geq 0$ er ikke-negative skalarer slik at $\sum_{j=1}^n \gamma_j = 1$, da er $(\sum_j \gamma_j x_j, \sum_j \gamma_j y_j) \in T$.
- 2) Ineffektiv produksjon er alltid mulig, dvs dersom $(x, y) \in T$ og $x' \geq x$, da er $(x', y) \in T$. Tilsvarende, dersom $(x, y) \in T$ og $y' \leq y$, da er $(x, y') \in T$.
- 3) Konstant skalautbytte (engelsk: "ray unboundedness"), dvs dersom $(x, y) \in T$, da er også $(kx, ky) \in T$ for enhver $k > 0$.
- 4) T er snittet av alle sett \hat{T} som tilfredsstiller 1), 2) og 3).¹³

Med utgangspunkt i disse fire aksiomene kan inputeffektivitet i DEA nå uttrykkes som:

$$(10.1) \quad \text{Min: } w_0$$

når:

$$(10.2) \quad w_0 x_{i0} \geq k \cdot \sum_{j=1}^n \gamma_j \cdot x_{ij} \quad ; i=1, \dots, m,$$

$$(10.3) \quad y_{r0} \leq k \cdot \sum_{j=1}^n \gamma_j \cdot y_{rj} \quad ; r=1, \dots, s,$$

$$(10.4) \quad \sum_{j=1}^n \gamma_j = 1,$$

$$(10.5) \quad \gamma_j \geq 0 \forall j; k > 0.$$

Ved å definere $\lambda_j = k \cdot \gamma_j$ og sette inn i (10) ovenfor, får man:

¹³Postulatene 1) – 3) er forholdsvis selvforklarende. Postulat 4) er med for at T skal være den "minste" mengden som er konsistent med observasjonssettet og postulatene 1) – 3). Se Banker (1980, kapittel 6, s 19) og Banker, Charnes og Cooper (1984, s 1082).

$$(11.1) \quad \text{Min: } w_0$$

når:

$$(11.2) \quad w_0 \cdot x_{i0} - \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_{ij} \geq 0 \quad ; i=1, \dots, m,$$

$$(11.3) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} \geq y_{r0} \quad ; r=1, \dots, s,$$

$$(11.4) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = k > 0,$$

$$(11.5) \quad \lambda_j \geq 0 \quad \forall j.$$

Ligning (11.4) kan fjernes da den alltid vil være oppfylt. Restriksjonen (11.5) om ikke-negativitet på alle λ_j er implisitt. Dualformuleringen til (11.1)–(11.3) blir på vektorform når $U := (u_1, \dots, u_r, \dots, u_s)$, $Y_0 := (y_{10}, \dots, y_{r0}, \dots, y_{s0})$, $V := (v_1, \dots, v_i, \dots, v_m)$, $Y_j := (y_{1j}, \dots, y_{rj}, \dots, y_{sj})$ og $X_j := (x_{1j}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mj})$:

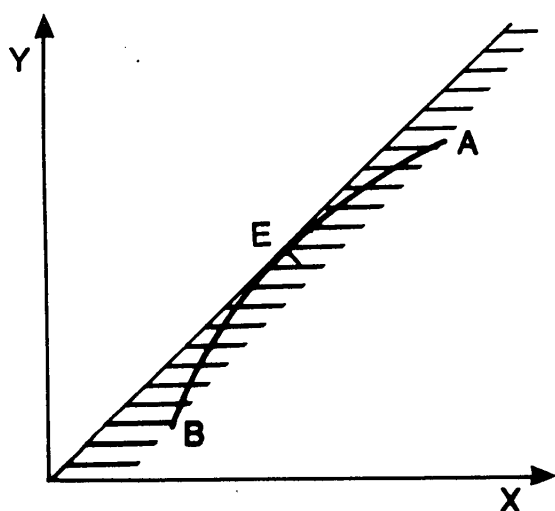
$$(12) \quad \text{Max: } U^T Y_0$$

når:

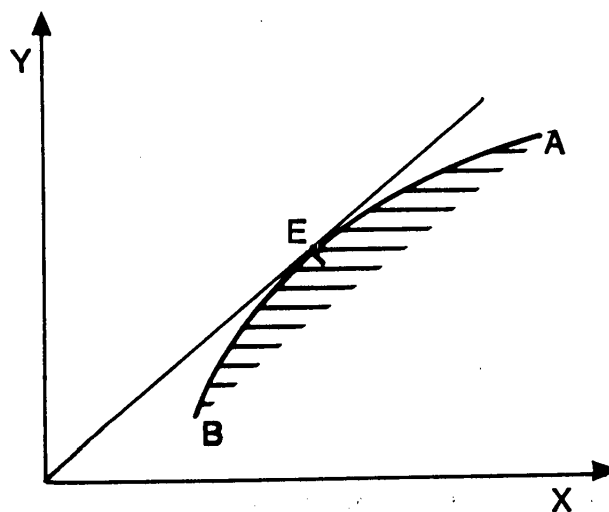
$$\begin{aligned} V^T X_0 &= 1, \\ U^T Y_j - V^T X_j &\leq 0 \quad ; j=1, \dots, n, \\ U &\geq 0, V \geq 0. \end{aligned}$$

(12) er identisk med (4) bortsett fra at hvert element u_r og v_i i U og V i (12) nå er ikke-negative, mens de tilsvarende i (4) er strengt positive.

Postulat 3 ovenfor ("ray unboundedness") definerer skalaelasticitet lik 1. Hvis postulat 3 fjernes, mens de øvrige postulatene beholdes, står man igjen med konveksitetsaksiomet, ikke-effektivitetsaksiomet og kravet om at mulighetsområdet er en lukket mengde. Forskjellen for produksjonsmulighetsområdet og det effektive referansesettet med de to ulike settene med aksiomer, kan uttrykkes i et x - y diagram som vist i de følgende to figurene.



Figur 3A: Mulighetsområdet med
postulat 3



Figur 3B:
Mulighetsområdet uten
postulat 3.

I figurene 3A og 3B er skravert felt produksjonsmulighetsområdet h.h.v. med og uten postulat 3. Linjen B–E–A er fronten på produksjonsmulighetsområdet generert av konvekse kombinasjoner av observasjonene samt ikke-effektivitetsaksiomet. I figur 3B er det skraverte feltet produksjonsmulighetsområdet. I figur 3A er vist effekten av at mulighetsområdet også skal omfatte en direkte skalering opp eller ned av enhver observasjon i settet. Punktet E viser en effektiv tilpasning i begge produksjonsmulighetsområdene. I figur 3B vil E være det effektive punktet; i figur 3A er alle punktene langs linja OE (med fortsettelse) like effektive som punktet E. Observasjonene langs linjen A–B vil i figur 3A ikke være effektive (med unntak av punkt E), siden en skalering av E alltid vil være minst like god.

La meg definere et mulighetsområde uten kravet om at k ganger et vilkårlig observasjonspunkt også skal ligge i mulighetsområdet. Postulat 3) tas bort, og modellen

baseres på postulatene om konvekksitet og ikke-effektivitet. Beregning av inputeffektivitet relatert til dette mulighetsområdet blir:

$$(13.1) \quad \text{Min: } w_0$$

når

$$(13.2) \quad w_0 \cdot x_{i0} - \sum_{j=1}^n \gamma_j \cdot x_{ij} \geq 0 \quad ; i=1, \dots, m,$$

$$(13.3) \quad \sum_{j=1}^n \gamma_j \cdot y_{rj} \geq y_{r0} \quad ; r=1, \dots, s,$$

$$(13.4) \quad \sum_{r=1}^s \gamma_j = 1, \\ \gamma_j \geq 0 \quad \forall j, \text{ og } w_0 \geq 0.$$

Sammenlignes (13) med (10), ser vi at konstanten k i (10.2) og (10.3) har falt ut pga borttaking av postulat 3). Dualformuleringen til (13) er:

$$(14) \quad \text{Max: } \sum_{r=1}^s u_r \cdot y_{r0} + u_0$$

når:

$$\sum_{r=1}^s u_r \cdot y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{ij} + u_0 \leq 0 \quad ; j=1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{i0} = 1,$$

$$u_r, v_i \geq 0 \quad \forall i \text{ og } j, \text{ og } u_0 \leq 0.$$

Formuleringen (14) avviker fra (4) med en variabel (aktivitet) u_0 som er uten restriksjon m.h.p. fortegn, samt ikke-negativitet for u_r og v_i mens (4) spesifiserer strengt positiv u_r og v_i . Modell (14) er egnet til å analysere skalaeffektiviteten for input-variablene. Etter transformasjon med (3) er (14) ekvivalent med følgende brøkprogrammeringsproblem:

$$(15.1) \quad \text{Max } h_0 = \frac{\sum_{r=1}^S \eta_r \cdot y_{r0} + \eta_0}{\sum_{i=1}^m \xi_i \cdot x_{i0}}$$

når:

$$(15.2) \quad \frac{\sum_{r=1}^S \eta_r \cdot y_{rj} + \eta_0}{\sum_{i=1}^m \xi_i \cdot x_{ij}} \leq 1 \quad ; j=1, \dots, n,$$

$$(15.3) \quad \eta_r, \xi_i \geq 0 \quad \forall r, i \text{ og } \eta_0 \geq 0.$$

I modellutviklingen (13) til (15) er vist beregning av input skalaeffektivitet. En modell for å beregne skalaeffektivitet for outputvariablene blir analogt:

$$(16.1) \quad \text{Max: } h_0$$

når:

$$(16.2) \quad h_0 y_{r0} - \sum_{j=1}^n \gamma_j \cdot y_{rj} \leq 0 \quad ; r=1, \dots, s,$$

$$(16.3) \quad \sum_{j=1}^n \gamma_j \cdot x_{ij} \leq x_{i0} \quad ; i=1, \dots, m,$$

$$(16.4) \quad \sum_{j=1}^n \gamma_j = 1,$$

$$(16.5) \quad \gamma_j \geq 0 \quad \forall j, \text{ og } h_0 \geq 0.$$

Med utgangspunkt i ligningssystem (15), kan det vises at man har

- a) økende skalautbytte hvis og bare hvis $u_0^* > 0$,
- b) konstant skalautbytte hvis og bare hvis $u_0^* = 0$,
- c) avtakende skalautbytte hvis og bare hvis $u_0^* < 0$.

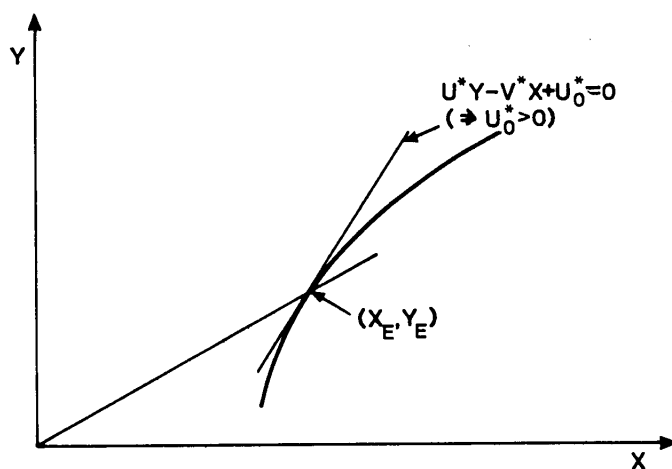
En måte å vise dette på er å ta utgangspunkt i at

$$(17) \quad \sum_{r=1}^s u_r^* \cdot y_r - \sum_{i=1}^m v_i^* \cdot x_i + u_0^* = 0$$

er et støttehyperplan (engelsk: "supporting hyperplane") for produksjonsmulighetsmengden T hvor u_r^* , v_i^* og u_0^* er optimale verdier fra løsningen av (14). La meg nå betrakte et punkt $(y_E, x_E) \in T$ som er effisient. Man har da for det første at (17) er et støttehyperplan for T i punktet (x_E, y_E) . Se videre på punkter "i nærheten" av (x_E, y_E) , og la $Z_\delta \equiv [(1 + \delta)x_E, (1 + \delta)y_E]$ være et slikt punkt i nærheten av (x_E, y_E) ved å velge δ tilstrekkelig liten. La oss se nærmere på følgende tre muligheter, nedenfor merket a), b) og c).

a) Økende utbytte m.h.p. skalaen er til stede hvis og bare hvis der finnes en $\delta^* > 0$, slik at

$$1) Z_\delta \in T \text{ for } \delta^* > \delta \geq 0 \text{ og } 2) Z_\delta \notin T \text{ for } -\delta^* < \delta < 0.$$

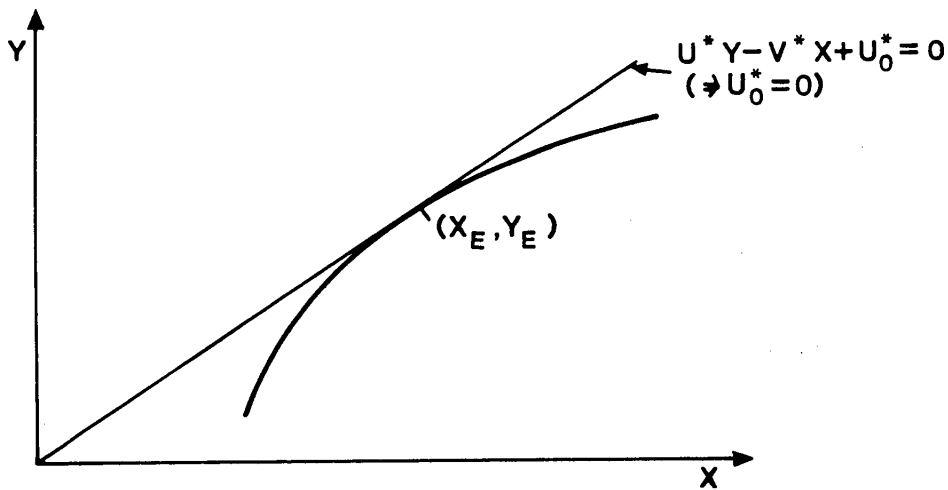


Figur 4 A: Økende utbytte m.h.p. skalaen.

Punktet (x_E, y_E) vist i figur 4 A er et slikt punkt fordi det tilfredsstiller både 1) og 2) ovenfor. Dette kan en se fordi en liten proporsjonal økning i x og y til $\bar{x} = (1 + \delta)x$ og $\bar{y} = (1 + \delta)y$, $\delta > 0$ fører til at $(\bar{x}, \bar{y}) \in T$, mens en tilsvarende liten reduksjon gjør $Z_\delta \notin T$.

b) Konstant skalautbytte er til stede hvis og bare hvis der finnes en $\delta^* > 0$ slik at 1) $Z_\delta \in T$ for alle δ slik at $|\delta| < \delta^*$ og 2) $Z_\delta \notin T$ for alle δ slik at $0 < |\delta| < \delta^*$.

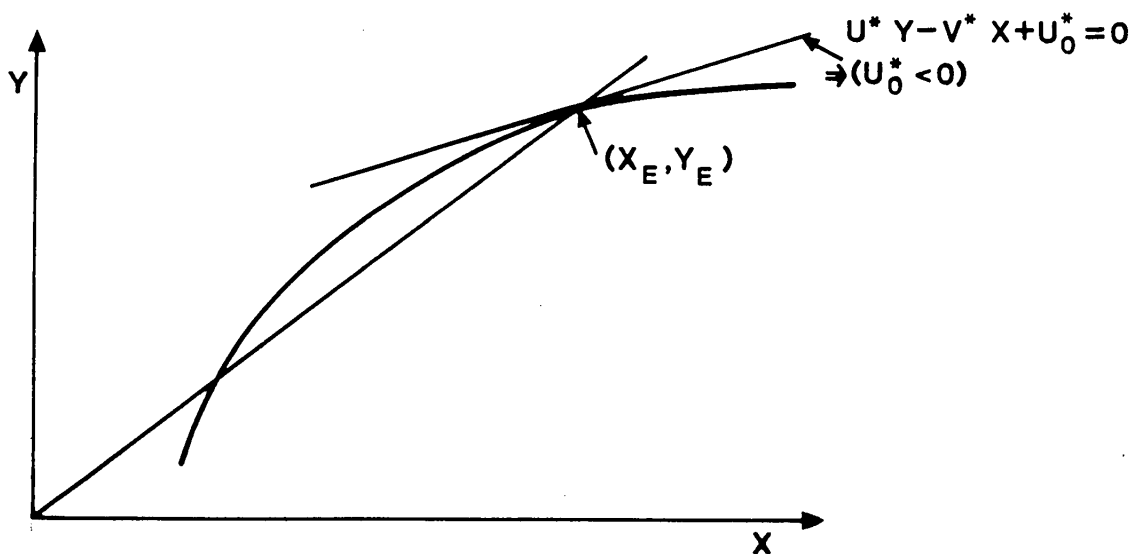
Dette er illustrert i figur 4B som viser at virkningen av en proporsjonal økning eller minking av (X, Y) langs linjen fra origo gjennom (x_E, y_E) vil bringe det nye punktet Z_δ utenfor T . Bare $\delta = 0$ vil oppfylle $Z_\delta \in T$.



Figur 4B: Virkingen av en proporsjonal økning av (x,y) ved konstant skalautbytte.

- c) Avtakende utbytte m.h.p. skalaen vil man ha hvis og bare hvis det finnes en δ^* slik at 1) $Z_\delta \notin T$ for $\delta^* > \delta > 0$, og 2) $Z_\delta \in T$ for $-\delta^* < \delta \leq 0$.

Dette er illustrert i figur 4C som viser at en proporsjonal økning av (x, y) ut fra (x_E, y_E) vil bringe $Z_\delta \notin T$, mens en tilsvarende reduksjon ut fra (x_E, y_E) vil gi $Z_\delta \in T$.



Figur 4C: Avtakende utbytte m.h.p. skalaen.

Sammenhengen mellom verdien på u_0^* og skalautbyttet kan nå oppsummeres i følgende tre punkter. Punktene illustreres med figur 4A – 4C og avlesning av verdien for u_0^* .

A. Det er lokalt økende utbytte m.h.p. skalaen hvis og bare hvis $u_0^* > 0$. Økende utbytte m.h.p. skalaen faller sammen med $\sum_j \lambda_j < 1$ i (11) (eller (5)).

B. Det er lokalt synkende utbytte m.h.p. skalaen hvis og bare hvis $u_0^* < 0$. Dette vil falle sammen med $\sum_j \lambda_j > 1$ i (11).

C. Det er lokalt konstant utbytte m.h.p. skalaen hvis og bare hvis $u_0^* = 0$. Da vil $\sum_j \lambda_j = 1$ i (11). I dette tilfellet vil objektfunksjonen (verdien for w_0) for en bestemt DMU_j bli identisk lik ved optimering ved (11) og (13). I alle andre tilfeller vil den beregnede effektiviteten beregnet ved (11) bli lavere enn ved (13).

I punktene A–C ovenfor er vist et operativt kriterium som kan anvendes til å beregne om DMU–er som ligger på effektivitetsfronten har stigende, synkende eller konstant utbytte m.h.p. skalaen. I praksis vil det være best å bruke verdien for $\sum_j \lambda_j$ som kriterium. Grunnen til det er at verdien for u_0^* kan være ustabil i knekkpunkter (hjørnepunkter) i mulighetsområdet.¹⁴ Tilsvarende mangel på entydighet er ikke erfart for $\sum_j \lambda_j$ beregnet med modell (5) eller (11).

¹⁴Erfaring med å løse samme DEA formulering (14) på ulike EDB program gir eksempler på at man kan få ulike verdier på u_0^* og at dette skyldes at støttende hyperplan ikke er entydig definert på knekkpunkter på mulighetsområdet.

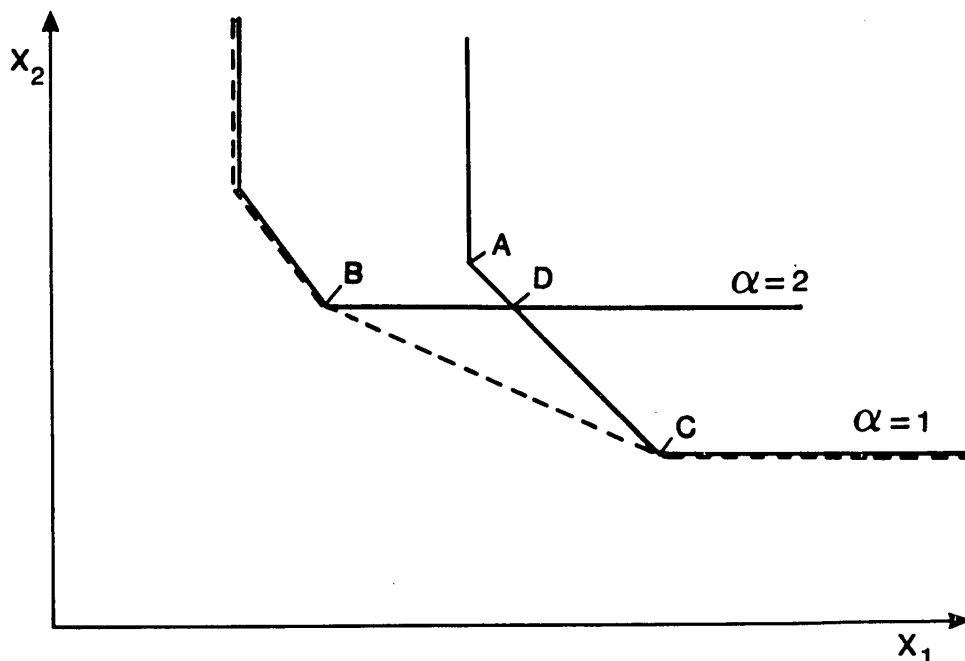
4.2 Om programeffektivitet.

Som allerede påpekt, kan en ved DEA analysere beslutningstakers tekniske effektivitet. Ofte vil en kunne si at dette er det samme som "managerial efficiency", dvs. det er et mål for hvor godt lederen klarer å utnytte innsatsfaktorene for å produsere "resultater", når han/hun blir sammenlignet med andre beslutningsenheter som produserer de samme produkter ved bruk av samme type innsatsfaktorer, men i ulike mengder.

Imidlertid vil forholdene ofte være at beslutningsenhetene kan være pålagt å operere under betingelser som er ulike, til tross for at de skal produsere samme produkt. Det er da ønskelig ikke bare å måle effektiviteten under hver av disse ulike produksjonsbetingelsene, men også å sammenligne produksjonsbetingelser for å se om noen produktfunksjoner (eller rammebetingelser) er mer effektive enn andre. Rhodes (1978) og Charnes, Cooper og Rhodes (1981) viser hvordan man kan sammenligne "program efficiency" med "managerial efficiency".

Ta utgangspunkt i sammenligning av to program. De samme produktene blir produsert, men med to ulike eksogent gitte rammebetingelser. Man kan derfor forvente også to ulike effektive referansesett. De to programmene indekseres $\alpha = 1, 2$, slik at metoden lett kan generaliseres til flere program, f.eks. $\alpha = 1, \dots, k$.

Figur 5 viser sammenligningen mellom intra-sett effektivitet (dvs effektivitet relatert til en produktfunksjon innen samme program) og inter-sett effektivitet (dvs. effektivitet mellom ulike produktfunksjoner).



Figur 5: Inter-enveloppe bygget opp av to effektivitetsfronter.

I figur 5 er tegnet inn de to effektivitetsfrontene til sett 1 og 2, som representerer de to måtene å produsere produktet på. Ser man på sett 1 ($\alpha=1$), så er dette settet mer effektivt enn sett 2 når produksjonen skjer med lite forbruk av x_2 og stort forbruk av x_1 . Tilsvarende er sett 2 mest effektivt (dvs det dominerer sett 1) når produksjonen skjer med bruk av mye x_2 og lite forbruk av x_1 . En DMU som befinner seg i punktet A, vil være effektiv i relasjon til produsentene som tilhører sett 1. Denne produsenten er imidlertid ikke effektiv når han sammenlignes med produsenter som tilhører sett 2.

Følgende formulering stilles opp (se Rhodes (1978)) for å bestemme om en DMU er effektiv innen sitt program eller ikke:

$$(18) \quad \text{Max: } h_0^\alpha = \frac{\sum_{r=1}^s u_r^\alpha \cdot y_{r0}^\alpha}{\sum_{i=1}^m v_i^\alpha \cdot x_{i0}^\alpha}$$

når:

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r^\alpha \cdot y_{r0}^\alpha}{\sum_{i=1}^m v_i^\alpha \cdot x_{ij}^\alpha} \leq 1 \quad ; j=1, \dots, n_\alpha,$$

$$u_r^\alpha, v_i^\alpha > 0 \quad \forall r, i.$$

Modell (18) er en DEA modell satt opp i brøkform. Objektfunksjonen sier at en bestemt DMU skal maksimere den veide sum av produkter over den veide sum av innsatsfaktorer. Restriksjonssettet sier at i denne maksimeringen skal en bestemt DMUs effektivitet bli begrenset av tilsvarende produkt-innsatsbrøker for alle andre DMU-er innen samme program. Beslutningsfattere innen andre programmer tas derfor ikke hensyn til på dette trinn. Sammenligning med andre programmer kommer i neste trinn. For hver α beregnes effektivitetsmål for de DMU-er som tilhører program α . Den DMU som undersøkes er effektiv innen sitt program hvis og bare hvis $h_0^{*\alpha} = 1$ og slakkene for alle restriksjonene er null.

For å kunne sammenligne mellom program, må de samme input og output være målt for hver gruppe, og disse input og output må også hver for seg være målt på samme måte (målt med samme målestokk). Ved modell (18) har man beregnet en effektivitetsfront for hvert sett.

Det neste trinnet er å sammenligne disse settene med hverandre for å se om en kombinasjon av settene vil være bedre (dvs ville kunne utvide området), sammenlignet med hvert program for seg.

Ineffektive DMU-er omregnes til sitt effektive sammenligningspunkt innen sitt eget program. La \hat{y}_{rj}^{α} og \hat{x}_{ij}^{α} betegne den beregnede effektive output og input for de ikke-effektive DMU-ene, og bli beregnet som

$$\hat{y}_{rj}^{\alpha} = y_{rj}^{\alpha} + sy_{rj}^{*\alpha} \quad \forall r, j, \alpha$$

$$\hat{x}_{ij}^{\alpha} = h_j^{*\alpha} \cdot x_{ij}^{\alpha} - sx_{ij}^{*\alpha} \quad \forall i, j, \alpha$$

hvor $sy_{rj}^{*\alpha}$ er slakk i produksjon av produkt r for DMU _{j} innen program α . På samme måte er $sx_{ij}^{*\alpha}$ optimal slakk for innsatsfaktor i for DMU _{j} innen program α . Slakkene blir beregnet når (18) blir omformet til en modell tilsvarende (5). Transformasjonen til effektivitetsfronten foretas fordi man ved sammenligning mellom program bare trenger sammenligne effektivitetsfrontene. Det konstrueres så en felles effektivitetsfront som alltid er minst like effektiv som hver α -effektivitetsfront. Dette oppnås ved å løse følgende optimaliseringsproblem:

$$(19.1) \quad \text{Max: } h_0 = \frac{\sum_{r=1}^s u_r \cdot \hat{y}_{r0}}{\sum_{i=1}^m v_i \cdot \hat{x}_{i0}}$$

når:

$$(19.2) \quad \frac{\sum_{r=1}^s u_r \cdot \hat{y}_{rj}^{\alpha}}{\sum_{i=1}^m v_i \cdot \hat{x}_{ij}^{\alpha}} \leq 1 \quad ; j=1, \dots, n_{\alpha} \\ \alpha=1, \dots, k,$$

$$u_r, v_i \geq 0 \quad \forall r \text{ og } i.$$

Objektfunksjonen (19.1) innebærer at man skal maksimere den veide sum av mest effektiv

produksjon for en bestemt DMU over den veide sum av mest effektivt innsatsforbruk for den samme DMU. Alle DMU-er i alle program vil (etter transformering til effektivitetsfronten innen sitt program) bli maksimert. Restriksjonen er nå utvidet til å omfatte alle program, og ikke bare ett program, som i (18), og hvor i tillegg de brukte tall for input og output er effektive punkter for den analyserte DMU innen sitt program. Med dette restriksjonssettet er mulighetsområdet potensielt utvidet, som vist ved den stiplede linjen i figur 5. I (19) ble alle DMU-ene justert opp til sitt relevante effektive referansesett, beregnet med (18). Ved det nye problemet som er stilt opp i (19), trenger imidlertid ikke h_0^* bli lik 1 for alle DMU. Dersom en DMU ikke oppnår at $h_0^* = 1$, skyldes det at programmet som den tilhører er mindre effektivt enn et annet eller en kombinasjon av andre programmer.

Årsaken til forskjellen mellom programmene, kan forklares med forskjell i produksjonsteknologi. Det kan i praksis være alt fra forskjell i beliggenhet til bruk av maskiner av ulik alder. Det kan også skyldes selvpålagte eller eksternt pålagte restriksjoner. Charnes, Cooper og Rhodes (1981) bruker denne metoden for å sammenligne flere "program" som har til hensikt å øke målbare skolerresultater hos amerikanske barn. Dette er da en programevaluering, hvor man undersøker om de effektive DMU-er i hvert program også er effektive når det foretas sammenligning mellom programmene.

En interessant effekt kan observeres ved å se på punkt D i figur 5. Den DMU som blir representert ved dette punktet, er effektiv etter begge de to programmene som sammenlignes. Hverken innenfor sett 1 eller 2 kan en DMU være mer effektiv med en annen kombinasjon av innsatsfaktorer. Imidlertid ser man at bedre ressursutnyttelse kan oppnås ved å kombinere programmene 1 og 2. Punkt D kan derfor ved en skalering bringes til punkt E. En slik skalering kan bare gjøres hvis rammebetingelsene for DMU_D endres. Hvis teknisk mulig må det da lages et nytt program som er en kombinasjon av de to opprinnelige programmene.

4.3 Ikke-lineær DEA.

Den stykkevise lineære effektivitetsfronten som konstrueres ved bruk av DEA, kan sees på som en tilnærming til en underliggende parametrisk produktfunksjon, hvis form er ukjent. Selv om den er ukjent, er det ofte grunn til å anta at den ikke er stykkevis lineær. En vanlig stykkevis lineær produktfunksjon vil generelt medføre et mindre produksjonsmulighetsområde enn det en får ved estimering av parametriske frontfunksjoner. Effektivitetsmål relatert til et referansesett i form av en stykkevis lineær produktfunksjon kan derfor være et unødvendig forsiktig anslag for effektivitet. Førsund og Hjalmarsson (1979 b) bruker dette argumentet når de velger en parametrisk frontfunksjon, idet de sier:

"One disadvantage of this method [Farrells metode] is that a convex hull is an unduly pessimistic estimation of smoothly curved efficiency frontier isoquants." (FH, 1979b, s 294)

Tror man at fronten er generert av en ikke-lineær parametrisk frontfunksjon, vil det faktiske effektivitetsmålet kunne være mindre (dvs en DMU vil fremtre som mindre effektiv) enn ved en front beregnet ved lineær DEA. Det kan derfor være ønskelig å estimere denne parametriske produktfunksjonen. I dette avsnittet skal vises metoder for å beregne ikke-lineær DEA.

Hvis man løsner på kravet om at effektivitetsfronten skal være stykkevis lineær, må man i stedet spesifisere en eller annen form for parametrisk frontfunksjon. I denne framstillingen skal jeg vise et av de enkleste parametriske alternativene, som vil gi en Cobb-Douglas lignende frontfunksjon. La oss lage en effektivitetsbrøk for DMU_0 hvor input og output er multiplikativt relatert, og ikke additivt som tidligere. En modell som (20) vises i Charnes, Cooper, Seiford og Stutz (1983). Andre ikke-lineære DEA-modeller vises i Charnes, Cooper, Seiford og Stutz (1982), i Banker, Charnes, Cooper og Schinnar (1981), og i Banker og Maindiratta (1986).

En modell som er lineær på logaritmisk form, kan formuleres som:

$$(20) \quad \text{Max } z_0 = \left[e^\eta \cdot \prod_{r=1}^S y_{r0}^{u_r} \right] / \left[e^\xi \cdot \prod_{i=1}^m x_{i0}^{v_i} \right]$$

når:

$$\left[e^\eta \cdot \prod_{r=1}^S y_{rj}^{u_r} \right] / \left[e^\xi \cdot \prod_{i=1}^m x_{ij}^{v_i} \right] \leq 1 \quad ; j=1, \dots, n,$$

$$\eta \geq 0, \xi \geq 0, u_r, v_i \geq \delta > 0 \quad \forall r \text{ og } i.$$

e^η og e^ξ er virtuelle multiplikatorer for produkt og innsatsfaktorer. Hensikten med disse er å oppnå et effektivitetsmål som er invariant m.h.p. skalering av innsatsfaktorene. Effektivitetsmålet er i lineær DEA invariant m.h.p. skaleringer, men er ikke det i direkte loglinear DEA, dvs modell (20) uten aktivitetene e^η og e^ξ . I den multiplikative versjonen av DEA må vi forutsette at alle innsatsfaktorer og alle produkter er strengt positive størrelser. Tolking av modellen blir trolig klarest når den omformes til log-lineær form. Ligningssystem (20) omformes til lineær form ved å ta logaritmen:

$$(21.1) \quad \text{Max: } z_0 = \eta - \xi + \sum_{r=1}^S u_r \cdot \ln y_{r0} - \sum_{i=1}^m v_i \cdot \ln x_{i0}$$

når:

$$(21.2) \quad \eta - \xi + \sum_{r=1}^S u_r \cdot \ln y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i \cdot \ln x_{ij} \leq 0 \quad ; j=1, \dots, n,$$

$$\eta \geq 0, \xi \geq 0, u_r, v_i \geq \delta > 0 \quad \forall r \text{ og } i.$$

$\eta \geq 0, \xi \geq 0$ kan omformes til: $(\eta - \xi) = \omega \geq 0$. Ved å benytte denne sammenhengen, kan den loglineære DEA-modellen (21) alternativt skrives:

$$(22.1) \quad \text{Max: } z = \omega + \sum_{r=1}^S u_r \cdot \ln y_{r0} - \sum_{i=1}^m v_i \cdot \ln x_{i0}$$

når:

$$(22.2) \quad \omega + \sum_{r=1}^S u_r \cdot \ln y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i \cdot \ln x_{ij} \leq 0 \quad ; j=1, \dots, n,$$

$$\omega \geq 0, u_r, v_i \geq \delta > 0 \quad \forall r \text{ og } i.$$

(22) har som dualformulering:

$$(23.1) \quad \text{Min: } w_0 = -\sum_{r=1}^s \delta \cdot sy_r - \sum_{i=1}^m \delta \cdot sx_i$$

når:

$$(23.2) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \ln y_{rj} - sy_r = \ln y_{r0} \quad ; r=1, \dots, s,$$

$$(23.3) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \ln x_{ji} + sx_i = \ln x_{i0} \quad ; i=1, \dots, m,$$

$$(23.4) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,$$

$$\lambda_j, sy_r, sx_i \geq 0 \quad \forall j, i, r.$$

En bestemt DMU₀ er optimal (dvs effektiv og ligger på den estimerte effektivitetsfronten) dersom den har en log-effektivitet på null. I denne modellen kan vi ikke skille mellom outputeffektivitet og inputeffektivitet. Derfor beregnes ikke effektivitetsmålet som en proporsjonal endring i input eller output, som i vanlige DEA-modeller i form av "Farrell" effektivitetsmål. Log-effektiviteten beregnes bare i form av optimal slakk. Vi har da egentlig et Pareto-optimalitetskrav: en DMU kan ikke være effektiv hvis det som optimal løsning på (23) vil være slakk i enten input eller output. Hvilke bedrifter som er i basis, dvs er effektive, kan en lett se ut av løsningen for λ -vektoren. Når $\lambda_k > 0$, er DMU_k effektiv og på effektivitetsfronten. For DMU-ere som ikke er effektive, kan den optimale kombinasjonen av innsatsfaktorer og produkter skrives (y^* og x^* betegner optimale produkt- og innsatsvektorer):

$$(24) \quad y_{r0}^* = \prod_{j=1}^n y_{rj}^{\lambda_j} \cdot e^{-sy_r} \quad \text{og} \quad x_{i0}^* = \prod_{j=1}^n x_{ij}^{\lambda_j} \cdot e^{sx_i}$$

hvor λ_j , sy_r og sx_i er optimale verdier og $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$.

Modellen vist ovenfor kan benyttes til å beregne stykkevis Cobb-Douglas produktfunksjoner

på en forholdsvis enkel måte. En generell, men mer tungvint metode for å tilpasse punktene mellom de ekstreme (dvs de effektive) observasjonene til en ikke-lineær produktfunksjon, er utviklet av Banker, Charnes, Cooper og Schinnar (1981). Den mer generelle metoden til BCCS (1981) kan brukes til å estimere mer generelle funksjoner enn Cobb-Douglas funksjoner.

BCCS kaller sin metode et "bi-ekstremalt" prinsipp for beregning av effektivitetsfronter og effektivitetsevaluering. I begrepet "bi-ekstremalt" ligger en totrinns optimaliseringsprosedyre som BCCS forklarer slik:

"To estimate the output function for the individual DMU, we employ a bi-extremal "maximum principle" which simultaneously takes account of our information of all our other DMU's. These, as we have already noted, are assumed to have a "productive technology" of the same functional form. We posit an "envelopment condition" on the observed outputs of all DMU's such that the observed inputs are transformed by this function into outputs which are no less than the corresponding observed values. [...] We tighten this envelope by means of a minimization operation on the functions with respect to the parameters of this functional form. The determination of the parameter values is completed by maximizing a ratio of virtual output (in functional form) to virtual input. Thus we have our "maximin" or bi-extremal principle for determining the output function." (BCCS, 1981, s 1372).

BCCSs metode vil ikke bli gjennomgått av meg. Den er lite benyttet i kjente publiserte arbeider. En teoretisk innvending mot metoden er dessuten at den forutsetter at produktene ikke konkurrerer om innsatsfaktorer, dvs forutsetningen er at $\partial y_j / \partial y_k = 0$ for alle $j, k = 1, \dots, s$. Den samme forutsetningen må også gjelde for våre modeller (20) – (23), selv om denne problemstillingen ikke er drøftet i Charnes *et al* (1983). I modellene (20) – (23) må også gjelde at den marginale substitusjonsraten $-\partial x_k / \partial x_1 = 0$. Disse modellene bryter derfor med forutsetning 2) drøftet i seksjon 4.1 i inneværende kapittel, hvor den aksiomatiske begrunnelse for DEA metoden ble oppsummert. I noen produksjonsprosesser kan det være tilfelle at man bare kan øke produksjonene av et produkt ved å øke mengden innsatsfaktorer og ikke ved å redusere produksjonen av et annen produkt. I praksis vil ofte $\partial y_j / \partial y_k < 0$, i det minste for noen av produktene i produksjonsprosessen. Denne siste situasjonen er grundigere behandlet i Banker og Maindiratta (1986), som også formulerer flere log-lineære modeller med utgangspunkt i ulike aksiomer om produksjonsmulighetsområdet.

4.4 Paretooptimalitet og DEA.

I dette avsnittet skal jeg ta utgangspunkt i den definisjonen av mulighetsområdet som ble innført i avsnitt 4.1. Jeg skal vise hvilke punkter i produksjonsmulighetsområdet som er pareto-optimalt, hvordan slike punkter kan finnes, og sammenhengen mellom pareto-optimalitet og de effektivitetsmålene som er utviklet i DEA.

Mulighetsområdet i DEA beregninger kan deles i fire undermengder. Som et slags kjerneområde kan defineres mengden av observasjoner og konvekse kombinasjoner av disse. Dette området kan defineres som:¹⁵

$$T_1 := \left\{ (x, y) : x = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, y = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \forall \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right\},$$

hvor (x_j, y_j) er den observerte (dvs den empiriske) vektoren for innsatsfaktorer og produkter for DMU_j. Som en utvidelse av mulighetsområdet T_1 kan en definere et nytt mulighetsområde hvor en tar med alle punkter hvor input er i T_1 og output ikke er større enn output i T_1 . La $(x_0, y_0) \in T_1$. Den første utvidelsen av mulighetsområdet blir når det tillates at produksjonsmulighetsområdet kan omfatte outputvektorer mindre enn den observerte outputvektor:

$$T_2 := \left\{ (x, y) : x = x_0, y \leq y_0 \text{ for noen } (x_0, y_0) \in T_1 \right\}.$$

En ytterligere utvidelse av mulighetsområdet får en ved å inkludere i mulighetsområdet de tilfeller hvor y er med i T_2 , men hvor forbruket av innsatsfaktorene er større enn eller lik innsatsfaktormengden i T_2 . Man kan definere et tredje utvidet mulighetsområde som:

¹⁵I dette avsnittet, som i resten av denne avhandlingen, vil notasjonen (x, y) hvor x og y er uten fotskrift, betegne en vektor av h.h.v innsatsfaktorer og sluttprodukter.

$$T_3 := \left\{ (x, y) : y = y_0, x \geq x_0 \text{ for noen } (x_0, y_0) \in T_2 \right\}.$$

Mulighetsområdet T_3 danner grunnlaget for effektivitetsmålene utviklet av Banker, Charnes og Cooper (1984), som er mål for teknisk effektivitet hvor eventuell skalaineffektivitet ikke er inkludert. Med utgangspunkt i mulighetsområdet T_3 kan man også få et mål for om en observert bedrift/produksjonsprosess ligger på en del av produksjonsmulighetsområdet hvor man har stigende, konstant eller synkende utbytte m.h.p. skalaen.

I tillegg til de tre mulighetsområdene som nettopp er vist, kan det defineres en siste utvidelse av mulighetsområdet, i det man i et utvidet mulighetsområde også inkluderer lineære ekspansjoner/kontraksjoner av $(x, y) \in T_3$, definert slik:

$$T_4 := \left\{ (x, y) : (k \cdot x_0, k \cdot y_0), k > 0, (x_0, y_0) \in T_3 \right\}.$$

T_4 er mulighetsområdet brukt til beregning av effektivitetsmålene til Farrell (1957), Fare og Lovell (1978) og Charnes, Cooper og Rhodes (1978).

La oss først ta utgangspunkt i mulighetsområdet T_2 . Charnes, Cooper, Golany, Seiford og Stutz (1985) viser at funksjonen

$$(25) \quad f(x) = \max y \text{ for } (x, y) \in T_2$$

er en frontfunksjon (produktfunksjon) for det empiriske mulighetsområdet, og at $f(x)$ er en konkav, stykkevis lineær funksjon i T_1 (se CCGSS (1985;s 95)).

Videre viser CCGSS en metode for å beregne pareto-optimalitet for de bedriftene/produksjonsprosessene som utgjør det empiriske produksjonsmulighetsområdet T_1 . Anta at det finnes en observert vektor av input og output (x_0, y_0) som skal testes for pareto-optimalitet. CCGSS viser at testen skal bli, for DMU_0 :

$$(26.1) \quad \text{Min: } - \sum_{r=1}^s sy_r - \sum_{i=1}^m sx_i$$

når:

$$(26.2) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - sy_r = y_{r0} \quad ; r=1, \dots, s,$$

$$(26.3) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_{ij} + sx_i = x_{i0} \quad ; i=1, \dots, m,$$

$$(26.4) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,$$

$$\lambda_j, sy_r, sx_i \geq 0 \quad \forall i, r, j.$$

En observasjon (x_0, y_0) vil være pareto-optimal hvis og bare hvis man ikke kan øke output eller redusere input og fremdeles befinne seg i mulighetsområdet. Objektfunksjonen i (26.1) sier at en skal maksimere summen av slakkene mellom (x_0, y_0) og et vilkårlig annet punkt $(x, y) \in T_1$, når slakkene er ikke-negative. Derfor søker en bare i maksimeringsprosedyren "nord-vest" for det observerte punktet (x_0, y_0) .

Objektfunksjonen i (26) er ikke identisk med objektfunksjonen i (5). Det er to forskjeller en bør legge merke til. For det første er slakkene i (26) veid med vekten 1, og ikke med den infinitesimale $\delta > 0$ brukt i (4) og (5). Derfor er nå (26) i utgangspunktet et ordinært LP problem, mens (5) i utgangspunktet var et "ikke-arkimedisk" problem, og bare som en tilnærming kommer på LP-form. Den andre forskjellen er at man i (26) ikke minimaliserer input (eller alternativt maksimerer output). I (26) blir derfor den observerte (x_0, y_0) sammenlignet med en større del av produksjonsmulighetsfronten enn i f.eks. (4). For bedrifter som ikke er pareto-optimale, og da enten ikke er inputeffektive eller outputeffektive, sammenlignes en konkret bedrift med ulike segmenter på den stykkevis lineære produksjonsfronten. For en ikke-pareto optimal DMU vil en kunne transformere denne DMU til den pareto-optimale effektivitetsfronten ved å beregne $(x_0, y_0) \rightarrow (x'_0, y'_0)$ som:

$$(27) \quad \begin{aligned} x'_0 &= x_0 - sx^* \\ y'_0 &= y_0 + sy^* \end{aligned}$$

En inputeffektiv DMU vil bli transformert til effektivitetsfronten ved transformasjonen $(x_0, y_0) \rightarrow (x'_0, y'_0)$:

$$(28) \quad \begin{aligned} x'_0 &= \theta \cdot x_0 - sx_i^* \\ y'_0 &= y_0 + sy_i^* \end{aligned}$$

hvor sx_i^* og sy_i^* er de optimale slakkene for h.h.v. input og output i en algoritme som beregner inputeffektivitet (f.eks. modell (5)), og hvor $\theta < 1$ er en intensitetsskalering av den observerte inputvektoren.

Følgende transformasjon $(x_0, y_0) \rightarrow (x'_0, y'_0)$ vil transformere en outputeffektiv DMU til den relevante delen av effektivitetsfronten i produksjonsmulighetsområdet:

$$(29) \quad \begin{aligned} x'_0 &= x_0 - sx_0^* \\ y'_0 &= \theta \cdot y_0 + sy_0^* \end{aligned}$$

hvor $\theta > 1$ er en beregnet effektivitetsskalering for normering av output, og slakkene s_0^{*-} og s_0^{*+} er beregnede slakker for h.h.v. innsatsfaktorer og produkter. For en ikke-pareto effektiv DMU vil normalt $sx^* \neq sx_i^* \neq sx_0^*$ og likeledes $sy^* \neq sy_i^* \neq sy_0^*$.

Det vises i CCGSS at man kan beregne pareto-optimalitet også for mulighetsområdet T_4 . Mest interessant fra vårt synspunkt er imidlertid sammenhengen mellom metoden for å teste for paretooptimalitet og de DEA input- og output effektivitetsmålene som tidligere er vist i dette kapitlet. Objektfunksjonen for et inputeffektivitetsmål er generelt (se f.eks. (5.1)):

$$\text{Min: } \theta - \delta \cdot \left(\sum_{r=1}^s sy_r + \sum_{i=1}^m sx_i \right)$$

og for outputeffektivitetsmål (ikke vist tidligere av meg):

$$\text{Max: } \theta + \delta \cdot \left(\sum_{r=1}^s sy_r + \sum_{i=1}^m sx_i \right).$$

Det vises av CCGSS (1985,s 99) at disse objektfunksjonene er ekvivalente med pareto-optimalitetstester for punktene $(\theta x_0, y_0)$ når inputeffektivitet måles, og $(x_0, \theta y_0)$ når outputeffektivitet måles. Siden en DMU₀ er DEA effektiv hvis og bare hvis $\theta^* = 1$, $sy^{*+} = 0$ og $sx^{*-} = 0$ (gjelder både input- og outputeffektivitet), så vil DEA-effektive bedrifter også være pareto-optimale.

4.5 DEA med eksogen input eller output.

I DMU analysen forutsettes at hver DMU₀ skal vurderes ut fra sin effektivitet til å kombinere $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ og $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$. Det forutsettes da implisitt at x og y er kontrollerbare av den DMU som studeres. I praksis er ikke denne forutsetningen alltid oppfylt. Noen variabler kan være utenfor beslutningsfatters kontroll. Slike variabler vil her bli kalt eksogene variabler. De kontrollerbare variablene kalles endogene variabler. Behandlingen av eksogene variabler kan gjøres på flere måter i DEA. Rhodes (1978) og Charnes, Cooper og Rhodes (1981) viste en måte å analysere programeffektivitet. De ulike programmene er eksogene forhold, uten at de eksogene forholdene konkret påvirket bestemte produkter eller innsatsfaktorer. Denne framgangsmåten har jeg vist i avsnitt 4.2 i dette kapitlet. I dette avsnittet skal andre metoder presenteres, hvor problemstillingen er noe annerledes.

Charnes, Cooper, Golany, Seiford og Stutz (1985) tar kort opp problemet med eksogene variabler. De påpeker at input i noen tilfeller ikke kan variere fritt¹⁶. Charnes *et al* (1985)

¹⁶Sitat: ".. certain relevant inputs [...] are not subject to 'discretionary' change by the decision making units. These are called 'non-discretionary' inputs." (CCGSS, 1985,s 105-106).

påpekte at slike restriksjoner vil kunne påvirke referansesettet som en ikke effektiv bedrift skal sammenlignes med. En enkel måte å løse det problemet på, er å legge restriksjoner på vektoren λ i f.eks. (5).

Banker og Morey (1986 a) har presentert en eksplisitt formulering for å formulere inn i DEA modellen muligheter for at en eller flere input ikke kan kontrolleres av beslutningsenheten¹⁷. Gitt at alle output er kontrollerbare, men at innsatsfaktorene kan deles i to grupper, de kontrollerbare og de eksogene. Anta at vi har s produkter og m innsatsfaktorer, hvor k av innsatsfaktorene er kontrollerbare, mens $(m-k)$ ikke er kontrollerbare. For framstillingens skyld er input rangert slik at x_{ij} ($i=1, \dots, k$) er mengden av de kontrollerbare, og x_{ij} ($i=k+1, \dots, m$) er mengden av de ikke-kontrollerbare innsatsfaktorene. DEA formuleringen hvor eksogene variabler er inkludert, blir:

$$(30.1) \quad \text{Min: } w_0 - \delta \cdot \left(\sum_{r=1}^s sy_r + \sum_{i=1}^m sx_i \right)$$

når:

$$(30.2) \quad w_0 \cdot x_{i0} - \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_{ij} - sx_i = 0 \quad ; i=1, \dots, k,$$

$$(30.3) \quad x_{i0} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_{ij} \quad ; i=k+1, \dots, m,$$

$$(30.4) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - sy_r = y_{r0} \quad ; r=1, \dots, s,$$

$$(30.5) \quad w_0 \geq 0; \lambda_j, sx_i, sy_r \geq 0 \quad \forall i, j, r.$$

Denne modellen sier at vi skal finne den maksimale proporsjonale reduksjonen i de kontrollerbare innsatsfaktorene, under bibetingelsene at en lineær kombinasjon av

¹⁷I stedet for eksogen input, kan modellen alternativt formuleres med eksogen output. Charnes og Cooper (1985) påpeker at problemet forbundet med simultan ikke-kontrollerbare input og output ikke er løst.

kontrollerbare innsatsfaktorer danner en nedre grense for reduksjonen (30.2), at den observerte ikke-kontrollerbare innsatsfaktorene for DMU_0 ikke skal være mindre enn en lineær kombinasjon av samme faktor for alle bedriftene i utvalget (30.3), og at denne innsatsfaktorreduksjonen skal gjøres med utgangspunkt i faktisk produksjon for DMU_0 som nedre grense. Den duale formuleringen til (30) er:

$$(31.1) \quad \text{Max: } \sum_{r=1}^s u_r \cdot y_{r0} - \sum_{i=k+1}^m v_i \cdot x_{i0}$$

når:

$$(31.2) \quad \sum_{i=1}^k v_i \cdot x_{i0} = 1,$$

$$(31.3) \quad \sum_{r=1}^s u_r \cdot y_{rj} - \sum_{i=1}^k v_i \cdot x_{ij} - \sum_{i=k+1}^m v_i \cdot x_{ij} \leq 0; j=1, \dots, n,$$

$$(31.3) \quad u_r \geq \delta > 0 \forall r, v_i \geq \delta > 0 (i=1, \dots, k), \\ v_i \geq 0 (i=k+1, \dots, n).$$

Dualformuleringen (31) innebærer at man skal maksimere den veide forskjellen mellom produksjon og ikke-kontrollerbar input, gitt normeringslikningen (31.2) og at den veide sum av output minus ikke-kontrollerbar input ikke kan være større enn den veide sum av kontrollerbar input.

En produksjonsstruktur hvor noen innsatsfaktorer er kontrollerbare på kort sikt, mens andre ikke kan reduseres, kan illustrere modellen. Kapitalinvesteringer eller fast arbeidsstokk kan være et eksempel på ikke-kontrollerbare innsatsfaktorer. Hvis man ikke tar hensyn til den ikke-kontrollerbare innsatsfaktoren, vil forbruket av kontrollerbare innsatsfaktorer bli minimalisert, gitt en bestemt produksjon. Problemet ved en slik fremgangsmåte er at det blir beregnet et effektivt referansesett som ikke tar hensyn til den ikke-kontrollerbare innsatsfaktoren. Den på kort sikt eksogent gitte innsatsfaktoren vil kunne danne en effektiv begrensning på produksjonsmulighetsområdet. Tas det ikke hensyn til dette, vil man kunne beregne en for god potensiell koeffisient for effektivitetsforbedring.

Denne utvidelsen av DEA modellen som vi nettopp har vist, vil derfor kunne ha flere

interessante økonomiske anvendelser. En slik modellformulering kan for det første brukes når en vil ta hensyn til eksogent gitt output eller input. For det andre egner formuleringen seg til å skille mellom kort og lang sikt, hvor man normalt forutsetter at flere innsatsfaktorer er kontrollerbare på lang sikt enn på kort sikt. Modellen kan for det tredje brukes til å analysere "putty-clay" produksjonsstrukturer, hvor det ofte kan være et problem å finne de kortsiktige kapasitetsgrensene i en produksjonsprosess. Ved å betrakte f.eks. kapitalutstyret som en på kort sikt fast produksjonsfaktor, og som beskriver kapasitetsgrensene, så kan denne metoden trolig brukes til å estimere en kortsiktig produksjonsrelasjon når de faktiske kapasitetsgrenser på mikronivå er ukjente.

Modellen (30) kan elementært utvides til også å gjelde for et mulighetsområde generert som en konveks kombinasjon av observerte input/output vektorer ved å ta med en restriksjon $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$. Konsekvensen blir at objektfunksjonen og restriksjonene i (31) blir utvidet med en ny variabel, f.eks. kalt u_0 , hvor $u_0 \geq 0$. For ytterligere utdyping av effekten av denne begrensning av mulighetsområdet, se kapittel 4.1.

Det kan også lages en modell for de tilfellene at en eller flere output er fastlagt eksogent. For å analysere dette, formuleres en modell som maksimerer kontrollerbar output, gitt input og eksogen output. Denne modellen vil konseptuelt bli lik de viste modellene (30) og (31), se Banker og Morey (1986 a).

4.6 DEA med ikke-kontinuerlig input eller output.

Banker og Morey (1986 b) utvider analysemulighetene i DEA ytterligere ved å la variabler som inngår (dvs input eller output) være diskontinuerlige (engelsk: "categorical variables"). DEA kan formuleres både med kontrollerbare (dvs endogene) diskontinuerlige variabler eller ikke-kontrollerbare (dvs eksogene) diskontinuerlige variabler. Anta for eksempel en produksjonsprosess som blir påvirket av beliggenheten til produsenten. Beliggenhet er en input, og anses i denne omgang å være eksogent gitt. Videre antas at beliggenhet kan

grupperes som "god", "middels god" og "dårlig", altså som en diskret variabel. Beliggenhet til den DMU som studeres, må få konsekvens for utvalget av effektive referansebedrifter som denne DMU sammenlignes med. Dersom DMU_0 selv har beliggenhet "dårlig", er det rimelig å sette som krav at den bare skal sammenlignes med andre DMU-er som har samme type beliggenhet. Det vil kunne være urimelig at den sammenlignes med bedrifter som har beliggenhet "middels god" eller "god". For en bedrift som har beliggenhet "god" vil det derimot være rimelig at den sammenlignes med bedrifter som har beliggenhet "god", "middels god" og "dårlig".

La x_{ij} ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$) betegne mengden av kontrollerbar input i for DMU_j . La x_{kj} være mengden av en ikke-kontrollerbar innsatsfaktor k for DMU_j ($k \in (1, \dots, m)$). Den ikke-kontrollerbare innsatsfaktoren x_{kj} forutsettes å være diskret og kan ha L ulike verdier. På kontinuerlig form, gitt inputminimering, blir restriksjonen for en eksogen kontinuerlig innsatsfaktor, indeksert k , formulert som (se (30.3)):

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_{kj} \leq x_{k0}$$

For å kunne analysere eksogen ikke-kontinuerlig innsatsfaktor, må det formuleres restriksjoner av typen:

$$x_{kj} \leq x_{k0}, \text{ når } \lambda_j > 0.$$

Det betyr at f.eks. hvis x_{k0} = "middels god" for DMU_0 , skal referansesettet til DMU_0 bestå av andre bedrifter som er i samme eller dårligere kategori. Siden kategoriene som her er brukt kan rangeres og mengden er uttømmende, vil restriksjonen for en eksogen ikke-kontinuerlig variabel alltid kunne erstattes med $L-1$ ulikheter av typen

$$(32) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot d_{kj}^{\ell} \leq d_{k0}^{\ell} \quad ; \ell=1, \dots, L-1.$$

d^{ℓ} med relevant fotindeks er 0-1 variabler. Med å innføre $L-1$ nye restriksjoner med 0-1 variabler for d_{kj}^{ℓ} og d_{k0}^{ℓ} sikrer en at referansesettet bare består av bedrifter som har lik eller dårligere verdi for den ikke-kontinuerlige variabelen. To observasjoner kan gjøres. Innføring av en kategorisk variabel vil kunne redusere referansesettet til en bestemt DMU_0 , aldri øke det. Derfor vil den målte effektiviteten til DMU_0 , ved å ta med kategoriske

variabler, alltid bli større enn eller lik den en får uten kategoriske variabler. Den andre observasjonen er at $\sum_{j=1}^n \lambda_j^* \cdot d_{kj}^{\ell} > 0$, hvor λ_j^* er en optimal verdi, ikke trenger bli et heltall. Normativt kan en ikke si at den veide kategorien fra det effektive referansesettet blir en bestemt kategori. Siden forutsetningen til nå har vært at den kategoriske variabel var eksogen, har ikke de veide kategoriske variablene fra det effektive referansesettet noen styringsverdi, siden DMU_0 ikke kan påvirke verdien på sin egen kategoriske variabel.

La oss som et slutteksempel på problemstillingen i dette avsnittet anta følgende problemstilling. En bedrift er karakterisert av bl.a. alder på produksjonsutstyret. Årstall må derfor komme inn som en ikke-kontinuerlig karakteristikk av den bedriften som studeres. Forutsetningen videre for analysen er at enhver bedrift i sammenligning av effektive referansesett bare skal bli sammenlignet med bedrifter fra samme år eller tidligere. Vi legger derfor restriksjoner på hvilke bedrifter som vil kunne komme i det effektive referansesettet til den bedriften vi studerer. Hele datasettet består av observerte innsatsfaktorer og produkter for n_t bedrifter i år t , $t=1, \dots, T$. Hver DMU har m innsatsfaktorer og s produkter, som er de samme gjennom hele observasjonsperioden. Restriksjonssettet for innsatsfaktorene vil bli:

$$w_0 x_{i0t} - \sum_{j=1}^T \lambda_j \cdot x_{ij} - s x_i = 0 \quad ; i=1, \dots, m,$$

og restriksjonssettet for produksjonen vil bli

$$\sum_{j=1}^T \lambda_j \cdot y_{rj} - s y_r = y_{0rt} \quad ; r=1, \dots, s.$$

Dette er som vanlig for DEA formuleringer hvor slakkene er eksplitt formulert.

Objektfunksjonen er som for en standard DEA formulering, og tas derfor ikke med her. Legg

merke til at topptallet i summetegnet er definert $N = \sum_{t=1}^T n_t$, dvs referansesettet kan

potensielt velges blant alle bedriftene i alle årene. x_{i0t} og y_{r0t} er h.h.v. mengden innsatsfaktor i og mengden produkt r for DMU_0 i år t . For å få med restriksjonene på referansesettet som følge av alder på produksjonsutstyret, trenges formulert $T-1$ restriksjoner av typen

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \cdot d_j^{(t)} \leq d_0^{(t)} \quad (t=1, \dots, T-1)$$

hvor $d_j^{(t)}$ er en binær (0 – 1) variabel for DMU_j på tidspunkt t . La oss nå anta at vi beregner innsatseffektiviteten til DMU_{0,t=3} dvs effektiviteten til en bestemt DMU på tidspunkt 3. For denne DMU vil da de binære variablene bli innlest som $(d_0^{(1)} =) d_0^{(2)} = d_0^{(3)} = 1$ og $d_0^{(4)} = \dots = d_0^{(T)} = 0$. Vi forutsetter at det er restriksjonen på tidspunkt 1 som tas bort, og har markert det med parentes rundt tallet i denne restriksjonen. På samme måte vil for alle aktivitetene måtte formuleres binære variabler. Anta eksempelvis at λ_j er intensitetsvekten for DMU₁₂ i år 5. For denne DMU vil da de binære variablene bli $(d_{12}^{(1)} =) d_{12}^{(2)} = d_{12}^{(3)} = d_{12}^{(4)} = d_{12}^{(5)} = 1$ og $d_{12}^{(6)} = \dots = d_{12}^{(T)} = 0$. Tilsvarende vil alle de binære variabler måtte defineres for alle j ($j=1, \dots, N$) og alle t ($t=2, \dots, T$), når vi forutsetter at det er den første tidsdimensjonen som ikke formuleres eksplisitt.

Generelt vil DEA metoden gi muligheter for å legge en rekke restriksjoner på det effektive referansesettet. F.eks. kan man spesifisere i modellen at ineffektive bedrifter bare skal sammenlignes med bedrifter av om lag samme størrelse. Det kan også enkelt formuleres restriksjoner slik at en DMU bare skal sammenlignes med et referansesett hvor faktorintensiteten er innenfor et forhåndsbestemt intervall. Alle restriksjoner av denne typen vil potensielt redusere det effektive referansesettet og følgelig også potensielt øke den målte effektiviteten til den DMU som studeres.

4.7. Oppsummering.

I dette kapitlet har jeg gjennomgått DEA metoden. Den er en forholdsvis ny metode for å beregne effektivitetsmål gitt en ikke-parametrisk frontfunksjon. Metoden er en naturlig konkretisering av de generelle utledninger av effektivitetsmål som er gjennomgått i kapittel 2. DEA metoden beregner såkalte Farrell innsatseffektivitetsmål eller produkt-

effektivitetsmål. Innen den rammen som settes av DEA metoden kan det formuleres flere ulike modeller, som vil kunne analysere ulike former for produksjonseffektivitet med ulike forutsetninger angående produksjonsmulighetsområdet.

Jeg har i dette kapitlet vist hvordan DEA modellene kan tolkes og utvides i en rekke retninger. Utvidelsen til å gi et tallmessig uttrykk for skalaeffektivitet, vil bli empirisk gjennomgått i neste kapittel. Utvidelsen i retning av ikke-lineær DEA vil ikke bli tatt opp i de etterfølgende empiriske beregninger. I stedet vil jeg vise mulighetene for å manipulere med det effektive referansesett i form av forskjellige underutvalg. DEA metodens følsomhet for ulike grader av aggregering av innsatsfaktorer og/eller produkter vil også bli drøftet.

DEA metoden er bare én mulig måte å beregne produksjonseffektivitet på. Selv innen denne metoden kan man konstruere mange ulike mål. DEA metoden vil i neste kapittel bli sammenlignet med andre metoder for å undersøke om de gir det samme effektivitetsmål når de blir anvendt på samme datamateriale. I tilfelle avvik, vil jeg forsøke å forklare hvorfor, og drøfte hva som er svakhetene og styrkene med de ulike metodene.

KAPITTEL 5: EMPIRISKE ANALYSER.

1. INNLEDNING.

Dette kapitlet inneholder empiriske analyser jeg har gjort med utgangspunkt i de modellene som er drøftet i kapitlene 3 og 4. Jeg har beregnet effektivitetstall relativt til deterministiske, parametriske frontfunksjoner. En metode for å tilnærme til stokastiske frontfunksjoner vil bli utprøvd og vurdert. Effektivitetsmål relativt til ikke-parametriske fronter er beregnet ved bruk av DEA metoden. Den ikke-parametriske metoden vil bli sammenlignet med resultatene fra deterministiske parametriske frontfunksjoner. Forskjeller og likheter blir drøftet. Siden datamaterialet er tatt fra kommersielle bedrifter som opererer i forholdsvis godt fungerende markeder, beregner jeg også konvensjonelle lønnsomhetsmål i form av kapitalavkastningsrater. Rangering av effektivitet beregnet på de ulike måtene, vil bli stilt opp mot hverandre og sammenlignet.

I kapittel 3 drøftet jeg flere måter å estimere parametriske fronter. Et av de vesentlige skillene går mellom stokastiske og deterministiske frontfunksjoner. Som vist i kapittel 3 vil både formen og plasseringen av parametriske frontfunksjoner være avhengige av forutsetningen om fordelingen av restleddet. Jeg vil derfor teste ut to metoder på samme datamateriale; den ene metoden minimaliserer den lineære sum av avvik mellom observasjonssett og beregnet front, den andre metoden minimaliserer kvadratavviket.

DEA metoden gir gode muligheter for å identifisere årsakene til individuell ineffektivitet. Dette igjen gir mange muligheter for å foreslå tiltak som vil kunne forbedre den observerte effektiviteten. Derfor er det i presentasjonen av DEA i dette kapitlet lagt vekt på analyse av enkeltstående bedrifter.

Det arbeidet jeg har gjennomført, er i hovedsak en metodestudie. Jeg har sammenlignet ulike metoder som alle har det til felles at de kan brukes, og er blitt brukt, til å måle ulike former for effektivitet. Det er imidlertid opplagt at metodene som brukes, til en viss grad er med på å påvirke svaret man kan observere, dvs det beregnede effektivitetsmålet. Dette skyldes

ulike forutsetninger, implisitte og eksplisitte, som ligger bak de ulike metodene. De to hovedmetodene jeg sammenligner; deterministisk frontestimering ved bruk av en parametrisk produktfunksjon mot deterministisk, stykkevis lineær, men ikke-parametrisk frontfunksjon, gir ulike muligheter når det gjelder aggregering av output. Aggregeringsproblemet vil bli drøftet og konsekvensene eksemplifisert. Likeledes drøftes mulige skalafordeler, og optimal skala beregnes når det er mulig.

Metodestudier, lik den som blir presentert her, kan gjennomføres på et konstruert datamateriale¹. Jeg har imidlertid benyttet et empirisk datamateriale som er innsamlet for et annet formål enn min studie. Det er ofte den faktiske situasjonen for empiriske arbeider. Datamaterialet kan derfor ha svakheter i forhold til ideelle krav, selv om dataene kan tilfredsstillende det formålet de opprinnelig ble innsamlet for. Dataene kan være for mye aggregert, det kan være uklart skille mellom prisdata og mengdedata, og det kan være direkte målefeil som ikke er oppdaget. Mitt datamateriale er fra fiskeforedlingsbedrifter i Nord-Norge, og vil bli beskrevet i neste avsnitt. Siden dataene er fra en eksisterende industriegren, og de metodene jeg bruker er ment å kunne besvare praktiske problemstillinger om produktivitet, effektivitet, optimal størrelse osv, så vil jeg også drøfte hva metodene mine sier om denne industrien. Er fiskeindustrien produksjonseffektiv? Er det sammenheng mellom beregnet produksjonseffektivitet og målt bedriftsøkonomisk lønnsomhet basert på regnskapsdata? Hva er optimal skala for bedriftene i industrien? Disse og flere praktiske problemstillinger vil bli belyst, selv om den praktiske, industrirettede analysen i dette arbeidet ikke er det mest sentrale.

¹Kunstige data for å analysere effektiviteten til DEA metoden sammenlignet med andre metoder, er anvendt av bl.a. Sherman (1981 og 1982) og Banker og Maindiratta (1986).

1.1 Datamaterialet: DRIFTSUNDERSØKELSEN FOR FISKEINDUSTRIEN.

Datamaterialet jeg har brukt i den empiriske delen av dette arbeidet, er innsamlet under prosjektet "Driftsundersøkelsen i fiskeindustrien"². 86 fiskeforedlingsbedrifter i torskefiskesektoren deltar i en årlig regnskapsundersøkelse. Bedriftene ligger i de tre nordligste fylkene. I det etterfølgende vil jeg kalle dette datamaterialet for "Driftsundersøkelsen". Det foretas også andre årlige driftsundersøkelser i fiskerinæringen. Driftsundersøkelsen for fiskeflåten utført av Fiskeridirektoratet i Bergen er trolig mest kjent. Fiskeriteknologisk Forskningsinstitutt (FTFI) og Fiskeindustriens Landsforening (FL) gjennomfører i fellesskap en årlig driftsundersøkelse for alle rekeprodusentene i Nord-Norge fra og med regnskapsåret 1979³. Det gjennomføres en årlig driftsundersøkelse for sildemelfabrikkene i regi av PROFO og Fiskemelindustriens Landsforening.

UTVALGET.

Undersøkelsen omfatter et statistisk trukket utvalg av alle produsentene av torskefisk i de tre nordligste fylker. Alle bedriftene ligger innenfor Råfisklagets virkeområde. Jeg har benyttet data fra regnskapsårene 1977 til og med 1984, til sammen åtte etterfølgende år.

86 bedrifter er med i Driftsundersøkelsen. Utvalget ble trukket i 1977 da undersøkelsen kom inn i noe mer faste former enn tidligere. De samme bedriftene er med hvert år. Prinsippet med fast utvalg har både fordeler og ulemper. En ulempe er at dersom bedriftene i den tilfeldige trekningen skulle vise seg å gi et skjevt utvalg, så vil denne utvalgsskjevheten følge utvalget hele tida. En annen svakhet er at bedriftene i den opprinnelige trekningen ble stratifisert etter størrelse, produktsammensetning og beliggenhet. Bedriftene har forblitt i den størrelsesgruppen hvor de opprinnelig var plassert, selv om de seinere skulle ha blitt

²Se Løvland (1986) som et eksempel på denne årlige undersøkelsen.

³Se Olsens (1986) rapport som beskriver den såkalte rekeundersøkelsen.

større eller mindre. Man har derfor ikke lenger noen automatisk garanti for at utvalget nå er representativt for størrelsesfordelingen av fiskeforedlingsbedriftene i Nord-Norge.

Fordelen med et fast utvalg er at tolkning av endringer fra år til år blir lettere: endringene kan nå bare skyldes faktiske endringer for de bedriftene som er med i undersøkelsen, og vil ikke kunne skyldes årlig endring i utvalget.

Utvalget er trukket ut blant medlemsbedriftene i FL, og ikke blant alle bedriftene som har kjøpetillatelse i Råfisklagets distrikt. Det siste ville vært mest korrekt dersom man skulle komme med holdbare slutninger om den økonomiske situasjonen til en hel bransje i et distrikt. Upubliserte analyser som er gjort av FTFI tyder på at den mulige skjevheten i utvalget pga av dette ikke kan være stor for fryseriene. For de konvensjonelle bedriftene er medlemsprosenten i FL noe lavere enn for fryseriene. Det er derfor større mulighet for utvalgsskjevhet i denne gruppen. Det er ikke regnet ut noe mål for denne skjevheten. På bransjehold er man av den oppfatning at utvalget er representativt også for konvensjonelle bedrifter.

Noen bedrifter har falt fra i utvalget, enten pga konkurs eller at de av andre grunner har sluttet å gi data til undersøkelsen. Deltakelse i undersøkelsen er frivillig. Bedrifter som faller fra i utvalget, blir erstattet med bedrifter som er valgt ut etter de samme utvalgsriteriene. Man har derfor kunnet opprettholde den samme størrelsen på utvalget fra starten av og fram til og med 1981. Fra 1982 og utover er utvalget blitt redusert siden reservelisten for noen grupper bedrifter er tom.

TO NATURLIGE UNDERUTVALG.

Bedriftene kan deles i to naturlige underutvalg, avhengig av om bedriftene har fryseutstyr eller ikke. Disse underutvalgene kan analyseres hver for seg pga forskjell i produksjonsteknologien mellom de to gruppene. Bedrifter uten fryseteknologi kalles konvensjonelle bedrifter, 44 bedrifter til sammen. Resten av bedriftene er fryserier. Det er 42

fryserier i utvalget. Frosne produkter kan produksjonsteknologisk klart skilles fra saltfisk, tørrfisk og eventuell klippfisk (tørket saltfisk). Forskjellene er klare både for teknologi, råstoffutbytte og arbeidskraftforbruk i produksjonsprosessen, se Gundersen (1983). Imidlertid produserer mange fryserier konvensjonelle produkter i tillegg til frosne. Årsaken kan skyldes sesongutjevning pga ujevn råstofftilførsel og manglende frysekapasitet. Råstoffet kan også periodevis ha så dårlig kvalitet at det ikke egner seg til frysing. Ønsket om fleksibel produksjon i sammenheng med usikker råstofftilførsel er trolig det sentrale motivet. Kombinasjonen av frysing og konvensjonell produksjon er spesielt utbredt hos de små fryseriene. I gjennomsnitt anvender disse mer fisk til konvensjonell produksjon enn til frysing, se f.eks. Løvland (1986). Man kan derfor med en viss rett si at de minste fryseriene i hovedsak er konvensjonelle produsenter, men med en viss mulighet til frysing også. Jeg skal derfor i mine analyser ikke skille så sterkt mellom konvensjonelle bedrifter og fryserier som det vanligvis blir gjort i rapportene fra FTFL.

Mange fryserier, spesielt i Finnmark og Troms, har tatt opp produksjon av andre typer frossen fisk enn torskefisk. Produksjonen av konsumlodde og lodderogn i en kort vintersesong, samt produksjon av reke, er av stor økonomisk betydning. Rekeproduksjonen foregår i betydelig grad i allerede etablerte større fryserier.

DATAENE SOM SAMLES INN.

Driftsundersøkelsen er i utgangspunktet en regnskapsundersøkelse der en samler inn detaljerte tall fra balanse og resultatregnskap for de deltakende bedriftene. For å kunne forklare utviklingen, blir også materiale om råstoffkjøp og -anvendelse, arbeidskraftforbruk, lagerendringer, investeringsaktivitet osv. samlet inn.

Førstehåndsomsetning fra fisker til bedrift er regulert av Råfiskloven. En minstepris fastsettes av Råfisklaget etter konsultasjon med fiskekjøpernes organisasjon, dvs FL. Det foregår ikke noen egentlig forhandling om prisen. Siden Råfisklaget er i en monopolsituasjon som eneste lovlige selger av råfisk til fiskeprodusentene, kan det tenkes at Råfisklaget tar ut monopolgevinst på vegne av fiskerne. Denne problemstillingen er analysert av Hannesson (1979), som ikke fant tegn til monopolprisfastsetting. I praksis blir minsteprisen ofte

omsetningspris, dvs den blir den effektive prisen.

Minsteprisene som offentliggjøres av Råfisklaget er bruttopriser, dvs priser inkludert prissubsidier gitt av Staten. Fiskekjøper betaler ut bruttopris til fisker, og får så refundert støttebeløpet fra Råfisklaget. Bruttobeløp minus prisstøtte kalles nettopris, og blir fiskekjøpernes faktiske råstoffkostnad. Det er nettoprisen som er registrert i Driftsundersøkelsen som råstoffkostnad.

I Appendiks II gis en fullstendig oversikt over innholdet i datafilene slik de er organisert for maskinell lesning. Hver fil har en recordlengde på 231 posisjoner. Siden spørreskjemaet brukt i Driftsundersøkelsen har endret seg over tid, er ikke alle posisjonene fylt inn.

De variablene som blir benyttet i mine analyser, f.eks. definisjoner av innsatsfaktorer og produkter, blir gjort med referanse til listen i Appendiks II. F.eks. betyr $x_1 = P(12)+P(15)$ at mengden av en innsatsvariabel numrert som 1 skal defineres som summen av variablene i posisjon 12 og posisjon 15 i Appendiks II.

2. MODELLENE SOM ANALYSERES.

I dette avsnittet vil jeg presisere hvilke modeller som blir brukt i de empiriske analysene i dette kapitlet. Den teoretiske drøftingen av modellene er gjort i kapitlene 3 og 4, og jeg refererer tilbake til relevante deler av de kapitlene. Hovedmodellen for DEA beregningene presenteres i avsnitt 2.1, og hovedmodellen for deterministisk parametriske frontestimering presenteres i avsnitt 2.2. I avsnitt 2.3 presenteres fem formler som er brukt av meg for å beregne ulike effektivitetsmål relatert til den type parametriske frontfunksjon jeg vil benytte meg av. Formlene i avsnitt 2.3 er ikke vist tidligere i mitt arbeid. De finnes i litteraturen om estimering av parametriske frontfunksjoner. Relevante referanser gis i avsnitt 2.3. Variabeldefineringsene av innsatsfaktorer og produktdefinisjoner gis i avsnitt 2.4. Definisjonene gjøres i relasjon til det spørreskjemaet som ble brukt til innsamling av

dataene. Det framgår av definisjonene hvordan f.eks. råstoff og arbeidskraft er satt sammen av disaggregerte tall fra regnskapsskjemaet. Den enkle modellen som definerer kapitalavkastningsmålet ROI (Return On Investment) vises i avsnitt 2.5.

2.1 Data Envelopment Analysis modellen (DEA).

DEA metoden drøftet i kapittel 4, blir brukt for å estimere ikke-parametriske effektivitetsmål. Hvis ikke annet framgår av teksten, er følgende matematiske modell brukt til de numeriske beregningene i dette kapitlet:

$$(1.1) \quad \text{Min: } w_0 - \delta \cdot \left(\sum_{i=1}^m s_{x_i} + \sum_{r=1}^s s_{y_r} \right)$$

når:

$$(1.2) \quad w_0 \cdot x_{i0} - \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_{ij} - s_{x_i} = 0 \quad ; i=1, \dots, m,$$

$$(1.3) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - s_{y_r} = y_{r0} \quad ; r=1, \dots, s,$$

$$(1.4) \quad s_{x_i}, s_{y_r}, \lambda_j \geq 0 \quad \forall i, r, j, w_0 \geq 0, \\ \text{og } \delta = 10^{-6}.$$

Denne modellen tilsvarer modell (5) i kapittel 4. For en detaljert forklaring av modellen (1.1)–(1.4) viser jeg derfor til kapittel 4. Innsatsfaktorene og produktene er innlest i modellen i millioner kroner. δ er normalt satt til $\delta = 10^{-6}$. Det er eksperimentert med andre skaleringer av input/output og av δ . Resultatene fra disse eksperimentene tas ikke med i denne framstillinga. Dersom alle s_{x_i} og alle s_{y_r} blir null i optimum, vil objektfunksjonens verdi bli w_0^* . En DMU er effektiv hvis og bare hvis $w_0^* = 1$ og alle $s_{y_r} = 0$ og $s_{x_i} = 0$.

Dersom man observerer som optimal løsning av (1) at $s_{x_i}^* > 0$, betyr det at denne DMU bruker mer av input x_i enn nødvendig. Dersom $s_{y_r}^* > 0$ i (1.3) betyr det at denne DMU

produserer mindre av output y_r enn mulig. Hva som er mulig, blir definert av de mest effektive bedriftene i datautvalget. Tolkninger skal jeg komme tilbake til seinere i dette kapitlet.

Som vist i seksjon 4.1 i kapittel 4, kan man av størrelsen på $\sum_{j=1}^n \lambda_j^*$, beregnet av (1.1) –

(1.4), tolke om en bestemt DMU er i et område av produksjonsmulighetsområdet som er karakterisert av lokale stordriftsfordeler eller ikke. Også optimal skala kan beregnes.

Imidlertid må man eksplisitt formulere inn i modell (1) restriksjonen $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ for at

man skal kunne beregne et effektivitetsmål som skiller mellom teknisk effektivitet og skalaeffektivitet, se modell (13) i kapittel 4 og den etterfølgende drøftingen der. I noen analyser i kapittel 5 er derfor modell (1) utvidet slik at man også har med restriksjon på $\sum_j \lambda_j$. I disse tilfellene vil jeg bruke følgende modell:

$$(2.1) \quad \text{Min: } h_0 - \delta \cdot \left(\sum_{i=1}^m s_{x_i} + \sum_{r=1}^s s_{y_r} \right)$$

når:

$$(2.1) \quad h_0 \cdot x_{i0} - \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_{ij} - s_{x_i} = 0 \quad ; i=1, \dots, m,$$

$$(2.3) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{rj} - s_{y_r} = y_{r0} \quad ; r=1, \dots, s,$$

$$(2.4) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$s_{x_i}, s_{y_r}, \lambda_j \geq 0 \quad \forall j, h_0 \geq 0 \text{ og } \delta = 10^{-6}.$$

Modell (2) skiller seg fra modell (1) formelt bare med ligning (2.4). Tolkningen av restriksjon (2.4) i modell (2) er at denne restriksjonen begrenser mulighetsområdet til bare å omfatte konvekse kombinasjoner av observerte input og output. I modell (1) består også mulighetsområdet i tillegg av alle radiale ekspansjoner/kontraksjoner av den konvekse kombinasjonen av observasjonene. Det beregnede effektivitetsmålet ved modell (2) vil da bli et mål for bare teknisk effektivitet, mens et effektivitetsmål beregnet med modell (1) er et mål for både teknisk og skalaeffektivitet samlet.

2.2 Parametriske produktfunksjoner.

Parametriske produktfunksjoner brukes for å beregne effektivitetsfronter som tilsvarer tradisjonelle produktfunksjoner. Jeg har benyttet en tradisjonell homotetisk produktfunksjon av en type kjent som Zellner/Revankars produktfunksjon (se Zellner og Revankar (1969)). Zellner/Revankars (Z/R) produktfunksjon formuleres normalt som (se også kapittel 3):

$$(3) \quad y^a \cdot e^{b \cdot y} \leq A \cdot \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha_i} \quad (\text{og } \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1).$$

Denne modellen gjenfinnes som modell (21) i kapittel 3, og er sammen med sin duale kostnadsfunksjon drøftet i seksjon 2.3.3 i det kapitlet. Den parametriske frontfunksjonen skiller seg fra en DEA modell på ett viktig punkt: ved den parametriske produktfunksjonen må output være aggregert til en endimensjonal variabel, mens DEA modellen uten problemer kan operere med mangedimensjonal output. Denne forskjellen vil bli gjort til gjenstand for mer utfyllende drøfting i det empiriske arbeidet. Det finnes mange andre eksplisitte formuleringer av parametriske produktfunksjoner. Mitt valg av produktfunksjon er først og fremst pragmatisk begrunnet: Z/R funksjonen er lett forståelig og dens teoretiske egenskaper er godt utforsket. Den har vært anvendt i mange publiserte empiriske arbeider og dens skalaelastisitetfunksjon kan brukes til å estimere optimal skala.

(3) estimeres som en deterministisk front produktfunksjon ved bruk av LP og QP. På log-lineær form vil restriksjonene i LP formuleringen som brukes for å estimere den parametriske produktfunksjonen, bli formelt lik restriksjonene man får i en DEA analyse når primalformuleringen løses. Dette forholdet er til hjelp i tolkningen av løsningen fra de to modellene.

Parametrene i (3) kan finnes av følgende optimaliseringsproblem:

$$(4.1) \quad \text{Max: } a \cdot \sum_{j=1}^n \ln y_j + b \cdot \sum_{j=1}^n y_j - n \cdot \ln A - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ij} \right)$$

når:

$$(4.2) \quad a \cdot \ln y_j + b \cdot y_j - n \cdot \ln A - \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ij} \leq 0 \quad ; j=1, \dots, n,$$

$$(4.3) \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1,$$

$$(4.4) \quad a, \alpha_i \geq 0 \quad \forall i; b, \ln A \geq 0.$$

Modell (3) beregner parametrene i en produktfunksjon, og finnes ikke eksplisitt formulert på LP form i kapittel 3. Produktfunksjonen formulert her som (4), har imidlertid en dual kostnadsfunksjon, og denne kostnadsfunksjonen er i kapittel 3 formulert som (32) på LP form. Som Cobb–Douglas produktfunksjon, men med fri skalaelasticitet, er en parallell modell utviklet som modell (15) i kapittel 3. Her skal bare kort oppsummeres noen relevante trekk ved modell (4). Hver restriksjon i (4.2) vil gi opphav til en ikke–negativ slakk som kan tolkes som et uttrykk for en bestemt bedrifts effektivitet. Estimaten for α_i er elasticitetene i Cobb–Douglas kjernen i den homotetiske produktfunksjonen. C–D kjernen forutsettes å være homogen av grad en (restriksjon (4.3)). Estimaten for a og b er elasticitetene for outputdelen og inngår i formelen for skalaelasticiteten.

Produktfunksjonen (3) har konstant substitusjonselasticitet lik 1 (som Cobb–Douglas produktfunksjonene), men har variabel skalaelasticitet. Det er hovedsaklig egenskapen med variabel skalaelasticitet som gjør denne typen produktfunksjoner interessante for mitt formål. Skalaelasticiteten for en Zellner/Revankar produktfunksjon er:

$$(5) \quad \text{el}(y) = \frac{1}{(a + b \cdot y)}.$$

(5) vil ha et regulært optimumsforløp for $0 < a < 1$ og $b > 0$. Ved hjelp av skalaelasticitetsfunksjonen kan en med letthet beregne optimal størrelse. Det er kjent at $\text{el}(y) = 1$ vil samsvare med det punktet på kostnadskurven forbundet med minimum enhetskostnader, se f.eks. Sandmo (1970). Skalaoptimal verdi for y kan beregnes ved at

estimatene for a og b , beregnet med modell (4), settes inn i (5) når $e(y) = 1$, og så løse for y .

2.3 Effektivitetsmål relatert til en parametrisk produktfunksjon.

I kapittel 2 ble drøftet den prinsipielle forskjellen mellom inputeffektivitetsmål og outputeffektivitetsmål. Det ble også vist hvordan man kunne skille mellom teknisk effektivitet og skalaeffektivitet. I kapittel 4 har jeg gjennomgått disse målene for DEA metoden. Disse målene vil bli noe annerledes utformet relatert til en parametrisk frontfunksjon av typen Z/R. Jeg skal nå gjennomgå 5 individuelle effektivitetsmål utledet for en bestemt type parametrisk frontfunksjon. Effektivitetsmål på bransjenivå tas ikke opp. Effektivitetsmålene som følger kan finnes i appendiks i Førsumd og Hjalmarsson (1979 b). En nærmere utledning finnes i Vassdal (1982).

Første effektivitetsmålet viser innsatseffektivitet, dvs hvor mye man kan redusere innsatsforbruket proporsjonalt, gitt en bestemt produktmengde. De optimale verdier for parametrene ut fra løsningen av (4) er merket med stjerne ("*"). For DMU_j kalles inputeffektivitetsmålet $E1_j$, og det defineres som følger:

$$(6) \quad E1_j = y_j^{a^*} \cdot e^{b^* \cdot y_j} / A^* \cdot \prod_{i=1}^m x_{ij}^{\alpha_i^*} \quad ; j=1, \dots, n,$$

hvor y_j og x_{ij} er observerte verdier av h.h.v. produksjonen og innsatsfaktorene for DMU_j . Sammenhengen mellom slakken i en vilkårlig restriksjon j i (4.2), kalt s_j , og effektivitetsmålet $E1_j$ vil være at $E1_j = 1/\exp(s_j)$, hvor $\exp(\cdot)$ betyr eksponering med den naturlige logaritme (2,71828...) som grunntall. At $E1_j$ er et mål for innsatseffektivitet for DMU_j , følger av følgende enkle betraktning. Ta utgangspunkt i ulikhet (3). Ulikhetstegnet tar vare på muligheten at produksjonsprosessen ikke er effektiv. Anta nå at ineffektiviteten er av den typen vi har kalt innsatsineffektivitet. Det betyr at produsenten DMU_j vil kunne

bli effektiv ved at alle innsatsfaktorene blir redusert proporsjonalt. Effektiv produksjon vil da kunne skrives (hvor vi for enkelhets skyld sløyfer indeks j):

$$y^a \cdot e^{b \cdot y} = A^* \cdot \prod_{i=1}^m (x_i \cdot E1)^{\alpha_i^*}, \quad \left(\text{og } \sum_{i=1}^m \alpha_i^* = 1 \right).$$

Ved enkel omforming kan en nå utlede (6) og tolke $E1$ som et mål på innsatseffektivitet, slik at når $E1_j = 1$ (eller 100 %) så er DMU_j fullt inputeffektiv og når $E1_j < 1$ (f.eks. 0,93) da er ikke DMU_j inputeffektiv. Størrelsen på $E1_j$ viser at DMU_j vil kunne bli inputeffektiv ved å redusere alle innsatsfaktorene til 0,93 % (eller $100 \cdot E1_j$ %) av utgangspunktet. Innsatseffektiviteten blir målt med utgangspunkt i den observerte produksjonen til en bestemt DMU_j .

Outputeffektivitetsmålet, kalt $E2_j$ for DMU_j , er definert i ligningene (7) og (8). Outputeffektivitetsmålet tar utgangspunkt i en bestemt innsatsfaktormengde. Gitt observert innsatsfaktormengde og den beregnede form på produktfunksjonen (via parametrene beregnet av ligningssett (4)), beregnes forholdet mellom maksimal output, y_j^* , og observert faktisk output.

$$(7) \quad E2_j = y_j / y_j^*,$$

hvor y_j er observert output for DMU_j og y_j^* er beregnet maksimal output for DMU_j . y_j^* er beregnet ut fra ligningen

$$(8) \quad y_j^{*a} \cdot e^{b \cdot y_j^*} = A^* \cdot \prod_{i=1}^m x_{ij}^{\alpha_i^*}.$$

(8) løses av meg med Newtons iterasjonsmetode⁴. Dvs man løser for y i ligningen $y^a \cdot e^{b \cdot y} = k$, hvor a og b er optimale verdier fra (4), og $k := A^* \cdot \prod_{i=1}^m x_{ij}^{\alpha_i^*}$ med observert innsatsvektor for DMU_j og optimale koeffisienter fra (4). Et problem oppstår hvis

⁴Newtons iterasjonsmetode er beskrevet i f.eks. kap. 12, § 10 i Sydsæther (1978), 2. utg.

$b^* < 0$, siden vi da vil kunne få ingen eller flere reelle røtter for y^* . La oss kalle $f(y) = y^a \cdot e^{b \cdot y}$, og anta $a > 0$ og $b < 0$. Det kan lett vises at i det tilfellet er $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 0$ og

$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = 0$. For en positiv og endelig verdi av y har $f(y)$ et maksimum. I noen tilfeller

er det i vårt datamateriale observert at $\max f(y) < k$. I de tilfellene vil en ikke kunne beregne noen verdi for $E2_j$. I andre tilfeller har vi observert to reelle røtter for y^* som løsning på (8). I de tilfellene har vi publisert den verdien for $E2_j$ som ligger nærmest $E1_j$. Det skisserte problemet oppstår ikke når $b^* > 0$.

Følgende sammenhenger mellom y_j og y_j^* vil gjelde:

$$\begin{aligned} y_j^* &= y_j \text{ når DMU}_j \text{ er effektiv (impliserer at } E2_j = 1) \\ y_j^* &\geq y_j \text{ når DMU}_j \text{ er ineffektiv (impliserer at } E2_j < 1). \end{aligned}$$

Når $0 < a < 1$ og $0 < b$ kan man beregne skalaoptimal størrelse på y . Skalaeffektivitetsmålet for den produktfunksjonen som jeg bruker, er definert som:

$$(9) \quad E3_j = \left(\frac{e \cdot b^*}{1 - a^*} \right)^{(1-a^*)} / A^* \prod_{i=1}^m \xi_{ij}^{\alpha_i}$$

hvor $\xi_{ij} = x_{ij}/y_j$, e er grunntallet i den naturlige logaritme, og optimale verdier for alle koeffisienter er beregnet fra (4).

I utledningen av (9) er benyttet at $y^{\text{opt}} = (1-a^*)/b^*$. $E3_j = 1$ når x_{ij}/y_j er skalaoptimal for alle i . $E3_j < 1$ når x_{ij}/y_j ikke er skalaoptimal for minst en i . $E3_j$ er et mål for mulig inputreduksjon som er mulig for DMU_j når den produserer med optimal skala, men med observert faktorforhold, kalt $\xi_{ij} = x_{ij}/y_j$. Det er derfor ikke tatt hensyn til at produsenten i utgangspunktet kan være både inputineffektiv og outputineffektiv.

$E3_j$ beregnes bare i de tilfeller optimal skala finnes, dvs når parametrene i den estimerte produktfunksjonen indikerer tilstedeværelsen av regulært optimumsforløp. Effektivitetsmålet $E3$ er et slags "bruttomål", idet det innbefatter også effektivitetsmålene $E1$ eller $E2$. Man

kan imidlertid korrigere for den del av ineffektiviteten som skyldes E1 eller E2. Det kan lages to nye effektivitetsmål som er slik at det ene viser skalaeffektiviteten korrigert for inputineffektivitet, og det andre skalaeffektivitet korrigert for outputineffektivitet. Disse to nye skalaeffektivitetsmålene er definert nedenfor.

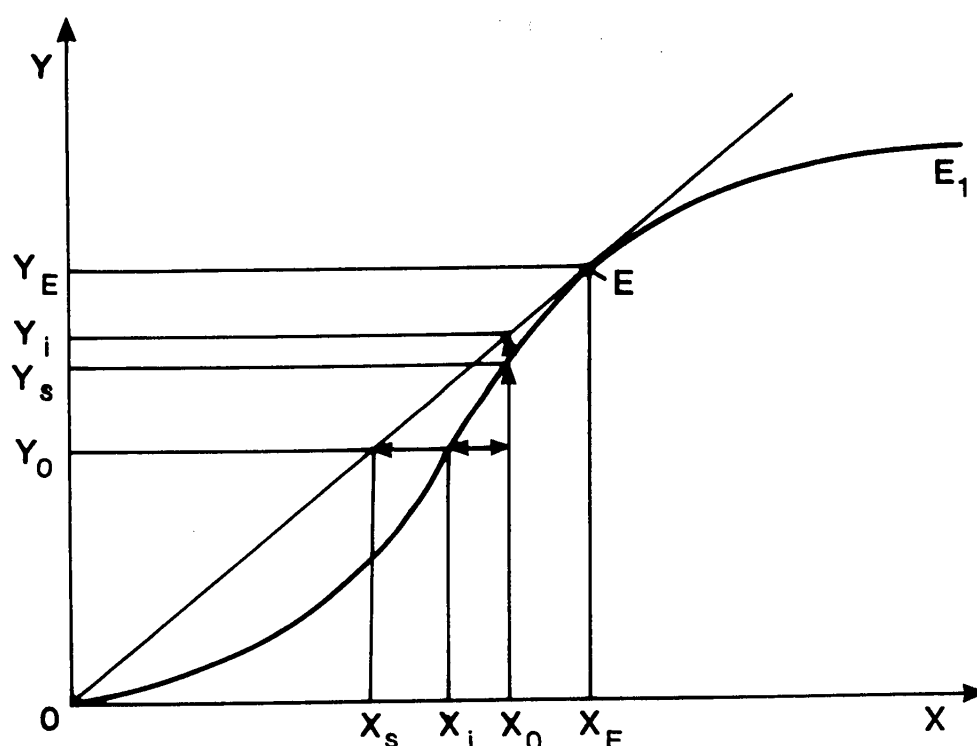
$$(10) \quad E4_j = E3_j / E1_j$$

er skalaeffektivitetsmål korrigert for eventuell inputineffektivitet, og

$$(11) \quad E5_j = E3_j / E2_j$$

er skalaeffektivitet korrigert for eventuell outputineffektivitet. Sammenstilt med den terminologien som ble introdusert i kapittel 2, og definert i relasjon til DEA i kapittel 4, så er $E3_j$ totaleffektivitet, $E1_j$ er ren teknisk inputeffektivitet og $E4_j$ er ren skalaeffektivitet for DMU_j. Total innsatseffektivitet, når vi forutsetter allokeringseffektivitet lik en, blir $E3_j = E1_j \cdot E4_j$.

Sammenhengen mellom disse effektivitetsmålene kommer trolig klarest fram ved å studere følgende figur. En tilsvarende figur finnes i Førstund og Hjalmarsson (1979 b), se også min figur 2 i kapittel 4 med tilhørende referanser.



Figur 1: Illustrering av fem effektivitetsmål.

I figur 1 er tegnet inn en produktfunksjon med regulært optimumsforløp, illustrert med linjen $O-E-E'$. For framstillingens skyld forutsettes én innsatsfaktor og ett produkt. Observert produksjon er (x_0, y_0) . Punktet E på produktfunksjonen er produksjon med optimal skala. En rett linje fra origo til E trekkes. Denne linja viser alle punktene som har samme y/x forhold som det maksimale y/x forhold på produktfunksjonen. Det er lett intuitivt å fatte at det punktet som har maks y/x forhold også vil ha minimums gjennomsnittskostnader. Horisontalt fra (x_0, y_0) trekkes en linje mot y -aksen. Denne linja vil krysse produktfunksjonen i et punkt, som vi avmerker på x -aksen som x_i . Tilsvarende vil samme linje krysse OE -linja på et punkt som vi avmerker som x_s på x -aksen. På samme måte kan vi reise en linje vertikalt fra (x_0, y_0) parallelt med y -aksen. Punktene y_i og y_s avmerkes der denne linja krysser h.h.v. produktfunksjonen og linja OE .

Vi kan nå definere innsatseffektivitet $E1$ som forholdstallet Ox_0/Ox_i . Skalaeffektiviteten,

når vi ikke har korrigert for innsatsineffektivitet, $E3$, defineres som Ox_s/Ox_o . Vi ser forholdsvis lett at $E4 = E3/E1 = Ox_s/Ox_1$, og dette er det "rene" input skalaeffektivitetsmålet. Tilsvarende vil vi for produksjonen kunne definere det tekniske outputeffektivitetsmålet, $E2$, som Oy_o/Oy_1 . Skalaeffektivitetsmålet, når vi ikke korrigerer for outputineffektivitet, er $E3 = Oy_o/Oy_s$. Til slutt blir det korrigerede, eller egentlige skalaeffektivitetsmålet for output $E5 = Oy_1/Oy_s$.

Vi kan observere to forhold. Det første er at vi har definert outputeffektivitetsmålene som mindre enn eller lik en, slik at en outputineffektiv DMU_j vil få beregnet et effektivitetsmål < 1 . Dette er i kontrast til den vanlige måten å definere outputeffektivitet i DEA modellene, hvor en DMU vil få beregnet en outputeffektivitet større enn en når den er ineffektiv, og lik en når den er effektiv. Det andre vi kan observere er at $E3$ er lik både som inputmål og som outputmål, mens vi normalt vil observere at $E1_j \neq E2_j$ og tilsvarende $E4_j \neq E5_j$. Vi ser av figur 1 at en annen måte å måle $E3$ er å sammenligne stigningsforholdet til den rette linjen gjennom (x_o, y_o) med stigningsforholdet til linjen gjennom punktet E . Siden både x_s og y_s er avmålt på linjen $O-E$, vil det være likegyldig for $E3$ om vi måler i punktet x_s, u_s eller E .

2.4. Definering av variabler.

Variablene brukt i analysen defineres i relasjon til den fullstendige variabellisten gitt i Appendix II. Jeg har definert fem inputvariabler og to outputvariabler. Noen analyser er gjennomført med fire input variabler og en outputvariabel. I det tilfellet er det normalt variabelen for varekjøp (x_2) og for varesalg (y_2) som er tatt ut. I andre tilfeller er y_2 aggregert med y_1 . Slike variasjoner vil bli presisert lokalt i dette kapitlet i relasjon til de analysene som omhandler effekten av ulike variabeldefinerings og ulik grad av aggregering.

Nedenfor er vist eksakt definisjon av de variabler som er brukt i de empiriske studiene som dokumenteres i dette arbeidet.

x_1 = råstoff-forbruk fisk, definert som:

Driftskostnad råfisk (fratrullet pristilskudd)	P(105)
+ driftskostnader biprodukter	P(106)
+ driftskostnader annet produksjonsråstoff	P(107)
+ netto frakter kjøp av fisk	P(115)
- beholdningsendr. Sum torskfisk (31.12)-(1.1)	P(148)
- beholdningsendring biprodukter	P(149)
- beholdningsendring lodde	P(150)
- beholdningsendring reker	P(151)
(dvs $x_1 = P(105)+P(106)+P(107)+P(115)-P(148)-P(149)-P(150)-P(151)$)	

x_2 = Driftskostnader handelsvarer (inkludert sjøtilvirkning) etter korrigeringsfor
beholdningsendringer P(113)

(dvs $x_2 = P(113)$)

x_3 = Lønnskostnader, definert som:

Produksjonslønn fisk	
+ produksjonslønn annet	
+ funksjonærlønn fiskeproduksjon	
+ funksjonærlønn annet	
+ bedriftslederlønn fisk	
+ bedriftslederlønn annet	
+ honorarer	
+ folketrygdavgift av lønn	
+ folketrygdavgift av annet	
= totale kostnader til arbeidskraft	P(125)
+ kalkulatorisk lønn (100.000 kr pr årsverk; likt for alle år) beregnet av	
Eiere uten fast lønn (fisk)	P(47)
Eiere uten fast lønn (annet)	P(48)
(dvs $x_3 = P(125) + 100*(P(47)+P(48))$)	

x_4 = andre kostnader, ekskl. finanskostnader, definert som:

Sum hjelpestoffer og emballasje	P(110)
+ salgskostnader, faste (inkludert reklame, provisjon, frakter vedrørende salg og tap på fordringer)	P(130)
+ administrasjonskostnader (inkludert reiser, diett, representasjon, kontorrekvisita, kjøp av tjenester)	P(135)
+ Leiekostnader (lokaler, maskiner)	P(137)
+ Kostnader egne transportmidler	P(138)
+ energi, brensel, vann	P(136)
$(x_4 = P(110)+P(130)+P(135)+P(136)+P(137)+P(138))$	

Kapitalkostnaden er delt opp i to deler. Den ene delen er kalkulerte rentekostnader, som skal avspeile kostnadene ved at kapitalen er bundet i bedriften. Jeg har forholdsvis vilkårlig brukt en fast rente på 8 % for bindingskostnadene. Den andre delen er avskrivningskostnader, som skal avspeile kostnadene med at en del av kapitalen forringes fysisk og at det derfor koster noe å vedlikeholde (gjenanskaffe) kapitalutstyret. Beregningsgrunnlaget for kapital slitkostnadene er gjenanskaffelsesverdi av aktiva i slutten av året. Som avskrivningssatser er for bygninger brukt 3 % av gjenanskaffelsesverdi, og for maskiner og inventar 12 % av gjenanskaffelsesverdi. Som et konkret mål for gjenanskaffelsesverdi er benyttet brannforsikringsverdi. Skattemessige avskrivninger kommer ikke på noen måte inn i kapitalkostnadskomponenten.

Kapitalkostnaden defineres i to trinn. Først defineres kapitalbindingen, og med utgangspunkt i den defineres kostnadene.

Kapitalbinding målt i gjenanskaffelsesverdi, defineres som:

+ sum eiendeler (aktiva)	P(207)
– bokført verdi maskiner, inventar verktøy	P(200)
– bokført verdi bygninger	P(201)

+ brannforsikringsverdi bygninger, kaier (fisk)	P(70)
+ brannforsikringsverdi bygninger annet	P(71)
+ brannforsikringsverdi maskiner, inventar (fisk)	P(72)
+ brannforsikringsverdi maskiner, inventar (annet)	P(73)

Kapitalbindingen, som definert ovenfor, er utgangspunktet for definering av kapitalkostnaden, som er definert som:

$$(x_5 = 0,08*(P(207)-P(200)-P(201)+P(70)+P(71)+P(72)+P(72)) + 0,03*(P(70)+P(71)) + 0,12*(P(72)+P(73)))$$

x_5 , kapital som innsatsfaktor i produksjonsprosessen, er derfor definert med utgangspunkt i nyverdi for kapitalutstyret. Denne definisjonen reiser en del problemer, da den ikke skiller mellom bedrifter med gammel og ny teknologi. Ved å bruke den viste definisjonen av kapitalbinding, har jeg implisitt forutsatt at hver bedrift har en ny type av det produksjonsutstyret den er utstyrt med. Rent faktisk er ikke alle bedriftene utstyrt med det samme nye produksjonsutstyret. Med andre og bedre data enn dem jeg har, kan man tenke seg to mulige måter å forbedre nøyaktigheten til denne innsatsfaktoren. Den første muligheten er å ta utgangspunkt i gjenanskaffelsesverdi for nytt produksjonsutstyr av mest mulig samme type, og så redusere denne verdien med en indeks som gir uttrykk for forholdet mellom faktisk alder på det produksjonsutstyret man har og forventet livslengde på det samme. Bedrifter som har forholdsvis nytt produksjonsutstyr, vil derfor få beregnet en indeks lik eller litt mindre enn en, mens bedrifter med gammelt produksjonsutstyr vil få beregnet kapitalbinding med en indeks nærmere null. En annen metode vil være å ta utgangspunkt i faktisk nominell anskaffelsespris på produksjonsutstyret, og trekke fra nominelle avskrivninger. Differansen indeksreguleres for å korrigere for prisendringer fra anskaffelsestidspunktet til nåtid. Ingen av disse metodene er mulige med utgangspunkt i mitt datamateriale. Jeg kjenner hverken anskaffelsesverdi eller anskaffelsestidspunkt for kapitalutstyret. Jeg har data for nominell nettoverdi (nominell anskaffelsesverdi minus avskrivninger) på avskrivbare driftsmidler, og gjenanskaffelsesverdi på de samme driftsmidlene. En mulig løsning kan være å deflatere gjenanskaffelseverdi med et uttrykk for

forholdet mellom bokført verdi på avskrivbare driftsmidler og gjenanskaffelsesverdi for de samme. En slik korrigering som en tilnærming til den virkelige bruksverdi på driftsmidlene, vil ha så mange svakheter, at jeg ikke i praksis har forfulgt denne linja. Det er derfor opplagt at den definerings av x_5 som jeg har brukt, vil kunne gi for store tall for en del bedrifter, uten at jeg vet hvilke, eller har gjort noe forsøk på å korrigere for denne feilkilden.

Forholdsvis tilsvarende definerings som dem jeg har brukt for x_5 , dvs med utgangspunkt i brannforsikringsverdier, er brukt av bl.a. Ringstad (1971 og 1974) og Førstund (1974, kapittel 6).

Outputvariablene:

y_1 = driftsinntekter fisk og annet produksjonsråstoff, definert som:
 driftsinntekter torskefisk
 + driftsinntekter annet produksjonsråstoff
 ($y_1 = P(98)$)

y_2 = driftsinntekt handelsvirksomhet, definert som:
 driftsinntekter handelsvirksomhet
 ($y_2 = P(102)$)

For ytterligere å beskrive dataene, gis nedenfor gjennomsnittstall for de innsatsfaktorene og de produktene vi har definert. Årene er 1977 – 84. Tallene er uveide gjennomsnitt for de DMU-ene som blir akseptert for DEA beregningene. Det gjøres oppmerksom på at for noen år er det færre bedrifter som blir akseptert for frontfunksjonsestimering, siden man i de beregningene tar logaritmen til observasjonene, og det ikke er tillatelig å ta logaritmen til tallet null. Tallene er oppgitt i 1000 kr med avrundning.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
1977	4162	1543	1826	688	1188	7370	918
1978	5099	1157	1894	770	1344	7521	852
1979	5024	979	2167	612	1446	8723	1074
1980	5118	1255	2341	720	1680	8991	1397
1981	6067	1639	2488	834	1958	1054	1673
1982	6606	1674	2987	1028	2255	11733	1889
1983	8804	1589	3310	1384	2642	15109	1844
1984	9486	1535	3423	1515	3117	15675	1766

Det framgår av tallene over at størrelsen på produktet handelsvarer, y_2 , i % av driftsinntekter fisk, y_1 , er minimum 11% og maksimum 16 %.

Data som brukes for å analysere produktfunksjoner, skal, ifølge teorien som er gjort rede for i kapittel 2 og 3, være kvantumstall. Priser inngår ikke i modellene ved estimering av produksjonsmulighetsområdet eller det effektive referansesettet. Priser brukes i estimering av kostnadsfunksjoner når en analyserer om tilpasningen på produksjonsmulighetsområdet er allokeringseffektiv. I de definisjoner av innsatsfaktorer og produkter som er gitt ovenfor, er likevel de fleste variablene definert som verditall. De verditallene jeg bruker i analysene er også basert på løpende priser. Tallene er ikke deflatert med prisindeks for å korrigere for nominell prisstigning. Årsaken til dette er svakhet i datamaterialet. Dersom man skulle regne seg fram til mengdestørrelser av f.eks. kjøpt fisk, timeverk i produksjonen eller lignende størrelser, vil det måtte gjøres med forholdsvis aggregerte indekser som ikke direkte er basert på prisdata fra den del av fiskeindustrien som studeres. Med bruk av generelle prisindekser vil man da kunne få ukontrollerte vridninger i datamaterialet. Kan en forutsette at alle bedriftene i min undersøkelse står overfor samme prisstørrelser for de samme innsatsfaktorer og produkter, vil dette lette problemet. De parametriske produktfunksjoner som jeg har estimert, er slik at de estimerte parametrene i kjernefunksjonen er indifferente m.h.p. skalering av dataene, men ikke parametrene a og b i outputleddet, se ligning (3) i

dette kapitlet. Dersom en kan forutsette at alle aktørene står overfor de samme prisdatabene, kan derfor verditall brukes i stedet for kvantumstall.

Denne forenklingen har likevel noen svakheter, siden man kan anta at de variablene jeg bruker, allerede på bedriftsnivå er noe aggregerte. Bl.a. består både kjøp og salg av fisk av en rekke fiskeslag med ulik innbyrdes pris. Bedriftene jeg analyserer vil normalt kunne ha ulik produktmiks. En følge av det er at de vil stå overfor ulike gjennomsnittspriser på innsatsfaktorene eller sluttproduktet. Et aggregeringsproblem er da påvist. Dette aggregeringsproblemet er ikke tilfredsstillende løst i denne studien. Et argument til forsvar for dette, om enn noe defensivt, er at det kan vises til en lang rekke mikrostudier som benytter tilsvarende blanding av pris- og kvantumstall. Mikrostudier, selv med ikke helt perfekt data, burde likevel gi bedre resultater enn produktivitetsstudier basert på tall på nasjonalregnskapsnivå, eller hvor hele industrisektorer er aggregert.

2.5 Definisjon av kapitalavkastningsraten.

Jeg har brukt følgende definisjoner av bedriftsøkonomisk (finansiell) effektivitet (alle referanser til datafilen er gjort i samsvar med defineringen i Appendiks II):

Kapitalavkastningsmålet er benevnt ROI (Return On Investment). Inntektsdelen er resultat før årsoppgjørdisposisjoner pluss rentekostnader. I relasjon til oppstillingen i Appendiks II defineres inntektene som:

Resultat før årsoppgjørdisposisjoner	P(169)
+ Rentekostnader	P(163)
+ Andre finanskostnader	P(164)

Kapitalbindingen defineres som:

Sum eiendeler	P(207)
---------------	--------

ROI er da til slutt definert som:

$$\text{ROI} = (\text{Resultat før årsoppgj. disp} + \text{rentekostnader}) / \text{Totale aktiva pr 31.12.}$$

ROI er et tradisjonelt mål for total kapitalavkastningen, og er mye brukt i eksterne regnskapsanalyser. Jeg skal ikke drøfte dette målet mer her.

3. EMPIRISK BRUK AV MODELLENE.

3.1 Estimering av parametriske frontfunksjoner – innledning.

En del av teorien for estimering av parametriske frontfunksjoner er gjennomgått i kapittel 3. I den gjennomgangen ble forsøkt poengtert skillet mellom estimering av deterministiske fronter, hvor en opererer med et ensidig restledd i frontfunksjonsestimeringen, og estimering av såkalte stokastiske frontfunksjoner med bruk av sammensatt restledd. Det ble vist hvordan stokastiske modeller kunne løses ved hjelp av maksimum likelihood metoden. I mitt arbeid har jeg ikke benyttet meg av maksimum likelihood metoden for å estimere produkt- eller kostnadsfunksjoner med sammensatt restledd. Derfor er mitt arbeid på den empiriske siden hovedsaklig konsentrert om estimering av deterministiske fronter, både parametriske og ikke-parametriske. Imidlertid er den problemstillingen som forsøkes løst med estimeringen av stokastiske fronter meget relevant, idet man med den metoden forsøker å skille mellom de bedriftene som havner på den estimerte effektivitetsfronten fordi de faktisk er effektive, og de som havner på fronten fordi de er utsatt for stokastiske forhold, som er eksogene for beslutningsfatteren. I det følgende avsnitt skal vises en metode som kan brukes for å skille mellom "virkelig" effektive bedrifter og "tilfeldigvis" effektive bedrifter.

3.2 Simulert stokastisk frontestimering.

En metode for å korrigere det effektive referansesettet for påvirkningen av ekstreme observasjoner er å benytte Chance Constrained metoden, se avsnitt 2.7.3 i kapittel 3. I stedet for å benytte denne metoden fullt ut, foreslo Timmer (1971) å fjerne et bestemt antall bedrifter fra fronten. Antallet bedrifter som fjernes, avhenger av et valgt signifikansnivå som blir brukt i analysen. Jeg skal tilpasse Timmers metode slik at jeg tar bort en og en bedrift fra fronten i stedet for å ta bort et antall bestemt på forhånd. Først fjernes den av de effektive bedriftene som har størst skyggepris i den bedriftsinterne restriksjonen. Deretter estimeres en ny front med en bedrift mindre i datasettet. Ytterligere en effektiv bedrift tas bort, og en ny effektiv front beregnes. Slik fortsetter prosedyren. Hensikten med å fjerne en bedrift om gangen, er å studere nærmere metodens stabilitetsegenskaper. Timmer rapporterte at formen på produktfunksjonen stabiliserte seg etter at 2–3 % av de mest effektive bedriftene ble tatt bort. I Vassdal (1982 b) vises det empirisk at dette ikke kan være noe generelt resultat. Andre forfattere har også uttrykt skepsis til Timmers metode. Blant andre skriver Färe, Grosskopf og Lovell (1985, note 5, side 198):

"Timmer suggested dealing with efficient outliers by resorting to chance-constrained programming techniques. [...]. Empirical evidence with this technique has not been favorable."

Jeg skal i dette avsnittet foreslå en mulig forbedring av Timmers metode for å simulere en stokastisk frontfunksjon.

Stokastiske frontfunksjoner skal nå estimeres ved to ulike metoder. Den ene metoden består i muligheten å plassere produktfunksjonen slik at output for en eller flere bedrifter kommer på den effektive siden av produktfunksjonsfronten. Den andre metoden består i å ta bort fra utvalget bedrifter som er ekstreme, ut fra den hypotese at de ekstremt effektive bedriftene er effektive pga målefeil i dataene eller andre forhold av rent stokastisk karakter.

Som sammenligningsgrunnlag skal jeg beregne best practice produktfunksjoner med ensidig restledd (dvs deterministiske produktfunksjoner) når restleddene er henholdsvis eksponensielt eller halvnormalt fordelt.

Den simulerte stokastiske frontfunksjonen blir beregnet ved to ulike metoder, her kalt BP metoden og GP metoden⁵:

a) BP metoden: Blant de bedriftene som ligger på effektivitetsfronten, finnes den bedriften som har høyest skyggepris på sin bedriftsspesifikke restriksjon i restriksjonssett (4.2) i løsning av modell (4). En marginal endring i output/inputbrøken for denne bedriften vil påvirke objektfunksjonen mer enn for andre bedrifter på effektivitetsfronten. Denne bedriften tas ut av utvalget. Ved å ta bort en bedrift som er på fronten, vil effektivitetsfronten endres ved ny optimalisering. Den vil komme nærmere sentret i observasjonsmaterialet. Det betyr at summen av ineffektivitetene (målt som forskjellen mellom den beregnede fronten og den enkelte bedrifts observerte output/inputbrøk, summert over alle bedriftene), vil bli mindre. Siden koeffisientene i produktfunksjonen påvirkes, og derfor også produktfunksjonens form, kan imidlertid enkeltstående bedrifter ved en slik prosess bli mer ineffektive. Denne metoden vil bli kalt BP metoden.

b) GP metoden: Det andre alternativet er å la den bedriften som er på fronten med høyest skyggepris, få muligheten til å komme over på andre siden av fronten. Kall denne bedriften DMU_k . Formelt gjøres det enklest ved å formulere restriksjonen for DMU_k , gitt en homotetisk produktfunksjon,

$$(12) \quad a \cdot \ln y_k + b \cdot y_k - \ln A - \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ik} + \epsilon_k = 0$$

hvor ϵ_k kan anta både positive og negative verdier. For alle andre restriksjoner beholdes den opprinnelige restriksjonen på slakken. Denne metoden vil jeg kalle GP metoden.

Begge metodene blir utprøvd under to alternativer; 1) at den lineære sum av avvik

⁵BP står for "Best Practice" metoden og GP for "Goal Programming" metoden. Forkortelsene er valgt for å indikere hvilke ideer som ligger bak metodene.

minimaliseres, og 2) at summen av kvadratavvikene minimaliseres. Resultatene for år 1977 er oppsummert i tabell 1.

Dersom $\epsilon_j = 0$, betyr det at bedriften ligger på effektivitetsfronten. Dersom $\epsilon_j > 0$ i optimum, betyr det at bedriften er ineffektiv. Størrelsen på ϵ_j viser innsatsreducerende effektivitet. For en bestemt DMU_j kan dette effektivitetsmålet kalles $E1_j$. Inputeffektiviteten i relasjon til den estimerte effektive referansemengde, kan uttrykkes som $E1_j = 1/\exp(\epsilon_j)$.

Både LP og QP brukes for å finne fronten. Bak bruk av LP ligger den implisitte forutsetningen at restleddet som måler ineffektiviteten er eksponensielt fordelt. Bak bruk av QP ligger forutsetningen at restleddet er halvnormalt fordelt. Siden avvikene veies ulikt, fås to ulike effektive referansesett med de to metodene.

Tabell 1: Sammenligning av LP og QP ved to alternative tilnærminger til stokastisk front-estimering.

1977:	BEST LP				alle	GOAL LP			
	Alle	-12	-12,46	-12,46,43		-12	-12,46	-12,46,43	
a	0,73	0,81	1,27	1,16	0,73	0,81	0,88	1,16	
b	$0,59 \cdot 10^{-4}$	$0,43 \cdot 10^{-4}$	$-0,40 \cdot 10^{-4}$	$-0,12 \cdot 10^{-5}$	$0,59 \cdot 10^{-4}$	$0,43 \cdot 10^{-4}$	$0,28 \cdot 10^{-4}$	$0,12 \cdot 10^{-5}$	
α_1	0,15	0,35	0,52	0,49	0,15	0,35	0,33	0,49	
α_2	0,23	0,31	0,11	0,11	0,23	0,31	0,33	0,11	
α_3	0,61	0,04	0,22	0,25	0,61	0,04	0,25	0,25	
α_4	0,015	0,30	0,15	0,15	0,15	0,30	0,09	0,15	
ln A	0,85	0,59	3,74	3,09	0,85	0,60	1,27	3,09	
OBJ:	-49,62	40,83	-37,38	-30,04	49,62	41,31	38,42	31,68	
Opt.skala	4538	4442	-	-	4538	4442	4099	-	

1977:	BEST QP				alle	GOAL QP			
	Alle	-12	-12,46	-12,46,30		-12	-12,46	-12,46,30	
a	0,65	0,77	1,06	0,80	0,65	0,77	1,03	0,79	
b	$0,65 \cdot 10^{-4}$	$0,42 \cdot 10^{-4}$	$-0,56 \cdot 10^{-5}$	$0,24 \cdot 10^{-4}$	$0,65 \cdot 10^{-4}$	$0,42 \cdot 10^{-4}$	$-0,19 \cdot 10^{-6}$	$0,25 \cdot 10^{-4}$	
α_1	0,20	0,42	0,53	0,42	0,20	0,42	0,52	0,42	
α_2	0,12	0,20	0,13	0,0	0,12	0,20	0,14	0,0	
α_3	0,63	0,0	0,0	0,052	0,63	0,0	0,0	0,05	
α_4	0,05	0,38	0,34	0,52	0,05	0,38	0,34	0,53	
ln A	0,146	0,13	2,11	0,22	0,15	0,13	1,91	0,14	
OBJ:	49,65	31,82	27,13	22,24	49,65	32,11	27,82	22,88	
Opt.skala	5471	5504	-	8380	5471	5504	-	8273	

Tabell 1 viser at bedriftene 12, 46 og 43 tas bort fra fronten ved bruk av metode a) nevnt foran. De samme bedriftene tas bort, og i samme rekkefølge, når vi bruker metode b) nevnt foran.

Tabell 1 viser verdiene for a , b , $\ln A$, α_1 , \dots , α_4 , verdier på objektfunksjonen, samt beregnet optimal bedriftsstørrelse, beregnet etter formelen

$$(13) \quad y^{\text{opt}} = \frac{(1 - a)}{b}$$

Ulike former for irregulært optimumsforløp er til stede når $a \geq 1$ eller $b \leq 0$. I slike tilfeller har vi ikke beregnet optimal skala. Når noen effektive bedrifter tas bort fra utvalget (metode a)) eller gis mulighet til å overskride fronten (metode b)), vil de estimerte effektive referansesettene bli ulike, siden de blir estimert med ulike modeller. Det sentrale punkt er ikke at settene er ulike, men hvor ulike de eventuelt er, og hva som kan forklare store ulikheter.

Det første man ser er at de to metodene for å behandle "outliers" produserer forholdsvis like resultater for elastisitetene. Når DMU12 tas bort (eller alternativt gis mulighet til å overskride fronten ved bruk av målprogrammeringsmetoden), så er elastisitetene i produktfunksjonene identiske. Det samme er tilfelle når DMU12, DMU43 og DMU46 tas bort samtidig. Også i dette tilfellet er alle elastisitetene like. Dette er imidlertid ikke tilfelle når DMU12 og DMU46 tas bort samtidig.

Årsaken til det observerte sammenfallet i resultater finnes når jeg undersøker hvilke bedrifter som er i basis i disse tilfellene. Bedrifter i basis er de bedriftene som oppfyller restriksjonen, eller sagt på en annen måte, det er bedriftene som sammen danner settet av effektive bedrifter i den parametriske produktfunksjonen jeg benytter. Bedriftene på fronten begrenser produksjonsmulighetsområdet, gitt den matematiske form produktfunksjonen a priori har. Når DMU12 er tatt bort, vil de samme bedriftene være på fronten i begge modeller. Også når DMU12, DMU43 og DMU46 tas bort samtidig, vil de samme bedriftene ligge på fronten. Derfor får produktfunksjonen samme form. Når DMU12 og DMU46 tas bort

samtidig, fører det til at ulike sett med bedrifter genererer fronten, med det resultatet at formen på produktfunksjonene blir ulike.

Verdien for objektfunksjonen blir ulik ved de to metodene bortsett fra når alle bedriftene er med i utvalget. Forskjellen skyldes at med beregningsmetoden GP/LP vil objektfunksjonen også innbefatte avviket til den DMU som kan overskride fronten. Når DMU12 overskrider fronten, blir den inputreducerende effektivitet beregnet til 1,61, dvs DMU12 er 61 % mer input effektiv enn det effektive referansesettet. Logaritmen til 1,61 er 0,48 (avrundet til 2 desimaler), og dette er nettopp forskjellen mellom objektfunksjonene til GP/LP og BP/LP ($41,31 - 40,83 = 0,48$) når en tar hensyn til fortegnssulikhet i objektfunksjonen. Forskjellen i verdiene for objektfunksjonene er alltid slik at objektfunksjonen for GP/LP er større enn for BP/LP, og at forskjellen øker når flere DMU-er tas bort fra utvalget.

Samme mønster framtrer når jeg går over til å studere sammenhengen mellom frontanalyser avmerket i tabell 1 som GP/QP og BP/QP. Tabell 1 viser at det er stor overensstemmelse mellom elastisitetene på produktfunksjonen ved disse to alternative estimeringsalternativene. I to tilfeller er de identiske.

Forskjellen i objektfunksjonen med de to formene for kvadratisk programmering kan forklares ved å se på tilfellet når DMU12 tas bort (BP/QP) eller gis mulighet til å overskride fronten (GP/QP). Av analysen kan vi se at effektiviteten til DMU12, når bare denne DMU gis mulighet til å overskride fronten, er 1,7083 (input-reducerende effektivitetsmål). Logaritmen til 1,7083 er 0,536, som kvadrert blir 0,287, som igjen er forskjellen mellom objektfunksjonene for de to modellene ($32,11 - 31,82 = 0,29$).

Elastisitetene endres forholdsvis meget når en og en DMU tas bort fra utvalget. Dette tyder på at formen på produktfunksjonen er meget ustabil, og avhenger av karakteristika ved de DMU-er som er på fronten.

Ut fra tabell 1 skal jeg sammenligne frontestimering med LP med frontestimering med QP. Jeg skal først sammenligne resultatene fra BP/LP med BP/QP.

Alle elastisitetene blir forskjellige når de to optimaliseringsmetodene blir brukt på samme utvalg. Imidlertid er ikke forskjellene særlig store. Med unntak for verdiene for $\ln A$, som jeg ikke vil gi noen økonomisk tolking, gir ikke de to metodene etter min mening særlig stor forskjell for elastisitetene. Når utvalget består av alle bedrifter og når utvalget er alle minus DMU12, framkommer en betydelig forskjell i estimatene for α_3 . Begge metodene fanger opp denne endringen. Utviklingen av α_4 er imidlertid noe ulik for de to metodene. Med en viss forsiktighet kan en derfor konkludere med at formen på produktfunksjonen blir forholdsvis lik for de viktige elastisitetene (som er a , b , α_1 og α_2) når utvalget er det samme. For elastisitetene α_3 og α_4 kan forskjellene bli forholdsvis store.

Det samme mønstret er til stede når jeg betrakter min form for stokastisk estimering, se tabell 1 under heading GP/LP og GP/QP. Koeffisientene for a , b , α_1 og α_2 følger samme mønster, mens α_3 og α_4 varierer forholdsvis mye.

Tabell 1 viser at det blir et betydelig skift i koeffisienter når jeg tar bort den første av de effektive bedriftene. Dette er imidlertid ikke noe fast mønster, noe følgende to tabeller vil vise. Tallene i øverste linje er DMU-nr til de bedriftene som tas bort. Optimal skala er beregnet etter formel (13).

Tabell 2: Systematisk borttaking av effektive bedrifter. DMU1–DMU86, år 1977.

	Alle	-12	-12,29	-12,29,32
a	0,93	0,88	1,06	1,28
b	$-0,55 \cdot 10^{-4}$	$0,20 \cdot 10^{-4}$	$0,72 \cdot 10^{-6}$	$0,39 \cdot 10^{-4}$
α_1	0,29	0,34	0,42	0,46
α_2	0,18	0,34	0,43	0,37
α_3	0,49	0,21	0,01	0,14
α_4	0,037	0,12	0,14	0,03
$\ln A$	1,744	1,186	2,124	3,77
Opt skala	—	4163	—	—

Tabell 3: DMU45–86, borttaking av en og en effektiv bedrift, år 1977.

	Alle	–46	–46,81	–46,80,81
a	0,79	0,99	0,94	0,92
b	$0,31 \cdot 10^{-4}$	$0,15 \cdot 10^{-5}$	$0,11 \cdot 10^{-4}$	$0,12 \cdot 10^{-4}$
α_1	0,15	0,90	0,90	0,90
α_2	0,0	0,10	0,10	0,10
α_3	0,27	0,0	0,0	0,0
α_4	0,58	0,0	0,0	0,0
ln A	0,662	0,823	0,414	0,33
Opt s kala	6865	7538	6182	6147

Tabellene 2 og 3 viser ulikt mønster i utviklingen av elastisitetene i en frontestimert produktfunksjon når jeg fjerner en og en bedrift fra fronten. I tabell 2 viser elastisitetene betydelige endringer for hver ny bedrift som tas bort. Selv om elastisitetene for α_1 og α_2 ser ut til å bli stabile, så er ikke det samme tilfelle for α_3 og α_4 . I tabell 3, som dekker DMU45–DMU86 for året 1977 vises at elastisiteten endrer seg betydelig fra første til andre estimering, og er deretter stabil. Imidlertid er det problematisk å feste full lit til de beregnede verdiene for elastisitetene. Null eller negative elastisiteter går ikke helt godt sammen med økonomisk teori. Den estimerte optimale skala er imidlertid forholdsvis stabil, og produktfunksjonen tyder også på normalt optimumsforløp.

Problemet med Timmers metode er at den ikke skiller mellom de bedriftene som bør være på effektivitetsfronten fordi de faktisk er effektive i sin produksjon, og de som havner på effektivitetsfronten pga målefeil eller stokastiske utslag. Jeg skal i det følgende vise en enkel metode som kan forbedre Timmers prosedyre.

Når vi tar bort de samme bedriftene, gir BP og GP metodene med utgangspunkt i vårt

datamateriale praktisk talt de samme estimater på elastisitetene på produktfunksjonene vi estimerer. Den spesielle fordelingen med den siste metoden, er at man får et mål på hvor langt over på "feil side" av fronten slike bedrifter vil plassere seg. Denne egenskapen med GP skal jeg benytte for å utvikle en bedre metode for å finne bedrifter som bør tas bort fra utvalget.

Bedrifter som får overskride fronten, vil få beregnet en individuell effektivitet større enn 1 (mer enn 100 % effektiv). Tolkningen av dette tallet, kan en bruke det som en indikasjon på om vi tar bort bedrifter som er bare litt mer effektiv enn den nye beregnede frontfunksjonen, eller om de vil framtre som radikalt mer effektive enn de øvrige bedriftene i utvalget. Den siste gruppen vil trolig framtre som meget effektiv pga stokastiske forhold, målefeil eller lignende, mens de som med fri restriksjon på restleddet blir liggende nær fronten (men med mer enn 100 % effektivitet) med en del større sikkerhet kan sies å være "vanlige" effektive bedrifter.

Jeg vil illustrere dette med å vise det beregnede E1 effektivitetstallet for DMU12, MU29 og DMU32 i utvalget DMU1-44 i 1977, og sammenligne med tilsvarende beregnet E1 for DMU46, DMU80 og DMU81 i utvalget DMU45-86 samme år.

Tabell 4: E1 for noen DMU-er som overskrider fronten.

DMU n r	Utvalg:DMU1-44 E1	DMU n r	Utvalg:DMU45-86 E1
12	2,1657	46	2,5113
29	1,1621	80	1,0121
32	1,0727	81	1,0656

Av tabell 4 kan en slutte at spesielt DMU12 og DMU46 er avvikende. For begge bedriftene tolker jeg tallene slik at disse to bedriftene bruker mindre enn halvparten av den inputmengde som bedriftene på fronten bruker. Man ser at for hvert utvalg er det bare en slik sterkt avvikende bedrift. De øvrige bedriftene som fjernes fra fronten, er bare fra ca 1 %

til ca 16 % mer effektive enn den fronten som blir beregnet av de resterende bedriftene. Det er derfor trolig at DMU12 og DMU46 er avvikende pga av observasjonsfeil eller stokastiske forhold. De øvrige bedriftene avviker så lite fra fronten at vi ikke kan utelukke at de er uten betydelige målefeil, men rent faktisk er så effektive at de bør være med på å gi fronten dens form. Dersom vi utvider utvalget til å bli DMU1–86 (dvs alle bedriftene i 1977), så vil både DMU12 og DMU46 bli med blant de bedriftene som etter vår regel skal få mulighet til å overskride fronten. DMU12 får da en beregnet E1 på 2,511, mens DMU46 får E1 på 1,835. Ingen av de andre DMU-ene som vi ekskluderte ved våre to små utvalg er nå med i settet av DMU-er som skal ekskluderes. I stedet er nå DMU43 og DMU50 kommet med; DMU43 blir ca 30 % mer effektiv enn fronten, og DMU50 blir ca 6 % mer effektiv.

Det er trolig riktig å konkludere med at Timmers metode for å "simulere" stokastisk estimering av frontfunksjonen ikke klarer å diskriminere mellom bedrifter som ligger på fronten fordi de rent faktisk er effektive, og de som kommer på en beregnet front fordi stokastiske forhold eller målefeil påvirker observasjonene av input og output. Jeg har ovenfor vist at dersom en variant av målprogrammering benyttes, så kan man lett skille mellom bedriftene som er meget avvikende og lite avvikende fra en "nesten" frontfunksjon. Under rimelige forutsetninger om markedsforhold bør bedriftene ha kjennskap til den samme produksjonsteknologien, selv om de under korttidstilpasning vil kunne ha installert ulike "vintages" av produksjonsteknologien. Det er derfor sannsynlig, gitt forutsetning om frikonkurransemarkeder, at sterkt avvikende effektive bedrifter er avvikende pga målefeil i datamaterialet eller rent stokastiske forhold.

3.3 Deterministisk frontestimering med ulike forutsetninger for restleddet.

I tabell 5 har jeg oppsummert parametrene for en deterministisk parametrisk front ved bruk av LP og QP når alle bedriftene er med i utvalget for perioden 1977 til 1984. Jeg kan derfor se utviklingen av samme utvalg over tid.

Tabell 5: Ren frontfunksjon ved bruk av LP og QP.

		a	b	α_1	α_2	α_3	α_4	ln A	OPT
1977:	LP	0,73	$0,59 \cdot 10^{-4}$	0,15	0,23	0,61	0,01	0,84	4538
	QP	0,65	$0,65 \cdot 10^{-4}$	0,20	0,12	0,64	0,05	0,15	5471
1978:	LP	0,84	$0,14 \cdot 10^{-4}$	0,64	0,0	0,0	0,36	0,17	11480
	QP	0,84	$0,14 \cdot 10^{-4}$	0,64	0,0	0,0	0,36	0,17	11480
1979:	LP	0,982	$-0,58 \cdot 10^{-5}$	0,73	0,11	0,08	0,08	0,87	-
	QP	0,98	$-0,26 \cdot 10^{-5}$	0,74	0,14	0,08	0,04	0,88	-
1980:	LP	0,99	$0,37 \cdot 10^{-5}$	0,77	0,16	0,0	0,08	0,94	2348
	QP	0,99	$0,37 \cdot 10^{-5}$	0,77	0,15	0,0	0,08	0,94	2348
1981:	LP	1,037	$-0,30 \cdot 10^{-4}$	0,67	0,13	0,05	0,14	1,22	-
	QP	0,92	$-0,11 \cdot 10^{-4}$	0,67	0,09	0,13	0,10	0,55	-
1982:	LP	0,93	$0,29 \cdot 10^{-5}$	0,62	0,24	0,01	0,13	0,48	23602
	QP	0,92	$0,38 \cdot 10^{-5}$	0,64	0,23	0,02	0,11	0,37	21461
1983:	LP	1,019	$-0,27 \cdot 10^{-6}$	0,64	0,12	0,17	0,07	1,37	-
	QP	0,97	$0,12 \cdot 10^{-5}$	0,65	0,14	0,12	0,09	0,89	25381
1984:	LP	0,91	$0,53 \cdot 10^{-5}$	0,54	0,0	0,16	0,30	0,72	16846
	QP	0,87	$0,56 \cdot 10^{-5}$	0,63	0,0	0,04	0,33	0,17	22659

Tabell 5 bekrefter resultatene fra tabell 1 når LP og QP brukes som metoder for å beregne deterministisk effektiv referansefront. Bruk av disse to ulike metodene gir om lag samme resultater for elastisitetene i den estimerte produktfunksjonen når de brukes på samme utvalg.

Betraktes utviklingen for hver enkelt elastisitet over tid, så skiller 1977 seg ut. Som vist i tabell 1, er i hvert fall elastisitetene i C–D delen av produktfunksjonen ustabile når utvalget endres. Siden elastisitetene i en C–D produktfunksjon også skal være anslag for den enkelte innsatsfaktors andel av totalkostnadene, kan det være grunn til å tro at de virkelige elastisitetene for $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ er større for α_1 og mindre for α_4 enn det som framgår av tabell 5. Dette blir på en måte bekreftet av resultatene for årene 1978 – 1984. I disse årene har α_1 verdier fra 0,77 til 0,54. De andre elastisitetene er mer varierende, og kan være påvirket av ekstreme observasjoner. Jeg vil tro at en elastisitet for α_2 (for arbeidskraft) på 0,0 er urealistisk lav.

Beregnet optimal størrelse varierer mye fra år til år. Elastisitetene a og b for noen år utelukker regulært optimumsforløp. Den beregnede optimale skala for 1980 er betydelig lavere enn for de andre årene. For tre år; 1982, 1983 og 1984, har jeg beregnet at optimal skala er i området ca 17 – 25 mill. kr i omsetning. Dette beløpet er klart over det aritmetiske gjennomsnittet for bedriftene i utvalget, men likevel lavere enn faktisk omsetning for største bedrift. En produksjon på dette nivå representerer derfor en mulig teknologi.

3.4 Parametrisering av vektene på restleddet i produktfunksjoner.

3.4.1 Cobb–Douglas produktfunksjoner.

I avsnitt 2.8 i kapittel 3 ble en modell utviklet av Aigner, Amemiya og Poirier gjennomgått. Den viser hvordan man i en QP modell kan veie de positive og negative avvikene i en

produktfunksjon med ulike vekter, og på den måten flytte den estimerte funksjonen fra en gjennomsnittsfunksjon til en frontfunksjon. For å illustrere effekten av å variere θ , har jeg beregnet fronten for en C-D funksjon med en output og fire innsatsfaktorer. Som innsatsfaktorer i C-D funksjonen er brukt kjernefunksjonen til den homotetiske produktfunksjonen som er analysert tidligere. Som output er brukt samme definisjon for y som i den homotetiske produktfunksjonen, dvs output er brutto verdi av salg av fiskeprodukter korrigert for lagerendringer. Jeg har estimert parametrene i følgende optimaliseringsmodell, når θ er gitt eksogent:

$$(14.1) \quad \text{Min: } S = (1-\theta) \cdot \sum_{j=1}^n (\epsilon_j^+)^2 + \theta \cdot \sum_{j=1}^n (\epsilon_j^-)^2$$

når:

$$(14.2) \quad \ln A + \sum_{i=1}^m \alpha_i \ln x_{ij} + \epsilon_j^+ - \epsilon_j^- = \ln y_j ; j=1, \dots, n,$$

$$(14.3) \quad \epsilon_j^+ \geq 0, \epsilon_j^- \geq 0, \forall j, \alpha_i \geq 0, \forall i.$$

I modellen (14) er tatt med muligheten for at α_i kan bli negativ, siden dette faktisk vil bli tilfelle i tallmaterialet med fri tilpasning for året 1977. I det økonomiske området av indifferenskurven må $\alpha_i \geq 0$. Resultatene er vist i tabell 6, hvor jeg har variert θ fra 0,0001 til $\theta = 0,5$. Jeg har også sammenlignet resultatene beregnet med QP med tilsvarende resultater på samme tallmateriale, men estimert med OLS. Dette er vist i tabell 7.

Tabell 6: Kvadratisk målfunksjon med variasjon i θ .

$\theta =$	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,3	0,5
α_1	0,01309	0,02058	0,0819	0,3400	0,4272	0,4749
α_2	0,39186	0,39565	0,4074	0,28699	0,2209	0,17447
α_3	0,37206	0,3635	0,2965	0,11225	0,0454	-0,0124
α_4	-0,06313	-0,06619	-0,06995	0,00833	0,1939	0,2841
lnA	4,50385	4,48307	4,42218	2,8369	2,1489	1,7447
OBJ :	$4,32 \cdot 10^{-3}$	$4,27 \cdot 10^{-2}$	$3,88 \cdot 10^{-1}$	2,23	4,164	5,266

Tabell 7: Sammenligning av QP mot OLS.

	alle $\alpha_i \geq 0$; $\theta=0,5$	fri α_i ; $\theta=0,5$	OLS
α_1	0,4723	0,4749	0,4749
α_2	0,168	0,17447	0,1744
α_3	0,0	-0,0124	-0,0124
α_4	0,281	0,28413	0,2841
lnA	1,753	1,7446	1,7447

Tabell 6 viser at elastisitetene i en C-D funksjon varierer meget når θ endres fra en yttergrense ($\theta = 0,0001$) til en nøytral verdi ($\theta = 0,5$). Slik problemet er formulert, innebærer

$$(14.1) \quad \text{Min } S = (1 - \theta) \cdot \sum_{\epsilon > 0} (\epsilon_j^+)^2 + \theta \cdot \sum_{\epsilon \leq 0} (\epsilon_j^-)^2$$

at verdier av α_j og $\ln A$ vil bli valgt slik at flest mulige av restleddene vil bli plassert i gruppen med den laveste vekten. Når $\theta < 0,5$, vil dette være summen $(\sum_{\epsilon \leq 0} \epsilon_j^-)^2$. De fleste restleddene i produktfunksjonen blir da negative, og når θ nærmer seg null, vil funksjonen som estimeres nærme seg en frontproduktfunksjon. De elastisitetene jeg får ved en slik frontproduktfunksjon er markert forskjellig fra elastisitetene jeg har beregnet ved OLS. Når $\theta = 0,3$ eller større, begynner formen på produktfunksjonen å nærme seg den som jeg estimerte ved OLS.

Dette reiser spørsmålet om hva som er den rette formen for en slik produktfunksjon; den som beregnes ved en OLS prosedyre eller den som beregnes ved en ren frontestimering. Produktfunksjonen beregnet som frontfunksjon er best begrunnet i økonomisk teori. Men samtidig er det også denne som er sterkest påvirket av ekstreme observasjoner. Med utgangspunktet i 1. kolonne i tabell 6 ($\theta = 0,0001$) skal jeg illustrere dette bedre.

Ved en "ren" frontfunksjon hvor ikke noen restledd tillates å ha positive fortegn, vil en del restriksjoner bli bindende. Siden hver restriksjon representerer et observasjonssett (en kombinasjon av input og output) for en bestemt bedrift, vil de restriksjonene som er oppfylt som likhet, kunne tolkes som bedrifter som ligger på den beregnede effektivitetsfronten. Disse få bedriftene kalles settet av effektive bedrifter, og de bestemmer formen på produktfunksjonen. De effektive bedriftene vil naturligvis ha null slakk i sin bedrifts-spesifikke restriksjon. De er videre karakterisert ved at restriksjonen har positiv skyggepris, mens restriksjonene til bedriftene som ikke ligger på fronten, har skyggepris lik null.

Modellen som ligger bak tabell 6, er formulert med tosidig restledd, men med ulik vekt på

restledd med positivt og negativt fortegn. I denne konkrete modellen vil en derfor ikke ha positiv skyggepris for settet av effektive bedrifter. I stedet vil en få beregnet annet fortegn på restleddet.

Når $\theta = 0,0001$, har følgende DMU-er positivt restledd:

DMU-nr	Restleddets størrelse
DMU12:	$1,36 \cdot 10^{-3}$
DMU29:	$1,585 \cdot 10^{-4}$
DMU43:	$8,334 \cdot 10^{-4}$
DMU46:	$1,234 \cdot 10^{-3}$
DMU50:	$1,047 \cdot 10^{-3}$

De positive restleddene tolker jeg som stokastiske restledd, dvs y (output) er utsatt for stokastiske avvik som gjør at observert y_j er større enn produktfunksjonens verdi ved observerte verdier på x_{ij} for DMU $_j$. For alle de andre DMU-er i utvalget er $\epsilon_j^+ = 0$ og $\epsilon_j^- > 0$, dvs relatert til den teknologiske produktfunksjonen er de teknologisk ineffektive.

Tabell 7 viser sammenhengen mellom en GP estimering med like vektorer på kvadratavvikene, med og uten restriksjoner på fortegn til α_i ($i=1, \dots, 4$), og estimering ved vanlig OLS uten restriksjoner på fortegn for α_i . Spesifiseres ingen restriksjoner på fortegn til elastisitetene, blir estimatene like for de to modeller. Dersom jeg imidlertid forutsetter $\alpha_i \geq 0$ ($i=1, \dots, 4$) i GP-modellen, vil elastisitetene bli noe ulike. Dette betyr at modellene beregner ulike effektive referansesett. Forskjellen mellom tallene i kolonne 1 og 2 i tabell 4 er ikke stor.

3.4.2 Homotetiske produktfunksjoner.

Deterministisk og simulert stokastisk frontfunksjonsestimering for en homotetisk produktfunksjon ble vist for 1977 i tabell 1. Av spesiell interesse er koeffisientene under overskriften BP/QP og GP/QP. Med utgangspunkt i tallmaterialet for alle årene fra 1977 til 1984 formuleres og løses en QP modell med parametrisering av vektene for positive og negative avvik. Følgende modell formuleres:

$$(15.1) \quad \text{Min: } S = (1-\theta) \cdot \sum_{j=1}^n (\epsilon_j^+)^2 + \theta \cdot \sum_{j=1}^n (\epsilon_j^-)^2$$

når:

$$(15.2) \quad a \cdot \ln y_j + b \cdot y_j \ln \Lambda - \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ln x_{ij} - \epsilon_j^+ + \epsilon_j^- = 0 \quad ; j=1, \dots, n,$$

$$(15.3) \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1,$$

$$(15.4) \quad \epsilon_j^+ \geq 0, \epsilon_j^- \geq 0, \alpha_i \geq 0, \forall i \text{ og } j, \\ \text{og } b, \ln \Lambda \geq 0.$$

Det forutsettes av (15.4) at alle elastisitetene for kjernefunksjonen skal være ikke-negative i optimum. Dessuten skal kjernefunksjonen være homogen av grad en, se (15.3). Verdiene for θ varieres. Når $\theta \rightarrow 0$, vil parametrene jeg estimerer ($a, b, \ln \Lambda$ og $\alpha_i, i=1, \dots, 4$) tilsvare de jeg har estimert tidligere ved metoder for deterministisk frontestimering. Når $\theta = 0,5$, vil de estimerte parametrene tilsvare dem en får ved en ren ML metode. Homotetiske produktfunksjoner av den typen jeg har formulert lar seg ikke beregne ved OLS. (Omformet til en homotetisk kostnadsfunksjon, som er lineær på logaritmisk form, lar imidlertid elastisitetene seg beregne med OLS). Resultatene er vist i tabellene 8 til 15.

Tabell 8: Veiting av restleddet i en homotetisk produktfunksjon, 1977.

$\theta =$	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,3	0,5
a	0,6464	0,6468	0,6767	0,782	0,8287	0,8314
b	$0,6458 \cdot 10^{-4}$	$0,6408 \cdot 10^{-4}$	$0,581 \cdot 10^{-4}$	$0,317 \cdot 10^{-4}$	$0,163 \cdot 10^{-4}$	$0,111 \cdot 10^{-4}$
α_1	0,196	0,204	0,250	0,369	0,461	0,499
α_2	0,122	0,1295	0,188	0,079	0,010	0,0
α_3	0,632	0,608	0,442	0,172	0,080	0,013
α_4	0,049	0,058	0,119	0,379	0,449	0,488
lnA	0,142	0,103	0,042	0,123	0,076	-0,1248
OBJ	$4,956 \cdot 10^{-3}$	$4,88 \cdot 10^{-2}$	$4,27 \cdot 10^{-1}$	2,35	4,18	4,995
Opt.skala	5475	5511	5560	6870	10534	15217

Tabell 9: Veiting av restleddet i en homotetisk produktfunksjon, 1978.

$\theta =$	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,3	0,5
a	0,8396	0,837	0,852	0,893	0,869	0,8112
b	$0,1386 \cdot 10^{-4}$	$0,132 \cdot 10^{-4}$	$0,096 \cdot 10^{-4}$	$0,167 \cdot 10^{-5}$	$0,365 \cdot 10^{-5}$	$0,875 \cdot 10^{-5}$
α_1	0,65	0,668	0,71	0,75	0,745	0,711
α_2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
α_3	0,0	0,0	0,034	0,0002	0,0	0,0
α_4	0,35	0,332	0,256	0,25	0,254	0,289
lnA	0,164	0,095	0,0869	0,103	-0,208	-0,705
Opt.skala	11568	12321	15444	63972	35856	21585

Tabell 10: Veiing av restleddet i en homotetisk produktfunksjon, 1979

$\theta =$	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,3	0,5
a	0,991	0,992	0,993	0,981	0,977	0,9730
b	$0,365 \cdot 10^{-5}$	$0,362 \cdot 10^{-5}$	$0,331 \cdot 10^{-5}$	$0,239 \cdot 10^{-5}$	$0,129 \cdot 10^{-5}$	$0,687 \cdot 10^{-6}$
α_1	0,773	0,772	0,764	0,746	0,756	0,764
α_2	0,147	0,154	0,207	0,254	0,241	0,224
α_3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
α_4	0,080	0,074	0,0297	0,0	0,002	0,0115
lnA	0,936	0,931	0,892	0,704	0,603	0,521
Opt.	2345	2320	2195	7935	17440	39279

Tabell 11: Veiing av restleddet i en homotetisk produktfunksjon, 1980.

$\theta =$	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,3	0,5
a	0,9798	0,9777	0,9694	0,954	0,942	0,938
b	$-0,254 \cdot 10^{-5}$	$-0,227 \cdot 10^{-5}$	$0,771 \cdot 10^{-6}$	$0,217 \cdot 10^{-5}$	$0,303 \cdot 10^{-5}$	$0,307 \cdot 10^{-5}$
α_1	0,735	0,7336	0,732	0,7299	0,722	0,724
α_2	0,140	0,138	0,131	0,138	0,1567	0,170
α_3	0,083	0,082	0,0798	0,087	0,086	0,081
α_4	0,043	0,046	0,0573	0,045	0,035	0,025
lnA	0,8736	0,857	0,775	0,602	0,452	0,388
Opt.	-	-	-	21065	19449	20120

Tabell 12: Veiing av restleddet i en homotetisk produktfunksjon, 1981.

$\theta =$	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,3	0,5
a	0,923	0,922	0,927	0,952	0,974	0,981
b	$-0,112 \cdot 10^{-4}$	$-0,107 \cdot 10^{-4}$	$-0,712 \cdot 10^{-5}$	$0,125 \cdot 10^{-5}$	$0,961 \cdot 10^{-6}$	$0,592 \cdot 10^{-6}$
α_1	0,673	0,674	0,661	0,614	0,628	0,633
α_2	0,090	0,092	0,112	0,204	0,221	0,230
α_3	0,133	0,128	0,101	0,089	0,094	0,094
α_4	0,104	0,105	0,126	0,093	0,057	0,043
lnA	0,548	0,524	0,514	0,708	0,828	0,8499
Opt.	-	-	-	38084	26577	31562

Tabell 13: Veiing av restleddet i en homotetisk produktfunksjon, 1982.

$\theta =$	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,3	0,5
a	0,919	0,921	0,934	0,951	0,947	0,942
b	$0,377 \cdot 10^{-6}$	$0,367 \cdot 10^{-5}$	$0,294 \cdot 10^{-5}$	$0,137 \cdot 10^{-5}$	$0,115 \cdot 10^{-5}$	$0,123 \cdot 10^{-5}$
α_1	0,642	0,643	0,657	0,661	0,667	0,672
α_2	0,230	0,229	0,217	0,186	0,158	0,138
α_3	0,019	0,020	0,036	0,086	0,117	0,140
α_4	0,109	0,107	0,090	0,067	0,058	0,0495
lnA	0,374	0,387	0,469	0,587	0,539	0,4872
Opt.	21471	21565	22562	36039	46138	47342

Tabell 14: Veiing av restleddet i en homotetisk produktfunksjon, 1983.

$\theta =$	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,3	0,5
a	0,969	0,972	0,983	0,932	0,908	0,894
b	$0,122 \cdot 10^{-5}$	$0,107 \cdot 10^{-5}$	$0,398 \cdot 10^{-6}$	$0,181 \cdot 10^{-5}$	$0,243 \cdot 10^{-5}$	$0,271 \cdot 10^{-5}$
α_1	0,648	0,649	0,658	0,724	0,747	0,760
α_2	0,141	0,142	0,144	0,127	0,138	0,139
α_3	0,118	0,118	0,117	0,088	0,074	0,063
α_4	0,092	0,091	0,081	0,061	0,041	0,038
lnA	0,893	0,915	0,967	0,363	0,078	-0,0998
Opt.	25458	26230	43289	37928	37810	38998

Tabell 15: Veiing av restleddet i en homotetisk produktfunksjon, 1984.

$\theta =$	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,3	0,5
a	0,871	0,873	0,887	0,958	0,974	0,980
b	$0,566 \cdot 10^{-5}$	$0,552 \cdot 10^{-5}$	$0,443 \cdot 10^{-5}$	$0,1098 \cdot 10^{-6}$	$0,350 \cdot 10^{-6}$	$-0,728 \cdot 10^{-7}$
α_1	0,628	0,631	0,653	0,712	0,737	0,754
α_2	0,0	0,0	0,0	0,050	0,121	0,127
α_3	0,038	0,038	0,039	0,042	0,027	0,026
α_4	0,334	0,331	0,308	0,196	0,115	0,093
lnA	0,166	0,167	0,185	0,563	0,603	0,604
Opt.	22725	22996	25631	38599	73776	-

I tabellene 8 – 15 er vist endringer i elastisitetene ved systematiske endringer i θ fra 0,0001 til 0,5. Første kolonne i tabellene 8 – 15 kan sammenlignes med elastisitetene vist ved "QP"-linjene i tabell 2, som er fronttilpassing ved bruk av kvadratisk programmering. For siste kolonne i tabellene 8 – 15 ($\theta=0,5$) er ikke beregnet noe direkte sammenligningsgrunnlag.

Først kan observeres at bruk av QP med $\theta = 0,0001$ gir meget godt samsvar med koeffisientene jeg beregnet med en ren frontestimering. Også den beregnede optimale output etter skalaelastisitetsfunksjonen gir meget like estimater. Forskjellen er størst i 1978, men selv da er forskjellen på anslagene bare 0,77 %.

For noen av årene blir det betydelige endringer i koeffisientene når jeg parametriserer θ og på den måten flytter den estimerte produktfunksjonen fra en gjennomsnittsfunksjon i retning av en frontfunksjon. Spesielt gjelder det elastisitetene i kjernefunksjonen. Størst endring fra frontfunksjon blir det for året 1977, hvor α_1 (elastisiteten for råstoffinnsats) endrer seg fra 0,196 til 0,499. Verdien er monotont stigende når man går fra frontestimat til gjennomsnittsestimat. Enda større endringer er det for α_3 (elastisiteten for hjelpestoffer, f.eks. salt, emballasje osv) som synker fra 0,632 til 0,013. Det siste anslaget er mest rimelig vurdert etter faktorproporsjonalitets-teoremet. Tidligere er vist at de noe spesielle elastisitetene som frontestimeringen gir for 1977, kan forklares ved tilstedeværelsen av ekstreme observasjoner.

For 1978 er to av elastisitetene lik null både ved frontestimering og ved gjennomsnittsestimering. De brukte estimeringsmetodene gir ikke statistiske spredningsmål på koeffisientene. Jeg har omformet den homotetiske produktfunksjonen til en C-D produktfunksjon med samme definisjoner på innsatsfaktorer og produksjonsresultat. C-D funksjonen er så estimert med OLS. Estimerer for elastisitetene blir $\alpha_1 = 0,64$; $\alpha_2 = 0,12$; $\alpha_3 = -0,13$ og $\alpha_4 = 0,19$. Bare α_1 og konstantleddet er signifikant større enn 0 på 5% nivå. Jeg vil foreløpig konkludere med at både frontestimering og gjennomsnittsestimering gir tall som er forskjellige fra dem en skulle vente.

For årene 1979 til 1984 viser det seg at elastisitetene beregnet med tilnærmet frontestimering, er forholdsvis like dem jeg beregnet med gjennomsnittsestimering. Dette gjelder først og fremst elastisitetene i kjernefunksjonen. Dette resultatet betyr at formen på produktfunksjonen ikke endrer seg selv om funksjonens plassering blir endret. Siden frontfunksjonen er sterkt påvirket av de bedriftene som ligger på fronten, betyr det at for disse årene er de effektive bedriftene "normale" i den forstand at de i sin faktorsammensetning ligner på gjennomsnittsbedriften.

Tabell 5 viser at den beregnede optimale størrelse varierer meget fra år til år. I to år (tre år med LP) av åtte år kunne irregulære optimumsforløp observeres. I tilfellene hvor det var regulært optimumsforløp, varierer optimal størrelse med faktor 1 til 10. Med så store endringer med få års mellomrom, bør en være tilbakeholden med å trekke bastante konklusjoner. Den estimerte optimale størrelse ved gjennomsnittsestimeringen er i overensstemmelse med de største anslagene jeg fikk med frontestimering. Noen av anslagene indikerer også en optimal størrelse som er dobbelt så stor som ved frontestimering. Det er også en tendens i resultatene at ved å endre vekten θ fra 0,0001 til 0,5, så stiger oftest anslaget for optimal størrelse innenfor et år. Dette skulle tyde på at store og små bedrifter ikke er likt fordelt i utvalget i forhold til plassering av den estimerte produktfunksjonen. Ved nærmere analyse av tallmaterialet ser en også at dette er tilfelle. Når den estimerte produktfunksjonen ligger nær opp til en frontfunksjon, er det relativt mange små bedrifter som overskrider fronten. Når produktfunksjonen nærmer seg gjennomsnittsfunksjonen, blir det om lag like mange små som store bedrifter som overskrider produktfunksjonen. Dette tyder på at de effektive bedriftene, målt mot den estimerte produktfunksjonen, tenderer til å være små bedrifter. Mønsteret er imidlertid ikke helt klart for alle år.

Denne drøftinga påpeker at en gjennomsnitts produktfunksjon kan være et potensielt meget misvisende begrep. Ved estimering av en slik funksjonsform veier en sammen avvik med samme vekt for tilpasning på begge sider av produktfunksjonen. Den økonomiske tolkningen av en gjennomsnitts produktfunksjon (og ditto kostnadsfunksjon) burde være at det er "bra" å være på den ene siden av produkt/kostnadsfunksjonen, mens det gir uttrykk for et "dårlig" resultat å være på den andre siden. Den ene gruppen av tilpasninger er effektive pr

definisjon, mens den andre gruppen er ineffektive. Det vil være av interesse å studere om det er systematiske forskjeller mellom bedriftene i de to gruppene bortsett fra den målte forskjellen i produksjonseffektivitet. Forhold som kan forklare dette, er forskjeller i størrelse, eierstruktur, beliggenhet, faktorsammensetning eller markedstilpasning. Disse forholdene har jeg ikke kommet mer inn på i dette arbeidet.

3.5 Konklusjoner og oppsummeringer.

I seksjon 3 i dette kapitlet har jeg tatt opp en del problemer forbundet med estimering av produkt- og kostnadsfunksjoner i egenskap av frontfunksjoner. Et klart begrep om estimeringsprosedyren for produktfunksjoner er nødvendig når hensikten er å bruke produktfunksjoner i effektivitetsmålinger. Produktfunksjoners form og plassering er kritisk når individuell effektivitet skal måles, siden all produksjonseffektivitet noe løst sagt blir målt i relasjon til en beregnet effektivitetsfront. Når en estimerer parametriske produktfunksjoner (som f.eks. C-D produktfunksjoner eller homotetiske produktfunksjoner med C-D kjerne), er det allerede spesifisert en streng matematisk funksjonsform på effektivitetsfronten. Det samme vil være tilfelle med andre parametriske produktfunksjonsformer, f.eks. CES, trans-log eller generaliserte Leontief produktfunksjoner. Hvis formen for slike produktfunksjoner ikke er stabil for små endringer i utvalget eller for ulike estimeringsprosedyrer, vil dette sterkt påvirke påliteligheten av konklusjoner som kan trekkes.

Jeg har observert at frontfunksjoner kan være sterkt påvirket av ekstreme observasjoner. Dersom tilstedeværelsen av sterkt avvikende bedrifter i et tallmateriale skyldes stokastiske forhold som ikke bør trekkes inn i en effektivitetsanalyse, bør dette få konsekvenser for produktfunksjonens estimering. Problemet er imidlertid at mens en deterministisk produktfunksjon er en absolutt front som muliggjør individuelle effektivitetsmålinger, så er en stokastisk front en fordeling rundt forventningsverdien til fronten. Det er derfor vanskelig å skille den stokastiske delen av restleddet fra den delen som måler teknisk ineffektivitet på

bedriftsnivå. På bransjenivå, dvs som gjennomsnittstørrelser, lar det seg gjøre, og er også vist i Aigner, Lovell og Schmidt (1977) og i Schmidt og Lovell (1979). Jondrow et al (1982) viser en metode hvor man, via en omforming til ny, avkuttet funksjon, kan beregne konfidensintervall og betinget fordeling av teknisk ineffektivitet gitt totalineffektivitet. Denne metoden er kritisk avhengig av at man har estimater på spredningsmålene σ_u^2 og σ_v^2 . Disse målene vil man få (asymptotisk) ved ML-estimering av en stokastisk frontfunksjon.

Innføring av allokeringsineffektivitet kompliserer bildet ytterligere, siden hver parvise sammenligning av inputpriser vil kunne gi opphav til allokeringsineffektivitet. Det er ikke påvist at beregning av allokeringsineffektivitet kan løses med enkle operasjonsanalytiske metoder. Den kan imidlertid løses ved metoder som maksimerer likelihoodfunksjonen for en slik problemformulering. Løsning av problemet ved bruk av ML metoder er imidlertid meget mer komplisert enn løsning ved bruk av standard statistiske eller operasjonsanalytiske metoder.

Til slutt gjennomgikk jeg en metode som har minste kvadraters metode og frontestimering med ensidig halvnormalt fordelt restledd som spesialtilfeller. Denne metoden er meget anvendelig når en skal analysere stabiliteten i parametrene i produktfunksjoner. Med min bruk av metoden har jeg påvist at for noen år er det stor forskjell i elastisitetene når jeg bruker OLS sammenlignet med frontestimering, for andre år er forskjellen liten. Igjen viser dette viktigheten av å undersøke stabiliteten i de estimerte parametrene.

I hele dette kapitlet er produksjonsmulighetsområdet begrenset av en parametrisk funksjon. Det effektive referansesettet har derfor en spesiell matematisk form. Dette er egentlig en selvpålagt restriksjon. Man kan kanskje med større rett si at produksjonsmulighetsområdet bør være en konveks kombinasjon av de observerte innsats- og produktkombinasjoner. Dersom man også forutsetter at null produksjon – null innsatsfaktorer er en observasjon, så kan man lett definere en produktfunksjon som er homogen av grad en. I neste avsnitt skal ikke-parametriske effektive referansesett beregnes. Som et eksempel på slik ikke-parametrisk effektivitetsanalyse vil jeg benytte DEA metoden.

4. ESTIMERING AV IKKE-PARAMETRISKE FRONTFUNKSJONER.

4.1 Detaljanalyse av en enkelt DMU.

Resultatene vil bli presentert som en blanding av detaljstudier (case-studier) av noen utvalgte bedrifter, og resultater for alle bedriftene i det aktuelle utvalget. Først analyseres en enkeltstående bedrift; DMU2. Bedriften er en konvensjonell bedrift og er med i undersøkelsen alle 8 år. Målt med effektivitetstallene for DEA metoden er DMU2 forholdsvis ineffektiv, men det er også noen år hvor den får en beregnet effektivitetskoeffisient lik en. DMU2 er effektiv i 1981 og 1983, mens den er ineffektiv de øvrige årene. I tabell 16 er innsatsforbruket og produksjonsresultatet vist, sammen med effektivitetstallene for årene 1977–84. Utvalget er alle 86 bedriftene (minus bedrifter som ikke har svart på spørreskjemaet eller som har mangelfullt utfylt skjema).

Tabell 16: Output og input for DMU2, 1977–84

	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
y_1	716	1481	3621	6695	6460	5736	3187	4106
y_2	64	37	90	125	0	38	2666	548
x_1	435	872	2423	4461	4200	3872	2138	2014
x_2	61	149	96	177	0	26	1251	799
x_3	181	297	591	987	1179	1240	1015	1205
x_4	82	176	222	377	525	405	334	361
x_5	116	190	253	364	296	808	894	896
DEA-								
Eff.	0,886	0,686	0,988	0,857	1,0	0,914	1,0	0,905
Z/Rs								
E1	0,67	0,59	0,87	1,00	****	0,94	0,69	0,66
E3	0,62	0,59	0,81	0,89	****	0,91	****	***

I siste linje i tabell 16 er tatt med inputeffektivitet beregnet med Z/Rs parametriske produktfunksjon med fem input og en output. Output er definert som sum av fisk og handelsvarer, dvs samme output som er brukt i mine DEA analyser, men nå aggregert. Som input brukes samme verdier for de samme variabler som brukt i DEA analysene. I 1981 kan ikke Z/R effektivitet beregnes, siden DMU2 det året hadde null på en av innsatsfaktorene (handelsvarer). For 1983 og 1984 er ikke E3 beregnet, pga irregulert optimumsforløp for en deterministisk frontfunksjon disse årene. Tabell 16 viser at DMU2 var 100 % DEA-effektiv i årene 1981 og 1983. De øvrige seks årene var den mindre enn fullt inputeffektiv. DMU2 var ikke 100 % effektiv relatert til den beregnede parametriske frontfunksjonen noen år. De beregnede effektivitetstallene var forholdvis lave. For en enkeltstående bedrift er ikke de beregnede effektivitetstallene påfallende like med de to metodene. En del av dette kan forklares med forskjell i aggregering. Dersom vi beregnet forbruket av råvarer som $x_1' = x_1 + x_2$ for året 1981 hvor ingen Z/R effektivitet er beregnet i tabell 5, ville vi fått $E1 = 0,99$ og $E3 = 0,97$. Vi vet (fra tabell 16) at både x_2 og y_2 var null det året. Aggregeringsnivå har derfor en betydning for de effektivitetstallene som beregnes, både med DEA metoden og ved Z/R frontfunksjoner. Dette skal vi komme endel tilbake til.

Det beregnede DEA effektivitetstallet i 1977 var 0,886. Dette tallet betyr at bedriften ville måtte redusere alle sine input til 88,6 % av observert verdi for å nå fram til effektivitetsfronten. Siden produktfunksjonene i DEA løst med modell (1) er homogen av grad 1, er outputineffektiviteten lik 1/inputineffektiviteten⁶. For DEA lar dette seg lett vise matematisk, se f.eks. Charnes, Cooper and Rhodes (1978). For en mer generell behandling vises til Färe, Grosskopf og Lovell (1985). For at DMU2 skal bli like effektiv som bedriftene i det effektive referansesettet, dvs transformere DMU2 til effektivitetsfronten, må innsatsfaktorene reduseres proporsjonalt.

⁶Dette forutsetter at produksjonsmulighetsområdet i DEA er en kjegle-teknologi. I DEA modellene relatert til et konvekst mulighetsområde er ikke det tilfelle, og sammenhengen mellom inputeffektivitet og outputeffektivitet er ikke som nettopp vist.

Den effektivitetsfronten som DMU2 sammenlignes med, er en kombinasjon av faktiske bedrifter i utvalget. For DMU2 er disse bedriftene i 1977 DMU18, DMU26, DMU31, DMU43 og DMU80. Dette er bedrifter som er både større enn og mindre enn DMU2, målt i output. I tabell 17 vises input-outputtallene for disse bedriftene.

Tabell 17: Input/outputtall for de DMU-er som er i basis for DMU2 i 1977.

	DMU18	DMU26	DMU31	DMU43	DMU80
y_1	435	1593	8975	16029	19603
y_2	0	804	666	1089	146
x_1	192	776	6550	5104	8906
x_2	8	519	349	2693	1088
x_3	126	531	877	2461	4892
x_4	40	168	958	790	1877
x_5	84,3	386,6	929,5	1891,3	1888
λ_i	0,4493	0,057	0,0244	0,00035	0,0105
Z/R:E1	1,00	0,62	1,00	1,00	0,91
:E3	0,88	0,61	0,94	0,83	0,71
Rank					
ROI	27	14	45	42	*

I tredje siste og nest siste linje i tabell 17 er gitt E1 og E3 effektiviteten, beregnet med Z/Rs parametriske produktfunksjon til de samme bedriftene. Tre av av bedriftene (DMU18, DMU 31 og DMU43) er 100 % teknisk inputeffektiv sammenlignet med den beregnede parametriske frontfunksjonen. E3, som måler teknisk- og skalaeffektivitet, viser at etter dette målet er ingen av de fem DMU-ene 100 % effektive. I siste linje i tabell 17 er ført inn rangeringen i "Return On Investment" (definert i avsnitt 2.5 i dette kapitlet). For DMU80 lot ikke ROI seg beregne pga mangelfulle data. Vurdert ut fra enkeltbedrifter er det ikke alltid stor overensstemmelse mellom effektiviteten ved DEA metoden og effektiviteten ved en valgt frontfunksjonssammenligning, se spesielt tallene for DMU26. I siste linje kan vi

ytterligere konstantere at heller ikke sammenhengen med effektivitet målt som avkastning på bokført total kapital er overbevisende høy. Dette er en indikasjon på at DEA kan gi vesentlig forskjellig effektivitetsmål fra det en kan beregne med andre brukte metoder. Direkte sammenligning mellom DEA og andre metoder skal jeg komme tilbake til i dette kapitlet. For DMU26 er grunnen til den gode DEA-rangeringen denne bedrifts gode kombinasjon av y_2 og x_2 , dvs handelsvarer. En DEA effektivitet beregnet uten handelsvarer, dvs med y_1 som output og med x_1, x_3, x_4 og x_5 som input, er beregnet til 0,37. Hvis handelsvarer inkluderes i y_1 som salg og i x_2 som råstoff, øker DEA tallet til 0,82. Den ytterligere forbedring fram til 100 % effektivitet skyldes disaggregering, spesielt av output.

Relatert til ligningssett (4) i kapittel 4, vil de fem bedriftene i tabell 17 være representert ved de restriksjonene (4.3) som er oppfylt som likhet. Ved hver slik restriksjon vil vi få en positiv skyggepris⁷. Vektoren av skyggepriser er gitt i fjerde siste linje i tabell 17.

Ved enhver effektivitetsmåling må den DMU vi studerer, sammenlignes med et referansepunkt på den effektive fronten. For parametriske fronter er effektivitetsfronten den beregnede produktfunksjonen, og formen på den avhenger av de parametrene vi har estimert og de bedriftene som er på fronten. Ulike ikke-effektive DMUer vil derfor bli sammenlignet med de samme bedriftene. I DEA målinger består den effektive referansefronten av lineære segmenter, hvor ulike effektive bedrifter vil være plassert i knekkpunktene for segmentene. Ved effektivitetsmålinger utført ved DEA må DMU2 sammenlignes med et punkt på effektivitetsfronten. Effektivitetsfronten for en bestemt ikke-effektiv DMU er en kombinasjon av bedrifter som er med i det effektive referansesettet for denne DMU. Siden effektivitetsfronten ved DEA normalt vil bestå av flere ulike lineære segmenter, vil det også være ulike effektive referansesett. Ineffektive DMUer vil kunne bli sammenlignet med helt ulike effektive referansesett. Det er derfor blitt hevdet som en innvending mot DEA at man bare bør sammenligne de beregnede effektivitetstall til ineffektive DMUer hvis de er

⁷Theoretisk er det også mulig å få skyggepris lik null. I min undersøkelse har jeg ikke observert noen slike tilfeller for bedrifter som er effektive.

ineffektive i relasjon til samme referansesett, se Bedard (1985).

Jeg skal nå for DMU2 beregne det "punktet" på det effektive referansesettet, bestående av en kombinasjon av DMU18, DMU26, DMU31, DMU43 og DMU80. Denne input-effektive produksjonen beregnes ved å veie bedriftene i det effektive referansesettet med de optimale vektene for intensitetsvektoren λ . Tallene jeg bruker tas derfor fra tabell 17. La meg kalle matrisen av input/output for de effektive bedriftene for A. Jeg skal da finne $A \cdot \lambda^*$, hvor λ^* er optimal verdi for løsningen av (1). Den vektoren av innsatsfaktorer og produkter jeg på denne måten beregner, kaller jeg for "effektiv produksjon for DMU2". Denne beregnede effektive produksjonen vil bli sammenlignet med *faktisk* produksjon for bedrift DMU2. Ved en slik sammenligning kan vi få fram forskjellen mellom observerte tall og beregnede effektive tall for hver innsatsfaktor og hvert sluttprodukt.

Tabell 18: Transformerings av DMU2 til effektivitetsfronten, 1977.

	Effektiv produksjon	Observert for DMU2	For- skjell
y_1	716	716	0,0
y_2	64	64	0,0
x_1	387,3	435	47,7
x_2	54	61	7,0
x_3	160,3	181	20,7
x_4	70,8	82	11,2
x_5	103	116,3	13,3

"Effektiv produksjon" i tabell 18 er beregnet ved at for hver effektiv DMU_j i tabell 17 multipliseres deres input og output med de optimale vektorer vist som λ_j i tabell 17.

Vi ser at forskjellen mellom "observert" og "effektiv" produksjon er null. Med én output vil

det alltid være tilfelle, og er et uttrykk for at man beregner inputeffektivitet gitt en bestemt størrelse for output. I tilfeller med flere output, trenger man ikke oppnå likhet for alle output ved transformering til effektivitetsfronten. Faktisk observert forbruk av input er naturligvis større enn beregnet minimal input for å produsere den observerte output, siden jeg nå studerer et år med ineffektiv produksjon. La de fem faktiske inputtallene bli multiplisert med det beregnede effektivitetstallet 0,886. Resultatet sammenlignes med beregnet minimums input, dvs det effektive referansepunktet på effektivitetsfronten. Det viser seg da at input redusert til 88,6 % for DMU2 blir lik beregnet minimum input med unntak for x_4 , hvor redusert input blir 1,79 større enn beregnet minimum input. Tallmessig er denne forskjellen forholdsvis ubetydelig, men den påpeker et viktig forhold. Selv om input for den bedriften vi studerer (her DMU2), transformeres til effektivitetsfronten ved å foreta en proporsjonal reduksjon av alle input, så kan likevel bedriften ha slakk for en eller flere innsatsfaktorer. Slakk i input eller output etter at en ineffektiv DMU er transformert til effektivitetsfronten er mulig og i min undersøkelse også et vanlig resultat. For DMU2 i 1978 kommer dette fenomenet klarere fram.

Det effektive referansesettet er DMU43, DMU46 og DMU50. Fra tabell 16 kan vi se at DMU2 har en input effektivitet i 1978 på 0,686. Tabell 19 gir de dataene som trenges for å beregne effektiv produksjon. Linjen "Verdi av λ_j " gir skyggeprisen for restriksjonene for disse DMU-ene i optimalløsningen. De tre bedriftene som danner effektivitetsfronten for DMU2 er alle større enn den.

Tabell 19: Effektive bedrifter relatert til DMU2 i 1978.

Eff	Effektivt Referansesett			Beregnet Eff.prod.	DMU2 redusert til 0,686	
	DMU43	DMU46	DMU50		for input	Diff
y_1	14837	7474	6584	1481	1481	0
y_2	535	839	51	80,2	37	43,2
x_1	5698	2758	2901	598,3	598,3	0
x_2	1405	870	130	102,2	102,2	0
x_3	2160	1002	243	134,5	203,8	69,3
x_4	620	580	598	117	120,7	3,7
x_5	1751,2	718,4	476,4	130,3	130,3	0
Verdi av λ_j	0,01299	0,081	0,10367			

I kolonnen "DMU2 redusert til 0,686 av input" er bruken av innsatsfaktorene redusert til 68,6 % av observert verdi og observert outputvektor er uendret. Kall dette transformert produksjon. I kolonnen for "Diff" er ført opp differansen mellom beregnet effektiv produksjonsvektor og transformert produksjon. En ser da at DMU2 etter at den er transformert til effektivitetsfronten, fremdeles produserer for lite y_2 med 43,2 enheter og bruker for mye x_3 med 69,3 enheter og x_4 med 3,7 enheter. Dette er overforbruk av innsatsfaktorer eller underytelse av produksjon etter at man har tatt hensyn til den generelle ineffektiviteten. I forhold til dualformuleringen av DEA problemet vil disse slakkene framkomme som manglende oppfyllelse av restriksjonene for h.h.v. y_2 , x_3 og x_4 . De andre restriksjonene vil være oppfylt som likhet. Dette resultatet kan direkte relateres til drøftingen i avsnitt 6.2 i kapittel 2. Vi viste der at det kalte Farrells mål for inputeffektivitet er et øvre mål for mulig kostnadsreduksjon. Det samme er tilfelle med DEA metoden. Den mulige kostnadsreduksjonen vil alltid være minst like stor som det beregnede effektivitetsmålet.

Det er sammenheng mellom antallet av bedrifter i basis og antall innsatsfaktorer eller

sluttprodukter som har slakk. I de tilfellene vi har to output og fem input vil alltid summen av antall DMU i basis og antall slakk være seks for ineffektive DMU-er. For DMU2 i 1982 er det ikke noen slakk hverken for input eller output, selv om bedriften har en beregnet effektivitet på 0,914. Det beregnede effektivitetstallet er uten betydning i denne sammenheng.

4.2 Oppdeling i underutvalg

I dette avsnittet skal jeg illustrere betydningen av ulike referansesett. For å forkorte framstillingen, vil jeg bare presentere resultatene for 1977 og 1978. Sammenligningen foretas med to ulike definisjoner på underutvalg. I det ene tilfellet har jeg benyttet meg av hele datamassen (alle 86 bedriftene), og i det andre tilfellet delt opp datamassen i to deler; bedriftene med bedriftsnummer 1 – 44, som er de konvensjonelle fiskeforedlingsbedriftene, og bedriftene med nummer 45 – 86, som er fryseriene.

I tabell 20 vises resultatene for 1977 når analysene er utført med to produkter og fem innsatsfaktorer. Tabellen viser effektivitetstallet, og, hvis bedriften ikke er effektiv, hvilke andre bedrifter som genererer effektivitetsfronten.

Tabell 20: År 1977, 2 output og 5 input; ulik størrelse på utvalgene

(Kilde: Datalister 1, 4 og 5.)

Tabell 20 inn her

Sammenlignet med et utvalg på 86 bedrifter endrer effektivitetsrangeringen seg betydelig for enkeltstående bedrifter når to separate utvalg blir brukt. Generelt ser man at når utvalget av bedrifter blir mindre, så tenderer de beregnede effektivitetstallene til å bli bedre. Dette er egentlig naturlig, siden det er mulig at en ved å begrense utvalget tar bort bedrifter som ellers ville vært effektive og derfor påvirket plasseringen av effektivitetsfronten.

I 1977-undersøkelsen med 2 produkter og 5 innsatsfaktorer er de konvensjonelle bedriftene i gjennomsnitt mer effektive enn fryseriene. Dette har den konsekvensen at ineffektive konvensjonelle bedrifter normalt har andre konvensjonelle bedrifter som sitt effektive referansesett, mens få effektive fryserier er med i referansesettet. For de ineffektive fryseriene er forholdet omvendt. For dem (bedriftene nr 45 – 86) består de effektive referansesettene hovedsaklig av konvensjonelle bedrifter. Siden vi opererer med verditall både for innsatsfaktorer og produkter, tyder dette på at den produktmiks konvensjonelle bedrifter har, er mer fordelaktig enn for fryserier. Effektivitetstallet er imidlertid såkalt totaleffektivitet. Vi har tidligere i produktfunksjonsanalysen vist at optimal skala var spesielt lav i 1977. Dette vil også tendere til å gi de konvensjonelle bedriftene et gjennomsnittlig høyere effektivitetsmål, siden de konvensjonelle bedriftene i gjennomsnitt er mindre enn fryseriene.

Gjennomsnittlig effektivitet for konvensjonelle bedrifter (effektive inkludert) er 0,97 når hele utvalget er sammenligningsgrunnlag. For fryseriene er det tilsvarende tallet 0,85.

Hva skjer når utvalget på 86 bedrifter deles inn i to underutvalg; det ene bestående av konvensjonelle bedrifter og det andre av fryserier? En åpenbar konsekvens av to underutvalg blir at konvensjonelle bedrifter nå bare blir sammenlignet med andre konvensjonelle bedrifter og fryseriene blir sammenlignet med andre fryserier. For å skille mellom ett stort utvalg og to underutvalg, vil vi kalle dem h.h.v. stort og lite utvalg.

Først undersøkes effektivitetstallene til bedrifter som følge av at det totale utvalget på 86 bedrifter blir delt i to underutvalg. Ineffektive konvensjonelle bedrifter, som ved stort utvalg hadde andre effektive konvensjonelle bedrifter i sitt referansesett, vil ikke få noen endring i

sine effektivitetstall ved overgang til lite utvalg. De ineffektive konvensjonelle bedriftene, som ved stort utvalg hadde noen fryserier i referansegruppa, vil få beregnet nytt effektivitetstall etter at utvalget ble redusert. Effektivitetstallet i tilfelle endring viser at bedriftene framtrer som mer effektive når referansegruppen blir liten. Men mønsteret er at endring i effektivitetstallet er lite. Som et eksempel kan vi betrakte DMU41 som har som sitt referansesett DMU28, DMU43, DMU72 og DMU80 ved stort utvalg, og referansesett DMU18, DMU28, DMU42 og DMU43 ved lite utvalg. Ved overgang fra stort til lite utvalg øker input effektiviteten for DMU41 fra 0,90 til 0,92.

DMU2 har ved stort utvalg referansesett DMU18, DMU26, DMU31, DMU43, DMU80. Den siste bedriften er et fryseri. Det nye referansesettet blir DMU18, DMU26, DMU31 og DMU43, dvs fryseriet blir ikke erstattet med noen konvensjonell bedrift. Dette fører til en liten resultatforbedring; effektivitetstallet endres fra 0,89 til 0,91.

Fryseribedriftene (DMU45– DMU86) viser ved stort utvalg klart lavere gjennomsnittlig effektivitetstall for 1977 enn de konvensjonelle bedriftene. Bare 6 av 41 bedrifter har effektivitetstall lik 1. Settet av de effektive referansebedriftene består for det meste av konvensjonelle bedrifter. Jeg har derfor sett nærmere på hva virkningen blir for effektivitetstallene når fryseribedriftene bare skal sammenlignes med andre fryseribedrifter.

For det første øker det gjennomsnittlige effektivitetstallet fra 0,85 til 0,94. Dette er en betydelig forbedring. Det er viktig å være klar over at denne forbedringen ikke skyldes noen forhold internt i de bedriftene som opplever denne effektivitetsendringen, men kun er en virkning av et redusert utvalg som de effektive referansebedriftene kan velges fra. Dette understreker at DEA effektivitetsmålet er et relativt mål på to måter. For det første er det normert til et tall mellom null og en. For det andre er det relatert til de øvrige bedriftene i utvalget.

Langt flere fryserier framtrer som fullt effektive ved overgang til lite utvalg. Ytterligere 12 bedrifter, til sammen 18, er nå effektive. De fleste av disse hadde fra før av et

effektivitetstall rundt 0,90. Den bedriften som forbedret seg mest, økte fra 0,83 til 1,00 (DMU54).

Referansebedriftene for ineffektive DMU-er består av effektive bedrifter i samme utvalg. Ved stort utvalg, år 1977, er til sammen 31 bedrifter effektive. 52 er derfor ineffektive. (Tre er tatt bort pga mangler ved dataene.). For disse 52 bedriftene skal det dannes effektive referansesett bestående av de effektive bedriftene. 6 av de effektive bedriftene er aldri med i det effektive referansesettet til noen ineffektiv bedrift. Det er DMU3, DMU16, DMU35, DMU38, DMU40 og DMU59. Disse bedriftene ligger på ytterkanten av det empiriske produksjonsmulighetsområdet vi har estimert. Bedrift DMU43, derimot, er med i det effektive settet for tilsammen 41 ineffektive DMU-er. Ellers er DMU26 og DMU28 med 25 ganger, og DMU31 er med 23 ganger. De fire nevnte DMU-ene opptrer oftest i det effektive settet. De står tilsammen for om lag halvparten av de totale referansene til effektive bedrifter. DMU26, DMU31 og DMU43 var alle i det effektive referansesettet til DMU2 i 1977. DMU18 og DMU80 opptrer i h.h.v. 15 og 16 effektive referansesett. En vil kunne oppleve at selv om mange bedrifter er effektive, og derfor er med på å danne den effektive produksjonsfronten, så er det i praksis få bedrifter (i mitt eksempel fra 1977 bare 5-6 bedrifter) som sterkest påvirker effektivitetsfronten. Bedrifter som bare framtrer som effektive i sitt eget referansesett, vil jeg kalle "egenevaluatorer"⁸. Sammensetningen av innsatsfaktorer og produkter er så avvikende i forhold til de andre bedriftene i utvalget, at slike bedrifter reelt sett ikke har noen andre bedrifter å sammenligne seg med. De ligger i en viss forstand i ytterkant av produksjonsmulighetsområdet. Den rette tolking av slike tilfeller er at bedriften kan være effektiv, men en nærmere undersøkelse vil kanskje vise at årsaken til den beregnede effektiviteten er at en "egenevaluatorer" ikke kan sammenlignes med andre bedrifter ved radial endring av input eller output. De effektive bedriftene som ofte opptrer i referansesettet til ineffektive bedrifter, er blitt sammenlignet med et stort antall bedrifter. Man kan derfor feste større tillit til disse bedriftenes effektivitetsmål. Smith og Mayston (1987, s 187) skriver om dette:

⁸Charnes og Cooper (1985, s 78) kaller slike DMU-er for "self-evaluators".

"Thus, if an authority is initially identified as "efficient" under DEA, an important supplementary measure in assessing the robustness of this result is the number of inefficient authorities for which the authority forms the efficient frontier. If this number is high, the authority is genuinely efficient with respect to a large number of authorities. If the number is low, the authority may still be efficient, but there is not enough comparable evidence to form a final judgement. The measure of efficiency under DEA is therefore conservative, in the sense that it will tend to over-estimate efficiency, particularly amongst "unusual" authorities."

(Smith og Mayston's betegnelse "authority" kan skiftes ut med min betegnelse "DMU".)

I DEA metoden og tilsvarende ikke-statistiske metoder kan en ikke operere med signifikanstester av de beregnede effektivitetsmål. Ved å studere hvor mange ganger en effektiv DMU opptrer som referanse for andre ikke effektive DMU-er, vil man kunne danne seg et inntrykk om robustheten til de beregnede effektivitetsindeksene, når den studerte DMU framtrer som 100 % effektiv.

4.3 Endring av antall input og output.

I tabell 21 har jeg sammenlignet effektiviteten fra 1977 med 1978. I tillegg har jeg gjort en endring i definisjonen av variabler, slik at i de analysene som er oppsummert i tabell 21, er det operert med 1 output og 4 input. Endringen består kort sagt i at salg av handelsvarer tas bort som output og kjøp av handelsvarer tas bort som input.

Tabell 21: Sammenligning av 1977 med 1978; 1 output og 4 input.

(Tabell 21 inn her)

Ved sammenligning av tabell 21 og 20 ser man at alle de DMU-er som var effektive når modellen spesifiseres med en output og fire input, også var effektive når modellen ble

formulert med 2 output og fem input. Dette er et generelt resultat. Det er ikke så vanskelig å vise at en effektiv DMU ikke kan bli ineffektiv når en tar med flere input og/eller flere output i analysen. Det samme vil også gjelde for ineffektive DMU-er; den målte effektivitet vil ikke bli mindre når antall variabler øker. Endringen kan være ulik for ulike bedrifter, og rangeringen kan endres. Tabell 21 kan tolkes som en oversikt over de bedriftene som er produksjonseffektive. Tabell 20 viser da både produksjons- og handelseffektivitet. De produksjonseffektive bedriftene (fra tabell 21) er også alle effektive bedrifter i tabell 20.

To konklusjoner er nærliggende. For det første er det langt færre bedrifter som er effektive når bare aktivitet knyttet til fiskeproduksjon tas med, sammenlignet med hele den økonomiske aktivitet. Spesielt er dette merkbart for de konvensjonelle bedriftene. Dette henger sammen med at såkalt "annen aktivitet" (først og fremst handelsvirksomhet) spiller en stor rolle for konvensjonelle bedrifter. I 1977 hadde 6 konvensjonelle bedrifter brutto omsetningsverdi for handelsvarer på minst 50 % av brutto omsetningsverdi for fiskeprodukter. For fryserier er det bare en bedrift (DMU61) hvor det samme er tilfelle. En av årsakene til at konvensjonelle bedrifter framstår som mindre effektive når handelsvirksomhet defineres bort, skyldes kort og greit at handelsvirksomhet er en forholdsvis viktig del av disse bedriftenes økonomiske aktivitet. Dette får en bekreftet ved å beregne såkalt "virtual output"⁹ for de effektive bedriftene. For de effektive fryseriene er gjennomsnittlig "virtual output" for innsatsfaktor 2 på 0,27. For de effektive fryseriene er det tilsvarende tall 0,14. En annen forklaring er at varekjøp, x_2 , er tatt bort som innsatsfaktor. Men vi har ikke kunne foreta en reduksjon av arbeidskostnader (x_3) eller kapitalkostnader (x_5) som kan henge sammen med kjøp og salg av handelsvarer. De virkelige kapitalkostnadene kan derfor være for høyt vurdert, og spesielt kan dette gjelde konvensjonelle bedrifter. En tredje forklaring, som jeg ikke har hatt muligheter til å teste i dette datamaterialet, kan være at konvensjonelle bedrifter har langt større sesongsvingninger

⁹Virtual output for innsatsfaktor r beregnes som $y_r \cdot u_r$, hvor u_r er den optimale skyggepris for restriksjon r i (1). Legg merke til at for en optimal DMU vil naturligvis $\sum_r y_r \cdot u_r = 1$, og den beregnede virtuelle output er da den veide andel av den optimale effektivitet.

i fiskeproduksjonen. Deler av året kan de ha ledig kapasitet, som de utnytter til handelsvirksomhet.

For samtlige bedrifter, både konvensjonelle og fryserier, er det beregnede effektivitetstallet med en output og fire input lavere enn, eller identisk med det jeg fikk med to output og fem input. Bare for noen av de effektive bedriftene blir effektivitetstallet det samme. Det er klart at når antall output og/eller antall input minker i modellen, så blir også det beregnede effektivitetstallet mindre eller uendret. Den drastiske reduksjonen i antallet effektive bedrifter skyldes i første rekke at antall output ble redusert med 50 %. Rent matematisk reduserer dette mulighetsområdet betydelig, og selv om også antall input ble redusert, er det nå "lenger" til nærmeste effektivitetsfront enn hvis output hadde flere dimensjoner. Dette forholdet er viktig å være klar over i sammenligning mellom forskjellige typer analysemodeller. Dette momentet er viktig i forståelsen av beregnede effektivitetstall, siden det viser at man må forsøke å skille mellom en beregningsteknisk forklaring og økonomiske forklaringer på beregnede DEA effektiviteter. Hvis man tar med en ny, men irrelevant produksjonsvariabel i DEA, vil de enkelte DMUer ikke få dårligere beregnet effektivitet, og i mange tilfeller bedre. Dersom de som blir analysert er klar over dette, vil det her være en mulighet å manipulere resultatet, slik at ens egen produksjon framtrer som meget effektiv. Det er derfor et krav til nøkternhet i valg av output og inputvariabler. I valget bør de være viktige i økonomisk forstand og sentrale i forhold til den målsetting organisasjonen har.

Jeg skal ikke analysere enkeltstående bedrifter i dette avsnittet. Likevel kan det noteres at DMU1, som fikk redusert sin effektivitet fra 1,0 til 0,39, hadde større omsetningsverdi på handelsvarer enn på fiskeprodukter i 1977. For DMU26, som også fikk redusert sin effektivitet fra 1,0 til 0,39, var handelsvarer nesten 50 % av omsetningen av fisk. DMU33 derimot, som har handelsomsetning på ca 67 % av fiskeomsetningen, og som man derfor skulle tro ville få sterkt redusert beregnet effektivitet, fikk bare redusert sin effektivitet fra 1 til 0,8. En forklaring på dette kan være at denne siste bedriften hadde lite verdiskapning i handelsvirksomheten, siden varekostnader etter regnskapet er om lag 93 % av salgsv verdien. For fiskeprodukter er det imidlertid slik for denne bedriften at inntakskost (råstoffkostnad) for fiskevarer er bare ca 54 % av salgsv verdi.

4.4 Konsistens i effektivitet over tid.

Tabell 21 viser at flere av de bedriftene som er effektive i 1977 også er effektive i 1978. For de som ikke er effektive noen av årene, er det imidlertid ikke lett å se om det finnes noe mønster i effektivitetsutviklingen. En skulle tro at det er et visst mønster fra år til år, slik at den effektivitetsrangeringen jeg kommer fram til, ikke er uavhengig av tidligere og etterfølgende år. Jeg skal nå analysere sammenhengen mellom effektivitetsrangeringen over tid. Tabell 22, som følger nedenfor, viser effektivitetstallene som er blitt beregnet med DEA metoden i perioden 1977 – 1984 for alle bedriftene i utvalget. I tabell 22 er brukt samme definering av input og output for alle år. Analysen er gjort med to output og fem input og bruk av modell (1).

Tabell 22: Effektivitetstall for 1977 til 1984.

(Tabell 22 inn her)

Første kolonne viser DMU-nr. Som påpekt tidligere forekommer det at bedrifter går ut av utvalget i løpet av perioden. De blir da normalt erstattet med tilsvarende bedrifter, tatt fra en liste som er trukket ut på forhånd. I disse tilfellene får den nye DMU det samme nummer som den DMU den erstatter. I undersøkelsen er det tatt hensyn til at det kan komme nye bedrifter inn i utvalget over tid. Helt til høyre i tabellen står årstallet hvor det eventuelt kommer inn en ny bedrift til erstatning for en som forlater utvalget. Når det i tabell 22 er oppgitt effektivitetstall null (0.000), betyr det at en DMU ikke er med i utvalget det året. Eksempler på dette er DMU66 for 1977 og 1978 og DMU33 i årene 1982 til 1984. Det gjelder også flere andre bedrifter. Antallet utelatte bedrifter øker de siste årene. Det skyldes, som forklart i avsnitt 1.1 om UTVALGET, at det de siste årene ikke alltid har vært egnede reservebedrifter.

Jeg beregner først simpel korrelasjon mellom effektivitetstallene for ett år mot det foregående (eller etterfølgende) år. Jeg er ikke direkte interessert i effektivitetstallet *per se*, men snarere i hvordan den enkelte bedrift er rangert i forhold til de andre bedriftene i utvalget. Jeg har derfor foretatt sammenligningene i form av rang-korrelasjon (Spearman's rang korrelasjon). Bedriftene som ikke er med to etterfølgende år, er ikke med i korrelasjonsberegningene.

Tabell 23: Rang-korrelasjon av DEA-effektivitet mellom to påfølgende år.

	1977-78	78-79	79-80	80-81	81-82	82-83	83-84
	0,441	0,360	0,358	0,217	0,282	0,115	0,270
n =	77	79	81	79	78	74	68

Korrelasjonstallene er lave. Dette kan ha to forklaringer. Enten er samsvaret mellom bedriftenes rangering forholdsvis lite, og DEA metoden avspeiler dette forholdet rett. Eller så er DEA metoden lite egnet til å rangere bedriftene etter effektivitet. r er signifikant forskjellig fra null når

$$(16) \quad \frac{|r|}{(1-r^2)^{1/2}} \cdot (n-2)^{1/2} > c$$

hvor $c = (1 - \frac{\epsilon}{2})$ fraktilen i studentfordelingen med $(n-2)$ frihetsgrader.

På 5 % nivå ($\epsilon = 0,1$) får vi da $c = 1,67$, og på 2,5 % nivå $c = 2,0$. (16) kan omregnes til kritiske verdier uttrykt i $|r|$, dvs jeg beregner det tallet som skal være mindre enn absoluttverdien for r . Kritiske verdier for $|r|$ blir 0,183 på 5 % nivået og 0,218 på 2,5 % nivået. (Beregningene er her gjort med 80 frihetsgrader). Årene 1980-81 og 1982-83 har derfor så lave korrelasjonstall at de med det beregnede signifikansnivå ikke kan sies å være signifikant forskjellige fra null.

Tabell 23 viste virkningen av å ta bort fra utvalget de bedriftene som skiftes ut mellom 10 år. I tabell 24 er vist simpel korrelasjonen foretatt på de direkte beregnede tallene for 1977–84, hvor bare manglende observasjoner er tatt bort. I tabell 25 viser jeg tilsvarende Spearman rang–korrelasjon på samme materiale. I disse krystabellene er alle år korrelert. Korrelasjonen for etterfølgende år vises i diagonalen.

Tabell 24 : Direkte korrelasjon av ukorrigert datamengde

	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
1978	0,663	1					
1979	0,249	0,206	1				
1980	0,118	0,121	0,372	1			
1981	-0,006	-0,015	0,199	0,158	1		
1982	0,005	-0,047	0,111	0,007	0,172	1	
1983	0,064	0,022	0,199	0,167	0,406	0,090	1
1984	0,212	0,078	0,032	0,047	0,099	0,301	0,177

Tabell 25: Rang–korrelasjon av ukorrigert datamengde.

	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
1978	0,444	1					
1979	0,266	0,331	1				
1980	0,133	0,247	0,348	1			
1981	0,024	-0,003	0,175	0,163	1		
1982	0,234	0,077	0,232	0,154	0,282	1	
1983	0,058	0,059	0,135	0,158	0,424	0,155	1
1984	0,264	0,145	0,082	0,140	0,128	0,285	0,270

Av disse to tabellene trekker jeg følgende konklusjoner. For det første er i de fleste tilfelle korrelasjonen mellom to påfølgende år større enn for år med lengre mellomrom. Det er to unntak. Korrelasjonen mellom 1981 og 1983 er større enn mellom 1981 og 1982. Det samme er tilfelle mellom 1982 og 1984, som har større korrelasjon enn mellom 1982 og 1983. Korrelasjonen mellom 1982 og 1983 er forøvrig ikke signifikant forskjellig fra null i utgangspunktet.

For det andre er rangkorrelasjonen forholdsvis stabil enten jeg korrigerer for nye bedrifter (som er gjort i tabell 23) eller unnlater å gjøre denne korrigeringen (som er unnlatt å gjøre i tabell 25). Dette tolker jeg slik at den effektive referansefronten ikke blir sterkt påvirket av den forskjellen i utvalgene som korreksjonen medfører. Effektivitetsfronten ved DEA vil ikke bli påvirket så lenge bare ineffektive bedrifter tas bort. Hvis effektive bedrifter tas bort, kan effektivitetsfronten forbli forholdsvis stabil, så lenge de effektive bedriftene er såkalte "egnevaluatorer". En foreløpig konklusjon er da er at den estimerte effektivitetsfronten er forholdsvis robust for mindre endringer i utvalget.

4.5 50 gjennomgangsbedrifter over tid.

De DEA effektivitetstallene som er presentert i tabell 22, er for hvert år beregnet ut fra det utvalget som var med i Driftsundersøkelsen dette året. Som påpekt er det en liten endring i utvalget fra år til år. Det betyr at de beregnede effektivitetstallene er gjort med utgangspunkt i ulike referanseramme. Til sammen 36 bedrifter blir skiftet ut i løpet av de 8 årene jeg har data fra. Jeg har derfor beregnet DEA effektivitetstall for hvert år når utvalget bare er de 50 bedriftene som er med samtlige 8 år. Effektivitetstallene for disse 50 bedriftene er vist i tabell 26. Beregningen er gjort med to output og fem input og modell (1).

Tabell 26: DEA effektivitet for de 50 bedriftene som er med alle år.

(Tabell 26 inn her)

Gjennomsnittlig effektivitet er større i tabell 26 enn i tabell 22. Det betyr at effektiviteten til de gjenværende bedriftene øker når utvalget minker. Dette er forventet, idet man ved å redusere utvalget vil kunne ta bort noen bedrifter som var på effektivitetsfronten, og dermed gjør man effektivitetsfronten mer "oppnåelig". I tabell 26 kan man, for hver enkelt av de 50 bedriftene, se hvordan effektivitetsutviklingen er relatert til et fast utvalg av sammenligningsbedrifter.

Tallene i tabell 26 er analysert på to måter. Først har jeg beregnet korrelasjon og rangkorrelasjon mellom alle årene. Hypotesen er at umiddelbart etterfølgende år vil ha høyere korrelasjon enn år med lengre mellomrom, og at det ikke er noen signifikant negativ korrelasjon mellom noen år. En signifikant negativ korrelasjon vil være spesielt vanskelig å forklare. Tabell 27 og 28 viser resultatene av den problemstillingen.

Tabell 27: Korrelasjon av DEA effektivitet for utvalg av 50 gjennomgående bedrifter.

	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
1978	0,702	1					
1979	0,245	0,174	1				
1980	-0,015	-0,056	0,260	1			
1981	0,037	0,048	0,275	0,209	1		
1982	-0,062	-0,109	-0,081	-0,091	0,067	1	
1983	-0,066	0,035	0,054	0,167	0,314	-0,046	1
1984	0,004	-0,044	0,246	0,273	0,374	0,531	0,265

Tabell 28 : Rang-korrelasjonsmatrise for de 50 gjennomgangsbedriftene

	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
1978	0,406	1					
1979	0,358	0,217	1				
1980	0,068	0,075	0,242	1			
1981	0,172	0,057	0,217	0,088	1		
1982	0,177	-0,034	0,114	-0,024	0,271	1	
1983	-0,057	0,142	0,108	0,242	0,321	0,121	1
1984	0,128	0,065	0,350	0,317	0,385	0,509	0,421

Med 50 observasjoner (48 frihetsgrader) blir de kritiske verdiene for $|r|$ utregnet til 0,234 på 5 % nivå og 0,280 på 2,5 % nivå. Korrelasjonene er normalt positive, noe som tyder på at det er en sammenheng mellom rangeringen fra år til år. Imidlertid er det bare for 1977-78, 1978-79 og 1983-84 at korrelasjonen er større for to etterfølgende år enn for år med lenger avstand. Som det framgår av tabellen er det forholdsvis mange rangkorrelasjoner som ikke er signifikant forskjellige fra null på 5 % nivå. Siden DEA metoden beregner effektivitetstall relatert til de øvrige bedriftene i utvalget, finner jeg det mest riktig å bruke rang-korrelasjonene i tolkningene.

Det andre problemet jeg har tatt opp i dette avsnittet, er ulikt sammenligningsgrunnlag for de 50 gjennomgangsbedriftene. Som det har framgått, kan effektivitetstallene for disse bli beregnet med utgangspunkt i to utvalg: 1) et utvalg som består av de 50 gjennomgangsbedriftene, og 2) et annet utvalg som består av alle bedriftene som er med i driftsundersøkelsen et bestemt år, maksimalt 86 bedrifter. Jeg vil undersøke om effektivitetstallene for de 50 bedriftene blir sterkt påvirket av ulike sammenligningsgrunnlag. A priori vet man at dersom de bedriftene som blir fjernet fra utvalget, lå på effektivitetsfronten i det store utvalget, så vil dette påvirke referansesettet til de gjenværende bedriftene. I utgangspunktet kan man anta at de bedriftene som blir igjen i utvalget, får et bedre effektivitetstall. Den interne rangering kan også endres. Denne

problemstillingen er analysert ved å beregne korrelasjon og rang-korrelasjon for de 50 gjennomgangsbedriftene når begge referansesettene brukes. Resultatet er vist i tabell 29.

Tabell 29: Direkte korrelasjon og rang korrelasjon for 50 bedrifter i to ulike utvalg.

	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
D-korre	0,958	0,979	0,963	0,846	0,851	0,998	0,988	0,659
R-korre	0,960	0,943	0,956	0,812	0,814	0,951	0,972	0,737

Tabell 29 viser overbevisende samsvar for de 50 bedriftene, selv om de er plassert i to utvalg. Dette kan skyldes at de bedriftene som tas bort fra utvalget, er dårlige bedrifter, og derfor ikke vil påvirke effektivitetsfronten. Vi kan imidlertid se av tabell 22 at 31 av de 36 bedriftene som tas bort, har et effektivitetstall på 1 i minst ett år. 8 av de som fjernes står med et effektivitetstall på 1 i 1983, mens bare 6 av dem som fjernes har et effektivitetstall på 1 i 1984. 13 av de 36 som fjernes, hadde et effektivitetstall på 1 i 1977. Stabilitet i effektivitetsrangeringen til bedriftene avhenger derfor ikke i mitt utvalg av om en bedrift som tas bort er med på effektivitetsfronten eller ikke. Som det framgikk av min tidligere analyse er det ofte bare en liten del av de effektive bedriftene som kommer med i det effektive referansesettet. Nærmere analyse viser at noen få bedrifter kan være meget kritiske for formen på produktfunksjonen. For mitt datamateriale har det ikke i særlig grad påvirket den relative rangeringen av de gjenværende bedrifter at vi tar bort 36 bedrifter fra utvalget. Jeg lar det stå åpent om dette også vil gjelde for andre utvalg.

Dette resultatet står i sterk kontrast til de konklusjonene vi kunne trekke etter å ha tatt bort en eller flere bedrifter fra effektivitetsfronten når den er beregnet som Z/R produktfunksjon. I de eksemplene vi har studert, har koeffisientene i produktfunksjonene endret seg meget, og denne endringen har hatt påvirkning på effektivitetsmålene. Jeg vil derfor trekke den slutning at en effektivitetsfront beregnet med DEA metoden er langt mer robust for endringer i utvalget den blir beregnet fra enn tilfellet er for en parametrisk

best-practice front. Dette vil jeg også tro gjelder mulige feilspesifiseringer eller svakheter i datamaterialet. Mulige feilkilder i datamaterialet eller stokastiske forhold vil derfor bare påvirke lokale deler av en DEA front, mens slike feilkilder potensielt vil kunne påvirke hele fronten for en parametrisk produktfunksjon.

4.6 ANALYSE AV SKALAEFFEKTIVITET.

4.6.1 Modell.

Tilstedeværelse av lokale stordriftsfordeler eller lokale smådriftsfordeler kan analyseres med modell (2.1) – (2.4) i dette kapitlet. Denne modellen beregner ren teknisk innsatseffektivitet. Det beregnede effektivitetsmålet kan sammenlignes med effektivitetsmålet E_1 definert i avsnitt 2.3. Det er kjent fra kapittel 4 at modell (2) har som sin dualformulering følgende modell (17). For detaljert drøfting av disse modellene vises til relevante deler av kapittel 4.

$$(17.1) \quad \text{Max: } z_0 = \sum_{r=1}^s u_r \cdot y_{r0} + u_0$$

når:

$$(17.2) \quad \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{i0} = 1,$$

$$(17.3) \quad \sum_{r=1}^s u_r \cdot y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{ij} + u_0 \leq 0 \quad ; j=1, \dots, n,$$

$$(17.4) \quad u_r, v_i \geq \delta (= 10^{-6}), \text{ og } u_0 \geq 0.$$

Avgjørende for analyse av skaleeffektivitet med utgangspunkt i modellene (2) og (17) er den optimale verdien for u_0 og tolkingen av skyggepris for $\sum_j \lambda_j = 1$. Tabell 30 viser sammenhengene mellom verdi for u_0 , $\sum_j \lambda_j$ hvis summen var uten restriksjon (tilsvarer modell (1) i dette kapitlet), og skyggepris for restriksjonen $\sum_j \lambda_j = 1$. Første kolonne i tabell 30 viser indikatorene for lokale stordriftsfordeler, andre kolonne de indikatorer som viser lokale smådriftsfordeler.

Tabell 30: Sammenheng mellom de ulike mål for stordriftsfordeler og smådriftsfordeler.

	Lokale stor- driftsfordeler	Lokale smådriftsfordeler
u_0	> 0	< 0
$\Sigma_j \lambda_j$	< 1	> 1
Skyggepris på $\Sigma_j \lambda_j = 1$	> 0	< 0

4.6.2 Beregning av optimal skala (MPSS – Most Productive Scale Size).

Jeg tar utgangspunkt i en beregning av inputeffektivitet og et produksjonsområde definert med "ray unboundedness" postulatet, se postulat 3) avsnitt 4.1 i kapittel 4. Når en ineffektiv DMU blir transformert fram til effektivitetsfronten, så beregnes ny output som observert output pluss eventuell slakk, mens ny input blir beregnet ved å multiplisere observert input med det beregnede effektivitetstallet. Eventuell slakk trekkes fra resultatet.

Uttrykt på vektorform, og ved bruk av den notasjonen for slakk som ble innført i ligningssett (1.1)–(1.4), kan verdiene av en ineffektiv DMU_j, transformert til effektivitetsfronten, uttrykkes som

$$\begin{aligned} y_j^* &= y_j^0 + s y_j \\ x_j^* &= w_0 \cdot x_j^0 - s x_j \end{aligned}$$

Ta utgangspunkt i en ineffektiv bedrift, beregnet med modell (1). Den kan for det første bringes til effektivitetsfronten via en horisontal transformasjon som vist ovenfor. Dernest kan den transformeres til sin mest optimale skala ved at de beregnede x^* og y^* divideres

med optimal $\sum_j \lambda_j$ fra (1). Formelen for den mest effektive skalastørrelse vil for en bestemt DMU da kunne skrives som

$$(18) \quad \left[\frac{w_0 \cdot x_i - sx_i}{\sum_j \lambda_j}, \frac{y_r + sy_r}{\sum_j \lambda_j} \right] ; \forall i, r.$$

Av løsningen for dualformuleringen til et DEA problem kan man da avlese hvorvidt det er lokale stordriftsfordeler eller ikke rundt de DMU-ene som analyseres. Dette kan lett sees av summen på λ -ene i den optimale løsningen.

4.6.3 MPSS for DMU2.

I tabell 31 stilles opp summen av vektene for basisaktivitetene til DMU2. Jeg tar også med de tilfellene hvor DMU2 er på effektivitetsfronten.

Tabell 31: Summen av λ_j for DMU2, 1977-84

	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
$\sum_j \lambda_j$	0,542	0,198	0,638	1,819	1,00	1,265	1,00	0,298

1978 er et år med ekstremt lav vekt. I 1978 produserte DMU2 1481 enheter y_1 og 37 enheter y_2 . De bedriftene som var på effektivitetsfronten relatert til DMU2 det året (det var DMU43, DMU46 og DMU50), hadde som output h.h.v. 14837, 7474 og 6584 av y_1 , og 535, 839 og 51 av y_2 . Samtlige av disse bedriftene hadde derfor vesentlig større output enn DMU2. Siden DMU2 ikke er effektiv, kan det være nærliggende å trekke den konklusjonen at DMU2 i tillegg til å være teknisk ineffektiv, også kan være av for liten skala. Summen av vektene λ_j er et mål på hvilken type lokale skalaulemper som finnes. Brukes denne tolkingen, viser tabell 31 at DMU2 var karakterisert av lokale stordriftsfordeler de årene

hvor $\sum_j \lambda_j < 1$ og lokale smådriftsfordeler de årene $\sum_j \lambda_j > 1$. I to år er bedriften totaleffektiv, og er da skalanøytral.

4.6.4 Detaljstudie av DMU82.

En analyse av skalaeffektiviteten vil nå bli konkretisert ved en detaljstudie av DMU82. I etterfølgende tabell 32 er oppgitt produksjonen og innsatsforbruket til denne DMU i årene 1977 til 1984. I siste linje er beregnet innsatseffektivitet oppgitt. Effektivitetstallene kan avleses fra tabell 22, og er beregnet med modell (1).

Tabell 32 : Output og input for DMU82 for 1977–84 (i 1000 kr).

	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
y_1	11590	10791	13721	13562	10587	12352	19488	11334
y_2	1345	2610	2405	2480	52	1938	2098	1589
x_1	6561	6348	8730	8643	3495	6529	10741	6148
x_2	3105	2995	3217	921	1935	1323	1884	2017
x_3	2803	2685	3169	4811	3201	4392	4179	3278
x_4	1074	1121	855	1170	1075	1346	1586	1601
x_5	1375	2051	2405	2814	3223	2999	3382	3174
Eff	0,858	0,741	0,852	0,858	1,0	0,925	0,948	0,762

Sammenligningsgrunnlaget for DMU82 i analysene i dette avsnittet er DMU45 – DMU86. I tabell 33 gis (a) en oversikt over koeffisientene for DMU82 for u_1 og $v_1, v_3 - v_5$ når $\sum_j \lambda_j = 1$, (b) effektivitetstallet under samme forutsetning, (c) skyggepris på denne restriksjonen, (d) effektiviteten for DMU82 når jeg ikke har noen restriksjon på $\sum_j \lambda_j$, og (e) størrelsen på $\sum_j \lambda_j$ når den er uten begrensning. I analysen som rapporteres i tabell 33 har jeg benyttet h.h.v. en, to, tre og fire input, og en output.

Tabell 33: DMU82, år 1977 ;1 output og 1 – 4 input

	1 input	2 input	3 input	4 input
(a) u_1	0,0649	0,1004	0,0996	0,0863
v1	0,1524	0,0426	0,0435	0,0404
v3	—	0,257	0,241	0,054
v4	—	—	0,038	0,303
v5	—	—	—	0,188
(b) Eff når $\Sigma_j \lambda_j = 1$	0,749	0,832	0,837	0,856
(c) Skyggepris $\Sigma_j \lambda_j = 1$	0,0418	0,3318	0,3178	0,1442
(d) Eff når $\Sigma_j \lambda_j$ er fri	0,746	0,775	0,775	0,804
(e) $\Sigma_j \lambda_j$ når $\Sigma_j \lambda_j$ er fri	1,557	2,4245	2,4245	2,0737

Av størrelsen på skyggeprisen for restriksjonen $\Sigma_j \lambda_j = 1$, se linje (c) i tabell 33, kan jeg slutte at det alltid er lokale smådriftsfordeler for DMU82. Den er teknisk ineffektiv, og i tillegg er den skalaineffektiv. DMU82 er, i tilfellene jeg har vist i tabell 33, større enn optimal skala.

Jeg skal først se på situasjonen med en output og en input når restriksjonen $\Sigma_j \lambda_j = 1$ er med i ligningssettet, dvs løst med modell (2). I tabell 34 er vist de effektive DMU-ene under denne modellspefikasjonen. Av disse 5 DMU-ene er det bare DMU55 som også er effektiv dersom fri grense for $\Sigma_j \lambda_j$ er spesifisert. Dvs DMU55 er effektiv når man forutsetter "ray unboundedness" eller skalaelasticitet lik en. I tabell 34 er gitt verdiene for y_1 og x_1 for disse fem DMU-ene, samt verdien for forholdet x_1/y_1 og forholdet mellom skyggeprisen for

restriksjonen til x_1 og skyggeprisen for restriksjonen til y_1 . Forholdet mellom skyggeprisene er selvsagt lik brøken v_1/u_1 når verdiene for u_1 og v_1 er optimale verdier. DMU-ene er sortert etter stigende verdi for y_1 .

Tabell 34: Effektive DMU-er for DMU82 ved 1 output og en input, 1977.

	DMU45	DMU59	DMU55	DMU81	DMU83
y_1	2524	4747	7445	18827	31162
x_1	1447	2073	3145	7995	17802
x_1/y_1	0,573	0,436	0,422	0,425	0,571
u_1/v_1		3,570	2,508	2,347	1,257

u_1/v_1 er i tabell 34 bevisst plassert mellom de DMU-ene som er på effektivitetsfronten for å indikere at skyggeprisene er stabile mellom slike DMU-er. De fem effektive DMU-ene danner knekkpunkter på effektivitetsfronten. I slike knekkpunkter er ikke skyggepriser entydig definert. Forholdet u_1/v_1 er stigningsforholdet til kurven $y_1 = f(x_1)$, dvs $\partial y_1 / \partial x_1$ utenfor knekkpunktene.

Optimal størrelse for DMU82 etter formel (18) regnes først ut i illustrasjonseksemplet med en input og en output. Dette gir følgende verdier for MPSS for DMU82: $x_1 = 3144$ og $y_1 = 7445$. Dette er eksakt input/outputtallene for DMU55, som var den eneste DMU av de teknisk effektive DMU-ene som også er av optimal skala. I de tilfellene hvor bare en DMU er skalaoptimal, i praksis uvanlig når vi opererer med flere output og flere input, vil alle de ineffektive DMU-ene bli transformert til samme input/outputvektor når de blir transformert til MPSS. I det tilfellet vil man kunne observere at det bare er én kombinasjon av innsatsfaktorer og produkter som er både skalaoptimal og teknisk optimal. Normalt vil imidlertid det være flere DMU-er som er skalaoptimale, og en kombinasjon av disse vil danne en skalaoptimal flate.

Total effektivitet kan deles opp i teknisk effektivitet og skalaeffektivitet. DMU45, DMU59, DMU81 og DMU83 er alle teknisk effektive. Imidlertid er de ikke skalaeffektive. Sammenhengen mellom disse effektivitetsmålene er som vist tidligere multiplikativ, og kan skrives som:

$$E^{\text{tot}} = E^{\text{skala}} \cdot E^{\text{tekn}}$$

For DMU82 kan vi av tabell 33 se at linje (b) viser E^{tekn} og linje (d) E^{tot} . Det er da lett å beregne at skalaeffektiviteten E^{skala} for 1 til 4 input er h.h.v. 0,996 0,931 0,926 og til slutt 0,939.

Med 1 output og to input blir den optimale størrelsen til DMU82 i 1977

$$x_1 = 6,561 \cdot 0,7748 / 2,4245 = 2,097$$

$$x_3 = 2,803 \cdot 0,7748 / 2,4245 = 0,896$$

$$y_1 = 11,59 / 2,4245 = 4,780$$

Denne omregningen har transformert den faktiske observasjonen for DMU82 fram til den del av fronten som har skalaelastisitet lik en, og som da etter økonomisk teori opererer med minimum enhetskostnader. Fronten består av DMU50, DMU55 og DMU59. Første og siste av disse bedriftene danner effektivitetsfronten for DMU82 når jeg forutsetter skalaelastisitet lik en. Den beregnede MPSS for DMU82 er en konveks kombinasjon av DMU50 og DMU59. For å klargjøre beregningen av MPSS for en gitt DMU ytterligere, kan vi nå beregne det effektive referansepunktet for DMU82 med utgangspunkt i de effektive referansebedriftene. De faktiske input/outputtallene for disse to DMU-ene er:

	DMU50	DMU59	
x_1 :	2744	2073	
x_3 :	372	915	
y_1 :	5419	4757	
λ_j :	0,08583	2,3386	$\Rightarrow \sum_j \lambda_j = 2,4245$

Optimale verdier for λ_j er beregnet ved modell (1), og verdien for $\sum_j \lambda_j$ kan gjenfinnes i linje (e) i tabell 33 i kolonnen for en output og to input. Beregnet effektivt referansepunkt for DMU82 blir :

$$x_1 = (2744 \cdot 0,08583 + 2073 \cdot 2,3386) / 2,4245 = 2097 ,$$

$$x_3 = (372 \cdot 0,08583 + 915 \cdot 2,3386) / 2,4245 = 896 ,$$

$$y_1 = (5419 \cdot 0,08583 + 4757 \cdot 2,3386) / 2,4245 = 4780 .$$

Disse tallene er identiske med dem vi beregnet ved å bruke formelen (18) for beregning av MPSS. Først kan beregnes den effektive referanseteknologi gitt skalanøytral teknologi. Deretter transformeres dette punktet til optimal skala.

4.6.5 Stabilitet av MPSS over tid.

Det vil være av interesse å finne ut om den beregnede optimale størrelsen (MPSS) er stabil over tid. Ovenfor ble vist hvordan man beregner MPSS for DMU82 når det er en output og h.h.v en og to input. Resultatene for tre – fem input og for en og to output er vist i tabell 35.

Tabell 35: Optimale verdier for input og output ved ulike modellformuleringer (mill kr).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
Med tre input	2,097	—	0,896	0,181	—	4,780	—
Med fire input	2,544	—	0,944	0,416	0,533	5,589	—
Med 2 output og 5 input(DMU45–86)	3,320	2,287	0,910	1,197	0,709	6,667	1,369
Med 2 output og 5 input(DMU1–86)	3,265	1,545	1,395	0,535	0,647	6,723	0,381

Tabell 35 viser at de optimale størrelsene for input og output for DMU82 er meget stabile i 1977, selv om det er forskjellige bedrifter i sammenligningsutvalget eller ulikt antall variabler med i beregningene. Optimal omsetning av fiskeprodukter er beregnet å bli fra 4,7 til ca 5,6 mill kr når handelsvarer tas bort fra beregningene. I de to siste beregningene, hvor handelsvarer er med, er optimal størrelse om lag 6,6 mill kr i omsetning av fisk og 1,3 mill kr i brutto omsetning av handelsvarer.

Tabell 36 viser beregnet MPSS for DMU82 for alle årene i perioden 1977 – 1984. Beregningen er gjort med fem input og to output. Sammenligningsgrunnlaget er DMU1–86 i alle årene.

Tabell 36: MPSS for DMU82 for årene 1977 – 1984

(Tabell 36 inn her)

Tabell 36 leses slik: For hvert år fra 1977 til 1984 er det stilt opp kolonner som er merket x_1 – y_2 . Disse viser i første linje det faktiske forbruk av input eller produksjon av output. I

kolonnen for "Eff" er det beregnede effektivitetstallet lest inn, og i kolonnen "Sum lambda" er vektene $\sum_j \lambda_j$ innlest. I andre linje er mulig slakk tatt med. I tredje linje for hvert år er beregnet MPSS med utgangspunkt i faktisk input/output, slakk "Eff" og "Sum lambda". Ved tolkingen har jeg konsentrert meg om optimal mengde salg av fisk, dvs MPSS for y_1 . For de fire første årene er MPSS for y_1 mindre enn faktisk y_1 . For disse årene er optimal størrelse faktisk så lav at få fryserier er av en slik størrelse. For 1981 til 1984 framtrer brått et annet mønster. For det første er MPSS mer enn dobbelt så stort som gjennomsnittet for de fire første årene. For det andre er nå MPSS forholdsvis nær opp til faktisk størrelse på y_1 .

For sammenligningen skyld har jeg i tabellene 37 og 38 gjennomført samme analyse for DMU85, som er et fryseri om lag på samme størrelse som DMU82, og for DMU86, som igjen er et fryseri betydelig større enn de to første (med unntak av år 1981, hvor det er av samme størrelse).

Tabell 37: MPSS for DMU85 for årene 1977 – 1984

(Tabell 37 inn her)

Tabell 38: MPSS for DMU86 for årene 1977 – 1984

(Tabell 38 inn her)

MPSS for DMU82, DMU85 og DMU86 blir ikke den samme for noe år. MPSS er derfor ikke en størrelse som er felles for alle bedriftene i et utvalg. På dette feltet skiller MPSS seg fra optimal skala beregnet f.eks. ved homotetiske produktfunksjoner. Dette skyldes at man ved DEA metoden vil få mange DMU-er som er effektive, og alle de effektive har pr definisjon

skalaelasticitet lik 1. En konveks kombinasjon av de effektive bedriftene har derfor også skalaelasticitet lik en. Selv når effektivitetsfronten for to ulike DMU-er blir generert av det samme effektive referansesettet, kan en transformasjon av faktisk input – output opp til effektivitetsfronten "treffe" fronten på ulike steder. I tillegg vil det være muligheter for flere flater på fronten, hvor hver flate er generert av ulike kombinasjoner av effektive DMU-er.

For DMU82, DMU85 og DMU86 er MPSS for de tre første årene klart mindre enn observert produksjon. For DMU82 og DMU86 er dette også tilfelle for 1980, mens DMU85 det året selv var skalaeffektiv. For alle de tre DMU-ene er det en tendens til større MPSS de neste fire årene. Et spesielt unntak er DMU86 i 1984 hvor MPSS er ca 9,4 mill kr for y_1 (som er om lag på samme nivå som for de andre to DMU-ene for dette året), men optimal MPSS var nesten sju ganger så stor året før.

Sammenlignet med de effektivitetstall som vi har beregnet med frontestimering av homotetiske produktfunksjoner, se tabell 1, tabell 5 og tabellene 8 – 15, så vil MPSS bli ulik den optimale skalaen som er beregnet der. Optimal skala beregnet med vår produktfunksjon er ustabil når hele tidsrekken ses under ett. Likevel ser det ut som den har stabilisert seg på en bruttoomsetning på vel 20 mill kr fiskevarer de tre siste årene (tabell 5). Man bør likevel kunne konkludere med at hvis stokastiske feilkilder påvirker optimal skala, så vil det virkelige tallet trolig ligge noe høyere, se tabellene 13 – 15. MPSS for DMU82 og DMU85 for y_1 er i gjennomsnitt lavere enn resultatet ved produktfunksjonsanalysen. MPSS for DMU86 ligger betydelig høyere i 1983, men likt eller noe lavere de øvrige årene vi studerer. Det er lett å stille spørsmålet om det kan være rett at MPSS for y_1 er såpass stor i 1983, både sammenlignet med samme DMU i andre år og sammenlignet med to andre DMU-12 samme år. Det er lett å overse det faktum at i DEA metoden er alle bedriftene som er effektive etter modell (1) både teknisk- og skalaeffektive. Studerer vi tallene for 1983, så er f.eks. DMU7 totaleffektiv med $y_1 = 1,227$ mill, samtidig som også DMU83 er effektiv med $y_1 = 102,523$ mill. Disse to bedriftene er h.h.v den minste og den største i utvalget det året med hensyn på y_1 . Den intuitive tanken som man lett blir vant til fra lærebøker som framstiller produksjonsteorien i ett produkt – en innsatsfaktor diagrammer, vil ikke være til hjelp når en betrakter produksjonsmulighetsområder bestående av flere output – flere input.

I DEA kan både små og store DMU-er være skalaoptimale, mens en mellomliggende DMU ikke trenger være det, hvis vi bare betrakter en faktor isolert. Bedriftene er imidlertid effektive fordi de har ulike kombinasjoner av de øvrige innsatsfaktorer og produkter, de ligger med andre ord ikke etter hverandre på en rett linje fra origo. En nærmere studie av DMU7 viser at den er såkalt "egenevaluator", dvs den inngår ikke i andre ineffektive bedrifters referansesett, mens DMU83 inngår i flere effektive referansesett.

4.7 Grenseprodukt og tekniske transformasjonsrater.

Formen på den effektive delen av produksjonsmulighetsområdet er av betydning når en skal måle teknisk effektivitet. Den er også av betydning når en skal analysere priseffektivitet, dvs vurdering av produsentens tilpasning til relative prisforhold på innsatsfaktorene, og sammenheng mellom grensekostnad og produktpris. I vanlig produksjonsteori brukes begreper som grenseprodukt, marginale substitusjonsrater og marginale tekniske transformasjonsrater for å beskrive slike sammenhenger. Formen på effektivitetsfronten generert ved DEA er derfor også av betydning å analysere, i tillegg til den beregnede effektivitetsindeks. Som vist i kapittel 4 kan disse begrepene utledes fra løsningen av en DEA modell.

Til illustrasjon tar jeg utgangspunkt i den beregnede tekniske effektiviteten for 1977. Produksjonsmulighetsområdet er beregnet som en konveks kombinasjon av observerte innsatsfaktorer og produkter for bedriftene i utvalget, dvs effektiviteten er beregnet med modell (18) i dette kapitlet. Tabell 39 viser de bedriftene som er teknisk effektive. For framstillingens skyld er modellen begrenset til et produkt og to innsatsfaktorer.

Tabell 39: Effektive DMU-er med 1 output og 2 input, 1977.

DMU	x_1	x_3	y_1	x_1/y_1	x_3/y_1
45	1,447	0,286	2,524	0,573	0,113
50	2,744	0,372	5,419	0,506	0,069
55	3,145	1,870	7,445	0,422	0,251
59	2,073	0,915	4,757	0,436	0,192
68	14,159	6,332	24,966	0,567	0,254
74	9,420	3,189	15,438	0,610	0,207
76	13,027	4,510	20,068	0,649	0,247
80	8,906	4,892	19,603	0,454	0,249
81	7,995	4,821	18,827	0,425	0,256
83	17,802	8,588	31,162	0,571	0,276
84	7,002	2,622	12,984	0,539	0,202

DMU50, DMU55 og DMU59 er også totalt effektive, dvs de ligger på effektivitetsfronten også når modellen løses uten restriksjon på $\sum_j \lambda_j$. De effektive DMU-ene i tabell 39 er avmerket i figur 2 i $x_1/y_1 - x_3/y_1$ planet for å gi et bedre visuelt inntrykk av innsatsfaktor pr outputenhet.

Figur 2 inn her

Ingen enkelt DMU er globalt dominerende effektiv, dvs bruker mindre innsats enn de andre pr outputenhet for begge innsatsfaktorene. DMU55, som var mest effektiv i 1 output – 1 input tilfellet¹⁰, har naturligvis lavest x_1/y_1 – forhold. Det er imidlertid DMU50 som har

¹⁰Se drøftingen etter tabell 32 i avsnitt 4.2.2.

lavest x_3/y_1 - forhold. DMU59, som blant de 11 teknisk effektive bedriftene bare har det tredje laveste x_1/y_1 - forhold og også det tredje laveste x_3/y_1 - forhold, er imidlertid mer effektiv enn en lineær kombinasjon av DMU50 og DMU55, noe som lett verifiseres ved å se på figur 2.

Den neste, og kanskje mest interessante, observasjonen er spredningen av alle de andre DMU-ene i diagrammet, når man husker at alle disse er teknisk effektive, men ikke nødvendigvis skaleeffektive. Ofte ser man effektivitet framstilt som i figur 2 uten videre drøfting av skalaforholdene i den underliggende produksjonsstruktur. F.eks. er DMU84 teknisk effektiv, men ikke skalamessig effektiv, og derfor heller ikke totaleffektiv. Totaleffektiviteten til DMU84 er 0,8335 relatert til en effektivitetsfront bestående av DMU59 med vekt 2,20 og DMU50 med vekt 0,47. DMU84 er derfor større enn optimal skala. Effektivitetsfronten den sammenlignes med, er ikke dannet av en konveks kombinasjon av eksisterende bedrifter i utvalget, men av en front dannet under forutsetning om "ray unboundedness" for alle bedriftene i utvalget. Dette viser også hvor begrenset en diagrammatisk analyse i input/outputdiagrammet (eller langs enhetsisokvanten) er, hvis man ikke har klare forestillinger om skalaforhold i den underliggende produksjonsstrukturen.

Effektivitetsfronten i mitt eksempel kan framstilles som en flate med knekkpunkter i det tre-dimensjonale rom i tilfellet med et produkt og to innsatsfaktorer. I tabell 40 vises verdiene for optimale u_1 , v_1 og v_3 knyttet til de ulike delene av denne effektivitetsfronten. De ulike delene av fronten er identifisert med de DMU-er som danner ytterpunkter i dette mulighetsområdet. I noen tilfeller viser det seg at fronten dannes bare av to DMU-er. Dette betyr at jeg ved transformering av en ikke-effektiv DMU til den beregnede fronten fremdeles vil ha slakk i en output.

Tabell 40: Grenseprodukt og tekniske transformasjonsrater på den effektive produksjonsfronten ved variabel skalaelastisitet.

Effektive DMU	v_3/v_1	v_1/u_1	v_3/u_1
45 – 59	0	3,567	0
45 – 50 – 59	0,665	2,138	1,423
50 – 59 – 81	0,540	1,752	0,946
50 – 80 – 81	3,255	0,679	2,207
50 – 80 – 84	6,044	0,424	2,562
55 – 59	0	2,507	0
55 – 81	0	2,347	0
68 – 76 – 84	7,232	0,342	2,476
74 – 80 – 84	6,235	0,412	2,570
80 – 81 – 83	1,771	0,748	1,326
81 – 83	0	1,258	0

I kolonnen under v_3/v_1 vises den marginale substitusjonsraten mellom innsatsfaktor 1 og innsatsfaktor 3 på de forskjellige segmentene av effektivitetsfronten. v_1/u_1 er grenseproduktet for output m.h.p. innsatsfaktor 1. Tilsvarende er i siste kolonne vist grenseproduktet for output m.h.p. innsatsfaktor 3.

Den marginale substitusjonsraten varierer fra null til ca 7,2. I vårt eksempel får man en substitusjonsrate på null i de tilfeller hvor bare to DMU-er genererer den relevante delen av effektivitetsfronten. Dette betyr at det er slakk i en av innsatsfaktorene. I tabell 40 er det alltid innsatsfaktor 3 som framtrer med slakk. Dette er en tilfeldighet, og med andre observasjoner kunne innsatsfaktor 1 hatt slakk i noen tilfeller hvor bare to DMU-er er i basis. I det tilfellet ville vi hatt en marginal substitusjonsrate lokalt på $+\infty$.

I figur 3 er merket av kombinasjonene av input for de DMU-ene som danner den effektive

fronten. Mellom disse observasjonspunktene har jeg trukket rette linjer mellom de DMU-ene som samtidig danner et effektivt referansesett etter det mønstret som kan leses ut av tabell 29. Det betyr eksempelvis at mellom punktene for DMU45 og DMU59 er trukket en linje. På samme måten har jeg avmerket med en trekant punktene i $x_1 - x_3$ planet for DMU45, DMU50 og DMU59.

Figur 3 inn her

I figuren kan vi ikke skille klart mellom de tilfellene hvor effektivitetsfronten består av to DMU-er og når den består av tre. Høyden fra $x_1 - x_3$ planet til outputplanet kan heller ikke avleses. I figuren er posisjonen for DMU82 avmerket som et kryss med ring rundt. Som det framgår direkte av figur 3, er det effektive referansesettet til DMU82 bedriftene DMU50, DMU80 og DMU84.

Effektivitetsplanet er ikke komplett i $x_1 - x_3$ planet. For eksempel kunne man tenke seg at DMU74, DMU76 og DMU80 samlet burde dannet et effektivt sett. Grunnen til at så ikke er tilfelle, er at det ikke er noen bedrifter i mitt utvalg som har faktiske input, slik at de vil bli avmerket i denne trekanten. Det samme er tilfelle med DMU68, DMU80 og DMU83. Det ville være mulig å provosere fram et basissett som er slik at effektivitetsfronten projisert til $x_1 - x_3$ planet blir konveks, ved å lage kunstige DMU-er med lavt output. Denne ideen har jeg ikke utdypet i dette arbeidet.

Det er lett å kontrollere at det langs effektivitetsfronten vil være synkende grenseprodukt m.h.p. en faktor, gitt en konstant mengde av den andre faktoren. Dersom x_1 holdes konstant på 8,5 og x_3 øker, vil man ved denne ekspansjonen på effektivitetsfronten passere fire ulike segmenter. Det første segmentet er DMU74-80-84. For dette segmentet er grenseproduktet for x_3 2,57. I det neste segmentet, som er generert av DMU50-80-84, er grenseproduktet for x_3 2,561. I det tredje segmentet, som er generert av DMU50-80-81, er grenseproduktet falt til 2,207. I det siste segmentet, generert av DMU80-81-83, er grenseproduktet blitt 1,326.

Det samme vil man kunne observere hvis x_3 holdes fast ved en bestemt mengde, og man ekspanderer langs x_1 . Dette kan vises for $x_3 = 0,75$. Tallet er valgt for at spesielt mange segmenter av effektivitetsfronten skal bli passert. Først passeres segmentet generert av DMU45-50-59. Grenseproduktet for x_1 er her 2,138. Det neste segmentet er DMU50-59-81. Grenseproduktet for x_1 er her 1,752. Det tredje segmentet er DMU50-80-81. Som det framgår av figur 3, er det bare en liten del av denne flaten som vil bli passert av ekspansjonsveien langs x_1 når $x_3 = 0,75$. Grenseproduktet for x_1 på denne delen av effektivitetsfronten er 0,679. Det siste segmentet dannes av DMU50-80-84, og har grenseprodukt for x_1 på 0,424. Man vil se at i noen områder er ikke grenseproduktet beregnet. Dette gjelder f.eks. i området avgrenset av DMU55-59-81, hvor det ikke er noen observasjoner.

5. SAMMENLIGNING AV ULIKE EFFEKTIVITETSMÅL.

5.1 Innledning.

DEA metoden for å analysere effektivitet vil nå bli sammenlignet med andre metoder. Først sammenlignes DEA metoden med tradisjonelle effektivitetstall. Som eksempel på såkalte tradisjonelle effektivitetsmål har jeg funnet det naturlig å bruke kapitalavkastningsmål. Tradisjonelt vil dette kunne være f.eks. total kapitalavkastning eller egenkapitalavkastning. Da ingen av bedriftene jeg studerer er børsnoterte, vil det være vanskelig å beregne markedsverdien til den bundne kapital i bedriftene. Mange av bedriftene er heller ikke aksjeselskaper. Spesielt gjelder det de minste bedriftene. For de fleste av bedriftene i datautvalget vil ikke et mye brukt lønnsomhetsmål som avkastning pr aksje kunne beregnes. Jeg har derfor konstruert to resultatmål. Det ene er definert som resultatet før årsoppgjørdisposisjoner pluss rentekostnader i prosent av totale aktiva pr 31. desember. Det andre effektivitetsmålet er et mål for kontantstrømmen i forhold til gjenanskaffelsesverdi av den investerte kapitalen. Disse effektivitetsmålene er definert i avsnitt 2.5. Kort oppsummert defineres kapitalavkastningsmålet ROI som:

$$\text{ROI} = (\text{Resultat før årsoppgj. disp} + \text{rentekostnader}) / \text{Totale aktiva pr 31.12.}$$

ROI er et tradisjonelt mål for total kapitalavkastningen. Effektivitetsmålet ROI er en enkel output/input-brøk med bare en innsatsfaktor (beregnet kapitalbinding) og et produksjonsresultat. Sammenlignet med den detaljeringsgrad man kan ha i DEA analysen, er tradisjonelle effektivitetsbrøker forholdsvis grove mål. Jeg skal nå undersøke om bruk av de ulike effektivitetsmålene vil gi vesensforskjellige resultater.

5.2 Beregning av kapitalavkastning.

Tabell 41 viser ROI effektivitetstallene for alle 86 bedriftene for årene 1977–84.

Tabell 41 : Beregnet ROI for alle bedriftene 1977–84

(Tabell 41 inn her)

Effektivitetstallene for en enkel bedrift i tabell 41 er et absolutt tall, og er ikke påvirket av om denne bedriften er god eller dårlig relatert til de andre bedriftene i utvalget. På en måte er derfor de finansielle effektivitetstallene fundamentalt forskjellige fra effektivitetstallene beregnet med DEA, hvor den (de) beste bedriften(e) får tilordnet effektivitetstallet 1 og de øvrige bedriftene blir rangert i forhold til dette tallet.

Først skal jeg undersøke om de finansielle effektivitetstallene viser større stabilitet fra ett år

til et annet enn de DEA målene som er vist i tabellene 27 og 28. Tabell 42 viser korrelasjon av effektivitetstallene for hvert år fra tabell 41.

Tabell 42 : Korrelasjonsmatrise av ROI i tabell 41.

	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
1978	0,396	1					
1979	0,474	0,584	1				
1980	0,115	0,432	0,419	1			
1981	0,158	0,387	0,381	0,851	1		
1982	0,015	0,676	0,219	0,288	0,456	1	
1983	0,036	-0,002	0,169	0,784	0,776	0,010	1
1984	0,000	0,263	0,249	0,797	0,806	0,267	0,847

I tolkingen av tabell 42 kan brukes samme kritiske verdi for korrelasjonskoeffisienten som ble brukt i avsnitt 4.4. Av tabell 42 ser man at for samtlige parvise etterfølgende år, bortsett fra år 1982–83, er korrelasjonen signifikant forskjellig fra null. Imidlertid viser en nærmere studie av tallene i tabell 42 at for mange år er korrelasjonen større for år med mer enn ett års avstand enn for to påfølgende år. Det er imidlertid positivt at tabell 42 ikke viser noen tilfeller av signifikant negativ korrelasjon. Imidlertid er ca 1/5 av korrelasjonene av ROI ikke signifikant forskjellige fra null. Dette betyr at i ca 1/5 av tilfellene kan man ikke avvise hypotesen om at effektivitetstallene er tilfeldig generert.

5.3 Sammenligning av kapitalavkastning med DEA

I tabell 43 presenteres korrelasjonstallene og rangkorrelasjonstallene mellom DEA effektivitetstallene for utvalget på 86 bedrifter.

Tabell 43: Korrelasjon og rang-korrelasjon mellom DEA og et mål for finansiell effektivitet.

	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
ROI (n=86)								
Korre.	0,332	0,267	0,372	0,289	0,339	0,118	0,216	0,104
Rang- korre	0,240	0,420	0,338	0,416	0,454	0,168	0,367	0,424

Tabell 43 viser at det er stort sett statistisk signifikant overensstemmelse mellom de to effektivitetsmålene for samme år. I to år (1982 og 1984) er det ikke signifikant sammenheng mellom effektivitetene på 2,5 % nivå med ensidig test. For 1984 er det imidlertid signifikant korrelasjon beregnet som rang-korrelasjon.

Selv med den antakelse at det finansielle effektivitetsmålet og DEA er lineært avhengige, så er likevel ikke samvariasjonen spesielt stor. Den forklarte delen av den totale varians betegnes normalt som R^2 . Sammenhengen mellom den simple (direkte) korrelasjonen r og R^2 er da at $R^2 = r^2$

Den enkle korrelasjonskoeffisienten forklarer lite av den totale variasjonen mellom de to effektivitetsmålene. Selv med den maksimale verdien på mine enkle korrelasjonskoeffisienter ($r = 0,454$), blir bare ca 20 % av den totale variansen forklart, mens da naturligvis ca 80 % er uforklart. Jeg kan trekke konklusjonen at effektivitetsmålene kan være signifikant korrelert, selv om opp til 90 % av den totale variansen er uforklart.

5.4 Effektivitet med parametriske produktfunksjoner.

Vi har tidligere i dette kapitlet, under hovedavsnitt 3, analysert parametriske frontfunksjoner. Der ble det spesielt lagt vekt på å studere endringer i parametrene når ulike metoder brukes for å estimere funksjonen. I dette avsnittet skal jeg vise hvilke konsekvenser dette får for de effektivitetsmålene som beregnes relativt til de ulikt estimerte parametriske frontfunksjonene. Fronten estimertes alternativt ved minimalisering av det lineære og det kvadratiske avviket mellom observasjonssettet og den estimerte fronten.

Stabilitet til effektivitetsparametrene relativt til en "simulert" stokastisk front analyseres når noen av de effektive DMU-ene tas bort systematisk.

De effektivitetsmålene som kan beregnes ved bruk av denne typen parametriske produktfunksjon blir sammenlignet med tilsvarende effektivitetsmål beregnet ved DEA teknikken.

Når en bedrift tas bort fra det effektive referansesettet, og denne bedriften har en positiv skyggepris, da vil verdien av objektfunksjonen reduseres, gitt et minimeringsproblem, eller øke, gitt et maksimeringsproblem. Siden objektfunksjonen i min problemstilling er å minimalisere summen av slakkene i restriksjonene for alle bedriftene, så vil en reduksjon av objektfunksjonen bety at den totale avstanden mellom beregnet frontfunksjon og observert input/outputforhold blir mindre. Det betyr at de gjenværende bedriftene totalt sett kommer nærmere fronten, dvs de vil framtre som mer effektive.

Det er imidlertid ikke gitt at alle nærmer seg fronten, eller at de forbedrer sin beregnede effektivitet relativt sett like mye. Siden formen på fronten normalt vil endre seg når en effektiv bedrift tas ut av utvalget, kan det skje at noen bedrifter blir mindre effektive samtidig som flertallet blir mer effektive. Rangeringen av bedriftene kan også endres. Dette forholdet skal jeg se nærmere på.

For alle årene i perioden 1977 – 1984 har jeg beregnet best practice frontfunksjon med samme definisjon av output og innsatsfaktor. Frontfunksjonen er formulert som en

Zellner/Revankar homotetisk produktfunksjon. Utvalget av bedrifter er hvert år DMU1–86, dvs alle bedriftene i utvalget. Først har jeg beregnet E1 (inputreducerende effektivitetstall) når alle bedriftene er med. Dette blir da en rent deterministisk produktfunksjon, og den kan være påvirket av ekstreme observasjoner, som f.eks. avvikende bedrifter. Effektivitetstallene vises i tabell 44.

Tabell 44: E1 etter Best practice frontestimering 1977 –1984. Alle bedriftene er med i utvalget.

(Tabell 44 inn her)

Deretter er beregnet effektiviteten for de samme årene når jeg tar bort sekvensielt de tre DMU–ene som har størst skyggepris. Resultatene fra dette er vist i tabell 45, hvor vi har listet E1 for alle gjenværende bedrifter. E1 er beregnet etter samme prosedyre som i tabell 44.

Tabell 45: E1 for en simulert stokastisk frontfunksjon; de tre mest effektive bedriftene er tatt bort sekvensielt.

(Tabell 45 inn her)

Når tre effektive bedrifter tas bort, stiger naturligvis gjennomsnittlig effektivitet for gjenværende bedrifter. Endringen er svært ulik fra år til år. Minst er endringen for 1983, hvor gjennomsnittlig effektivitet stiger fra 0,855 til 0,870. Størst er økningen i 1984 hvor gjennomsnittlig effektivitet stiger fra 0,743 til 0,899. Standardavviket minker vanligvis, selv om det øker litt et år (1978). Jeg skal se nærmere på de individuelle effektivitetstallene. La meg først betrakte de 10 første bedriftene i 1977. Man kan tro at den individuelle effektiviteten stiger for hver bedrift når tallene i tabell 44 sammenlignes med tallene i tabell 35. Imidlertid er det i 1977 hele 5 av de 10 bedriftene som har fått mindre (lavere)

individuell effektivitet når tre bedrifter er blitt fjernet. I 1984 er det derimot ingen bedrifter som har fått lavere effektivitet når jeg forsøker å stabilisere fronten med den såkalte Timmers metode.

Jeg har undersøkt stabilitet i beregnet E1-effektivitet ved å beregne den direkte korrelasjon og rangkorrelasjon mellom effektivitetstallene for inputreducerende effektivitet for hvert år mellom tabell 44 og 45. Resultatet er stilt opp i tabell 46.

Tabell 46: Korrelasjon mellom E1 samme år; to ulike beregningsmetoder.

	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
Simpel								
Korre.	0,583	0,842	0,763	0,797	0,175	0,778	0,973	0,704
Spearman's								
rangkorre	0,542	0,669	0,743	0,791	0,396	0,650	0,952	0,725

Selv om fronten er endret, så er både den simple direkte korrelasjonen og rangkorrelasjonen signifikant forskjellig fra null, med unntak av 1981, hvor simpel korrelasjon ikke er signifikant på 5 % nivå (kritisk nivå for $r \approx \pm 0,22$). Det er likevel grunn til å merke seg at for 1981, men delvis også for 1977, så har effektivitetsmålene for bedriftene endret seg mye. Nullhypotesen er at det ikke skal være noe lineært samsvar mellom rangeringen med bruk av de to metodene ($H_0 : r = 0$). En kan konkludere med at formen på produktfunksjonen kan ha meget stor betydning for effektivitetsmålene for de gjenværende bedrifter. Denne testen viser at den brukte metoden for å stabilisere en deterministisk frontfunksjon, ikke bare kan endre elastisitetene på en forholdsvis uforutsigbar måte. Også de individuelle effektivitetsmålene kan bli endret så mye at en ikke alltid kan avvise nullhypotesen, dvs at det ikke er noen sammenheng mellom de beregnede effektivitetsmålene.

5.5 Sammenligning mellom DEA og best practice effektivitetsmålinger.

Jeg skal nå sammenligne effektivitetstallene beregnet med DEA med de tallene jeg har beregnet for en parametriske frontfunksjon. DEA effektivitetstallene med fem input og to output er vist i tabell 22. DEA effektivitetstall beregnet med en output og fire input vises i tabell 47. I tabell 47 er brukt samme definisjon for output og input som i frontfunksjonsestimeringene dokumentert i seksjon 3.

Resultatet av DEA effektivitetsberegningene for alle bedriftene i årene 1977–1984 er vist i tabell 47.

Tabell 47: DEA inputeffektivitet med en output og fire input.

(Tabell 47 innher)

Ved sammenligning av effektivitetstallene i tabell 47 med dem jeg tidligere har vist i tabell 22, ser man for det første at gjennomsnittet for de individuelle effektivitetstallene for hvert år alltid er lavere i tabell 47 enn i tabell 22. Også de individuelle effektivitetstallene vil normalt være lavere eller like. Den direkte korrelasjon mellom effektivitetstallene for samme år mellom tabell 47 og tabell 22 er imidlertid alltid signifikant positiv. Korrelasjonen er minst for 1981 med 0,414. Normalt er den større enn 0,7.

De individuelle effektivitetstallene utregnet med DEA analysen med en output og fire input sammenlignes så med frontfunksjonsanalysen. I tillegg har jeg også tatt med korrelasjonen mellom denne sistnevnte frontfunksjonsestimeringen av E1 og DEA estimeringen av inputeffektivitet med to output og fem input (ref tabell 22). Resultatene av denne korrelasjonsanalysen er vist i tabell 48.

Tabell 48: Korrelasjon mellom DEA og best practice individuelle
effektivitetstall.

	DEA 1-4 mot BP alle	DEA 2-5 mot BP alle
1977	0,667	0,397
1978	0,872	0,713
1979	0,711	0,611
1980	0,825	0,557
1981	0,475	0,220
1982	0,865	0,661
1983	0,959	0,738
1984	0,874	0,729

Tabell 48 viser at det er signifikant samsvar mellom effektivitetsmålet ved DEA metoden og ved BP metoden, når samvariasjonen måles i form av simpel lineær korrelasjon.

Den totale variasjonen ved beregnet best practice effektivitet er imidlertid for enkelte år bare lite forklart med det beregnede effektivitetsmålet fra DEA metoden. Man ser lett at det ene effektivitetstallet i forholdsvis liten grad forklarer variasjonen i det andre. Kall den simple korrelasjonen som er stilt opp i tabell 48 for r . Andel forklart varians i forhold til total varians, R^2 , varierer mellom et minimum på 0,226 (år 1981) og et maksimum på 0,920 (år 1983). I seks av de åtte årene jeg har data for, er på denne måten forklaringsgraden mer enn 50 %.

I prinsippet kan man forsøke å identifisere DMU-er som i påfallende stor grad påvirker fronten, og få dem ekskludert. De tre effektive DMU-er som ble tatt bort fra 1977 utvalget, var DMU12, DMU43 og DMU46. Den neste som sto klar til utskiftning, var DMU50 (som ikke ble tatt bort i vår tabell 45). Tabell 47 viser at DMU12, DMU46 og DMU50 er blant de

effektive bedriftene, men ikke DMU43. Om lag de samme bedriftene blir identifisert som effektive med begge metoder.

Ved å sammenligne tallene i tabell 44 med tabell 47, kan man se at de fleste av de effektive bedriftene i tabell 44 også blir identifiserte som effektive i DEA analysen. Denne treffandelen kan regnes om til prosent. Antall effektive hvert år i tabell 44, som også er blant de effektive i tabell 47, regnes ut som prosent av totale antall effektive hvert år i tabell 44. For årene 1977 til 1984 vil vi da få: 60 %, 75 %, 100 %, 80 %, 50 % 83 %, 100 % og til slutt 80 %. Det er igjen år 1981 som har lavest prosenttall. Konklusjonen en kan trekke, er at DEA metoden med stor sikkerhet identifiserer de bedriftene som er på effektivitetsfronten i en frontfunksjonsanalyse.

6. OPPSUMMERING – KONKLUSJONER.

I dette arbeidet har jeg gjennomgått noen metoder for å måle produksjonseffektiviteten og skalaeffektiviteten for produsenter på mikronivå. Arbeidet startet med en teoretisk gjennomgang av de mange ulike effektivitetsmålene som er foreslått i litteraturen. Hovedsaklig har jeg i framstillingen konsentrert meg om radiale effektivitetsmål, og av den typen har jeg fokusert på inputreducerende effektivitetsmål.

En tradisjonell måte å måle effektivitet på er å sammenligne en produsent eller en produksjonsprosess med en estimert produktfunksjon eller en kostnadsfunksjon. Tradisjonelt blir produktfunksjoner framstilt som en bestemt matematisk sammenheng mellom flere innsatsfaktorer og ett produkt. Den matematiske formen til slike produktfunksjoner legger restriksjoner på økonomiske egenskaper til produktfunksjonen, f.eks. skalaegenskaper, substitusjonsegenskaper mellom innsatsfaktorene og homogenitetsegenskaper. Stadig mer fleksible funksjonstyper er blitt utviklet. I det siste tiåret har fleksible translog produkt- og kostnadsfunksjoner overtatt etter Cobb–Douglas funksjoner og CES funksjoner i empiriske analyser. Men selv for fleksible funksjonstyper er den matematiske form gitt *a priori*, og blir

ikke testet. Jeg har brukt en enkel homotetisk produktfunksjon hovedsaklig pga dens evner til å beregne optimal skala som en funksjon av output. Funksjonen er forholdsvis primitiv for studier av substitusjonselastisiteter. Det er min oppfatning at den er brukbar til effektivitetsmålinger og skalamålinger av de typene jeg har foretatt.

Produksjonssammenhenger kan imidlertid analyseres også med modeller som ikke bygger på de forholdsvis restriktive sammenhengene som er vanlig i parametriske funksjoner. Produksjonsmulighetsområdet kan defineres ved bruk av enkle forutsetninger om konvekksitet og monotonisitet. Monotonisitetskravet sier at hvis en bestemt inputmengde kan produsere en bestemt output, så kan også mer input produsere den samme output. Tilsvarende gjelder også for output; den input som skal til for å produsere en bestemt output vil også kunne produsere mindre output. Med utgangspunkt i såpass enkle forutsetninger, og med muligheter for å utvide produksjonsmulighetsområdet ved såkalt "ray-unboundedness" postulat, kan det formuleres en produksjonssammenheng basert på svært få forutsetninger. DEA metoden for å måle produksjonseffektivitet er basert på disse enkle forutsetningene om produksjonsmulighetsområdet.

De to hovedmetodene blir anvendt i empiriske studier på samme datamaterialet. Den parametriske produktfunksjonen er ustabil for påvirkning av et lite antall effektive produsenter. Dersom de effektive bedriftene er "outliers" pga stokastiske forhold som er eksogene for beslutningstakerne, vil effektivitetsfronten globalt bli påvirket av slike stokastiske forhold. Mine undersøkelser viser at den produktfunksjonen jeg bruker er ustabil i elastisitetene for innsatsfaktorene og i parametrene i outputleddet. På grunn av denne ustabiliteten endres beregnet optimal skala og effektivitetsmålene forholdsvis uforutsigbart.

Ved DEA metoden synes effektivitetsmålene å være mer stabile for stokastiske forhold. Selv om mange effektive bedrifter tas bort fra fronten, er de gjenværende lite påvirket av dette. Korrelasjonsmålinger av effektivitet for gjenværende bedrifter før og etter at noen effektive bedrifter ble tatt bort fra fronten, viser meget høy korrelasjonssammenheng. Derimot er DEA metoden forholdsvis følsom for ulike grader av aggregering. Dersom en outputvariabel

blir splittet i to variabler, vil den målte gjennomsnittlige effektivitet stige drastisk. En slik forbedring kan nok skyldes at man får mer "eksakte" data, men først og fremst skyldes det algebraiske forhold, idet antall frihetsgrader i outputrommet øker. Tilsvarende effekt gjelder også for innsatsfaktorer.

Jeg har sammenlignet effektivitetstallene målt med de to metodene, og også i sammenligningen trukket inn et vanlig finansielt avkastningsmål ROI. Kort sagt er det i majoriteten av tilfellene signifikant korrelasjon mellom rangeringen ved disse målene, men samvariasjonen er ikke overbevisende sterk. For enkeltstående bedrifter kan metodene gi forholdsvis forskjellige resultater. Det samme gjelder optimal skala ved produktfunksjonsanalysen sammenlignet med beregnet mest optimal skalastørrelse ved DEA. Etter min oppfatning blir det beregnede skalamålet i produktfunksjonsanalysene et alt for unøyaktig mål til å kunne være av praktisk nytte i beslutningssammenhenger. Skalaøkonomibegrepet slik det framkommer i tradisjonell teori, er et forholdsvis snevert begrep. Det tar ikke hensyn til mulig kostnadsgevinst pga spredning i produksjonen ("economies of scope"). Via transformasjonsmulighetene langs en isokvant vil det ta hensyn til ulike former for kombinasjoner av innsatsfaktorer, men er da igjen bundet til en bestemt produktfunksjons matematiske form.

Bruk av DEA metoden er forholdsvis ny i skandinavisk sammenheng. Jeg har derfor brukt forholdsvis mye plass på å presentere denne metoden, både med å vise hvordan ulike problemstillinger kan formuleres med bruk av ulike DEA modeller, og, gjennom det empiriske arbeidet, å demonstrere bruk av metoden i praksis. Metoden har etter mine vurderinger spesielt to gode egenskaper. For det første kan den behandle produktfunksjonsstrukturer med mange input og mange output samtidig. Dette er en åpenbar fordel i mange situasjoner, siden både vareproduserende og tjenesteproduserende bedrifter ofte i praksis produserer mange ulike produkter samtidig. Effektivitetsmålinger med bruk av tradisjonelle parametriske frontfunksjoner er mindre godt egnet for å analysere slike situasjoner. DEA metoden forutsetter heller ingen *a priori* vekter på innsatsfaktorene eller produktene.

For det andre beregnes sammenhengen mellom input og output som en ekstremalrelasjon basert på få og svært svake forutsetninger om formen på produksjonsmulighetsområdet. Det kan selvsagt likevel diskuteres om forutsetningene er rimelige. Etter min vurdering er forutsetningene lett akseptable. Effektivitetsmålinger består i å sammenligne en produksjonsvektor med den effektive delen av produksjonsmulighetsområdet. Ved beregning av teknisk effektivitet består produksjonsmulighetsområdet av observerte størrelser og konvekse kombinasjoner av disse. I motsetning til hva som er tilfellet for gjennomsnitts estimerte produktfunksjoner og også produktfunksjoner basert på en bestemt matematisk form, så er den effektive bedriften utregnet med en DEA modell enten en konkret produsent eller en veid kombinasjon av slike produsenter. I tilfellet det er en veid kombinasjon, vil DEA metoden beregne både hvilke bedrifter som inngår i denne kombinasjonen, og vektene. Det er derfor min vurdering at et effektivitetsmål beregnet med DEA metoden burde bli akseptert nettopp fordi det er så lett å dokumentere hva en konkret bedrift sammenlignes med.

I internasjonal litteratur er DEA metoden i stor grad blitt brukt til å analysere såkalte "non-profit" organisasjoner. Dette kan være deler av den offentlige forvaltning eller tjenesteytende sektor. Spesielt i de tilfeller hvor det ikke er markedspriser på produktene eller innsatsfaktorene, vil effektivitetsmål basert på bedriftsøkonomiske lønnsomhetskriterier ikke kunne brukes. DEA metoden har vist seg meget anvendelig på slike problemstillinger. Etter min oppfatning vil denne metoden gi et bedre mål for produksjonseffektivitet enn f.eks. effektivitetsmål basert på sammenligning av beregnede fullkostkalkyler for de tjenestene som produseres. Dette skyldes at aggregering av kostnader i tilfeller med flerdimensjonal output og stor andel indirekte kostnader, vil kunne medføre en stor grad av vilkårlighet i kostnads-overveltningen. Ved å ta utgangspunkt bare i målbare produksjonsresultater, unngår DEA dette problemet.

Det er derfor min oppfatning at DEA metoden vil være spesielt godt egnet til å beregne produksjonseffektivitet i sektorer hvor det ikke er gode markedspriser for sluttproduktene. Helsesektoren er en slik sektor hvor det er vanskelig å sette verdier på det som produseres. Det samme gjelder utdanningssektoren. Begge sektorene er meget kostbare. De styres begge i

Norge etter ulike former for budsjettstyring, trolig uten gode insentiver til ressursbesparing. En DEA analyse ikke vil gi svar på alle effektivitetsproblemene i offentlig sektor. Bl.a. vil den ikke særlig bedre enn andre metoder kunne vurdere kvaliteten på det som produseres. Den vil likevel kunne avdekke forskjeller slik at en kan gå videre og undersøke hvorfor noen produsenter er mer effektive enn andre. Skyldes det ulike rammebetingelser som ikke modellen har tatt hensyn til? Skyldes det ulike kvaliteter på produktene? Eller skyldes det kort og godt at noen er mer dyktige til å kombinere innsatsfaktorer enn andre, og at dette kan forklare den målte ineffektiviteten?

DEA anvendt i den private sektor må vurderes mot tradisjonelle lønnsomhetsmål. Lønnsomhetsmål kan ha svakheter, spesielt i skillet mellom lang og kort sikt. Tolkning av et lønnsomhetsmål i forbindelse med en ekstern analyse av en bedrift, må gjøres med stor varsomhet, hvis man ikke kjenner til prinsippene for verdivurderinger og tidsavgrensinger som er gjort i bedriftens regnskap. For tradisjonelle lønnsomhetsmål, som f.eks. ROI, vil det være vanskelig å skille mellom priseffekter og kvantumeffekter. I tillegg vil det også i kommersielle organisasjoner være deler av organisasjonen hvor markedspriser ikke finnes eller ikke brukes. Dette kan være avdelinger eller filialer som leverer internprodukter i organisasjonen. I slike tilfeller kan DEA med fordel brukes til å analysere produksjonseffektiviteten til interne avdelinger i større selskaper. En annen fordel med DEA er at man der, via bruk av LP formuleringen, vil kunne legge restriksjoner på tillatelig endring i innsatsfaktorer eller produkter når effektivitet skal beregnes. På den måten vil en få større realisme i de beregnede effektivitetsmål. F.eks. kan en del av de ansatte være fast ansatte, eller produktene må produseres i kombinasjoner som ikke kan overskrides.

DEA er ikke utbygget til stokastisk estimering av effektivitetsfronter. Dette er til en viss grad en svakhet. Imidlertid er det grunn til å tro at konsekvensene av å overse stokastiske forhold er mindre uheldig for DEA enn for effektivitetsmålinger basert på parametriske produktfunksjoner. En bedrift som feilaktig, pga eksogene stokastiske forhold, blir klassifisert som effektiv, vil med DEA metoden normalt bare påvirke effektivitetstallet til et mindre antall ineffektive bedrifter. Dette i motsetning til en parametriske frontfunksjon, som vil bli påvirket globalt, og derfor vil ha en effekt på alle de andre bedriftene i utvalget.

DEA metoden er derfor mer robust for uspesifiserte, stokastiske forhold enn andre metoder jeg har arbeidet med.

Begrepene produktivitet og effektivitet brukes normalt som forholdsvis upresise begreper i den daglige tale. Økonomer har ofte brukt begrepene i beregninger på aggregerte nasjonalregnskapsdata, og i tillegg ofte beregnet en-faktor produktivitetsmål. Mitt arbeid er et bidrag med sikte på å utdype produktivetsbegrepene på mikronivå, dvs for en enkelt produsent eller produksjonsprosess. Totaleffektivitet er hele tida blitt målt, dvs at alle innsatsfaktorene er blitt tatt hensyn til samtidig. Jeg mener at produktivitetsmål på mikronivå er nødvendige for at man på neste trinn skal kunne sette i gang tiltak for å øke produktiviteten. Uten grundige mikrostudier vil det være vanskelig å finne årsakene til en eventuell påvist manglende produktivitet på aggregert sektornivå eller høyere nivå. DEA metoden vil, sammen med andre metoder, sterkt kunne bidra med en bedre forståelse av mikroenhetenes tilpasning i produksjonsprosessen.

LITTERATURLISTE.

- Aigner, D.J., T. Amemiya og D.J. Poirier (1976): "On the Estimation of Production Frontiers: Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of a Discontinuous Density Function." *International Economic Review*, Vol 17, No 2.
- Aigner, D. J. og Chu S.F. (1968): "On Estimating the Industry Production Function." *The American Economic Review*, Vol 13, No 3.
- Aigner, D.J., C.A. Knox Lovell og Peter Schmidt (1977): "Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models." *Journal of Econometrics*, Vol 6, s 21 – 37.
- Amemiya, Takeshi (1973): "Regression Analysis when the Dependent Variable is Truncated Normal." *Econometrica*, Vol 41, No 6, s 997–1016.
- Amemiya, Takeshi (1984): "Tobit Models: A Survey." *Journal of Econometrics*, Vol 24 , 1984, s 3–61.
- Balke, Thomas R. (1983): "Some Applications of Productivity Analysis in the Petroleum Industry." *OMEGA*, Vol 11, No 4, 1983, s 329–341.
- Banker, Rajiv Dushyant (1980): "*Studies in Cost Allocation and Efficiency Evaluation.*" Upublicert D.B.A Thesis, Harvard University, Graduate School of Business Administration, 1980.
- Banker, Rajiv D. (1984): "Estimating Most Productive Scale Using Data Envelopment Analysis." *European Journal of Operational Research*, 17, 1984, s 35–44.
- Banker R.D. (1985): "Productivity Measurement and Management Control." Kapittel 9 i: Paul R. Kleindorfer: "*The Management of Productivity and Technology in Manufacturing.*" Plenum Press, New York, 1985.
- Banker, R.D, A.Charnes, W.W.Cooper og A.P.Schinnar (1981): "A Bi-Extremal Principle for Frontier Estimation and Efficiency Evaluations." *Management Science*, Vol 27, No 12, Des 1981, s 1370–1382.
- Banker, R.D., A.Charnes og W.W.Cooper (1984): "Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiency in Data Envelopment Analysis." *Management Science*, Vol 30, No 9, s 1078–1092.
- Banker R.D., Robert F. Conrad og Robert P. Strauss (1986): "A Comparative Application of Data Envelopment Analysis and Translog Methods: An Illustrative Study of Hospital Production." *Management Science*, Vol 32, No 1, Jan 1986, s 30–44.
- Banker R.D. og Ajay Maindiratta (1986): "Piecewise Loglinear Estimation of Efficient Production Surfaces." *Management Science*, Vol 32, No 1, Jan 1986, s 126–135.
- Banker, R.D. og Richard C. Morey (1986 a): "The Use of Categorical Variables in Data Envelopment Analysis." *Management Science*, Vol 32, No 12, Dec. 1986, s 1613–1627.
- Banker, R.D. og Richard C. Morey (1986 b): "Efficiency Analysis for Exogenously fixed Inputs and Outputs." *Operations Research*, Vol 34, No 4, 1986, s 513–521.
- Bedard, Jean Catherine (1985): "*Use of Data Envelopment Analysis in Accounting Applications: Evaluation and Illustration by Prospective Hospital Reimbursement.*" Upublicert Ph.D Thesis, The University of Wisconsin, Madison, 1985.
- Bessent, A., W.Bessent, J. Kennington og B.Reagan (1982): "An Application of Mathematical

- Programming to Assess Productivity in the Houston Independent School District." *Management Science*, Dec 1982, s 1355–1367.
- Bol, Georg (1986): "On Technical Efficiency Measures: A Remark." *Journal of Economic Theory*, Vol 38, 1986, s 380–385.
- Boyd, Gale og Rolf Färe (1984): "Measuring the Efficiency of Decision Making Units: A Comment." *European Journal of Operational Research*, 15, 1985, s 331–332.
- Broeck, Julien van den, Finn R. Førsund, Lennart Hjalmarsson og Wim Meeusen (1980): "On the Estimation of Deterministic and Stochastic Frontier Production Functions." *Journal of Econometrics*, 13, 1980, s 117–138.
- Byrnes, P., R. Färe og S. Grosskopf (1984): "Measuring Productive Efficiency: An Application to Illinois Strip Mines." *Management Science*, Vol 30, No 6, Juni 1984, s 671–681.
- Charnes, Abraham (1952): "Optimality and Degeneration in Linear Programming." *Econometrica*, Vol 20, 1952, s 160–170.
- Charnes, A., C.T. Clark, W.W. Cooper og B. Golany (1985): "A Developmental Study of Data Envelopment Analysis in Measuring the Efficiency of Maintenance Units in the U.S. Air Force." *Annals of Operational Research*, 2, 1985, s 95–112.
- Charnes, A. og W.W. Cooper (1959): "Chance-Constrained Programming." *Management Science*, Vol 6, No 1, 1959
- Charnes, A., W.W. Cooper (1962): "Programming with Linear Fractional Functionals." *Naval Research Logistics Quarterly*, 9, sept–Dec 1962, s 181–186.
- Charnes, A. og W.W. Cooper (1963): "Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisficing under Chance Constraints." *Operations Research*, Vol 11, 1963, s 18–39.
- Charnes, A. og W.W. Cooper (1973): "An Explicit General Solution in Linear Fractional Programming." *Naval Research Logistics Quarterly*, 20 (3), 1973.
- Charnes, A. og W.W. Cooper (1977): "Goal Programming and Multiple Objective Optimizations." Part I, *European Journal of Operational Research*, 1, 1977, s 39–54.
- Charnes, A. og W.W. Cooper (1984): "The non-Archimedean CCR Ratio for Efficiency Analysis: A Rejoinder to Boyd and Färe." *European Journal of Operational Research*, 15, 1984, s 333–334.
- Charnes, A. og W.W. Cooper (1985): "Preface to Topics in Data Envelopment Analysis." *Annals of Operations Research*, 2, 1985, s 59–94.
- Charnes, A., W.W. Cooper, B. Golany, L. Seiford og J. Stutz (1985): "Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions." *Journal of Econometrics*, 30, 1985, s 91–107.
- Charnes, A., W.W. Cooper, A.Y. Lewin, R.C. Morey og J. Rousseau (1985): "Sensitivity and Stability Analysis in DEA." *Annals of Operations Research*, No 2, 1985, s 139–156
- Charnes, A., W.W. Cooper og E. Rhodes (1978): "Measuring the Efficiency of Decision Making Units." *European Journal of Operational Research*, Vol 2, No 6, 1978, s 429–444.
- Charnes, A., W.W. Cooper og E. Rhodes (1979): "Corrections: Measuring the Efficiency of Decision Making Units." *European Journal of Operational Research*, July 1979, s 339.
- Charnes, A., W.W. Cooper og E. Rhodes (1981): "Evaluating Program and Management Efficiency: An Application of Data Envelopment Analysis to Program Follow-Through." *Management Science*, Vol 27, No 6, June 1981, s 668–697

- Charnes, A., W.W. Cooper, J. Rousseau og J. Semple (1987): "Data Envelopment Analysis and Axiomatic Notions of Efficiency and Reference Sets." *Research Report CCS 558*, Center for Cybernetic Studies, University of Texas at Austin, Jan 1987.
- Charnes, A., W.W. Cooper og Schinnar (1982): "Transforms and Approximations in Cost and Production Function Relations." *OMEGA*, Vol 10, No 2, 1982, s 207–211.
- Charnes, A., W.W. Cooper, L. Seiford og J. Stutz (1982): "A Multiplicative Model for Efficiency Analysis." *Socio-Economic Planning Sci.*, Vol 16, No 5, 1982 (s 223–224)
- Charnes, A., W.W. Cooper, L. Seiford og J. Stutz (1983): "Invariant Multiplicative Efficiency and Piecewise Cobb–Douglas Envelopments." *Operations Research Letters*, Vol 2, No 3, 1983, s 101–103.
- Charnes, A., W.W. Cooper og R.M. Thrall (1986): "Classifying and Characterizing Efficiencies in Data Envelopment Analysis." *Operations Research Letters*, Vol 5, No 3, Aug 1986, s 105–110.
- Chenery, Hollis B. (1949): "Engineering Production Functions." *Quarterly Journal of Economics*, 1949, No 63, s 507–531.
- Diewert, W.E. (1974): "Applications of Duality Theory." I : M.D. Intriligator and D.A. Kendrick (eds): "*Frontiers of Quantitative Economics*", Vol II, North–Holland Publ, Amsterdam.
- Diewert, W.E (1982): "Duality Approaches to Microeconomic Theory." I : K.J. Arrow og M.D. Intriligator (eds): "*Handbook of Mathematical Economics*", Vol II. North–Holland Publ, Amsterdam, 1982.
- Eide, Erling (1979): "*Engineering Production and Cost Functions for Tankers*." Elsevier Scientific Publ., Amsterdam, 1979.
- Farrell, M.J. (1957): "The Measurement of Productive Efficiency." *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, General, 120, Part 3, 1957, s 253–281.
- Farrell, M.J. og Fieldhouse, M. (1962): "Estimating Efficient Production Under Increasing Returns to Scale." *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, General, 125, Part 2, 1962, s 252–257.
- Frisch, Ragnar (1971): "*Innledning til produksjonsteorien*." Universitetsforlaget, Oslo, 1971, 9. utgave.
- Fuss, M. og D. McFadden (eds) (1978): "*Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*." North–Holland Publ., Amsterdam, 1978.
- Färe, Rolf (1975): "A Note on Ray–Homotetic and Ray–Homogeneous Production Functions." *Swedish Journal of Economics*, 1975, s 366–372.
- Färe, Rolf (1986): "On the Existence and Equivalence of Three Joint Production Functions." *Scandinavian Journal of Economics*, 88 (4), 1986, s 669–674.
- Färe, R., S. Grosskopf og C.A. Knox Lovell (1985): "*The Measurement of Efficiency of Production*." Kluwer–Nijhoff Publishing, Boston, 1985.
- Färe, R. og C.A. Knox Lovell (1978): "Measuring the Technical Efficiency of Production." *Journal of Economic Theory*, Vol 19, No 1, 1978, s 150–162.
- Färe, R. og C.A. Knox Lovell (1981): "Measuring the Technical Efficiency of Production: Reply." *Journal og Economic Theory*, Vol 25, 1981, s 453–454.
- Färe, R., C.A. Knox Lovell og K. Zieschang (1983): "Measuring the Technical Efficiency of Multiple Output Production Technologies." I Eichhorn, W., Henn, R., Neumann, K., and Shephard, R.W. (eds): "*Quantitative Studies on Production and Prices*." Würzburg

and Vienna, Physica Verlag, 1983.

Färe, Rolf og Worthen Hunsaker (1986): "Notations of Efficiency and their Reference Sets." *Management Science*, Vol 32, No 2, Feb 1986.

Førsund, Finn R. (1974): "Studies in the Neo-Classical Theory of Production." *Memorandum from Inst. of Economics*, University of Oslo, Feb 4, 1974.

Førsund, Finn R. og Lennart Hjalmarsson (1974): "On the Measurement of Productive Efficiency." *Swedish Journal of Economics*, 1974, s 141–154.

Førsund, Finn R. og Lennart Hjalmarsson (1979 a): "Frontier Production Functions and Technical Progress. A Study of General Milk Processing in Swedish Dairy Plants." *Econometrica*, Vol 47, No 4, July, 1979, s 883–900.

Førsund, Finn R. og Lennart Hjalmarsson (1979 b): "Generalized Farrell Measures on Efficiency: An Application to Milk Processing in Swedish Dairy Plants." *The Economic Journal*, 89, June 1979, s 294–315.

Førsund, Finn R. og Lennart Hjalmarsson (1983): "Technical Progress and Structural Change in the Swedish Cement Industry 1955–1979." *Econometrica*, Vol 51, No 5, Sept 1983.

Førsund, Finn R. og Lennart Hjalmarsson (1987): "*Analyses of Industrial Structure: A Putty-Clay Approach.*" Almqvist & Wiksell Int., Stockholm, 1987.

Førsund, Finn R. og Jansen, Eilev (1977): "On Estimating Average and Best Practice Homotetic Production Functions via Cost Functions." *International Economic Review*, Vol 18, No 2, s 463 – 476.

Førsund, Finn R., C.A. Knox Lovell og Peter Schmidt (1980): "A Survey of Frontier Production Functions and of their Relationship to Efficiency Measurement." *Journal of Econometrics*, 13, (1980), s. 5–25.

Greene, William H. (1980 a): "Maximum Likelihood Estimation of Econometric Frontier Functions." *Journal of Econometrics*, Vol 13, 1980, s 27 – 56.

Greene, William H. (1980 b): "On the Estimation of a Flexible Frontier Production Model." *Journal of Econometrics*, Vol 13, 1980, s 101–115.

Greene, William H. (1982): "Maximum Likelihood Estimation of Stochastic Frontier Production Models." *Journal of Econometrics*, Vol 18, 1982, s 285–289.

Grosskopf, Shawna (1986): "The Role of the Reference Technology in Measuring Productive Efficiency." *The Economic Journal*, Vol 96, June 1986, s. 499–513.

Gundersen, Hans H. (1983): "*Fiskeprodukter og arbeidsintensitet.*" Rapport, FTFI, Tromsø, nov 1983.

Hannesson, Rognvaldur (1979): "*Om Norges Råfisklags nettoppriser.*" Rapport utgitt til et utvalg for utredning av fiskesalgslagenes prispolitikk, Institutt for økonomi, Universitetet i Bergen, nov 1979.

Henderson, James M. og Richard E. Quandt (1971): "*Microeconomic Theory; A Mathematical Approach.*" McGraw-Hill, New York, 1971.

Hildenbrand, Werner (1981): "Short-run Production Functions Based on Microdata." *Econometrica*, Vol 49, No 5, Sept 1981, s 1095–1125.

Hillier, Frederick S. og G.S. Lieberman (1974): "*Operations Research.*" Holden-Day Inc. (sec ed., 1974).

Holmøy, Erling (1986): "Om produktivitetmåling." *Økonomiske analyser*, nr 8, 1986, Statistisk Sentralbyrå, Oslo.

- Johansen, Leif (1972): "*Production Functions*." North-Holland, Amsterdam, 1972.
- Johnston, J. (1984): "*Econometric Methods*." McGraw-Hill, New York, (tredje utg.)
- Jondrow, James, C.A.Knox Lovell, Ivan S. Materov og Peter Schmidt (1982): "On the Estimation of Technical Inefficiency in the Stochastic Frontier Production Function Model." *Journal of Econometrics*, No 18, 1982, s 233-238.
- Kopp, R.J. (1981): "Measuring the Technical Efficiency of Production: A Comment." *Journal of Economic Theory*, Vol 25, 1981, s 450-452.
- Koutsoyiannis, A. (1977): "*Theory of Econometrics*." Macmillan Publishers Ltd, London (andre utg).
- Lee, Sang M. (1972): "*Goal Programming for Decision Analysis*." Auerbach Publ., Phil., 1972.
- Leibenstein, Harvey (1966): "Allocative Efficiency vs X-Efficiency." *American Economic Review*, June 1966, s 392-415.
- Leibenstein, Harvey (1973): "Competition and X-Efficiency: Reply." *Journal of Political Economy*, Vol 81, 1973, s 765-777.
- Lewin, A. og R. Morey (1981): "Measuring the Relative Efficiency and output Potential of Public Sector Organizations: An Application of Data Envelopment Analysis." *Intern. J. Policy Anal. and Information Systems*, 5, 1981.
- Lewin, A., R. Morey og Cook (1982): "Evaluating the Administrative Efficiency of Courts." *Omega*, 10, 1982, s 401-411.
- Løvland, Jarle (1986): "*Driftsundersøkelser i fiskeindustrien - 1985*." Rapport, Fiskeriteknologisk forskningsinstitutt, Tromsø, 1986. (Tilsvarende rapporter er laget årlig av FTFI fra og med driftsåret 1977.)
- Maddala, G.S. (1977): "*Econometrics*." McGraw-Hill, New York.
- Meeusen W. og J van den Broeck (1977): "Efficiency Estimation from Cobb-Douglas Production Functions with Composed Error." *International Economic Review*, Vol 18, No 2, s 435-444.
- Miller, David M. (1987): "Analyzing Total Factor Productivity with ROI as a Criterion." *Management Science*, Vol 33, No 11, Nov 1987.
- Nerlove, Marc (1963): "Return to Scale in Electric Supply." I: Christ, Carl (ed): "*Measurement in Economics*." Stanford University Press, Stanford, Ca., 1963.
- Nerlove, Marc (1965): "*Estimating and Identification of Cobb-Douglas Production Functions*." North-Holland Publ, Amsterdam. 1965.
- Nunamaker, Thomas R. (1983): "Measuring Routine Nursing Service Efficiency: A Comparison of Cost pr Patient Day and Data Envelopment Analysis Models." *Health Service Research*, Vol 18, No 2, 1983, s 183-205.
- Nunamaker, Thomas R. (1985): "Using Data Envelopment Analysis to Measure the Efficiency of Non-profit Organizations: A Critical Evaluation." *Managerial and Decision Economics*, Vol 6, No 1, 1985, s 50-58.
- Olsen, Svein Ottar (1987): "*Driftsundersøkelser i rekeindustrien - 1986*." Rapport, Fiskeriteknologisk forskningsinstitutt, Tromsø, 1987. (Tilsvarende rapport er publisert årlig av FTFI fra og med driftsåret 1979.)
- Olson, David L. og Scott R. Swenseth (1987): "A Linear Approximation for Chance-Constrained Programming." *Journal of Operational Research Society*, Vol 38,

No 3, 1987, s 261–267.

- Pedersen, P.B., O. Olesen og N.C.Petersen (1987): "Produktivitetsevaluering af 96 danske sykehus – en præsentation af DEA-metoden og et eksempel på dens anvendelse." *Ledelse & Erhvervsøkonomi*, 2, 1987, s 67–81.
- Rattsø, Jørn (1978): "Teknisk effektivitet ved kommunale aldershjem." *Sosialøkonomen*, nr 7, 1978.
- Rhodes, Edwardo Lao (1978): "*Data Envelopment Analysis and Approaches for Measuring the Efficiency of Decision Making Units with an Application to Program Follow-Through in U.S. Education.*" Upublicert Ph.D. Thesis, Carnegie-Mellon University, 1978.
- Richmond, J. (1974): "Estimating the Efficiency of Production." *International Economic Review*, Vol 15, No 2, s 515–521.
- Russell, Robert R. (1985): "Measures of Technical Efficiency." *Journal of Economic Theory*, Vol 35, 1985, s 109–126.
- Salter, W.E.G. (1960): "*Productivity and Technical Change.*" Cambridge University Press, 1st edition, London, 1960.
- Sandmo, Agnar (1970): "Returns to Scale and the Average Cost Curve." *The Swedish Journal of Economics*, No 2, 1970.
- Schmidt, Peter (1975): "On the Statistical Estimation of Parametric Frontier Production Functions." *The Review of Economics and Statistics*. Vol 58, s 238 – 239.
- Schmidt, Peter (1985): "Frontier Production Functions." *Econometric Reviews*, Vol 4, No 2, 1985–86, s 289–328, + "Discussants" s 329–355.
- Schmidt, Peter og C.A. Knox Lovell (1979): "Estimating Technical and Allocative Inefficiency Relative to Stochastic Production and Cost Functions." *Journal of Econometrics*, Vol 9, s 343–366.
- Schmidt, Peter og C.A.Knox Lovell (1980): "Estimating Stochastic Production and Cost Frontiers when Technical and Allocative Inefficiency are Correlated." *Journal of Econometrics*, No 13, 1980, s 83–100.
- Seitz, W.D. (1970): "The Measurement of Efficiency Relative to a Frontier Production Function." *American Journal of Agricultural Economics*, No 4, 1970.
- Seitz, W.D. (1971): "Productive Efficiency in the Steam–Electric Generating Industry." *Journal of Political Economy*, Vol 79, No 4, 1971, s 878–886.
- Shephard, R.W. (1953): "*Cost and Production Functions.*" Princeton University Press, New Jersey 1953.
- Shephard, R.W. (1970): "*Theory of Cost and Production Functions.*" Princeton University Press, New Jersey, 1970
- Sherman, H. David (1981): "*Measurement of Hospital Technical Efficiency: A Comparative Evaluation of Data Envelopment Analysis and Locating Inefficiency in Health Care Organizations.*" Upublicert D.B.A., Harvard University, 1981.
- Sherman, H. David (1982): "Identifying Inefficiencies in the Multiple Output–Multiple Input Organizations." *Working Paper, Alfred P. Sloan School of Management, MIT*, ISSM Working Paper # 1316–82, Feb 1982.
- Sherman, H. David (1984): "Improving the Productivity of Service Businesses." *Sloan Management Review*, 1984, s 11–23.
- Sherman, H. David og Franklin Gold (1985): "Bank Branch Operating Efficiency. Evaluation

- with Data Envelopment Analysis." *Journal of Banking and Finance*, Vol 9, 1985, s 297–315.
- Smith, Peter og David Mayston (1987): "Measuring Efficiency in the Public Sector." *Omega*, Vol 15, No 3, 1987, s 181–189.
- Stigler, George J. (1976): "The Xistence of X-Efficiency." *The American Economic Review*, Vol 66, No 1, 1976, s 213–216.
- Thanassoulis, E., R.G.Dyson og M.J.Foster (1987): "Relative Efficiency Assessments Using Data Envelopment Analysis: An Application to Data on Rates Departments." *Journal of Operational Research*, Vol 38, No 5, 1987
- Timmer, C.P. (1971): "Using a Probabilistic Production Function to Measure Technical Efficiency." *Journal of Political Economy*, Vol 79, No 4, 1971.
- Tobin, J. (1958): "Estimation of Relationships for Limited Dependent Variables." *Econometrica*, 26, s 24–36.
- Varian, Hal R. (1984): "*Microeconomic Analysis*." W.W.Norton & Co., New York, (sec.ed)
- Vassdal, Terje (1982 a): "Optimal bedriftsstørrelse i nord-norsk fiskeforedlingsindustri." *Diskusjonsnotat nr 3/82*, Fiskeriøkonomisk Institutt, NHH, Bergen
- Vassdal, Terje (1982 b): "Estimering av Best Practice produktfunksjoner med eksempler fra nord-norsk fiskeforedlingsindustri." *Diskusjonsnotat 4/82*, Fiskeriøkonomisk Institutt, NHH, Bergen.
- Vassdal, Terje (1986): "Individuelle effektivitetsmål og bransjeeffektivitetsmål ved estimering av homotetiske produktfunksjoner av typen Zellner/Revankar." *Arbeidsnotat, IFF, Universitetet i Tromsø*, 29.7.1986.
- Zellner, A. og N.S. Revankar (1969): "Generalized Production Functions." *Review of Economic Studies*, 36 (2) April 1969.

Appendiks 1 : En kompakt oversikt over effektivitetsmål og LP formuleringer for å beregne disse i en stykkevis lineær teknologi.

LP-FORMULERINGER FOR Å BEREGNE DE 5 RADIALE
INNSATSEFFEKTIVITETSMÅLENE

Inputkorrespondansen for en teknologi med "weak disposability" er:

$$(A1) \quad L^W(y) = \left\{ x : \mu \cdot \lambda \cdot M = y, \lambda \cdot N = \delta \cdot x; \mu, \delta \in (0,1], \lambda \in \mathbb{R}_+^n \right\}$$

Inputkorrespondanse for en teknologi med "free disposability" av input er:

$$(A2) \quad L^S(y) = \left\{ x : \lambda \cdot M \geq y, \lambda \cdot N \leq x, \lambda \in \mathbb{R}_+^n \right\}$$

Med (x^0, y^0) vil vi mene den observerte input/output vektoren til en bestemt produsent.

LP-formuleringen for Farrells mål for teknisk innsatseffektivitet gitt $L^W(y)$, blir da:

$$(A3) \quad \begin{aligned} \text{Min} \quad & \gamma \\ \text{Når:} \quad & \gamma \cdot \delta \cdot x^0 = \lambda \cdot N \\ & \mu \cdot \lambda \cdot M = y^0 \\ & \mu, \delta \in (0,1] \\ & \gamma \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned}$$

λ er en intensitetsvektor som vi beregner.

Farrell effektivitet og Weak teknisk effektivitet er identiske hvis og bare hvis (se teorem 3.3.10 i FGL) teknologien tilfredsstiller betingelsene for fri disposability av input. Definisjonen av

"strongly disposable" input korrepondanse (A2) kan derfor brukes å definere en LP-formulering for W_i , det svake innsatseffektivitetsmålet, som følger:

$$\begin{aligned}
 \text{(A4)} \quad & \text{Min: } \gamma \\
 & \text{Når: } \gamma \cdot x^0 \geq \lambda \cdot N \\
 & \quad \lambda \cdot M \geq y^0 \\
 & \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^n, \gamma \in \mathbb{R}_+.
 \end{aligned}$$

Det total effektivitetsmålet for innsatsbesparing $O_i(x,y,p)$ er:

$$\text{(A5)} \quad O_i(x,y,p) = Q_i(x,y)/p \cdot x^0$$

hvor

$$\text{(A6)} \quad Q_i(x,y) = \text{Min} \{p \cdot x : x \in L(y)\}.$$

Totaleffektiviteten (som er et mål på samlet priseffektivitet og teknisk effektivitet) er minimumskostnad i inputtransformasjonen dividert med faktisk inputkostnad for DMU_i. $Q_i(x,y)$ må beregnes som en optimumsverdi.

Følgende LP-modell kan brukes for å beregne $Q_i(x,y)$:

$$\begin{aligned}
 \text{(A7)} \quad & \text{Min: } px \\
 & \text{Når } x^0 \geq \lambda \cdot N \\
 & \quad y^0 \leq \lambda \cdot M \\
 & \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^n, p \in \mathbb{R}_{++}^m \\
 & \quad \text{og } x := \lambda^* N.
 \end{aligned}$$

$Q_i(x,y)$ beregnes for hver bedrift. Den faktiske totaleffektiviteten framkommer ved å sammenligne minimumskostnadene med observerte kostnader for den bestemte bedriften.

To avledede effektivitetsmål kan utledes som kombinasjoner av de tre effektivitetsmålene vi nettopp har vist LP-formuleringene for.

Allokeringseffektiviteten er

$$(A8) \quad A_i(x,y,p) = O_i(x,y,p)/W_i(x,y)$$

og "congestion" effektivitetsmål er:

$$(A9) \quad C_i(x,y) = W_i(x,y)/F_i(x,y).$$

LP-formuleringer for å illustrere de 5 radiale output effektivitetsmålene.

Output korrespondansen $P(x)$ er definert i relasjon til teknologier som gir "weakly disposable" output korrespondanse som:

$$(A10) \quad P^W(x) = \left\{ y : \mu \cdot \lambda \cdot M = y, \lambda \cdot N = \delta \cdot x, \delta, \mu \in (0,1], \lambda \in \mathbb{R}_+^n \right\}$$

og $P(x)$ relativt til "strongly disposable" output korrespondanse er definert som:

$$(A11) \quad P^S(x) = \left\{ y : \lambda \cdot M \geq y, \lambda \cdot N \leq x, \lambda \in \mathbb{R}_+^n \right\}.$$

Farrell output effektivitetsmål, $F_i(x,y)$, blir på LP form relativt en "weakly" disposable outputteknologi:

$$(A12) \quad \begin{array}{ll} \text{Max:} & \theta \\ \text{Når:} & \theta \cdot y^0 = \mu \cdot \lambda \cdot M \\ & \lambda \cdot N = \delta \cdot x^0 \\ & \delta, \mu \in (0,1] \end{array}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}_+^n$$

Denne formuleringen kan forenkles ved å omdefinere variablene $\gamma = \mu \cdot \lambda$ og $\sigma = \mu \cdot \delta$. Vi får da følgende LP-formulering:

$$\begin{aligned} \text{(A12)} \quad & \text{Max :} && \theta \\ & \text{Når} && \theta \cdot y^0 = \gamma \cdot M \\ & && \gamma \cdot N = \sigma \cdot x^0 \\ & && \gamma \in \mathbb{R}_+^n, \sigma \in (0,1]. \end{aligned}$$

Det svake outputmål for teknisk effektivitet, $W_i(x,y)$, er likt Farrells mål for outputeffektivitet når teknologien er $P^S(x)$. LP formuleringen for $W_i(x,y)$ blir:

$$\begin{aligned} \text{(A13)} \quad & \text{Max:} && \theta \\ & \text{Når:} && \theta \cdot y^0 \leq \lambda \cdot M \\ & && \lambda \cdot N \leq x^0 \\ & && \lambda \in \mathbb{R}_+^n. \end{aligned}$$

Det totale outputeffektivitetsmål, $O_o(x,y,r)$, hvor $r \in \mathbb{R}_{++}^S$ er prisvektor for output, er prisavhengig og er basert på den adferdsantagelse at bedriften maksimerer salgsinntekt gitt en bestemt mengde input. Effektiviteten til en bestemt DMU kan måles ved å sammenligne verdien av faktisk omsetning med maksimalt oppnåelig omsetning. Kaller vi maksimalt salgsinntekt for $R(x,y)$ og faktisk for $r \cdot y^0$, kan vi beregne

$$\text{(A14)} \quad O_o(x,y,r) = R(x,y)/r \cdot y^0.$$

$R(x,y)$ er ikke observerbar, men kan finnes av følgende LP-formulering når vi forutsetter lineær fri "disposable" teknologi:

$$\begin{aligned}
 \text{(A15)} \quad & \text{Max: } r \cdot y \\
 & \text{Når: } \lambda \cdot M \geq y^0 \\
 & \quad \lambda \cdot N \leq x^0 \\
 & \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^n \\
 & \quad \text{og } y := \lambda^* M .
 \end{aligned}$$

De to avledede effektivitetsmålene, "congestion" effektivitetsmål og allokeringseffektivitetsmål, avledes av de tre effektivitetsmålene som vi har vist LP-formuleringer for. "Congestion" effektivitetsmålet blir:

$$\text{(A16)} \quad C_o(x,y) = W_o(x,y)/F_o(x,y)$$

og allokeringseffektivitetsmålet blir:

$$\text{(A17)} \quad A_o(x,y,r) = O_o(x,y,r)/W_o(x,y) .$$

GRAFALLOKERINGSEFFEKTIVITET

Farrels grafmål for teknisk effektivitet

Vi definerer først det effektive området som:

$$\text{(A18)} \quad D(F_g) := \left\{ (x,y) : \exists \gamma \geq 0, \text{ slik at } (\gamma x, \gamma^{-1} y) \in \text{GR} \right\} .$$

Funksjonen F_g som beregner Farrells grafeffektivitetsmål defineres som:

$F_g : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^s \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ er definert av:

$$(A19) \quad F_g(x,y) := \begin{cases} \min \{ \gamma \geq 0 : (\gamma x, \gamma^{-1} y) \in GR, (x,y) \in D(F_g) \} \\ +\infty, (x,y) \in \text{komplementet til } D(F_g) \end{cases}$$

$D(F_g)$ sikrer at det finnes en mulighet for en proporsjonal økning/reduksjon av input og output slik at (x,y) etter endring fremdeles er i GR.

Det svake grafmål for teknisk effektivitet.

Vi definerer tre sett, kalt $K(x)$, $M(y)$ og $D(W_g)$, som:

$$(A20) \quad K(x) := \{ u : u \leq x \},$$

$$(A21) \quad M(y) := \{ v : v \geq y \},$$

$$(A22) \quad D(W_g) := \{ (x,y) : \exists \gamma \geq 0, \text{ slik at } (K(\gamma x) \times M(\gamma^{-1} y)) \cap GR \neq \emptyset \}$$

$D(W_g)$ er det effektive området til det svake grafmålet W_g . $K(x)$ er mengden av inputvektorer mindre enn eller lik x , og $M(y)$ er settet av outputvektorer større enn eller lik y .

Definisjonen av det svake graf effektivitetsmålet blir da:

$$(A23) \quad W_g(x,y) := \begin{cases} \min \{ \gamma \geq 0 : K(\gamma x) \times M(\gamma^{-1} y) \cap GR \neq \emptyset \}, (x,y) \in D(W_g) \\ +\infty, (x,y) \in \text{komplementet til } D(W_g) \end{cases}$$

Generelt er

$$(A24) \quad \text{Weff GR} \subseteq \text{Iso GR}.$$

Dette impliserer

$$(A25) \quad W_g(x,y) \leq F_g(x,y).$$

Det totale graf-effektivitetsmålet

For graf-effektivitet defineres en effektivitet som er prisavhengig. Denne avhengigheten vil være til både inputprisvektoren $p \in \mathbb{R}_{++}^m$ og outputprisvektoren $r \in \mathbb{R}_{++}^s$.

Vi definerer først:

$$(A26) \quad H_g^+(x,y,p,r) := \{(u,v) : r \cdot v - p \cdot u \geq r \cdot y - p \cdot x\}.$$

Funksjonen $H_g^+(x,y,p,r)$ deler rommet generert av $(x,y,p,r) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^s \times \mathbb{R}_{++}^m \times \mathbb{R}_{++}^s$ i to halvdel. $H_g^+(\cdot)$ kan kalles den "øvre" halvdel. H_g^+ har følgende egenskap:

$$H_g^+(x,y,p,r) = H_g^+(x,y,\gamma p, \gamma r), \quad \gamma > 0.$$

Det betyr at H_g^+ er homogen av grad null i prisene, dvs en proporsjonal endring i prisnivået er uten betydning. Den totale graf-effektivitet vil vi kalle $O_g(x,y,p,r)$ (engelsk: "overall graf efficiency"). Det effektive området til O_g er

$$(A27) \quad D(O_g) := \left\{ (x,y) : \exists \gamma \geq 0, \text{ slik at} \right. \\ \left. (H_g^+(\gamma x, \gamma^{-1} y, p, r) \cap \text{GR}) \neq \emptyset \right\}$$

Med dette utgangspunktet defineres selve effektivitetsmålet, dvs funksjonen som konkret beregner "overall graf efficiency".

Definisjon av funksjonen O_g :

Funksjonen $O_g: \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^s \times \mathbb{R}_{++}^m \times \mathbb{R}_{++}^s \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ definert av

(A28)

$$O_g(x,y,p,r) := \begin{cases} \inf\{\gamma \geq 0 : (H_g(\gamma x, \gamma^{-1}y, p, r) \cap GR \neq \emptyset), \\ (x,y) \in D(O_g)\} \\ +\infty, (x,y) \in \text{komplementet til } D(O_g) \end{cases}$$

definerer total graf effektivitet.

Uttrykket "inf" er brukt i stede for "min" i denne definisjonen, siden det ikke er gitt at et minimum for funksjonen eksisterer.

Input-output tap på grunn av mangel på full "disposability" i input og output.

Slike tap lar seg beregne som forholdstallet mellom Farrells grafeffektivitet og "weak" grafeffektivitet. Siden vi med grafeffektivitetsmålet samtidig ser på effektivitet til input og output, får vi bare ett slikt effektivitetsmål.

Definisjon: For $(x,y) \in GR$, $y \geq 0$, er målet for eventuelt input/outputtap pga mangelen på fri "disposability":

$$(A29) \quad C_g(x,y) := W_g(x,y)/F_g(x,y).$$

Dette målet er uavhengig av prisene på input og output.

LP-formuleringer for å illustrere grafektivitetsmålene

Først vises grafektivitet for Farrells effektivitetsmål, $F_g(x,y)$. Det blir beregnet for den teknologien som gir mest avgrenset mulighetsområde, dvs en teknologi som er "weakly disposable" i input og output. En grafteknologi kan defineres i form av enten inputkorrespondanse eller outputkorrespondanse. Vi velger en framstilling relativt til inputkorrespondansen, og brukes "weakly disposable" teknologi (A1):

Farrells graf effektivitetsmål, $F_g(x,y)$, får følgende LP-formulering:

$$\begin{aligned}
 \text{(A39)} \quad & \text{Min: } \gamma \\
 & \text{Når: } y^0/\gamma = \mu \cdot \lambda \cdot M \\
 & \quad \gamma \cdot \delta \cdot x^0 = \lambda \cdot N \\
 & \quad \mu, \delta \in (0,1], \lambda \in \mathbb{R}_+^n
 \end{aligned}$$

Denne formuleringen kan omformes til en enklere ved transformasjonen $\gamma' = \gamma^2$, $\lambda' = \lambda \cdot \gamma / \delta$, og $\mu' = 1/(\mu \cdot \delta)$

Den nye LP-formuleringen blir da, siden γ og γ' vil ha samme minimum for $\gamma \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 (A30)' \quad & \text{Min: } \gamma' \\
 & \text{Når } \gamma' x^0 = \lambda' N \\
 & \quad \mu' y^0 = \lambda' M \\
 & \quad \mu' \geq 1 \\
 & \quad \lambda' \in \mathbb{R}_+^n
 \end{aligned}$$

Grafmålet for svak effektivitet kan utledes når vi vet at Farrell effektivitet og svak effektivitet er de samme dersom teknologien er karakterisert av "strong disposability" av output/input. (A2) er en slik teknologi.

Det svake effektivitetsmålet, $W_g(x,y)$ som LP formulering kan beregnes som:

$$\begin{aligned}
 (A31) \quad & \text{Min } \gamma \\
 & \text{Når } \gamma \cdot x^0 \geq \lambda \cdot N \\
 & \quad y^0 / \gamma \leq \lambda \cdot M \\
 & \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^n
 \end{aligned}$$

Også denne LP-formuleringen kan forenkles ved å transformere variablene $\gamma' = \gamma^2$, $\lambda' = \lambda \cdot \gamma$ og deretter sette inn i LP modellen. Den alternative formulering blir da:

$$\begin{aligned}
 (A31)' \quad & \text{Min: } \gamma' \\
 & \text{Når: } \gamma' \cdot x^0 \geq \lambda' N \\
 & \quad \lambda' M \geq y^0 \\
 & \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^n
 \end{aligned}$$

Vi ser at det siste uttrykket formelt nå er likt (A4), som igjen beregnet det effektivitetsmålet som blir brukt i DEA modellene.

Målet for den totale grafektivitet $O_g(x,y,r,p)$, kan beregnes via følgende vesle omskrivning.

La $O_g(x,y,p,r)$ være et minimum for en bestemt $\gamma > 0$, som vi kan kalle γ_g . Den maksimale profittfunksjonen er:

$$(A32) \quad \gamma_g^{-1} \cdot y \cdot r - \gamma_g \cdot x \cdot p = \Pi(r,p)$$

eller alternativt skrevet, når vi setter inn funksjonsformen for γ_g fra (A27):

$$(A33) \quad (O_g(x,y,p,r))^{-1} \cdot y \cdot r - O_g(x,y,p,r) \cdot x \cdot p = \Pi(r,p)$$

Dette kan omskrives til

$$(A33)' \quad y \cdot r = O_g(x,y,p,r) \cdot \Pi(r,p) + (O_g(x,y,p,r))^2 \cdot x \cdot p.$$

(A33)' kan vi bruke når vi skal beregne $O_g(x,y,p,r)$. Vi har i ligningen (A33)' som ukjente bare $\Pi(p,r)$ og $O_g(\cdot)$. De øvrige verdier lar seg i prinsippet lett beregnes. Siden det er numerisk lettere å beregne $\Pi(p,r)$ enn $O_g(\cdot)$, vil vi stille opp LP-formuleringen for å beregne $\Pi(p,r)$. Løsningen settes inn i ligning (A33)' for så å beregne verdien for $O_g(\cdot)$.

$\Pi(r,p)$ kan beregnes av følgende LP-problem:

$$(A34) \quad \begin{aligned} \text{Max: } & (r \cdot y - p \cdot x) \\ \text{Når } & \lambda \cdot M \geq y^0 \\ & \lambda \cdot N \leq x^0 \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^n \\ & \text{og } y := \lambda^* M \text{ og } x := \lambda^* N. \end{aligned}$$

Siden vi ikke har restriksjoner på $\sum_{i=1}^n \lambda_i$, så betyr det i praksis at vi har spesifisert en lineær teknologi homogen av grad en. Følgen av denne forutsetningen er at $\Pi(p,r) = 0$ for alle bedriftene. I dette tilfellet kan vi beregne verdien for $O_g(x,y,p,r)$ langt lettere, siden vi lett ser at minimumsverdien da blir

$$(A35) \quad O_g(x,y,p,r) = \sqrt{\frac{y \cdot r}{x \cdot p}} .$$

RUSSELL MÅL FOR EFFEKTIVITET.

Russell output effektivitetsmål for teknisk effektivitet.

Vi definerer først:

$$(A36) \quad (y_1, y_2, \dots, y_\ell, \dots, y_s)$$

slik at $y \in \mathbb{R}_+^s$ med $y_i > 0$ for $i = 1, 2, \dots, \ell$, $\ell \leq s$, og $y_i = 0$ for $i = \ell+1, \dots, s$. Med dette utgangspunkt kan vi definere det effektive området for Russell outputmål $R_O(\cdot)$ som:

$$(A37) \quad D(R_O) := \left\{ (x, y) : \exists \theta_i \geq 1, i=1, 2, \dots, \ell, \text{ slik at } (\theta_1 y_1, \theta_2 y_2, \dots, \theta_\ell y_\ell; \dots) \in P(x) \right\}$$

Russell outputmål for teknisk effektivitet kan nå defineres.

Definisjon: Funksjonen $R_O : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^s \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{ +\infty \}$ definert av

$$(A38)$$

$$R_0(x,y) := \begin{cases} \max \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{\ell} \theta_i / \ell : (\theta_1 y_1, \theta_2 y_2, \dots, \theta_{\ell} y_{\ell}; \dots) \in P(x), \right. \\ \left. \theta_i \geq 1 \right\}, (x,y) \in D(R_0) \\ \\ + \infty, (x,y) \in \text{komplementet til } D(R_0) \end{cases}$$

er Russell outputmål for teknisk effektivitet.

Russell grafmål for teknisk effektivitet

Vi definerer først:

$$(A39) \quad (x_1, x_2, \dots, x_k; \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{\ell}; \dots, y_s)$$

som betegner en input – outputvektor $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{m+s}$ med $x_i > 0, i=1, \dots, k$, og $x_i = 0, i=k+1, \dots, m$, og $y_i > 0, i=1, \dots, \ell$ og $y_i = 0, i=\ell+1, \dots, s$.

Det effektive området til Russell graf effektivitet, kalt R_g , defineres som:

$$(A40) \quad D(R_g) := \left\{ (x,y) : \exists \gamma_i \in [0,1], i=1,2, \dots, k \text{ og} \right. \\ \left. \mu_j \in (0,1], j=1,2, \dots, \ell, \text{ slik at} \right. \\ \left. (\gamma_1 x_1, \dots, \gamma_k x_k; \dots, \mu_1^{-1} y_1, \dots, \mu_{\ell}^{-1} y_{\ell}; \dots) \in GR \right\}.$$

Russell grafmål defineres som:

Definisjon: Funksjonen $R_g: \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^s \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ definert ved

$$(A41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \left\{ \left[\frac{\sum_{i=1}^k \gamma_i + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j}{k + \ell} \right]; (\gamma_1 x_1, \dots, \gamma_k x_k; \dots \right. \\ \left. \mu_1^{-1} y_1, \dots, \mu_{\ell}^{-1} y_{\ell}; \dots) \in GR, \gamma_i, \mu_j \in (0,1] \right\}, \end{array} \right.$$

$$R_g(x,y) = \begin{cases} (x,y) \in GR \\ + \infty, (x,y) \in \text{komplementet til } D(R_g) \end{cases}$$

er Russell grafmål for teknisk effektivitet.

LP-formuleringer for å beregne Russell effektivitetsmål.

Vi skal nå vise LP formuleringer til Russell inputeffektivitet, Russell outputeffektivitet og Russell Grafeffektivitet. Russell effektivitetene er ikke påvirket av om vi bruker forutsetninger om fri "disposability" eller svak "disposability". Vi vil derfor bruke en definisjon av teknologi som tilfredsstiller forutsetningen om "free disposability" av input og output. Teknologien, definert for inputkorrespondansen, skrives som (A2).

Russell input effektivitetsmål får da følgende LP formulering:

$$(A2) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{i=1}^k \gamma_i / k \\ \text{Når} & \lambda \cdot N \leq \gamma \odot x^0 \\ & \lambda \cdot M \geq y^0 \\ & \gamma \in [0,1], i=1,2, \dots, k. \end{array}$$

Russell outputeffektivitet, formulert som en LP modell.

Også for outputeffektiviteten gjelder det forholdet at teknologi med "free" og "congested" disposabilitet av output vil gi samme resultat for $R_o(x,y)$. Vi kan derfor bruke teknologi (A11).

Den følgende LP formulering gir $R_o(x,y)$ for denne teknologien.

$$\begin{aligned}
 (A43) \quad & \text{Max} \quad \sum_{i=1}^{\ell} \theta_i / \ell \\
 & \text{Når} \quad \lambda \cdot N \leq x^0 \\
 & \quad \lambda \cdot M \geq \theta \odot y^0 \\
 & \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^n, \theta \geq 0, i=1, 2, \dots, \ell.
 \end{aligned}$$

Russell grafeffektivitet kan også beregnes ut fra teknologi som er karakterisert av å være "strongly disposable", eller teknologi som er "weakly disposable". Vi kan definere en grafteknologi enten som en input eller som en outputkorrespondanse, og velger definisjon (A2).

Vi kan da kalkulere Russell grafeffektivitet fra følgende problemformulering (som ikke er et LP problem, men et ikkelineært optimaliseringsproblem pga variabelen μ^{-1}):

$$\begin{aligned}
 (A44) \quad & \text{Min} \quad \left(\sum_{i=1}^k \gamma_i + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j \right) / (k + \ell) \\
 & \text{Når:} \quad \lambda \cdot N \leq \gamma \odot x^0 \\
 & \quad \lambda \cdot M \geq \mu^{-1} \odot y^0 \\
 & \quad \gamma_i \in [0, 1], i=1, 2, \dots, k \\
 & \quad \mu_j \in (0, 1], j=1, 2, \dots, \ell \\
 & \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^n.
 \end{aligned}$$

Denne problemformuleringen er ikke-lineær i ℓ restriksjoner pga μ^{-1} . Ofte er det en fordel (beregningmessig) å få et slikt problem over på en form hvor de ikke-lineære leddene opptrer i objektfunksjonen og ikke i en eller flere restriksjoner. For vårt problem kan vi oppnå dette ved å danne et ekvivalent problem, når vi definerer $\theta_i = \mu_i^{-1}$.

Vi får da følgende nye problemformulering, som fremdeles ikke er et LP-problem:

$$\begin{aligned}
 \text{(A44)'} \quad & \text{Min} \quad \left(\sum_{i=1}^k \gamma_i + \sum_{j=1}^{\ell} \theta_j^{-1} \right) / (k + \ell) \\
 \text{Når:} \quad & \lambda \cdot N \leq \gamma \odot x^0 \\
 & \lambda \cdot M \geq \theta \odot y^0 \\
 & \gamma_i \in [0, 1], i=1, 2, \dots, k \\
 & \theta_j \geq 1, j=1, 2, \dots, \ell \\
 & \lambda \in \mathbb{R}_+^n.
 \end{aligned}$$

(A44)' lar seg lettere løse ved de fleste algoritmer for ikke-lineær optimalisering enn (A44).

Modeller for å beregne skalaeffektivitet.

Vi kan først kalkulere $F_g(x, y)$, dvs Farrell effektivitet relativt til en teknologi som er uten begrensing m.h.p. skalaelastisitet. Vi må da forutsette "weak disposability" og får følgende definisjon av teknologien:

$$\text{(A45)} \quad L^W(y) := \left\{ x: \mu \cdot \lambda \cdot M = y, \lambda \cdot N = \delta \cdot x, \lambda \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

LP formuleringen blir:

$$\begin{aligned}
 \text{(A46)} \quad & \text{Min} \quad \gamma \\
 \text{Når} \quad & \mu \cdot \lambda \cdot M = y^0 / \gamma
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \cdot N &= \gamma \cdot \delta \cdot x^0 \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i &= 1 \\ \delta, \mu &\in (0, 1], \lambda \in \mathbb{R}_+^n.\end{aligned}$$

En LP formulering lik denne har vi vist tidligere (se (A30) – (A30)') kan omformes til (når $\gamma' = \gamma^2$, $\lambda' = \lambda(\gamma/\delta)$, $\xi = 1/(\mu \cdot \delta)$ og $\rho = (\gamma/\delta)$):

$$\begin{aligned}(A46)' \quad \text{Min} \quad & \gamma' \\ \text{Når} \quad & \lambda' \cdot M = \xi \cdot y^0 \\ & \lambda' \cdot M = \gamma' \cdot x^0 \\ & \xi \geq 1 \\ & \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sigma \\ & \sigma \leq 1 \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^n.\end{aligned}$$

Det er i denne formuleringen fullt mulig å sette $\sigma = 1$.

LP formuleringen som gir regneregelen for å finne $W_g(x, y)$, gitt den nye teknologien uten begrensning m.h.p. skala, blir, når vi forutsette fri disposabilitet:

$$\begin{aligned}(A47) \quad \text{Min} \quad & \gamma \\ \text{Når} \quad & \lambda \cdot M \geq y^0 / \gamma \\ & \lambda \cdot N \leq \gamma \cdot x^0 \\ & \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^n.\end{aligned}$$

Denne formuleringen kan omformes (når $\gamma' = \gamma^2$, $\lambda' = \lambda \cdot \gamma$, og restriksjonen $\sum_{i=1}^n \lambda_i' = 1$) til:

$$(A47)' \quad \text{Min} \quad \gamma'$$

$$\begin{aligned}
 \text{Når} \quad & \lambda' \cdot M \geq y^0 \\
 & \lambda' \cdot N \leq \gamma' \cdot x^0 \\
 & \sum_{i=1}^n \lambda_i = \gamma (=1) \\
 & \lambda' \in \mathbb{R}_+^n.
 \end{aligned}$$

Til slutt må vi lage LP formuleringen til $K_g(x,y)$ som er basert på en kjegle (engelsk: "cone") graf teknologi, og derfor har en skalelastisitet lik 1. Dette er den referanseteknologien vi trenger når vi skal sammenligne effektivitet med fri skalelastisitet med skalelastisitet lik 1.

Vi beregner $K_g(x,y) = \gamma$ av følgende LP formulering (bemerk den reelle likhet med (A31)):

$$\begin{aligned}
 \text{(A48)} \quad & \text{Min} \quad \gamma \\
 \text{Når:} \quad & \lambda \cdot M \geq y^0 / \gamma \\
 & \lambda \cdot N \leq \gamma \cdot x^0 \\
 & \lambda \in \mathbb{R}_+^n.
 \end{aligned}$$

Denne formuleringen kan omskrives til lineær form ,når $\gamma' = \gamma^2$, $\lambda' = \lambda \cdot \gamma$, og blir da (A31)'.

LP formuleringer for å beregne årsaker til skalaineffektivitet

Vi trenger bare beregne $W_g^*(x,y)$, siden $W_g(x,y)$ allerede er beregnet, se (A47), når vi skulle identifisere om skalaineffektivitet virkelig er til stede for en konkret DMU. I tillegg trenger vi også bare beregne $W^*(\cdot)$ for de DMU-er som hadde $S(x,y) \neq 1$.

Vi skal vise LP formuleringen som vil beregne $W_g^*(x,y)$, dvs det svake skaleeffektivitetsmål relativt til $S(\text{GR})$. Først må vi imidlertid definer $S(\text{GR})$ på LP form, som:

$$\text{(A49)} \quad S(\text{GR}) := \left\{ (x,y) : \lambda \cdot M \geq y, x \geq \lambda \cdot N, \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1, \lambda \in \mathbb{R}_+^n \right\}.$$

I (A46) brukt for å beregne $W_g(x,y)$, satte vi som restriksjon at $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, og det førte til at mulighetsområdet ble en konvekts mengde.

Vi kan nå betrakte tre mulige verdier på intensitetsparameteren λ i det tilfellet hvor vi ikke har noen restriksjoner på λ , ut over naturligvis at $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$.

- a) $\sum_{i=1}^n \lambda_i > 1$
 b) $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$
 c) $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 1$

Tilfellet a: Dette tilfellet, som vil kunne oppnåes når vi beregner $K_g(x,y)$, er ikke mulig når vi har restriksjonen $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ eller $\sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1$. I begge tilfellene vil $\sum_{i=1}^n \lambda_i^* = 1$, og vi vet da at $W_g^*(x,y) = W_g(x,y)$. Dette, igjen, betyr at for denne (x,y) vil for det første være skalaineffektiv og for det andre skyldes det avtakende utbytte m.h.p. skalaen. Dette betyr at vi har økende utbytte (lokalt) m.h.p. skalaen hvis og bare hvis $\sum_{i=1}^n \lambda_i > 1$.

Tilfellet b: Når $\sum_{i=1}^n \lambda_i^* = 1$ i en beregning av grafefektivitet uten begrensning på $\sum_{i=1}^n \lambda_i$, da betyr det at $K_g(x,y) = W_g(x,y)$, og med andre ord at en slik (x^0, y^0) vil være skalaoptimal.

Tilfellet c: Når $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 1$ i tilfeller hvor vi ikke har restriksjoner på $\sum_{i=1}^n \lambda_i$, da vil vi ha at $K_g(x,y) = W_g(x,y)$, mens $W_g^*(x,y) < W_g(x,y)$. I slike tilfeller er $K_g(x,y)/W_g(x,y) \neq 1$, og vi har lokal skalaineffektivitet. Det viktigste er imidlertid at vi kan si at ineffektiviteten skyldes økende utbytte m.h.p. skalaen. Dette betyr at $\sum_{i=1}^n \lambda_i^* = 1$ hvis og bare hvis vi lokalt økende utbytte m.h.p. skalaen.

Ved tolkning av $\sum_{i=1}^n \lambda_i^*$ når vi har graf kjegle definert teknologi, kan vi derfor finne ut om en

konkret DMU har konstant, stigende eller fallende utbytte m.h.p. skalaen.

LP formuleringen for å beregne $W_g^*(x,y)$ blir nå:

$$\begin{aligned}
 \text{(A50)} \quad & \text{Min} \quad \gamma \\
 & \lambda \cdot M \geq y^0 / \gamma \\
 & \lambda \cdot N \leq x^0 \cdot \gamma \\
 & \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1 \\
 & \lambda \in \mathbb{R}_+^n .
 \end{aligned}$$

Dette uttrykket kan vi omforme (når $\gamma' = \gamma^2$ og $\lambda' = \gamma \cdot \lambda$) til:

$$\begin{aligned}
 \text{(A51)} \quad & \text{Min} \quad \gamma' \\
 \text{Når:} \quad & \lambda' \cdot M \geq y^0 \\
 & \lambda' \cdot N \leq \gamma' x^0 \\
 & \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1, \\
 & \lambda \in \mathbb{R}_+^n .
 \end{aligned}$$

APPENDIX 2: Fullstendig oversikt over variablene i en standard datafil.

Posisj nr	1983 kode	Tekst
1		Bedriftsnr
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10	A11	Råstoff fra fisker (tonn) Torskefisk
11	A12	tråler
12	A13	pakker
13	A10	Total torskefisk
14	A20	Fra sjøltilvirkere
15	A21	Verdi (1000 kr)
16	A31	Råstoffanvendelse Fersk (tonn)
17	A32	Frossen
18	A33	Salting
19	A34	henging
20	A35	Sum sløyd og hodekappet torskefisk
21	A36	Råstoffanvendelse Biprodukter
22	A37	Lodde
23	A38	Reker
24	A39	Annet produksjonsråstoff
25	A30	Råstoffkjøp totalt (tonn)
26		Tilvirket på lager pr 1.1.
27		Tilvirket på lager pr 31.12.
28		Torskefisk på lager pr 1.1.
29		Torskefisk på lager pr 31.12.
30		Reker og annet på lager pr 1.1.
31		Reker og annet på lager pr 31.12.
32		Anvendt til fersk filet
33	A41	Solgt til andre
34	A421	Filet prod vekt Blokk (>10 lbs)
35	A422	Standard (= 10 lbs)
36	A423	konsum (< 10 lbs)
37	A424	Farse (Friochip osv)
38	A42	Total prod filet og farse
39		Anvendt til saltfilet
40		Dobbel frosset
41	A61	Filetutbytte Torsk
42	A62	Hyse
43	A63	Sei
44		Aritmetisk gjennomsnitt filetutbytte
45	A64	Utbytte saltfisk
46	A65	Utbytte tørrfisk
47	B11	Eiere uten fast lønn, fisk
48	B11	annet
49	B13	Merkantile funksjonærer, fisk
50	B13	annet

109		Emballasje
110	E214	SUM hjelpestoffer og emballasje
111		Fisk fra andre tilvirkere
112		Handelsvarer (etter beholdn.endring)
113	E215	Driftskostn handelsv (inkl sjøltilv)
114	E216	Driftskostnader øvrig virksomhet
115	E217	Netto frakter kjøp av fisk
116	E21	SUM direkte varekostnader
117	E2221	Produksjonslønn
118	E2222	Lønn butikk/handelsvirksomhet
119	E2223	Lønn annen driftsvirksomhet
120	E222	SUM direkte lønn
121		Funksjonærlønn
122		Bedriftslederlønn
123		Honorarer og godtgjørelser
124	E223	SUM indirekte lønn fiskerivirksomhet
125	E22	Totale kostnader til arbeidskraft
126		Sosiale kostnader (lønn)
127		Reklame , provisjon
128		Frakter (netto)
129		Tap på fordringer
130	E231	Salgskostnader (faste)
131		Reiser, diett
132		Representasjon, kontingenter
133		Kontorrekvisita
134		Kjøp av tjenester
135	E232	Administrasjonskostnader
136	E2331	Energi, brensel, vann
137	E2332	Leiekostnader (lokaler, maskiner)
138	E2333	Kostnader egne transportmidler
139	E2334	Forsikringer
140	E2335	Vedlikehold, reparasjoner
141	E2336	Diverse indirekte kostnader
142	E233	SUM indirekte produksjonskostnader
143	E23	SUM andre driftskostnader
144	E2411	Beholdn. <u>endring</u> ferskfisk (31.12.)-(1.1.)
145	E2412	frossenfisk
146	E2413	Saltfisk
147	E2414	Tørrfisk
148	E241	SUM Torskefisk
149	E242	Beh.endr. biprodukter
150	E2431	lodde
151	E2432	reker
152	E2433	Øvrig produksjonsråstoff
153	E243	SUM andre produksjonsvarer
154		Totale beholdningsendringer
155		Skjulte reserver fisk
156	E30	DRIFTSRESULTAT FØR AVSKRIVNINGER
157	E31	Ordinære avskrivninger
158	E32	Herav øvrig virksomhet
159	E40	DRIFTSRESULTAT
160		Utdeling på aksjer
161		Renteinntekter
162		Andre finansinntekter
163		Rentekostnader
164		Andre finanskostnader
165	E50	Resultat av finansinnt/-kostn.
166	E60	RESULTAT FØR EKSTRAORDINÆRE POSTER

167	E70	Ekstraordinære inntekter
168	E80	Ekstraordinære kostnader
169	E90	RES. FØR ÅRSOPPGJØRSDISP.
170	E101	Oppskrivning av anleggsmidler
171	E102	Overført fra betingede skattemessige fond
172	E103	Ekstraordinære av- og nedskrivninger
173	E104	Fondsavsetninger
174	E105	Skatter
175	E100	Res av årsoppgjørdisp.
176	E11	Overskudd til disposisjon
177	E111	Privatuttak
178	E112	Avstemming mot egenkapital
179		Bedriftsnummer
180		
181		
182		
183		Kontanter
184		Bank, postgiro
185		Aksjer, obl og andre verdipapirer
186		Kundefordr. vekselfordringer
187		Andre kortsiktige fordringer
188		Lager råvarer
189		Lager varer i arbeid
190		Lager ferdigvarer
191		Forskudd leverandører
192	F15	Lager emballasje, hj. stoffer
193	F14	Lager handelsvarer
194	F1	OMLØPSMIDLER
195	F21	Garantifond, Norges Råfisklag
196		
197		Andre langsiktige fordringer
198		Forskudd leverandører o.l.
199	F24	Transportmidler
200	F23	Maskiner, inventar, verktøy
201	F25	Bygninger
202		Anlegg under utførelse
203		Eiendommer
204	F26	Boliger
205	F27	Andre anleggsmidler
206	F2	ANLEGGSMIDLER, SUM
207	F3	SUM EIENDELER
208	F41	Leverandørgjeld
209	F42	Kassakreditt
210	F43	Skyldige skatter , avgifter o.l.
211	F44	Annen korts. gjeld. (inkl. avdrag pantegj.)
212	F4	SUM KORTSIKTIG GJELD
213		Gjeld til samme konsern
214	F51	Pantelån
215	F52	Annen langsiktig gjeld
216		
217		Invest.- markeds.-og bearbeidingsfond
218		DU-fond
219		Utbyttereguleringsfond
220		Vinning ved salg av varige driftsmidler
221		Avsatt til åpningsavskrivninger
222		Nedskrevet varekontrakter, varelagre o.l.
223		Andre betingede avsetninger
224	F5	SUM betingede skattemessige avs.

225	F71	Aksjekapital
226	F72	Reservefond
227		Oppskrivningsfond
228	F73	Fri egenkap (inkl. invest. tilskudd)
229		Arsoverskudd/(underskudd)
230	F7	SUM EGENKAPITAL
231	F8	SUM PASSIVA

Appendiks 3:

Dette appendikset er et tabell- og figurvedlegg for tabeller og figurer som ikke er tatt inn i teksten. Sidennummer for tabellene og figurene refererer til avhandlingen datert 1. september 1988.

- s 218: Tabell 20: År 1977, 2 output og 5 input; ulik størrelse på utvalgene.
- s 222: Tabell 21: Sammenligning av 1977 med 1978; 1 output og 4 input.
- s 225: Tabell 22: Effektivitetstall for 1977 til 1984.
- s 229: Tabell 26: DEA effektivitet for de 50 bedriftene som er med alle år.
- s 240: Tabell 36: MPSS for DMU82 for årene 1977–84.
- s 241: Tabell 37: MPSS for DMU85 for årene 1977–84.
- s 241: Tabell 38: MPSS for DMU86 for årene 1977–84.
- s 244 Figur 2: Innsatsfaktorer pr outputenhet for utvalgte bedrifter.
- s 247: Figur 3: Kombinasjoner av DMU-er på den effektive fronten.
- s 249: Tabell 41: Beregnet ROI for alle bedriftene 1977–84.
- s 253: Tabell 44: E1 etter Best practice frontestimering 1977–84. Alle bedriftene er med i utvalget.
- s 253: Tabell 45: E1 for simulert stokastisk frontfunksjon; de tre mest effektive bedriftene tatt bort sekvensielt.
- s 255: Tabell 47: DEA inputeffektivitet med en output og fire input.

Tabell 20. År 1977, 2 output og 5 input; ulik størrelse på utvalgene.

Tabell 20: DEA år 1977, 2 output og 5 input; ulik størrelse på utvalgene.

DMU	Eff	1977, DMU 1-86 Referansesett	Eff	1977 DMU1-44 og 45-86 Referansesett
1	1		1	
2	0,89	18,26,31,43,80	0,91	18,26,31,43
3	1		1	
4	1		1	
5	0,89	18,28,31,43,80	0,90	18,28,42,43
6	0,90	14,28,43,72	0,90	13,18,28,43
7	0,88	8,13,43,46	0,88	8,13,20,43
8	1		1	
9	0,98	12,28,32,43	0,98	12,28,34,43
10	0,90	28,43,72,80	0,92	18,28,42,43
11	1		1	
12	1		1	
13	1		1	
14	1		1	
15	0,92	18,28,43	0,92	18,28,43
16	1		1	
17	0,97	8,26,28,31,43	0,97	8,18,26,28,31,43
18	1		1	
19	0,98	4,22,28,43,46	0,98	1,4,22,28,43
20	1		1	
21	1		1	
22	1		1	
23	0,87	8,18,31,43	0,87	8,18,31,43
24	0,95	21,22,26,43	0,95	21,22,26,43
25	0,84	1,8,26	0,84	1,8,26
26	1		1	
27	—	—	—	—
28	1		1	
29	1		1	
30	1		1	
31	1		1	
32	1		1	
33	1		1	
34	—	—	—	—
35	1		1	
36	0,97	1,22,26,31,33	0,97	1,22,26,31,33
37	0,92	4,22,28,43,46	0,92	1,12,22,28,43
38	1		1	
39	0,96	22,26,28,29,31,33	0,96	22,26,28,29,31,33
40	1		1	
41	0,73	18,28,43	0,73	18,28,43
42	1		1	
43	1		1	
44	0,90	8,18,28,31,33	0,90	8,18,28,31,33
45	0,84	8,31,43,50	0,86	50,50,64,72
46	1		1	
47	0,85	18,28,31,43	1	
48	0,78	18,28,31,43	0,85	46,50,80,84
49	0,79	8,18,26,31,43	0,92	47,50,60,72
50	1		1	
51	0,90	21,22,26,28,43	1	
52	0,86	22,28,43,46	1	
53	0,86	26,29,31,33,43,80	0,95	50,60,61,72
54	0,83	8,26,28,31,43,72	0,95	50,60,61,72
55	1		1	
56	0,93	22,28,29,30,46	1	
57	0,88	8,11,18,26,43	0,98	46,60,64
58	0,90	29,33,43,50,80	1	
59	1		1	
60	0,95	18,26,31,80	1	
61	0,89	4,13,26,43	1	
62	0,83	26,29,31,33,43,80	0,90	50,60,61,72
63	0,84	8,13,20,26,43,46	0,99	46,60,61,72
64	0,95	8,18,31,43	1	
65	0,90	13,18,72	0,95	72,80
66	—	—	—	—
67	0,91	18,28,31,43,80	0,96	59,72,80,84
68	0,93	33,42,55,80	0,999	50,60,80
69	0,93	13,28,43,72	0,93	46,59,72
70	0,94	28,43,72,80	1	
71	0,11	30,42	0,16	55,80
72	1		1	
73	0,82	8,26,28,43,72	0,91	51,61,72
74	0,84	22,26,28,29,33,43	0,96	50,60,61,72
75	0,84	22,26,28,29,33	0,90	50,60,72,80
76	0,78	8,26,28,31,43,72	0,89	50,60,61,72
77	0,37	12,30,55,80	0,65	46,55
78	0,86	8,26,28,43,72	0,92	46,50,60,61,72
79	0,94	18,31,43,80	1	
80	1		1	
81	0,94	18,26,43,72,80	0,99	46,50,60,72,80
82	0,86	22,26,29,33,43,80	0,90	50,60,72,80
83	0,84	18,26,31,43,72,80	0,89	47,50,60,72,80
84	0,94	31,42,43,80	1	
85	0,94	18,26,31,43,72,80	0,99	47,54,60,72
86	0,88	26,29,31,43,72,80	0,94	50,60,72,80

Tabell 21. Sammenligning av 1977 med 1978; 1 output og 4 input.

Tabell 21: DEA år 1977 og 1978, 1 output og 4 input; utvalgene DMU1-44 og DMU45-86.

DMU	1977, DMU1-44 og DMU45-86.		1977, DMU1-44 og DMU45-86.	
	Eff.	Referansesett	Eff.	Referansesett
1	0,38	12,28,30	0,65	12,17,43
2	0,38	12,32	0,68	12,17
3	0,67	12,28,32	0,68	12,17,43
4	0,49	12,28	0,67	12,43
5	0,64	12,28	1	
6	0,78	12,28	0,76	12,28
7	0,46	12,13	0,99	12,28
8	0,47	12,32	1	
9	0,90	12,28	0,78	12,28
10	0,72	12,28	0,82	5,12
11	0,50	12,13	0,86	5,8,12
12	1		1	
13	1		1	
14	0,77	12,28,32	0,64	8,12
15	0,51	12,28,32	0,68	12,17
16	0,33	1,28,32	0,74	8,12
17	0,62	12,28	1	
18	0,45	12,28	0,99	5,12
19	0,79	12,28	0,76	12,28
20	0,69	12,13	0,99	17
21	0,72	12,28	0,56	17,53
22	0,86	12,28,30	0,67	12,28
23	0,45	12,32	0,73	12,28
24	0,55	12,28	0,70	17,43
25	0,32	12,28	0,90	5,12
26	0,39	12,28	0,79	17
27	—	—	0,53	12,17
28	1		1	
29	0,94	12,28,30	0,91	5,12
30	1		0,90	5,12
31	0,92	12,32	0,73	12,17
32	1		0,81	5,12
33	0,91	12,32	0,90	5,12
34	—	—	0,65	12,17,43
35	0,68	12,28,32	0,59	12,17
36	0,43	12,28,43	0,58	5,12
37	0,68	12,28	0,64	12,17,43
38	0,83	12,32	0,75	5,12
39	0,62	12,28,30	0,71	12,43
40	0,86	12,28,32	0,79	12,17
41	0,49	12,28	0,50	12,17,43
42	0,85	12,32	0,56	12,17
43	0,80	12,28	1	
44	0,64	1,28	0,76	5,12
45	0,74	46,50	0,69	46,50,59
46	1		1	
47	0,60	46,50,55	0,82	78
48	0,59	46,50,55	0,90	50,59
49	0,52	46,50	0,61	46,50
50	1		1	
51	0,68	46,50,56	0,79	59,78
52	0,88	46,56	0,77	46,50,59
53	0,72	46,50,55	0,85	50,59,70
54	0,60	46,50,56,59	0,62	46,50,59
55	1		0,82	46,78
56	1		—	—
57	0,48	46,50	0,72	46,59,78
58	0,88	50,56,59	0,76	46,50,70
59	1		1	
60	0,61	46,50,55	0,66	56,59,78
61	0,36	46,50	0,72	59,78
62	0,69	46,50,55	0,92	46,59,78
63	0,44	46,50,46	0,68	46,59,78
64	0,64	46,50,55	0,82	78
65	0,59	46,50,55	0,76	46,59,78
66	—	—	—	—
67	0,70	46,50,55	0,70	46,50,78
68	0,84	50,55	0,17	50
69	0,73	46,50,59	0,84	59,70
70	0,82	46,50,59	1	
71	0,14	55	0,50	46,59,70
72	0,76	46,50,59	0,81	46,59,70
73	0,52	46,50,56,59	0,74	46,59,78
74	0,69	46,50,59	0,85	46,59,78
75	0,73	46,50,55	0,92	59,70
76	0,60	46,50,59	0,69	46,50,59
77	0,66	46,50	0,54	50
78	0,57	46,50,59	1	
79	0,72	46,50,55	0,71	46,59,78
80	0,93	46,50,55	—	—
81	0,81	46,50,55	0,87	78
82	0,78	46,50,55	0,65	46,59,78
83	0,65	46,50,55	0,11	46,59,70
84	0,83	46,50,55	0,69	46,78
85	0,69	46,50,55	0,64	46,59,78
86	0,75	46,50,55	0,71	46,59,70

Tabell 22. Effektivitetstall for 1977 til 1984.

TABELL : Effektivitetstall for 1977 til 1984								
DMU	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
1.	1.000	1.000	1.000	1.000	0.977	1.000	1.000	1.000
2.	0.886	0.686	0.988	0.857	1.000	0.914	1.000	0.905
3.	1.000	0.961	0.901	0.988	0.951	0.000	0.000	0.000
4.	1.000	1.000	1.000	1.000	0.990	1.000	1.000	1.000
5.	0.890	1.000	0.889	0.917	0.952	0.879	1.000	0.714
6.	0.900	0.966	0.943	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000
7.	0.875	1.000	0.850	1.000	1.000	0.971	1.000	0.779
8.	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000
9.	0.978	0.879	0.898	0.918	0.948	0.969	1.000	1.000
10.	0.901	0.821	0.820	0.921	1.000	1.000	0.723	0.000
11.	1.000	0.865	0.800	0.874	0.860	0.000	1.000	1.000
12.	1.000	1.000	0.896	0.897	0.943	0.000	0.000	0.000
13.	1.000	0.965	0.904	0.735	1.000	0.979	1.000	0.965
14.	1.000	0.763	0.941	0.974	0.901	1.000	0.870	0.760
15.	0.917	0.771	1.000	1.000	1.000	0.978	1.000	0.989
16.	1.000	0.842	0.913	0.813	1.000	0.975	1.000	1.000
17.	0.970	1.000	1.000	1.000	0.955	0.930	0.979	1.000
18.	1.000	1.000	0.911	0.758	0.990	1.000	0.917	1.000
19.	0.979	0.993	0.964	0.958	0.948	0.992	0.873	0.849
20.	1.000	1.000	1.000	0.901	0.994	1.000	0.000	0.000
21.	1.000	0.862	1.000	1.000	1.000	0.937	1.000	0.966
22.	1.000	0.845	1.000	0.851	0.902	0.969	0.000	0.000
23.	0.867	0.882	1.000	0.893	1.000	1.000	0.761	1.000
24.	0.954	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000
25.	0.840	1.000	0.969	0.960	1.000	0.985	0.995	1.000
26.	1.000	0.996	1.000	0.974	0.979	0.559	1.000	0.707
27.	0.000	0.862	0.730	1.000	0.841	0.817	0.810	0.841
28.	1.000	1.000	0.819	0.805	0.877	0.965	0.908	0.814
29.	1.000	0.924	0.951	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
30.	1.000	0.944	1.000	1.000	1.000	1.000	0.933	0.769
31.	1.000	0.835	0.836	0.920	1.000	1.000	1.000	1.000
32.	1.000	0.879	0.942	1.000	0.905	1.000	0.886	1.000
33.	1.000	0.847	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000
34.	0.000	0.756	0.871	0.865	0.872	0.894	0.687	0.000
35.	1.000	0.768	0.999	0.861	0.960	1.000	0.826	0.851
36.	0.971	1.000	1.000	0.963	0.887	0.953	0.876	0.870
37.	0.917	0.868	0.881	0.891	0.952	0.880	0.753	0.000
38.	1.000	0.755	0.864	0.818	1.000	0.985	1.000	0.953
39.	0.955	0.988	0.965	1.000	1.000	0.987	0.997	1.000
40.	1.000	0.848	0.904	0.847	0.938	0.959	0.000	0.000
41.	0.730	0.762	0.682	0.660	1.000	0.956	0.894	1.000
42.	1.000	0.609	0.848	0.732	0.000	0.000	0.000	0.000
43.	1.000	1.000	1.000	0.805	1.000	0.883	0.923	0.815
44.	0.903	0.769	0.873	0.917	0.999	0.878	0.922	0.758
45.	0.835	0.763	0.841	0.880	0.958	0.942	0.000	0.000
46.	1.000	1.000	0.927	0.883	0.907	0.982	0.919	0.000
47.	0.852	0.899	0.894	0.783	0.886	0.842	0.939	0.747
48.	0.781	0.717	0.875	0.872	0.925	0.981	0.891	0.705
49.	0.791	0.750	0.850	0.873	0.891	1.000	1.000	1.000
50.	1.000	1.000	1.000	1.000	0.933	1.000	0.894	0.983
51.	0.903	0.940	0.947	0.896	0.925	0.967	0.922	0.764
52.	0.885	0.832	1.000	0.788	0.858	0.000	0.741	0.000
53.	0.865	0.875	0.929	0.871	0.951	0.987	0.982	0.709
54.	0.827	0.729	0.854	0.870	1.000	1.000	0.000	0.000
55.	1.000	0.837	0.987	0.843	1.000	1.000	0.943	0.860
56.	0.934	0.000	0.829	0.966	0.985	0.972	0.870	0.791
57.	0.881	0.770	0.955	0.934	0.995	1.000	0.980	0.524
58.	0.896	0.841	0.953	0.989	0.960	1.000	1.000	1.000
59.	1.000	0.956	0.880	0.914	0.951	1.000	0.871	0.829
60.	0.955	0.767	0.956	0.972	0.961	1.000	1.000	1.000
61.	0.887	0.880	0.928	0.930	0.999	1.000	0.959	0.827
62.	0.827	0.915	0.990	0.868	1.000	0.000	0.000	0.000
63.	0.838	0.815	0.955	0.985	0.962	0.876	0.913	0.812
64.	0.945	0.950	0.974	0.947	1.000	1.000	1.000	0.659
65.	0.902	0.731	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.880
66.	0.000	0.000	0.946	0.803	0.853	1.000	0.959	0.670
67.	0.914	0.777	0.932	0.889	0.992	0.864	1.000	0.761
68.	0.934	0.528	0.910	0.961	0.928	0.930	0.952	1.000
69.	0.930	0.802	0.917	0.920	0.930	0.927	0.968	1.000
70.	0.940	0.918	0.871	0.977	1.000	1.000	1.000	0.968
71.	0.111	0.064	0.918	0.919	0.998	0.991	0.955	0.724
72.	1.000	0.969	1.000	0.903	1.000	1.000	1.000	0.954
73.	0.818	0.821	0.871	0.883	0.949	0.938	0.901	0.749
74.	0.838	0.920	1.000	0.945	0.973	0.998	0.972	0.900
75.	0.843	0.838	0.876	0.882	1.000	1.000	1.000	0.897
76.	0.779	0.712	0.969	0.902	0.934	0.934	0.972	0.702
77.	0.371	0.420	0.847	0.871	0.918	0.953	0.883	0.916
78.	0.862	1.000	0.891	0.915	0.976	0.955	1.000	0.837
79.	0.943	0.821	0.914	0.952	1.000	1.000	0.923	0.844
80.	1.000	0.000	1.000	0.871	1.000	1.000	0.985	0.941
81.	0.940	0.979	1.000	0.918	0.887	0.999	0.920	0.000
82.	0.858	0.741	0.852	0.858	1.000	0.925	0.948	0.762
83.	0.839	0.141	0.963	0.959	0.975	1.000	1.000	0.986
84.	0.942	0.770	0.917	0.936	1.000	1.000	0.959	0.732
85.	0.942	0.724	0.920	1.000	1.000	0.904	0.934	0.722
86.	0.879	0.727	0.911	0.869	0.994	1.000	1.000	0.953

Gjennomsnitt 0.91466 0.84518 0.92677 0.91143 0.96326 0.96232 0.94040 0.87371

Tabell 26. DEA effektivitet for de 50 bedriftene som er med alle år.

TABELL : Effektivitetstall for 1977 til 1984

DMU	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
1.	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2.	0.956	0.707	0.988	1.000	1.000	0.921	1.000	1.000
3.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5.	0.890	1.000	0.889	1.000	0.952	0.879	1.000	0.928
6.	0.901	0.970	0.963	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000
7.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9.	0.986	0.895	0.898	1.000	0.948	0.969	1.000	1.000
10.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
11.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
12.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
13.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
14.	1.000	0.769	0.959	1.000	0.917	1.000	0.897	0.966
15.	0.917	0.771	1.000	1.000	1.000	0.982	1.000	1.000
16.	1.000	0.893	0.920	0.815	1.000	1.000	1.000	1.000
17.	0.990	1.000	1.000	1.000	1.000	0.930	0.985	1.000
18.	1.000	1.000	0.911	0.802	1.000	1.000	0.925	1.000
19.	1.000	0.993	0.970	0.974	1.000	0.992	0.895	0.974
20.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
21.	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.949	1.000	1.000
22.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
23.	0.974	0.893	1.000	1.000	1.000	1.000	0.784	1.000
24.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
25.	0.843	1.000	0.977	0.975	1.000	0.985	0.995	1.000
26.	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.559	1.000	0.885
27.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
28.	1.000	1.000	0.826	0.831	0.896	0.975	0.917	0.879
29.	1.000	0.965	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
30.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
31.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
32.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
33.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
34.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
35.	1.000	0.770	1.000	0.889	0.966	1.000	0.847	0.973
36.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
37.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
38.	1.000	0.801	0.864	0.932	1.000	0.985	1.000	0.984
39.	0.995	0.994	0.968	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
40.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
41.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
42.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
43.	1.000	1.000	1.000	0.890	1.000	0.886	0.932	0.863
44.	0.914	0.869	0.923	1.000	1.000	0.892	0.936	0.952
45.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
46.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
47.	0.919	0.975	0.961	0.861	0.897	0.856	0.939	0.886
48.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
49.	0.866	0.878	0.872	0.891	1.000	1.000	1.000	1.000
50.	1.000	1.000	1.000	1.000	0.933	1.000	0.937	1.000
51.	0.903	0.949	0.966	0.921	0.943	0.992	0.933	0.933
52.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
53.	0.868	0.983	0.929	0.950	0.958	0.998	1.000	0.980
54.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
55.	1.000	0.918	1.000	0.868	1.000	1.000	0.948	1.000
56.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
57.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
58.	0.913	0.855	0.954	1.000	0.973	1.000	1.000	1.000
59.	1.000	1.000	0.880	1.000	0.956	1.000	0.897	0.966
60.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
61.	0.910	0.905	0.939	0.975	1.000	1.000	0.970	1.000
62.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
63.	0.889	0.841	0.980	1.000	0.972	0.908	0.928	1.000
64.	0.953	0.950	0.974	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
65.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
66.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
67.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
68.	0.970	0.688	0.913	0.995	0.951	0.941	0.966	1.000
69.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
70.	0.940	1.000	0.871	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
71.	0.133	0.064	0.918	0.967	1.000	1.000	0.981	0.998
72.	1.000	0.969	1.000	0.973	1.000	1.000	1.000	1.000
73.	0.819	0.848	0.875	0.967	0.983	0.939	0.902	0.914
74.	0.842	0.929	1.000	0.972	0.982	1.000	0.984	1.000
75.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
76.	0.792	0.712	0.981	0.923	0.946	0.955	0.983	0.910
77.	0.667	0.423	0.847	0.922	0.918	0.953	0.898	0.941
78.	0.862	1.000	0.902	0.975	0.985	0.955	1.000	0.970
79.	0.944	0.821	0.935	1.000	1.000	1.000	0.933	1.000
80.	1.000	0.000	1.000	0.911	1.000	1.000	1.000	1.000
81.	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
82.	0.872	0.785	0.865	0.909	1.000	0.964	0.970	0.931
83.	0.857	0.159	0.965	1.000	0.984	1.000	1.000	1.000
84.	0.951	0.772	0.917	0.979	1.000	1.000	0.959	0.876
85.	0.953	0.757	0.929	1.000	1.000	0.904	0.934	0.900
86.	0.886	0.792	0.921	0.950	1.000	1.000	1.000	0.979

Gjennomsnitt 0.92153 0.86253 0.94703 0.95948 0.98116 0.96535 0.96347 0.97180

Tabell 36. MPSS for DMU82 for årene 1977-84.

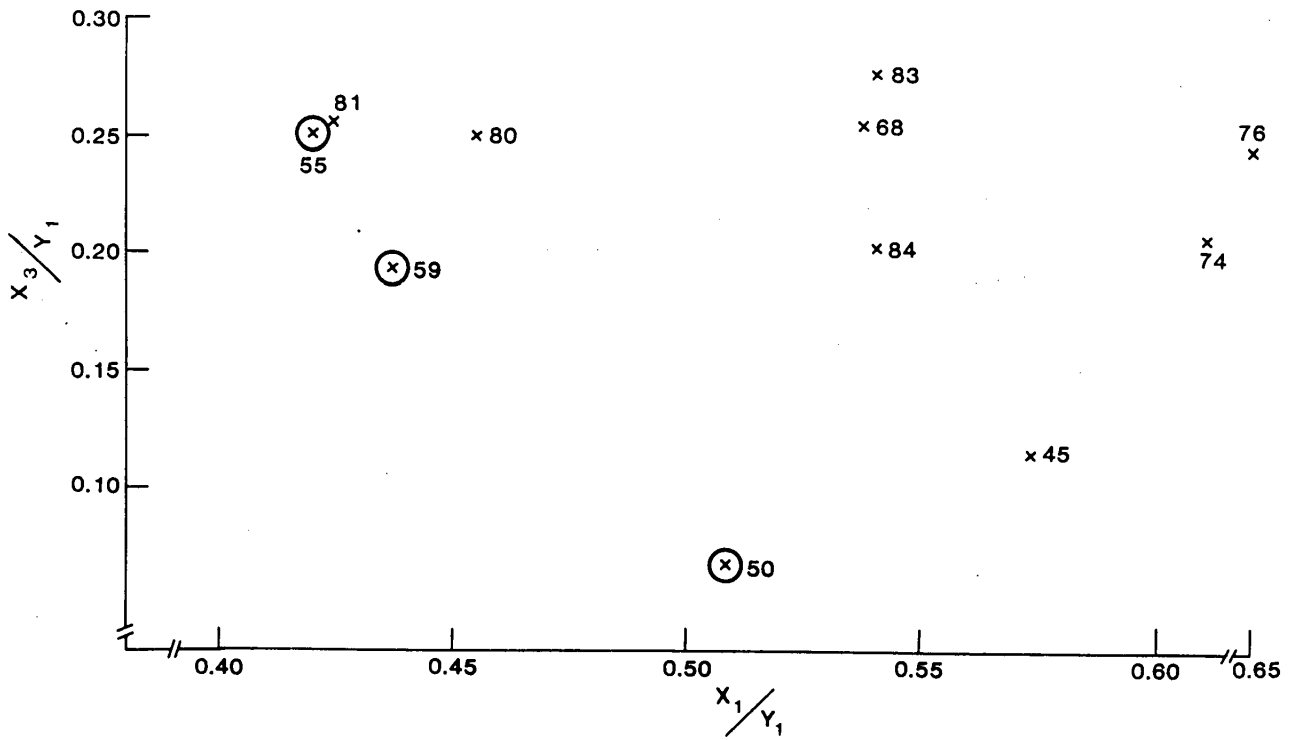
DMU82	x1	x2	x3	x4	x5	y1	y2	Eff	Sum lambda -
1977 slakk	6.561	3.105	2.803	1.074	1.375	11.590	2.380	0.858	1.724
MPSS	3.265	1.545	1.395	0.535	0.684	6.723	1.381		
1978 slakk	6.348	2.995	2.685	1.121	2.051	10.791	2.610	0.741	4.312
MPSS	1.091	0.515	0.462	0.193	0.353	2.502	0.605		
1979 slakk	8.730	3.217	3.169	0.855	2.405	13.721	2.979	0.852	3.033
MPSS	2.452	0.903	0.890	0.034 0.229	0.863 0.391	4.524	0.982		
1980 slakk	8.640	1.923	4.015	1.001	2.814	13.526	2.480	0.858	2.974
MPSS	2.494	0.555	1.159	0.057 0.270	0.812	4.548	0.834		
1981 slakk	3.495	1.935	3.201	1.075	3.223	10.587	0.052	1.000	1.000
MPSS	3.495	1.935	3.201	1.075	3.223	10.587	0.052		
1982 slakk	6.529	1.323	4.392	1.346	2.999	12.352	1.938	0.925	1.031
MPSS	5.860	1.187	0.309 3.642	1.208	0.674 2.037	11.986	0.000 1.881		
1983 slakk	10.741	1.884	4.179	1.586	3.382	19.488	2.098	0.948	0.951
MPSS	10.706	1.878	4.165	1.581	3.371	20.487	2.205		
1984 slakk	6.148	2.017	3.278	1.601	3.174	11.334	1.589	0.762	0.964
MPSS	4.855	0.618 0.952	0.165 2.418	0.253 1.002	2.507	11.752	1.648		

Tabell 37. MPSS for DMU85 for årene 1977-84.

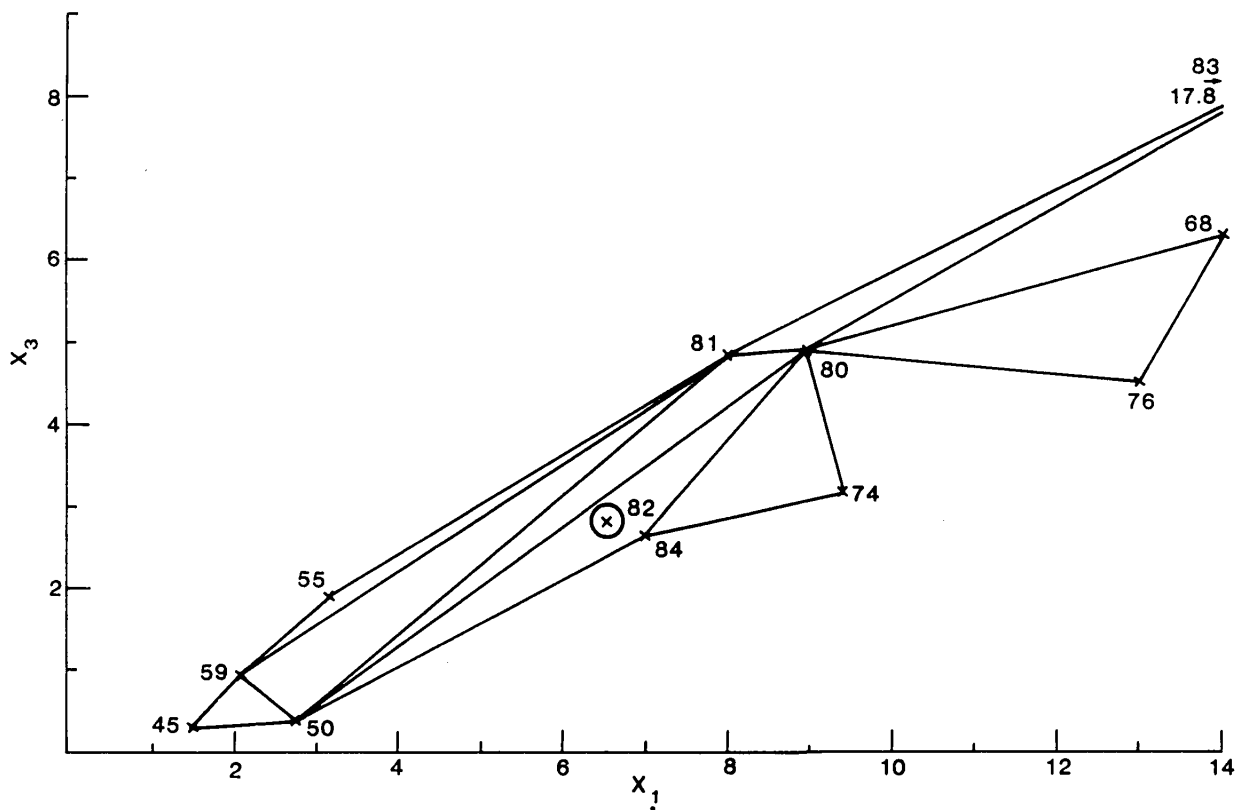
DMU85	x1	x2	x3	x4	x5	y1	y2	Eff	Sum lambda -
1977 slakk	5.427	0.727	2.784	0.841	1.741	10.737	0.459	0.942	4.039
MPSS	1.265	0.170	0.649	0.196	0.406	2.659	0.114		
1978 slakk	4.383	0.917	2.588	0.844	1.828	7.696	0.711	0.724	3.379
MPSS	0.939	0.197	0.690 0.351	0.181	0.295 0.305	2.277	0.210		
1979 slakk	3.669	0.460	2.809	0.574	1.613	7.761	0.480	0.920	1.888
MPSS	1.788	0.014 0.217	0.385 1.165	0.280	0.786	4.111	0.254		
1980 slakk	5.292	0.675	3.511	0.970	1.978	11.727	0.720	1.000	1.000
MPSS	5.292	0.675	3.511	0.970	1.978	11.727	0.720		
1981 slakk	6.034	1.251	4.254	1.090	2.091	13.286	0.562	1.000	1.000
MPSS	6.034	1.251	4.254	1.090	2.091	13.286	0.562		
1982 slakk	9.236	0.572	5.786	1.747	3.596	18.410	0.597	0.904	0.833
MPSS	10.024	0.621	6.280	1.896	0.090 3.795	22.101	0.025 0.747		
1983 slakk	7.776	0.384	4.626	1.232	3.972	14.964	0.571	0.934	1.546
MPSS	4.699	0.232	0.341 2.575	0.744	0.993 1.758	9.678	0.369		
1984 slakk	7.738	0.696	4.362	1.400	3.994	13.578	0.719	0.722	1.095
MPSS	5.099	0.157 0.316	0.947 2.009	0.923	2.632	12.398	0.394 1.016		

Tabell 38. MPSS for DMU86 for årene 1977-84.

DMU86	x1	x2	x3	x4	x5	y1	y2	Eff	Sum -lambda -
1977 slakk	12.006	2.499	5.313	2.030	2.705	21.226	1.715	0.879	3.271
MPSS	3.228	0.672	1.428	0.546	0.727	6.489	0.524		
1978 slakk	12.677	2.976	6.104 1.636	2.484	3.197	23.686	1.921	0.727	3.925
MPSS	2.348	0.551	0.714	0.460	0.592	6.035	0.489		
1979 slakk	15.593	1.994 0.162	6.600 0.392	1.381	3.416	25.992	2.003	0.911	3.300
MPSS	4.307	0.502	1.704	0.381	0.943	7.878	0.607		
1980 slakk	14.006	1.457	7.161 1.016	1.460	3.385	23.659	1.571	0.869	4.660
MPSS	2.613	0.272	1.118	0.272	0.632	5.077	0.337		
1981 slakk	9.533	1.849	6.060	1.538	4.131	10.793	1.994	0.994	1.050
MPSS	9.030	1.751	5.740	1.457	3.913	10.283	1.900		
1982 slakk	12.586	2.339	8.481	1.986	4.125	26.082	2.446	1.000	1.000
MPSS	12.586	2.339	8.481	1.986	4.125	26.082	2.446		
1983 slakk	38.544	2.234	12.353	6.543	5.432	62.572	3.697	1.000	1.000
MPSS	38.544	2.234	12.353	6.543	5.432	62.572	3.697		
1984 slakk	43.982	2.821	13.496 4.237	5.488	7.126	66.405	3.221	0.953	7.065
MPSS	5.931	0.380	1.220	0.740	0.961	9.399	0.456		



Figur 2. Innsatsfaktorer pr outputenhet for utvalgte bedrifter.



Figur 3. Kombinasjoner av DMU-er på den effektive fronten.

Tabell 41. Beregnet ROI for alle bedriftene 1977-84.

DMU	TABELL : Effektivitetstall for 1977 til 1984							
	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
1.	11.632	24.538	12.039	16.681	12.625	8.911	3.701	0.000
2.	12.806	14.432	27.065	36.471	30.195	14.031	12.252	-8.826
3.	2.879	9.578	3.644	9.524	21.025	0.000	0.000	0.000
4.	27.122	35.233	32.419	28.827	24.466	4.998	20.446	23.008
5.	4.772	64.206	36.688	37.455	23.129	3.305	27.030	12.731
6.	13.376	152.239	40.722	33.242	60.428	398.824	-23.153	41.554
7.	3.327	38.400	25.843	220.833	158.659	76.871	239.362	245.745
8.	14.921	13.645	67.982	52.684	33.731	12.950	0.000	0.000
9.	29.654	43.284	32.540	22.771	20.576	12.222	20.370	25.589
10.	15.000	105.952	29.231	97.076	55.814	182.567	6.173	0.000
11.	8.184	38.671	6.102	17.647	7.170	0.000	18.182	27.464
12.	9.913	9.199	14.383	13.692	20.519	0.000	0.000	0.000
13.	2.698	18.412	8.698	27.649	32.206	29.420	49.082	39.495
14.	9.670	14.441	17.623	19.562	9.436	2.159	11.755	13.234
15.	25.865	24.893	45.721	27.987	36.978	28.120	39.027	40.253
16.	-1.133	9.127	3.491	5.426	13.811	8.654	17.067	10.645
17.	30.112	17.922	24.176	26.008	18.377	1.343	6.773	11.104
18.	11.133	48.387	40.000	-3.150	10.246	50.000	27.823	96.404
19.	28.655	24.675	18.824	18.817	26.903	22.865	16.684	28.078
20.	5.019	16.209	19.240	22.020	20.358	33.374	0.000	0.000
21.	44.615	40.879	51.327	45.558	28.550	-0.919	45.010	12.455
22.	4.394	4.770	10.021	13.175	12.377	3.886	0.000	0.000
23.	5.887	16.377	39.941	19.092	31.032	13.154	6.011	23.468
24.	43.736	80.150	42.513	22.535	34.089	0.000	0.000	0.000
25.	5.447	13.696	19.949	27.640	15.582	7.308	3.307	1.880
26.	18.608	22.861	18.802	10.707	21.497	-0.629	9.002	18.117
27.	20.748	0.000	0.000	0.000	-0.798	-5.369	-0.861	-0.983
28.	4.068	4.598	-1.115	-2.280	-5.987	5.185	5.804	-0.098
29.	47.305	38.090	33.556	37.251	27.489	17.876	30.681	16.919
30.	0.000	46.821	48.336	28.785	15.681	4.859	13.410	11.301
31.	5.908	11.071	17.579	12.173	15.699	1.218	4.672	17.163
32.	21.162	113.466	60.998	60.633	13.795	-12.856	-0.645	16.326
33.	16.222	10.220	14.662	8.562	13.036	0.000	0.000	0.000
34.	0.000	12.864	10.833	7.628	2.877	2.656	-26.473	0.000
35.	1.347	6.816	9.301	2.234	14.198	10.354	-22.354	25.063
36.	3.565	21.968	5.944	9.294	10.271	13.250	3.876	4.551
37.	16.272	11.182	25.205	27.858	21.076	-4.338	42.398	0.000
38.	13.622	9.932	5.269	12.941	24.463	4.632	0.095	3.787
39.	6.041	14.519	38.190	35.121	24.278	13.014	22.031	29.176
40.	12.367	3.212	4.020	6.941	8.316	-2.612	0.000	0.000
41.	0.000	0.000	0.000	0.000	18.631	20.184	22.908	17.641
42.	-1.425	-17.286	-22.434	4.337	0.000	0.000	0.000	0.000
43.	6.519	7.574	8.308	6.472	12.145	7.156	13.455	8.216
44.	7.983	41.303	14.257	40.208	14.363	-4.164	13.222	35.068
45.	7.683	22.614	15.886	0.000	5.512	1.558	0.000	0.000
46.	9.847	4.874	6.813	10.232	6.838	5.604	9.508	0.000
47.	-16.946	6.809	8.946	21.173	-7.969	22.000	13.366	-10.000
48.	-6.543	-3.411	19.340	20.337	15.660	9.213	12.098	0.516
49.	4.544	2.563	19.181	-6.562	13.406	11.260	18.206	4.986
50.	0.000	0.000	0.000	2.117	-22.389	-17.005	1.589	19.644
51.	8.741	12.412	11.620	16.650	20.676	10.683	25.000	18.428
52.	7.359	1.533	39.546	18.306	29.059	0.000	25.245	0.000
53.	4.231	9.457	10.363	9.775	9.928	6.534	10.314	9.315
54.	9.485	4.401	-16.553	-0.240	11.309	-1.706	0.000	0.000
55.	0.000	0.000	0.000	-4.650	12.756	15.789	9.320	7.445
56.	5.951	0.000	3.060	3.447	3.545	7.370	0.777	1.186
57.	4.586	5.178	6.492	4.623	7.374	7.241	7.232	2.745
58.	14.574	12.664	16.799	13.516	18.691	2.516	25.453	20.315
59.	34.892	18.069	12.109	8.175	8.644	13.851	6.599	11.907
60.	1.461	-12.785	10.433	13.542	-0.947	17.286	7.607	30.410
61.	5.041	8.177	7.033	14.123	11.610	15.704	17.221	14.538
62.	7.324	5.873	12.939	5.774	9.890	0.000	0.000	0.000
63.	10.413	3.525	5.888	8.477	18.176	16.931	8.494	15.461
64.	4.632	0.000	5.601	3.718	5.104	4.365	2.170	5.785
65.	4.330	-16.302	15.554	12.786	16.733	26.726	33.838	21.445
66.	0.000	0.000	-1.755	3.707	-1.652	4.598	3.457	7.064
67.	10.365	4.078	18.852	11.177	27.904	31.219	8.985	-9.649
68.	3.150	0.000	5.223	5.399	4.695	3.955	7.140	12.505
69.	8.283	-6.473	11.724	4.701	10.191	22.542	16.265	12.955
70.	0.000	0.000	0.000	11.483	6.183	7.740	17.026	21.927
71.	0.000	0.000	0.000	6.621	11.361	9.463	12.544	11.137
72.	0.000	0.000	0.000	1.108	17.297	16.096	16.410	17.390
73.	2.284	2.206	3.193	4.210	5.264	-0.704	1.852	2.845
74.	11.592	14.555	11.696	19.040	20.141	17.423	20.380	24.474
75.	4.270	2.108	15.289	3.547	37.023	10.363	18.969	15.280
76.	2.760	21.922	32.087	22.124	2.140	15.796	5.714	6.591
77.	0.000	0.000	0.000	-1.793	0.373	6.615	2.489	3.635
78.	3.607	4.630	9.470	7.996	8.635	7.754	19.595	6.851
79.	7.786	11.452	19.254	13.054	12.627	16.713	8.778	19.068
80.	0.000	0.000	0.000	-1.958	6.264	12.895	10.853	-11.339
81.	4.015	4.536	5.372	4.311	1.915	2.574	7.658	0.000
82.	5.782	3.660	7.456	12.698	9.773	10.499	11.651	-2.141
83.	18.878	9.415	8.242	11.452	9.376	16.446	16.672	2.946
84.	21.805	11.890	12.176	10.681	13.963	14.628	32.736	-2.136
85.	4.929	-8.170	1.540	17.500	4.750	30.865	2.888	-5.532
86.	13.477	11.308	9.298	10.900	13.911	12.815	16.405	-1.198
Gjennomsnitt	10.861	19.333	17.475	18.571	16.765	18.342	15.819	17.214
Standardavvik	11.058	27.799	15.863	27.715	19.910	49.479	29.481	32.459
Antall obs.	75.	73.	77.	83.	85.	78.	74.	67.

Tabell 44. El etter Best practice frontestimering 1977-84. Alle bedriftene er med i utvalget.

DMU	TABELL 44 Effektivitetstall for 1977 til 1984							
	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
1.	0.387	0.691	0.762	0.741	0.840	0.803	0.697	0.715
2.	0.518	0.780	0.894	0.853	1.000	0.847	0.696	0.802
3.	0.768	0.742	0.818	0.752	0.893	0.000	0.000	0.000
4.	0.487	0.569	0.784	0.725	0.774	0.634	0.824	0.671
5.	0.708	0.900	0.879	0.823	0.904	0.822	0.965	0.649
6.	1.000	0.641	0.796	0.000	0.882	1.000	0.949	1.000
7.	0.352	0.761	0.765	0.904	0.924	0.792	1.000	0.739
8.	0.371	0.645	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000
9.	0.999	0.726	0.850	0.831	0.922	0.909	0.806	0.819
10.	1.000	0.975	0.851	0.843	0.970	0.996	0.646	0.000
11.	0.496	0.781	0.765	0.770	0.802	0.000	0.919	0.846
12.	1.000	1.000	0.883	0.814	0.856	0.000	0.000	0.000
13.	0.712	0.622	0.836	0.666	0.942	1.000	0.959	0.883
14.	0.700	0.587	0.867	0.899	0.787	0.831	0.808	0.621
15.	0.585	0.653	0.914	0.897	0.974	0.892	0.949	0.884
16.	0.414	0.557	0.814	0.578	0.907	0.888	0.831	0.635
17.	0.611	1.000	0.791	0.729	0.857	0.846	0.709	0.810
18.	0.805	0.860	0.807	0.683	0.901	0.843	0.850	1.000
19.	0.803	0.627	0.796	0.768	0.849	0.930	0.761	0.741
20.	0.296	0.812	1.000	0.727	0.869	0.949	0.000	0.000
21.	0.836	0.624	0.943	0.695	0.979	0.803	1.000	0.935
22.	0.760	0.681	0.858	0.773	0.855	0.922	0.000	0.000
23.	0.523	0.688	0.975	0.801	1.000	0.981	0.637	0.692
24.	0.474	0.607	0.972	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000
25.	0.561	1.000	0.933	0.803	0.963	0.928	0.742	0.806
26.	0.414	0.639	0.887	0.760	0.854	0.423	0.909	0.504
27.	0.000	0.694	0.717	0.686	0.729	0.698	0.705	0.639
28.	0.978	0.609	0.768	0.698	0.768	0.889	0.862	0.716
29.	0.894	0.823	0.897	0.890	0.969	1.000	1.000	0.982
30.	1.000	0.865	1.000	0.713	0.762	0.657	0.742	0.646
31.	0.453	0.686	0.748	0.814	0.741	0.755	0.857	0.957
32.	0.804	0.654	0.910	1.000	0.700	0.724	0.782	1.000
33.	0.499	0.717	0.880	0.843	1.000	0.000	0.000	0.000
34.	0.000	0.567	0.826	0.750	0.792	0.804	0.605	0.000
35.	0.582	0.569	0.818	0.783	0.890	0.886	0.769	0.739
36.	0.398	0.567	0.852	0.758	0.763	0.843	0.823	0.749
37.	0.649	0.619	0.811	0.737	0.893	0.814	0.479	0.000
38.	0.632	0.729	0.856	0.769	0.931	0.909	0.906	0.852
39.	0.640	0.669	0.859	0.782	0.932	0.875	0.932	0.868
40.	0.756	0.620	0.772	0.668	0.789	0.883	0.000	0.000
41.	0.451	0.498	0.602	0.562	0.821	0.830	0.764	0.661
42.	0.461	0.459	0.751	0.674	0.000	0.000	0.000	0.000
43.	0.962	0.881	1.000	0.756	0.737	0.794	0.817	0.634
44.	0.707	0.785	0.825	0.839	0.876	0.839	0.872	0.726
45.	0.367	0.449	0.781	0.729	0.872	0.825	0.000	0.000
46.	1.000	0.979	0.828	0.761	0.775	0.865	0.879	0.000
47.	0.335	0.568	0.780	0.691	0.790	0.767	0.820	0.602
48.	0.313	0.500	0.833	0.686	0.833	0.908	0.806	0.637
49.	0.326	0.529	0.798	0.739	0.972	0.948	0.829	0.676
50.	0.703	0.974	1.000	0.711	0.764	0.933	0.827	0.724
51.	0.622	0.523	0.746	0.781	0.674	0.733	0.866	0.610
52.	0.767	0.618	0.873	0.731	0.584	0.000	0.710	0.000
53.	0.443	0.676	0.869	0.791	0.752	0.906	0.945	0.589
54.	0.487	0.535	0.728	0.764	0.736	0.857	0.000	0.000
55.	0.336	0.742	0.970	0.649	0.875	0.890	0.897	0.702
56.	0.748	0.000	0.778	0.756	0.906	0.885	0.785	0.681
57.	0.307	0.559	0.899	0.841	0.888	0.985	0.920	0.467
58.	0.546	0.722	0.804	0.859	0.695	0.961	0.970	0.809
59.	0.741	0.738	0.894	0.841	0.893	0.935	0.829	0.680
60.	0.288	0.564	0.862	0.859	0.758	0.965	0.931	0.977
61.	0.348	0.446	0.786	0.773	0.697	0.791	0.872	0.637
62.	0.443	0.810	0.836	0.806	0.599	0.000	0.000	0.000
63.	0.382	0.448	0.806	0.854	0.663	0.726	0.847	0.534
64.	0.411	0.556	0.930	0.899	0.860	0.838	1.000	0.612
65.	0.395	0.606	0.907	1.000	0.661	0.927	1.000	0.813
66.	0.000	0.000	0.763	0.709	0.729	0.825	0.831	0.607
67.	0.418	0.645	0.940	0.827	0.858	0.775	0.920	0.551
68.	0.656	0.021	0.727	0.960	0.397	0.828	0.837	1.000
69.	0.621	0.641	0.781	0.839	0.537	0.875	0.901	0.796
70.	0.714	0.929	0.831	0.923	0.716	0.990	0.963	0.767
71.	0.023	0.052	0.780	0.952	0.313	0.956	0.885	0.683
72.	0.836	0.695	0.779	0.870	0.529	0.899	1.000	0.778
73.	0.555	0.547	0.756	0.837	0.627	0.801	0.854	0.652
74.	0.626	0.607	0.907	0.794	0.652	0.873	0.875	0.771
75.	0.775	0.705	0.772	0.860	0.750	0.904	0.983	0.769
76.	0.717	0.610	0.799	0.852	0.502	0.771	0.889	0.616
77.	0.387	0.366	0.727	0.870	0.301	0.909	0.844	0.802
78.	0.810	1.000	0.666	0.952	0.241	0.857	0.996	0.936
79.	0.412	0.653	0.840	0.895	0.610	0.948	0.886	0.710
80.	0.640	0.000	1.000	0.785	0.688	0.963	0.941	0.664
81.	0.742	0.663	0.838	0.920	0.575	0.831	0.873	0.000
82.	0.454	0.562	0.763	0.728	1.000	0.784	0.921	0.620
83.	1.000	0.113	0.670	1.000	0.226	1.000	0.902	1.000
84.	0.492	0.632	0.899	0.826	0.768	1.000	0.879	0.616
85.	0.487	0.536	0.916	0.962	0.826	0.851	0.883	0.622
86.	0.665	0.712	0.752	0.819	0.641	0.890	0.881	0.927

Gjennomsnitt 0.59979 0.65556 0.83662 0.80310 0.78038 0.86434 0.85462 0.74345

Standardavvik 0.21616 0.18442 0.08347 0.09557 0.17327 0.09794 0.10310 0.13510

Tabell 45. El for simulert stokastisk frontfunksjon; de tre mest effektive bedriftene er tatt bort sekvensielt.

TABELL : Effektivitetstall for 1977 til 1984								
DMU	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
1.	0.454	0.788	0.777	0.876	0.838	0.778	0.735	0.795
2.	0.478	0.742	0.925	1.000	1.000	0.847	0.734	1.000
3.	0.886	0.860	0.825	0.841	0.895	0.000	0.000	0.000
4.	0.591	0.798	0.785	0.803	0.767	0.650	0.820	0.790
5.	0.715	0.891	0.881	0.964	0.925	0.814	0.988	0.867
6.	0.734	0.902	0.788	0.000	0.929	1.000	0.903	1.000
7.	0.519	1.000	0.758	0.349	0.931	0.770	1.000	0.907
8.	0.374	0.597	1.000	0.000	1.000	1.000	0.000	0.000
9.	0.768	0.859	0.849	0.949	0.921	0.892	0.832	0.954
10.	0.673	1.000	0.858	0.916	0.973	0.833	0.695	0.000
11.	0.575	0.802	0.763	0.806	0.854	0.000	1.000	0.923
12.	0.000	0.000	0.900	0.946	0.884	0.000	0.000	0.000
13.	1.000	0.900	0.819	0.635	0.930	0.899	0.979	1.000
14.	0.966	0.652	0.902	0.999	0.855	1.000	0.855	0.906
15.	0.649	0.786	0.915	1.000	0.000	0.859	1.000	0.000
16.	0.356	0.683	0.818	0.677	0.928	0.895	0.901	0.919
17.	0.873	0.000	0.798	0.816	0.830	0.845	0.752	0.953
18.	0.570	0.852	0.837	0.606	0.942	0.714	0.900	0.000
19.	0.737	0.902	0.785	0.812	0.831	0.962	0.795	0.912
20.	0.842	1.000	1.000	0.769	0.949	0.928	0.000	0.000
21.	0.645	0.737	0.999	0.792	0.954	0.760	1.000	0.926
22.	0.675	0.827	0.852	0.892	0.869	0.889	0.000	0.000
23.	0.462	0.832	0.992	0.965	0.997	0.955	0.695	0.892
24.	0.575	0.861	1.000	0.885	1.000	0.000	0.000	0.000
25.	0.351	0.995	0.933	0.922	0.974	0.925	0.787	0.888
26.	0.546	0.809	0.892	0.911	0.892	0.470	0.979	0.772
27.	0.000	0.593	0.721	0.719	0.767	0.747	0.736	0.852
28.	0.898	0.890	0.757	0.810	0.791	0.911	0.913	0.879
29.	1.000	0.854	0.903	0.000	0.965	0.939	0.000	0.970
30.	1.000	0.802	1.000	0.771	0.758	0.686	0.770	0.853
31.	0.718	0.627	0.785	0.989	0.795	0.771	0.888	0.978
32.	0.860	0.755	0.919	0.000	0.739	0.799	0.788	0.000
33.	0.840	0.576	0.939	0.908	0.000	0.000	0.000	0.000
34.	0.000	0.761	0.831	0.854	0.811	0.855	0.644	0.000
35.	0.739	0.658	0.837	0.905	0.918	0.908	0.796	0.951
36.	0.612	0.617	0.881	0.826	0.830	0.873	0.846	0.894
37.	0.727	0.793	0.823	0.816	0.891	0.800	0.527	0.000
38.	0.821	0.708	0.875	0.912	0.964	0.917	0.927	0.940
39.	0.656	0.896	0.867	1.000	0.950	0.871	0.955	0.976
40.	0.729	0.738	0.778	0.711	0.771	0.892	0.000	0.000
41.	0.520	0.615	0.589	0.571	0.832	0.808	0.776	0.806
42.	0.741	0.474	0.773	0.774	0.000	0.000	0.000	0.000
43.	0.000	0.000	0.000	0.830	0.861	0.842	0.841	0.808
44.	0.706	0.819	0.828	0.941	0.886	0.816	0.890	0.913
45.	0.500	0.631	0.778	0.840	0.877	0.919	0.000	0.000
46.	0.000	1.000	0.860	0.882	0.819	0.952	0.892	0.000
47.	0.530	0.738	0.800	0.786	0.827	0.765	0.872	0.842
48.	0.541	0.637	0.832	0.826	0.873	0.934	0.845	0.848
49.	0.509	0.569	0.807	0.830	1.000	0.924	0.881	0.824
50.	1.000	0.913	0.998	0.967	0.803	0.892	0.856	1.000
51.	0.840	0.748	0.780	0.867	0.798	0.827	0.856	0.808
52.	0.951	0.700	0.961	0.892	0.786	0.000	0.741	0.000
53.	0.734	0.660	0.929	0.909	0.867	0.929	0.368	0.894
54.	0.693	0.580	0.760	0.830	0.959	0.833	0.000	0.000
55.	0.817	0.738	0.000	0.672	0.926	1.000	0.931	0.982
56.	0.930	0.000	0.793	0.978	0.921	0.928	0.806	0.902
57.	0.642	0.676	0.962	0.903	0.928	0.000	0.948	0.687
58.	0.847	0.671	0.877	0.934	0.879	0.944	0.991	0.965
59.	1.000	1.000	0.938	0.897	0.905	0.918	0.873	0.935
60.	0.637	0.629	0.939	0.918	0.857	0.988	0.935	0.950
61.	0.580	0.680	0.826	0.818	0.769	0.929	0.895	0.909
62.	0.719	0.876	0.934	0.862	0.925	0.000	0.000	0.000
63.	0.700	0.637	0.849	0.854	0.848	0.792	0.883	0.755
64.	0.759	0.737	0.967	0.901	0.878	0.944	0.000	0.942
65.	0.686	0.745	0.971	1.000	0.967	0.999	1.000	1.000
66.	0.000	0.000	0.800	0.770	0.751	0.932	0.853	0.865
67.	0.750	0.680	1.000	0.884	0.926	0.837	0.950	0.782
68.	0.820	0.017	0.864	0.996	0.898	0.835	0.842	0.994
69.	0.883	0.706	0.903	0.876	0.848	0.867	0.912	1.000
70.	0.934	0.842	0.937	1.000	0.926	0.000	1.000	0.989
71.	0.040	0.053	1.000	0.984	0.895	0.852	0.872	0.884
72.	0.976	0.725	0.911	0.919	0.959	0.975	0.000	0.972
73.	0.743	0.695	0.847	0.912	0.884	0.889	0.868	0.857
74.	0.815	0.793	0.993	0.908	0.880	0.970	0.891	0.964
75.	0.846	0.697	0.904	0.924	0.980	1.000	0.994	0.965
76.	0.776	0.629	0.904	0.940	0.842	0.865	0.915	0.832
77.	0.662	0.302	0.923	0.887	0.916	0.908	0.838	0.918
78.	0.869	1.000	0.866	1.000	0.979	0.800	0.933	0.886
79.	0.741	0.689	0.946	0.925	1.000	1.000	0.895	0.948
80.	0.954	0.000	0.000	0.825	0.918	1.000	0.962	0.944
81.	1.000	0.804	0.928	0.922	0.823	0.939	0.897	0.000
82.	0.779	0.630	0.831	0.791	0.000	0.852	0.940	0.888
83.	0.815	0.114	0.908	0.996	1.000	0.848	0.888	0.951
84.	0.833	0.670	0.970	0.892	0.902	0.000	0.903	0.806
85.	0.806	0.632	0.983	0.981	0.970	0.914	0.900	0.847
86.	0.831	0.672	0.890	0.862	0.919	0.929	0.878	0.909

Gjennomsnitt 0.72333 0.72706 0.87504 0.87351 0.89057 0.87665 0.87250 0.90256

Standardavvik 0.17987 0.18631 0.08183 0.09482 0.06961 0.09235 0.09356 0.07138

Antall obs. 80. 80. 83. 82. 82. 75. 71. 65.
FORTRAN STOP

Tabell 47. DEA inputeffektivitet med en output og fire input.

TABELL : Effektivitetstall for 1977 til 1984								
DMU	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
1.	0.383	0.648	0.758	0.756	0.729	0.840	0.766	0.829
2.	0.377	0.665	0.955	0.857	1.000	0.893	0.737	0.900
3.	0.669	0.678	0.853	0.935	0.818	0.000	0.000	0.000
4.	0.444	0.667	0.930	0.785	0.672	0.674	0.930	0.722
5.	0.619	1.000	0.860	0.892	0.862	0.867	1.000	0.714
6.	0.743	0.763	0.849	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000
7.	0.462	0.992	0.810	1.000	0.913	0.971	1.000	0.758
8.	0.429	0.695	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000
9.	0.899	0.780	0.877	0.859	0.815	0.930	0.924	0.913
10.	0.696	0.821	0.806	0.914	1.000	1.000	0.708	0.000
11.	0.502	0.812	0.770	0.825	0.690	0.000	1.000	1.000
12.	1.000	1.000	0.894	0.848	0.765	0.000	0.000	0.000
13.	1.000	0.845	0.862	0.728	0.950	0.907	1.000	0.944
14.	0.773	0.600	0.897	0.946	0.727	1.000	0.852	0.758
15.	0.512	0.668	0.912	0.967	1.000	0.918	1.000	0.980
16.	0.329	0.644	0.820	0.595	0.888	0.931	0.951	0.830
17.	0.614	1.000	0.791	0.774	0.651	0.903	0.762	0.929
18.	0.428	0.986	0.857	0.723	0.917	0.970	0.908	1.000
19.	0.729	0.762	0.872	0.834	0.759	0.986	0.815	0.794
20.	0.686	0.965	1.000	0.803	0.776	0.989	0.000	0.000
21.	0.680	0.558	1.000	0.739	1.000	0.879	1.000	0.966
22.	0.852	0.668	0.929	0.792	0.760	0.969	0.000	0.000
23.	0.422	0.730	0.939	0.833	0.821	0.951	0.687	0.988
24.	0.517	0.705	0.934	1.000	0.755	0.000	0.000	0.000
25.	0.296	0.902	0.936	0.839	0.869	0.964	0.855	0.960
26.	0.370	0.767	1.000	0.928	0.784	0.560	1.000	0.639
27.	0.000	0.523	0.704	0.960	0.769	0.759	0.797	0.820
28.	1.000	1.000	0.807	0.764	0.691	0.945	0.905	0.814
29.	0.938	0.906	0.930	0.999	0.972	1.000	1.000	1.000
30.	1.000	0.904	1.000	0.764	0.751	0.773	0.775	0.723
31.	0.759	0.713	0.819	0.857	0.710	0.824	0.882	1.000
32.	1.000	0.811	0.936	1.000	0.703	0.895	0.862	1.000
33.	0.760	0.842	0.947	0.886	1.000	0.000	0.000	0.000
34.	0.000	0.648	0.863	0.816	0.706	0.877	0.682	0.000
35.	0.676	0.587	0.842	0.825	0.888	0.927	0.824	0.847
36.	0.429	0.578	0.846	0.806	0.757	0.923	0.875	0.870
37.	0.632	0.637	0.802	0.779	0.681	0.806	0.526	0.000
38.	0.816	0.748	0.862	0.787	0.991	0.954	0.942	0.926
39.	0.608	0.708	0.906	1.000	0.932	0.916	0.973	0.991
40.	0.857	0.784	0.802	0.711	0.598	0.905	0.000	0.000
41.	0.469	0.502	0.652	0.638	0.825	0.830	0.818	0.715
42.	0.833	0.531	0.827	0.725	0.000	0.000	0.000	0.000
43.	0.760	1.000	1.000	0.789	0.641	0.871	0.861	0.798
44.	0.627	0.761	0.862	0.882	0.937	0.855	0.918	0.758
45.	0.683	0.638	0.827	0.784	0.811	0.931	0.000	0.000
46.	1.000	1.000	0.881	0.815	0.744	0.957	0.914	0.000
47.	0.509	0.818	0.868	0.753	0.811	0.823	0.905	0.739
48.	0.369	0.621	0.867	0.752	0.867	0.980	0.856	0.700
49.	0.438	0.589	0.847	0.792	0.775	1.000	0.906	0.751
50.	1.000	1.000	1.000	1.000	0.923	0.969	0.883	0.940
51.	0.624	0.708	0.848	0.842	0.665	0.878	0.877	0.699
52.	0.780	0.660	1.000	0.725	0.691	0.000	0.741	0.000
53.	0.486	0.710	0.894	0.811	0.799	0.982	0.978	0.678
54.	0.492	0.576	0.798	0.808	0.905	0.911	0.000	0.000
55.	0.647	0.822	0.961	0.693	0.670	1.000	0.922	0.861
56.	0.849	0.000	0.818	0.837	0.689	0.965	0.815	0.791
57.	0.365	0.633	0.920	0.882	0.702	1.000	0.973	0.524
58.	0.589	0.735	0.887	0.911	0.757	1.000	1.000	0.980
59.	0.884	0.957	0.874	0.900	0.661	0.997	0.869	0.828
60.	0.315	0.607	0.919	0.902	0.790	1.000	1.000	1.000
61.	0.358	0.694	0.824	0.832	0.692	0.944	0.948	0.664
62.	0.468	0.889	0.988	0.826	0.770	0.000	0.000	0.000
63.	0.365	0.632	0.853	0.882	0.675	0.789	0.867	0.581
64.	0.441	0.820	0.967	0.943	0.817	0.945	1.000	0.661
65.	0.459	0.663	1.000	1.000	0.695	0.998	1.000	0.872
66.	0.000	0.000	0.771	0.749	0.559	1.000	0.944	0.661
67.	0.443	0.673	0.932	0.874	0.737	0.832	1.000	0.583
68.	0.530	0.016	0.866	0.960	0.731	0.887	0.882	1.000
69.	0.548	0.655	0.906	0.904	0.784	0.922	0.948	1.000
70.	0.595	0.905	0.868	0.951	0.762	1.000	1.000	0.930
71.	0.080	0.049	0.919	0.906	0.726	0.964	0.944	0.735
72.	0.564	0.695	0.960	0.887	0.825	1.000	1.000	0.924
73.	0.482	0.652	0.826	0.863	0.782	0.901	0.900	0.751
74.	0.503	0.750	0.978	0.840	0.720	0.953	0.919	0.885
75.	0.469	0.665	0.857	0.877	0.905	1.000	1.000	0.897
76.	0.475	0.610	0.970	0.886	0.667	0.901	0.972	0.705
77.	0.354	0.423	0.848	0.845	0.680	0.945	0.862	0.879
78.	0.482	1.000	0.891	0.896	0.775	0.938	1.000	0.844
79.	0.423	0.709	0.912	0.918	0.741	1.000	0.904	0.828
80.	0.527	0.000	1.000	0.816	0.718	1.000	0.969	0.905
81.	0.547	0.871	1.000	0.917	0.675	0.950	0.918	0.000
82.	0.433	0.615	0.844	0.756	0.960	0.830	0.946	0.755
83.	0.385	0.114	0.956	0.950	0.754	1.000	1.000	0.983
84.	0.490	0.685	0.906	0.864	0.641	1.000	0.918	0.703
85.	0.487	0.623	0.915	1.000	0.736	0.903	0.933	0.723
86.	0.420	0.698	0.908	0.841	0.725	0.990	0.958	0.952

Gjennomsnitt 0.58980 0.71910 0.88834 0.85120 0.78808 0.92504 0.90412 0.83527

Standardavvik 0.20544 0.18989 0.07299 0.08935 0.10991 0.08112 0.09545 0.12616

Antall obs. 83. 83. 86. 85. 85. 78. 74. 68.

