Antall grotter i Kaledonidene

Torstein Finnesand og Tore Brattli

Det finnes flere måter for å beregne det samlete antall grotter i en region eller i et land, jf. f.eks. Trevor Faulkner (2007) sine beregninger for Søndre Nordland i NGB nr 48. En annen metode er å basere seg på formlene utledet av Rane Curl i 1986.

1. Likning for beregning av antall grotter

Det er åpenbart at det er vesentlig flere korte grotter enn lange grotter. Lengden av grottene i en region er fordelt omtrent som en hyperbel (Curl 1966). Ergo er det mulig å beskrive grottefordelingen nærmere ved hjelp av relativt få parametre. Curl (1986) angir følgende ”power law” formel for antall grotter, N(l|μ), i en region:

$$N(l|\mu) = N(l_0|\mu) \cdot \left(\frac{l}{l_0}\right)^{-\nu} \quad \text{(likning 2 i Curl 1986)}$$

hvor:

$N(l_0|\mu)$ = antall grotter lengre enn referanselengden og større enn modulus, μ (størrelsen på utforskeren)

l = grottens lengde (variabelen)

l_0 = referanselengde (nedre grense)

ν = fraktal verdi (eksponenten)

Eksempel: På det sentrale Glomfjellsplatået er det funnet 4 grotter > 100 meter. 4 = $N(l_0|\mu)$ og 100 = l_0, Dersom ν = 1,4, sier likningen at det er 100 grotter > 10 meter og 2500 grotter > 1 meter.

Små åpninger eller trange passasjer inne i grotter vil hindre oss i å kartlegge en grotte til dens fulle lengde. Antall grotter som er lengre enn gitt lengde er derfor avhengig av størrelsen på oss, i hvert fall så lenge vi selv må forflytte oss gjennom de passasjene som kartlegges. Hvis vi hadde vært like store som elefanter, vil kanskje Svarthammarhola vært Norges lengste grotte, - mens vi ikke engang ville ha kommet inn i Tjorve (hvis vi ikke hadde greid å flytte en del store blokker i Tjuvsprekka). Hvis vi hadde vært på størrelsen med en katt, ville det vært vesentlig flere grotter > 1000 meter i Norge. Siden størrelsen på utforskeren er av betydning for antall grotter, inkluderte Curl (1986) modulus, μ, i likningen:

”Length of a cave is admittedly rather meaningless without specifying the size of the explorer. A cave is a subterranean volume that, in principle, can be explored and surveyed to obtain a length; it will be greater for a small explorer than a large explorer. ... To define a cave, therefore, requires specification of shape and characteristic size of an explorer. If the *standard explorer* is chosen to be a sphere, diameter of that sphere is called the *modulus*, μ, of the sodefined cave. If the explorer is human and the modulus is the size of a human, the cave is called a *proper cave*.”

Hvis μ er 0,5 meter, kan likning 2 brukes ned til grotter med en lengde på 0,5 m. En kortere grotte enn modulus er ikke mulig, og derfor blir modulus ”inner cutoff” (Curl 1986). Men selv grotter med en lengde på 0,5 m eller 1 meter blir ikke registrert av oss. Mange av disse vil vi heller ikke oppfatte som grotter, men som natursjakter og doliner.

For å kunne bruke formelen må vi 1) finne ut hvor mange grotter som er lengre enn gitt lengde i en region og 2) finne den fraktale verdien. Begge to er avhengig av hvilke data som er tilgjengelig og hva slags område som legges til grunn.

2. Valg av datagrunnlag og regioner

Vi har ikke tilgang til datasett som viser registrerte lengder på for eksempel alle norske grotter. Det er forøvrig en risiko for at en slik oversikt ikke vil være representativ for fordelingen av grottene, da vi har tendens til å registrere og kartlegge de lengste grottene.

St. Pierre (2003) har et relativt godt datasett for norske grotter ≥ 1000 meter, i alt 44 stk. I ettertid er datasettet blitt oppdatert av bl.a. St. Pierre i til å omfatte 47 grotter. Vi ønsket å bruke sistnevnte datasett som grunnlag for å finne den fraktale verdien. Curl (2007, e-post) var enig i at et slikt datasett kunne gi et godt estimat på den fraktale verdien, da det finnes få grotter > 1000 meter uten åpninger. Lauritzen (2010) gjorde omtrent det samme, da han beregnet den fraktale verdien ut fra de 100 lengste grottene i Norge, hvorav 35 var dokumentert å være > 1000 meter.

For noen grotter har 2009-datasettet antatte lengder som overstiger kartlagt lengde. Vi har i de tilfellene brukt kartlagt lengde (f.eks. er Okshola kartlagt til 9500 meter, men har en antatt lengde på 11.000 meter). 2009-datasettet inneholder også fem grotter med lengde lik nedre grense for datasettet (1000 meter). Disse lengdene er neppe kartlagte lengder og således er de grottene ikke dokumentert å være over 1000 meter. Etter vår oppfatning bør disse ikke inngå datagrunnlaget. Vi har derfor brukt et datasett som omfatter 42 grotter > 1000 meter.

Regionen Norge er imidlertid en administrativ avgrensning. Et kjennetegn ved norske grotter over en viss størrelse er at de er utviklet i bergarter som ble dannet under den kaledonske fjellkjedefoldningen for ca 420 millioner år siden. Kaledonidene strekker seg inn i Sverige, hvor det er registrert 5 marmorgrotter > 1000 meter og en som er 1000 meter (Sjøberg 2007). Vi har derfor beregnet den fraktale verdien for den svensk-norske (skandinaviske) delen av Kaledonidene (heretter kalt Kaledonidene) ved å bruke de 47 kjente grottene som er > 1000 meter. Det betyr at Gotland ikke er inkludert.

En grotte kan være dannet på forskjellige måter. I Sverige finnes det grotter > 1000 meter som har en tektonisk opprinnelse. Disse er ikke tatt med, fordi vi ønsker å beregne den fraktale verdien for karstgrotter, - som i vår region bare er marmorgrotter.

Vi har også beregnet den fraktale verdien for alle kalkgrottene på jordkloden, basert på CaverBob sin liste over grotter > 15.000 meter. Listen inneholdt per okt-2010 305 grotter, herav 9 stk som er eksakt 15.000 meter. Gitt at

CaverBob har markert alle grotter i lava, gips osv, er det 280 grotter > 15.000 meter i kalk/ marmor. For å få datasettet ytterligere homogent og mer sammenlignbart med det kaledonske datasettet, er det nok også andre grotter som burde vært fjernet, noe som ville krevd mye merarbeid.

Mange land har en oversikt over egne lengste grotter på internett. For å kunne belyse spredningen i den fraktale verdien har vi også beregnet verdien for grotter i

USA > 1609 meter,
Storbritannia > 1000 meter og
Alpene > 2000 meter

Sistnevnte datasett inkluderer grottene i den alpine delen av Sveits, Østerrike og Tyskland. Samlet utgjør de landene halvparten av arealet til Alpene. Det er rimelig å anta at datasettet er representativt for Alpene.

Vannfylte grotter er inkludert, som Pluras underjordiske system og Jordbekkgrottas utløp.

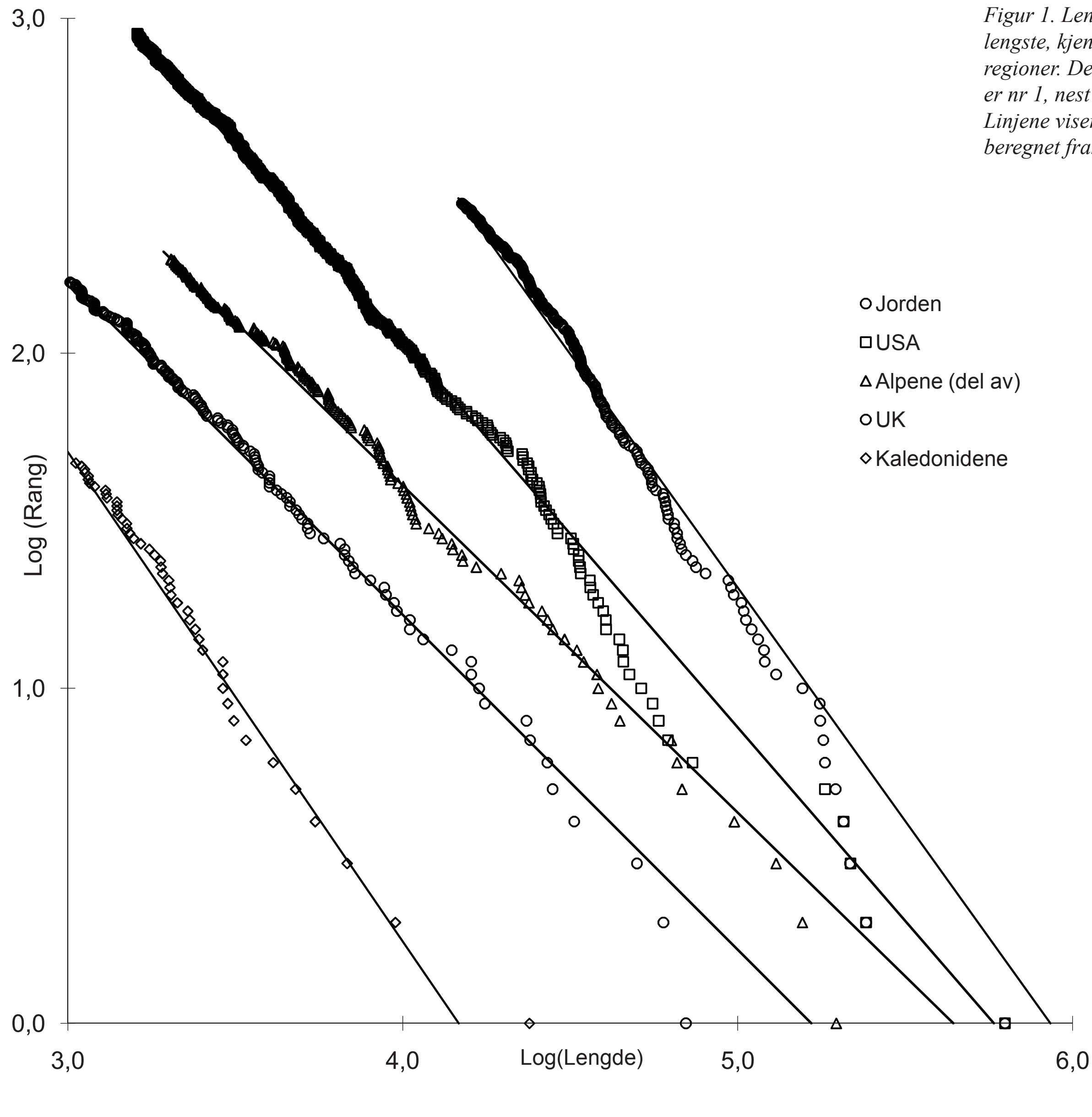
Regioner, datakilder, nedre grense og antall grotter fremgår av **Tabell 1**. Spennvidde er forholdet mellom den lengste grotten og nedre grense. Spennvidden er liten. Unntaket er det amerikanske datasettet, med 899 grotter som spenner over to størrelsesordner. Det kaledonske datasettet er minst, både i antall grotter og i spennvidde.

3. Beregningsmetode

Den fraktale verdien vil være stigningstallet til en likning av første grad dersom likning 2 til Curl (1986) fremstilles i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem. Den vanligste er å plotte rang mot grottelengde, dvs. log(rang) mot log(grottelengde). **Figur 1** presenterer 5 av de 6 datasettene nevnt i kap. 2. Det norske datasettet er ikke tatt med, fordi de utgjør 90 % av grottene i datasettet for Kaledonidene. Datasettet lengst til venstre er de 47 kalkgrottene i Kaledonidene > 1000 meter. Den lengste grotten, Tjorve på 23.885 meter (lengde ultimo 2010), er den nederste ruten. Tjorve ligger på X-aksen fordi det er grotte nr 1. Y-verdien er log(1) = 0. X-verdien er log(23885) = 4,38. Datasettet helt til høyre er de antatte 280 kalkgrottene på Jorden > 15.000 meter. Mammoth Cave System ligger på X-aksen.

Metoden man identifiserer den fraktale verdien med er av betydning for resultatet. For å finne stigningstallet kan en linje skjønnsmessig tegnes slik at den samsvarer best mulig med datasettet.

Alternativt kan f.eks. Excel brukes til å finne den trendlinjen som best samsvarer med datasettet ved bruk av minste kvadraters metode, MKM. Vi må da vurdere om de største lengdene skal inngå i analysen, da disse kan påvirke



Figur 1. Lengdefordeling av de lengste, kjente grottene i ulike regioner. Den lengste grotten er nr 1, nest lengst er nr 2 osv. Linjene viser stigningstallet til beregnet fraktal verdi.

Tabell 1. Beregnet fraktal verdi for ulike regioner, ved bruk av MLE (maximum likelihood estimation) og MKM (minste kvadraters metode). Med "Antall" menes antall grotter lengre eller lik enn lengden oppgitt i "Xmin, m.". Spennvidde er forholdet mellom lengste og korteste grotte. En kvantil på 0,9 angir at den beregnede K-S verdi er lavere enn tabellverdien for 0,9. 0,9 er bedre enn f.eks. 0,99.

							Fraktal verdi	
Region	**Datakilde**	**Xmin, m.**	**Antall**	**Spennvidde**	**K-S verdi**	**Kvantil**	**MLE**	**MKM**
Jorden	CaverBoB	15 019	280	42	0,0872	ingen	1,39 (0,08)	1,56
USA	CaverBoB	1 611	899	390	0,0457	ingen	1,15 (0,04)	1,18
Alpene	Sum av tre kilder	2 031	191	97	0,0782	0,999	0,98 (0,07)	1,01
Storbritannia	UKCaves	1 015	163	69	0,0779	0,999	1,00 (0,08)	1,04
Kaledonidene	St. Pierre m.fl.	1 055	47	23	0,1047	0,990	1,46 (0,21)	1,41

stigningstallet uforholdsmessig mye og føre til at linjen samsvarer lite med datasettet. Men MKM er en usikker metode for "power law" data. Clauset et al. (2009) sier:

"Commonly used methods for analyzing power-law data, such as least-squares fitting, can produce substantially inaccurate estimates of parameters for power-law distributions, and even in cases where such methods return accurate answers they are still unsatisfactory because they give no indication of whether the data obey a power law at all."

Clauset et al. (2009), Edwards (2008) og White et al. (2008) viser gjennom omfattende beregninger at MKM kan gi akseptable resultater for kontinuerlige data fremstilt i en kumulativ fordeling. I vårt tilfelle har X-aksen i **Figur 1** en kontinuerlig variabel (grottelengden kan være et hvilket som helst tall). Y-aksen er en diskret variabel (Grottene blir rangert som nr 1, 2, 3 osv). Fordelingen er kumulativ. Vi har derfor beregnet den fraktale verdien ved bruk av MKM. Men vi har også beregnet verdien ved bruk av maximum likelihood estimation, MLE. Sistnevnte metode anbefales av mange (Clauset et al. 2009, Edwards 2008, Goldstein et al. 2004, Newman 2006, White et al. 2008), ofte sammen med Kolmogorov-Smirnov (K-S) for å vurdere hvor godt (eller dårlig) den beregnete eksponenten forklarer datasettet. K-S verdien er den største vertikale forskjellen mellom observerte og beregnete verdier. Clauset et al. (2009) gjorde det på følgende måte:

"Our approach combines maximum-likelihood fitting methods with goodness-of-fit tests based on the Kolmogorov-Smirnov statistic and likelihood ratios. We evaluate the effectiveness of the approach with tests on synthetic data ..."

Vi har ikke hatt mulighet for å kunne generere store mengder med tilfeldige/syntetiske data. I stedet sammenlignet vi de beregnede K-S verdiene med tabellverdier basert på syntetiske data beregnet av Goldstein et al. (2004). For å kunne identifisere rett kvantil enkelt og presist gjorde vi om tabellverdiene til formler i Excel, én for hver kvantil. En beregnet K-S verdi lavere enn K-S verdien for f.eks. 0,9 kvantilen er bedre enn for 0,95 kvantilen.

Formlene for beregning av MLE og K-S fremgår av Clauset et al. (2009) og ble implementert i Excel. Formlene ble testet på to av datasettene til Clauset et al. (2009) (lastet ned fra Clauset sin nettside) for å være sikker på at implementeringen var korrekt. Standardavviket for de fraktale verdiene ble beregnet ved bruk av formelen til Newman (2006).

4. Fraktal verdi for ulike regioner

Omfang av de 6 datasettene og tilhørende beregninger er presentert i **Tabell 1**. Den fraktale verdien beregnet ved bruk av MLE er vist som linjer på **Figur 1**. Formelen for linjen er likning 2.

Den fraktale verdien varierer mellom regionene. Alpene og Storbritannia har laveste verdi (1,0). Det største datasettet, USA, ligger i midten (1,2), mens Jorden og Kaledonidene har høyest verdi (henholdsvis 1,4 og 1,5). K-S test viser at de fraktale verdiene for Alpene, Storbritannia og Kaledonidene passer best med datasettet. Disse datasettene kan beskrives med en "power law" som likning 2, dog er en kvantil på 0,999 ikke overbevisende. Vi har ikke gjort forsøk på å finne ut om andre typer formler (se Clauset et al. 2009) kan forklare datasettet bedre.

MKM gir omtrent samme de samme fraktale verdiene som MLE for fire av datasettene, men avviker vesentlig for Jorden.

Det er et avvik mellom trendlinjen og grottene rangert som nr 2, 3 og 4 for Jorden (**Figur 1**). Det vil alltid være få grotter i denne enden av grafen og statistisk sett vil de fordele seg slik at det i mer eller mindre grad vil være at avvik. Teoretisk sett kan avviket i mer eller mindre grad forsvinne dersom

1) Lengdene av grotte nr 2, 3 og 4 øker med noen titalls prosent.
2) To av de lengste grottene blir forbundet og dermed skal fremstå som én grotte. Eller
3) En ny grotte (eller to) oppdages og kartlegges til 4-500 km.

Man kan tenke seg at noen av de store vannfylte grottene på Yucatan er forbundet. Hvis f.eks. de to lengste (Ox Bel Ha og Sac Actun, nr 7 og 8 over verdens lengste kalkgrotter) kan forbindes, vil vi få en ny grotte på andreplass og avviket vil bli lite.

5. Diskusjon om den fraktale verdien

Den beregnete fraktale verdien varierer betydelig mellom regionene. Skyldes det reelle forskjeller mellom regionene eller at datasettet er for lite eller for dårlig for noen av regionene?

Av og til kan enkeltobjekter ha svært avvikende verdi, noe som gjerne omtales som kongeeffekten ("King effect"). Det synes ikke å være noen slike tilfeller i de dataene vi har. Men ut fra linjene vist i **Figur 1** er Tjorve den som kommer nærmest opp til begrepet. Det er for lang. Ogof Draenen (70 km) og Hölloch (197 km) er for korte. Mammoth Cave (628 km) er for kort for datasettet for Jorden, - men har passe lengde for det amerikanske datasettet.

Den fraktale verdien er litt følsom for hvilke grotter vi tilfeldigvis kartlegger i. Men i motsetning til MKM påvirkes resultater basert på MLE i mindre grad av endringer i lengder av de lengste grottene. Dersom Tjorve hadde vært f.eks. bare 15 km, ville den fraktale verdien for Kaledonidene ha blitt økt

- fra 1,41 til 1,51 ved bruk av MKM
- fra 1,46 til 1,48 ved bruk av MLE

Generelt vil økte lengder i de lengste grottene redusere den fraktale verdien, mens økte lengder i de mindre grottene vil øke den fraktale verdien.

MLE er en presis og robust metode. Metoden er bedre enn MKM og såkalt logarithmic binning selv for små datasett (Edwards 2008, White et al. 2008). Som en tommelfingerregel bør et datasett likevel ha minst 50 verdier (Clauset et al. 2009) for å kunne trekke ut pålitelige resultater. Det kaledonske datasettet er lite. Det er stor usikkerhet i den beregnete fraktale verdien, ref. det høye standardavviket på 0,21 (**Tabell 1**). Lauritzen (2010) beregnet en fraktal verdi på ca 1,4 ved å ta utgangspunkt i de 100 lengste grottene i Norge. Grunnlaget er dobbelt så stort som vårt grunnlag, men inneholder bare 35 grotter > 1000 meter.

For så små datasett som Kaledonidene er MLE følsom for endringer i lengden av den minste grotten (Xmin). Siden datasettet inneholder alle kjente grotter lengre enn 1000 meter (47 stk), kan grotte nr 48 maks være 1000 meter. På den ene siden synker den fraktale verdien fra 1,46 til 1,38 om en slik grotte tas med. På den andre siden synker den bare til 1,44 om vi antar at tre av de 6 grottene på 1000 meter er 1000 meter.

Det er rimelig å anta et det britiske og amerikanske datasettet er mer komplett enn datasettet for Kaledonidene. Curl (1966, 1986) oppga fraktale verdier på mellom 1,2 og 1,6 for ulike regioner i USA, og brukte gjerne 1,4 i sine eksempelberegninger. Hans datagrunnlag inkluderte grotter uten åpninger ("entranceless caves"). Curls resultater viser at den fraktale verdien kan være forskjellig mellom regioner. Det er forøvrig noe uklart hvordan en "region" skal defineres. Curl (2007, e-post) nevnte at en region "encompasses caves in a similar geological and hydrological setting", men la til at han var usikker på hva forskjellen bestod i. Kanskje terrengets bratthet og marmorens tykkelse er av betydning. Vi kan ikke se bort fra at den fraktale verdien vil variere mellom områder i Kaledonidene.

En alternativ metode til å beregne den fraktale verdien kunne vært å plassere grottene i grupper (logarithmic binning) og telle dem. X-aksen i **Figur 1** kunne da vært logaritmen til midtpunktet i gruppe nr 1, 2, 3 osv. Imidlertid introduserer metoden en ny usikkerhet, fordi den fraktale verdien er avhengig av hvordan man grupperer dataene. Beregninger basert på våre datasett førte til vidt forskjellige fraktale verdier ut fra bredden på gruppene (3 til 15 grupper per størrelsesorden). Dette stemmer med omfattende analyser gjort av Edwards (2008) og White et al. (2008).

I kap. 6 – 10 har vi benyttet den fraktale verdien beregnet ved bruk av MLE. Usikkerheten i beregningene er store, ref. høye K-S verdier og små datasett.

6. Beregning av antall grotter

Med utgangspunkt i Xmin (= l_0) og resultatene i **Tabell 1** er antall grotter for noen av regionene beregnet ved bruk av likning 2. Resultatet er vist i **Tabell 2**. Beregningene baserer seg på at det er 42, 8 og 5 grotter lengre eller lik 1055 meter i henholdsvis Norge, Sentralskandinavia og søndre Nordland.

I følge beregningene er det 51 grotter >= 1000 m i Kaledonidene. Videre skal det være ca 1450 grotter i Kaledonidene med lengde over 100 meter, hvorav ca 1300 i Norge. Mange av disse er funnet, - men her er det et potensial for å finne vesentlig flere av de som mangler. *Ut og let ..!.* I følge beregningene skal det også være ca 42.000 grotter > 10 meter i Kaledonidene, hvorav ca 38.000 i Norge.

Tabell 2 viser også antall kalkgrotter beregnet for søndre Nordland, Sentralskandinavia, Storbritannia og Jorden. Antall grotter > 100 meter i Storbritannia er i følge beregningene ca 1650, dvs. bare litt mer enn i Kaledonidene. Årsaken til det lave tallet er den lave fraktale verdien (1,0). Konsekvensen av den lave fraktale verdien vises enda tydeligere for antall grotter > 10 meter. Antallet i Storbritannia er ca 16.500 stk, godt under halvparten av antallet i Kaledonidene.

Beregnet fraktal verdi for Jorden er høy, og følgelig blir antall grotter > 100 m og > 10 m store tall, henholdsvis ca 300.000 stk og ca 7 millioner stk.

Tre grotter > 1000 meter med vannfylte åpninger er kjent og er med i datagrunnlaget for Kaledonidene. Ergo inkluderer de beregnede verdiene i **Tabell 2** vannfylte grotter. De utgjør en mindre, men ikke uvesentlig, andel (andelen er 3/47). Også datasettene for de andre regionene inneholder vannfylte grotter.

I Sverige er det 5 kalkgrotter i Kaledonidene som er > 1055 meter. Likning 2 tilsier at det da skal finnes 156 kalkgrotter > 100 meter i samme område. Antall grotter i Sverige kan forøvrig også finnes ved å trekke antall grotter i Norge fra antall grotter i Kaledonidene i **Tabell 2**.

7. Om datagrunnlaget for Norge og Kaledonidene

Allerede i 1991 brukte Lauritzen (1991) lengdedata om datidens kjente grotter i Norge og likning 1 fra Curl (1986) til å beregne antall grotter i Norge. Datasettet fra 1991 ga en fraktal verdi på 1,4. Beregningene resulterte i at det var 26 stk > 1000 meter, 608 stk > 100 meter, 14.400 stk > 10 meter og 344.100 stk > 1 meter (Tabell 1 i Lauritzen 1991). Tilsvarende

Tabell 2. Antall grotter for ulike regioner ved bruk av likning 2 (Curl 1986). Datagrunnlaget fremgår av Tabell 1. Det er 5 stk > 1055 meter i Søndre Nordland og 8 stk > 1055 meter i Sentralskandinavia.

Grotter lengre enn, m	Søndre Nordland	Sentralskandinavia	Norge	Kaledonidene	Storbritannia	Jorden
1	129 694	207 510	1 089 426	1 219 120	165 445	178 932 424
10	4 497	7 195	37 774	42 271	16 545	7 289 354
100	156	249	1 310	1 466	1 654	296 954
1 000	5	9	45	51	165	12 097
10 000	0	0	2	2	17	493
100 000	0	0	0	0	2	20
1 000 000	0	0	0	0	0	1

Tabell 3. Grottelengde for ulike regioner ved bruk av likning 6 (Curl 1986), men med tillegg av en øvre cutoff. Datagrunnlaget fremgår av tabell 1. Tall i meter.

Grotter lengre enn	Sentralskandinavia	Norge	Kaledonidene	Storbritannia	Jorden
1	651 883	3 436 775	3 846 732	2 368 831	636 117 066
10	221 632	1 177 958	1 319 008	1 988 653	258 183 610
100	72 448	394 743	442 553	1 608 212	104 220 973
1 000	20 721	123 173	138 654	1 227 508	41 499 632
10 000		29 010	33 280	846 541	15 948 194
100 000				465 311	5 539 042
1 000 000					1 298 559

beregninger av Lauritzen i 2010 resulterte i et høyere antall grotter: Ca 40 stk > 1000 meter, 975 stk > 100 meter, 23.632 stk > 10 meter og 572.532 stk > enn 1 meter.

Det kaledonske datagrunnlaget er trolig relativt godt dekkende for sitt intervall. Men siden vi har funnet et par grotter > 1000 meter per decennium, vil vi nok finne noen i de nærmeste tiårene også. F.eks. ved at vi kartlegger kjente grotter som antas å ha et potensial for å være > 1000 meter, herunder de som er angitt å være 1000 meter. Siden antall grotter > 1000 meter er et minimumstall, er verdiene beregnet i **Tabell 2** minimumstall, - så fremt likning 2 er korrekt og den fraktale verdien er korrekt. Finner vi f.eks. 5 grotter til > 1000 meter i Kaledonidene, vil $N(l_0|\mu)$ i likning 2 øke fra 47 til 52.

Som nevnt innledningsvis, legger likning 2 til grunn at enhver passasje i en kartlagt grotte skal ha en minimum diameter (modulus), ofte satt til 0,5 m, for å kunne bli regnet med. Men trolig skulle noen av våre lengste grotter hatt en vesentlig kortere lengde dersom vi kun fikk lov til å kartlegge ganger med minst 0,5 m i diameter. Data fra Tjorve illustrerer dette: Grotten blir 5 % kortere ved modulus 40 cm og 15 % kortere ved modulus 50 cm. Årsaken til såpass store reduksjoner skyldes at deler av grotten (med romslige passasjer) blir utilgjengelig, - Tjorve fragmenteres i flere grotter. Faktisk er det mulig at Tjorve ikke ville vært kjent, fordi det nær alle åpningene finnes trange partier i fjell eller store blokker. Det samme gjelder for Greftsprekka.

Modulusproblemet kan løses på to måter:

1) Vi utarbeider et nytt datasett hvor lengden til grottene utelukkende er basert på et sammenhengende sett med passasjer som er større enn 50 cm. Dette vil imidlertid kreve tilgang til alle gangdimensjoner langs senterlinjen, supplert med lokalkunnskap om passasjene og befaringer for å kunne belyse dette. Det er neppe gjennomførbart for flere titalls grotter. Hvis vi gjorde dette, ville noen av dagens "1000-metringer" fått redusert lite eller ingenting av sin lengde mens andre ville fått betydelige reduksjoner. Det kan føre til en annen fraktal verdi. Hvis vi likevel antar at alle kjente grotter ≥ 1055 meter i Kaledonidene i snitt kortes inn med for eksempel 10 %, ville antall grotter ≥ 1055 meter blitt mindre (redusert fra 47 til 45 stk i Kaledonidene). Den fraktale verdien ville ikke blitt endret, men antall grotter beregnet ved bruk av likning 2 ville blitt mindre (redusert til 45/47).

2) Vi reduserer modulus til en verdi som bedre samsvarer med 2009-datasettet. Tjorveeksempelet antyder at modulus må reduseres til 0,4 meter, kanskje helt ned 0,3 meter. Konsekvensen er at antall grotter > 100 meter og > 10 meter vil inkludere trange grotter. Siden noen trange passasjer er utvidet med manuell flytting av løsmasser, vil tilsvarende måtte gjøres for noen av grottene beregnet i **Tabell 2**.

2009-datagrunnlaget inkluderer ikke, så langt vi vet, grotter > 1000 meter som ikke har en eneste naturlig åpning. Ergo synes det å være logisk at de beregnede verdiene i **Tabell 2** heller ikke inkluderer grotter uten naturlige åpninger. Se dog diskusjonen i kap. 11.

8. Antall grottemetre

Ut fra likning 2 er det mulig å finne den samlete lengden med grottemetre, L(μ), i en region (Curl 1986):

hvor

$$N(l|\mu) = N(l_0|\mu)\cdot\left(\frac{1}{l_0}\right)^{-\nu} \qquad \text{(likning 2 i Curl 1986)}$$

μ = nedre grense for grottelengde (variabelen)

Curl (1986) beregnet at det var 530 km med grotteganger i Pennsylvania, basert på en nedre grense på 0,5 meter.

Tabell 3 viser omtrent tilsvarende beregninger for Sentralskandinavia, Norge, Kaledonidene, Storbritannia og Jorden, basert på resultatene fra **Tabell 1**. Samlet grottelengde for grotter > 1000 meter i Kaledonidene er 139 km. Dersom nedre grense settes til 10 meter, står den ene promillen med grotter > 1000 meter for såpass mye som 10 % av grottemeterne i Kaledonidene. For Storbritannia utgjør andelen 61 %, grunnet bl.a. den lave fraktale verdien.

Beregnet lengde av grotter i Kaledonidene > 100 meter er ca 440 km og > 10 meter er ca 1300 km.

Resultatene er basert på en øvre grense, dvs. at likning 6 utvides til å trekke fra grottelengde for grotter med lengde over en viss grense. Grensen er innført fordi noen av datasettene har en meget lav fraktal verdi. En verdi ned mot 1,0 eller under 1,0 fører til at likning 6 gir et nærmest uendelig stort antall grottemetre for grotter av uendelig lengde. Grensen er satt der likning 2 sier at det er 10 % sannsynlighet for at en slik grotte finnes. For f.eks. Kaledonidene blir grensen 67 km. Ergo regnes grotter > 71 km ikke med i **Tabell 3**. Innføring av øvre grense er av liten betydning for antall grottemetre i Kaledonidene, grunnet høy fraktal verdi.

Tabell 4. Beregnet og observert grottelengde for ulike lengdeintervaller for Kaledonidene ved bruk av likning 6 (Curl 1986). Samme datagrunnlag som tabell 2. Tall i meter.

Intervall	Beregnet	Observert
1 - 10	1 403 145	
10 - 100	584 928	
100 - 1000	243 839	
1000 - 10 000	101 649	106 080
10 000 - 100 000	42 374	23 885

Man kan unngå å ha en øvre grense som nevnt over dersom likning 6 brukes til beregne antall grottemetre for intervaller (som er likning 5 hos Curl, 1986), ref **Tabell 4**. Beregnet lengde av grottene mellom 1000 og 10.000 meter er 105 km, mens kartlagt lengde er 106 km. Beregnet lengde av grottene mellom 10.000 og 100.000 meter er 36 km, mens kartlagt lengde er 24 km.

9. Gjennomsnittlig grottelengde

Gjennomsnittlig grottelengde er likning 6 delt på likning 2. Det gir følgende likning:

$$\bar{l} = \frac{\nu \cdot l}{\nu - 1}$$

Gjennomsnittlig lengde er altså kun en funksjon av den fraktale verdien for en gitt grottelengde (l). Dog gir likningen ikke fornuftige snittverdier dersom den fraktale verdien er nær eller mindre enn 1,0.

Gjennomsnittslengder for Kaledonidene fremgår av siste kolonne i **Tabell 5**. F.eks. er gjennomsnittsverdien av grotter > 10 meter 32 meter. Mange små grotter gjør at gjennomsnittlig lengde blir relativt lav. Gjennomsnittsverdien av grotter > 1000 meter er 3200 meter. Gjennomsnittet av kartlagt lengde til de 47 grottene i Kaledonidene er 2765 meter.

Tabell 5. Gjennomsnitlig grottelengde for Kaledonidene. Datagrunnlaget fremgår av tabell 1. Tall i meter.

Grotter lengre enn	Kaledonidene
1	3
10	32
100	317
1 000	3 174
10 000	31 739

10. Areal og volum

Curl (1986) utledet også formler for å beregne samlet grotteareal og grottevolum i en region. Han så for seg at grotten var fylt med kuler (*spheres*) så store at de berørte veggene og/eller tak/gulv. Ut fra dette utviklet han ”*The linked modular element model*”. Samlet grotteareal og grottevolum for en region kan defineres som henholdsvis det totale arealet og det totale volumet av kulene. Formlene innbefatter flere koeffisienter, herunder en fraktal dimensjon for kulene kalt β. Curl (1986) satte β til 2,79. Vi har brukt den samme verdien selv om datasettet for Tjorve (Finnesand og Curl, 2009) neppe støtter den verdien fullt ut. μ er satt til 0,3. Resultatet av beregningene for Norge, Kaledonidene og Jorden fremgår av **Tabell 6**. Det finnes store arealer når kulene er små, og tilhørende volum er lite. Curl (1986) mener det er sekundærporøsitet i bergarten. Arealet basert på kuler mellom 1 og 10 meter er beregnet til ca 1,4 km^2 for Kaledonidene. Det høres ikke ut til å være så mye. Imidlertid er arealet av de kjente deler av f.eks. Tjorve bare 0,1 km^2.

Mangelfull kunnskap om koeffisientene medfører at resultatet av beregningene (**Tabell 6)** blir svært usikre. Det er vanskelig å identifisere et sett med innbyrdes konsistente koeffisienter i formlene når den fraktale verdien er så høy som 1,4 og 1,5. Beregningene er svært følsomme for endringer i β. Kanskje bedre beregninger kan gjøres i fremtiden.

Tabell 6. Grotteareal og -volum for ulike størrelsesintervaller. Beregningene er basert på likning 20 og 21 i Curl (1986). Beregningene er basert på β = 2,79 og μ = 0,3 meter). Grunnlagsdata samme som tabell 2 og 3.

	Areal, km^2			Volum, millioner m^3		
Kuleintervall, m	**Norge**	**Kaledonidene**	**Jorden**	**Norge**	**Kaledonidene**	**Jorden**
0 - 0,001	-	-	-	1,3	1,4	235,8
0,001 - 0,01	286,9	321,1	52 507,5	0,8	0,9	146,6
0,01 - 0,1	46,5	52,1	8 515,7	1,3	1,5	237,8
0,1 - 1	7,5	8,4	1 381,1	2,1	2,4	385,6
1 - 10	1,2	1,4	224,0	3,4	3,8	625,4
10 - 100	0,1	0,2	25,2	2,3	2,6	423,3

11. Diskusjon

Siden grunnlaget for likning 2 i vårt tilfelle er antall grotter ≥ 1055 meter, kan vi neppe bruke likningen til å finne ut om det finnes *flere* grotter > 1000 meter i Kaledonidene. Men ved å løse likning 2 med tanke på *l* (grottens lengde), kan vi beregne den ideelle lengden til enhver rangert grotte, herunder de 47 ≥ 1055 meter. Ideell lengde til grotte nr 1 blir 14,7 km, mens Tjorve er nesten 24 km (King effect). Grotte nr 2 blir på 9,1 km, mens Oksholas kartlagte lengde er 9,5 km. Nr 3 blir på 6,9 km, mens Greft er kartlagt til 6,8 km. Likning 2 kan også brukes til å vise sannsynligheten for å finne en svært lang grotte i Kaledonidene. F.eks. sier likning 2 at det er 0,06 grotter > 100.000 meter, noe vi tolker som om det er 6 % sannsynlighet for å finne en grotte > 100.000 meter i Kaledonidene.

Curl (1986) opplyser at likning 2 kan brukes ned til grotter på 0,5 meter (modulus), men som nevnt innledningsvis vil vi som oftest ikke oppfatte slike korte hull eller groper som grotter. Således blir det feil å si at det er 1,2 mill grotter i Norge > 1 meter (**Tabell 1**). Det synes imidlertid rimelig å anta at objekter > 10 meter oppfattes av oss som ”grotter”.

Men finnes det virkelig 1450 grotter > 100 meter og 42.000 grotter > 10 meter i Kaledonidene? Likning 2 gir svært høye tall dersom fremt den fraktale verdien er så høy som 1,46. En indikasjon på om likningen stemmer kan vi få ved å studere antall grotter i områder som er godt utforsket:

Det finnes mange korte grotter på Glomfjellplatået, særlig i form av trunkerte rester av det som engang var større systemer og sedimentfylte smågrotter. Området er bart og det er lett å identifisere grottene. Ut fra data i hovedfagsoppgaven til Solgunn Finnesand (en del av den er presentert i NGB nr 42 2004) er det funnet 4 grotter > 100 meter og anslagsvis 60 grotter > 10 meter. Likning 2 sier at det skal være over 100 grotter > 10 meter på Glomfjellplatået (**Tabell 7**). Selv om de sentrale områdene er grundig undersøkt, vil man nok kunne finne flere ”ti-metringer” eller lengre grotter. Men det synes umiddelbart vanskelig å tro at antallet skal kunne dobles.

Forøvrig indikerer likning 2 at det er liten sjanse (14 %) for å finne en grotte > 1000 meter på det sentrale Glomfjellplatået.

Svenskene er flinke til å lete opp og registrere grotter. I følge den svenske grottedatabasen til SSF er antall marmorgrotter svensk del av Kaledonidene > 100 meter 40-50 stk, mens likning 2 tilsier 144 stk. Man vil finne flere, men at antallet skal kunne tredobles høres usannsynlig ut.

Trevor Faulkner har registrert 8 grotter > 1000 meter, 149 grotter > 100 meter, 605 grotter > 10 meter og 880 grotter > 1 meter i det sentrale Skandinavia (Faulkner 2005). Trevor er grundig. Riktignok har han ufullstendige data om 40 grotter til, men likevel finner han ikke nok grotter til å bekrefte at likning 2 er korrekt (**Tabell 2**). Kanskje det er mulig å finne en del flere grotter > 100 meter, men å finne tusenvis med grotter > 10 meter synes vanskelig.

Trevor beregnet antall grotter i søndre Nordland til å være 5624 (Faulkner 2007) og i Sentralskandinavia til å være 6386 (Faulkner 2005). 70 % er > 10 meter. Samlet overflate med marmor er i overkant av 800 km^2 og samlet lengde på marmoren er ca 3000 km (Faulkner 2005, tabell 4.1). Vi kunne dermed ha estimert antall grotter i Kaledonidene dersom vi hadde visst det totale marmorflatearealet eller total lengde. Det er vanskelig å avgjøre om grottene er representative, da marmoren ofte har en nesten vertikal foliasjon og domineres av Helgeland Nappe kompleks som ikke finnes andre steder (Faulkner pers. komm). Dersom vi antar at hans område inneholder i størrelsesorden ¼ av all marmor i Kaledonidene, skulle antall grotter > 10 meter bli 17-18.000 stk. Med bedre dokumentasjon kan estimeringen bli bedre, men uansett synes det ikke å stemme overens med resultatene i **Tabell 2**. Forøvrig påpekte Trevor, neppe uten en viss humor, at "... there may be > 17.000 caves > 10 m long in total, but it will take thousands of years to find and survey them (if the next glaciation does not come first!)".

Eksemplene over viser at det kanskje ikke finnes så mange grotter som vist i **Tabell 2**. En forklaring kan være at likning 2 ikke er helt korrekt: Spørsmålet er om diameteren på en grotte er uavhengig av en grottes lengde. Et par eksempler kan illustrere dette: Kanskje grotter kan sammenlignes med trær og klatring. Hvor langt (ikke høyt) kan du klatre i et tre? Bare langs greiner som tåler vekten din. Hva med korte trær da? Det er ikke så mange klatrebare korte trær, men det kan tenkes at det en gang var et stort tre der stammen er brekt av etter 1 m (tilsvarende ei kollapset stor grotte). Elver følger kanskje også en power law. Hva er en elv? Vi kan f.eks. definere en elv som der det renner mer enn 1 m^3 per sekund. Er det da sannsynlig at det er nærmest uendelig mange "elver" med 1 m lengde? Nei! Grotter ser ut til å være fraktaler eller å ha fraktale egenskaper, men kanskje likningen ikke helt stemmer for $\mu > 0$. Modulus synes nødvendig for å kunne definere en grottes "lengde", men synes å redusere grotta som fraktal. Det hadde vært spennende å ha datamateriale som kunne belyst flere sider av grottenes fraktale verdier og likning 2. For eksempel å benytte grottevolum i stedet for grottelengde i likning 2.

En alternativ forklaring kan være at den fraktale verdien skulle vært lavere enn det vi har beregnet. Kanskje datasettet er for lite og upresist (dvs. stor usikkerhet) til at den kan beregnes en fraktal verdi eller at datasettet er vesentlig mindre komplett enn antatt (kanskje det finnes mange flere grotter i Kaledonidene som er > 1000 m?). En fraktal verdi på f.eks. 1,3 gir vesentlig mindre antall grotter enn en fraktal verdi på 1,5 (**Tabell 7**). En fraktal verdi på 1,3 har forholdsvis flere lange grotter i forhold til korte sammenlignet med en fraktal verdi på 1,5.

Tabell 7. Observerte kalkgrotter på de sentrale deler av Glomfjellsplatået og beregnet antall grotter i samme område basert på tre ulike fraktale verdier.

Grotter lengre enn, m	Observert	v = 1,3	v = 1,4	v = 1,5
1	120	1 592	2 524	4 000
10	60	80	100	126
100	4	4	4	4
1 000	0	0	0	0

Engelske grottere, anført av Trevor Faulkner, med et imponerende antall dager i felten i det sentrale Skandinavia. Nærmere 200 karbonatforekomster (av ca 1000) er undersøkt. 884 grotter er funnet og registrert. Alan Marshall (vært 11 ganger til Søndre Nordland), Nigel Graham (sittende, 9 ganger), David St. Pierre (over 30 ganger) og Trevor Faulkner (20 ganger). Grottene er omtalt i Trevors doktoravhandling fra 2005. Foto: Torstein Finnesand aug 2010.

Det beregnede fraktale verdiene på våre datasett har et brukbart, men ikke overbevisende samsvar med en power law, ref de relativt høye kvantilverdiene i **Tabell 1**. 0,95 eller 0,90 ville vært bra. Clauset et al. (2009) identifiserte eksponenten til 24 ulike datasett ved å finne den *delen* av datasettet som ga lavest K-S verdi. Vi gjorde derfor tilsvarende på våre datasett og resultatene fremgår av **Tabell 8**. Den fraktale verdien er vist som linjer på **Figur 2**. Resultatene er svært annerledes enn beregningene basert på *hele* datasettet (**Tabell 1 og Figur 1)**. For det første er K-S verdien lavere enn K-S verdien for en kvantil på 0,9. Ergo er det sannsynlig at denne delen av datasettet er en power law. Imidlertid er power law bare bevist for en del av datasettet. For f.eks. Kaledonidene inngår bare 26 største av våre 47 grotter. For det andre er de fraktale verdiene endret. De har økt med 0,1 – 0,3. Det kan virke som om datasettene representerer vel så mye en bue som en linje. Det kan se ut som om likning 2 bare gjelder for de lengste grottene (dvs. i halen, "tail"), så fremt ikke datasettene brukt i denne artikkelen blir vesentlig "forbedret" i de nærmeste tiårene. Clauset et al. (2009) sier: "In practice, few empirical phenomena obey power laws for all values of x. More often the power law applies only for values greater than some minimum Xmin. In such cases we say that the tail of the distribution follows a power law." De nevner også at andre formler enn power laws kan forklare datasett som i første omgang synes å være basert på en power law, særlig for små datasett (som Kaledonidene).

En tredje forklaring kan dreie seg om hvorvidt beregnet antall grotter > 100 m og > 10 m omfatter noe mer enn våre klassiske grotter. En mulighet er at antallet inkluderer grotter

Tabell 8. Beregnet fraktal verdi for ulike regioner, ved bruk av MLE og MKM. Fraktal verdi er beregnet ved bruk av MLE og ut fra den delen av datasettet som gir lavest K-S verdi.

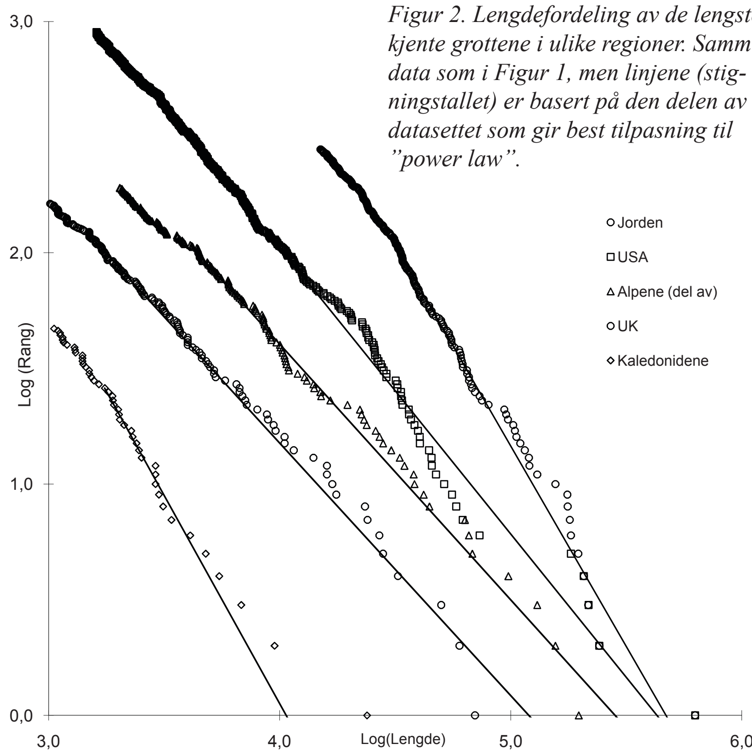
							Fraktal verdi	
Region	**Datakilde**	**Xmin, m.**	**Antall**	**Spennvidde**	**K-S verdi**	**Kvantil**	**MLE**	**MKM**
Jorden	CaverBoB	28 968	125	22	0,0452	0,900	1,73 (0,16)	1,64
USA	CaverBoB	2 897	490	217	0,0247	0,900	1,24 (0,06)	1,21
Alpene	Sum av tre kilder	4 100	108	48	0,0501	0,900	1,11 (0,11)	1,07
Storbritannia	UKCaves	1 433	123	49	0,0413	0,900	1,08 (0,10)	1,07
Kaledonidene	St. Pierre m.fl.	1 750	26	14	0,0591	0,900	1,80 (0,35)	1,37

som er store, men som vi ikke har tilgang til, ref. Curls ”entranceless caves”. Trolig er det mange romslige sideganger i Tjorve som vi ikke når grunnet sammenrasninger, sedimentinnfyllinger eller rett og slett for trangt parti i forkant. Det er derfor ønskelig å beregne den fraktale verdien på et datagrunnlag som inkluderer grotter uten åpninger, slik Curl har gjort, på et mer omfattende og presist grottedatasett for Kaledonidene og ved å ta i bruk enda bedre statiske metoder.

Økt kartlegging og økt registrering av grotter vil bedre datagrunnlaget for å beregne antall grotter i Norge. Er f.eks. grottene angitt å være lik 1000 meter kortere eller lengre enn 1000 meter?

12. Referanser

- Clauset, A. C, R. Shalizi og M. E. J. Newman. 2009: Power-law distributions in empirical data. *IAM Review* 51: 661–703. http://arxiv.org/abs/0706.1062v2.
- Curl, R. L. 1966: Caves as measure of Karst. *The Journal of Geology* vol 74 nr 5 del 2 s 798-830.
- Curl, R. L. 1986: Fractal dimensions and geometric of caves. *Mathematical Geology* 18(8), s. 765-783. http://hdl.handle.net/2027.42/43195.
- Curl, R. L. mai 2007: E-post korrespondanse om formlene i Curls 1986-artikkel.
- Edwards, A. M. 2008: Using likelihood to test for Lévy flight search patterns and for general power-law distributions in nature. *Journal of Animal Ecology*, 77:1212-1222.
- Faulkner, T. L. 2005: Cave Inception and Development in Caledonide Metacarbonate Rocks. PhD thesis, *University of Huddersfield*.
- Faulkner, T. L. 2007: Hvor mange grotter finnes det i søndre Nordland? *Norsk Grotteblad* 48. s. 22-24.
- Finnesand, S. 2004: Grotter i Glomfjellsområdet ved Svartisen. *Norsk Grotteblad* 42. s 3-34.
- Finnesand, T. og R. L. Curl. 2009: Morphology of Tjoarvekrajgge,- the longest cave of Scandinavia. *2009 ICS Proceedings. 15th International Congress of Speleology*.
- Goldstein, M. L, S. A. Morris og G. G. Yena. 2004: Problems with fitting to the power-law distribution. *Eur. Phys.* J. B 41, s. 255–258.
- http://tuvalu.santafe.edu/~aaronc/powerlaws: Nettsiden til Aaron Clauset, med artikler, datasett og programvare.
- Lauritzen, S. E. 1991: Karst resourches and their conservation in Norway. *Norsk Geografisk Tidsskrift* 45, s. 119-142.
- Lauritzen, S. E. 2010: Grotter. Norges ukjente underverden. *Tun forlag*. 239 sider.
- Newman, M. E. 2006: Power laws, Pareto distributions and Zipf›s law. http://arxiv.org/abs/cond-mat/0412004v3.
- Sjøberg, R. Grottor i Sverige över 500 m längd.
- SSFs Grottdatabas: Data per november 2010.
- St. Pierre, D. 2003: Norges lengste og dypeste grotter. *Norsk Grotteblad* 40, s 3-10.
- White, E. P, B. J. Enquist og J. L. Green. 2008: On estimating the exponent of power-law frequency distributions. *Ecology*, 89(4), 2008, pp. 905–912.
- www.arge-grabenstetten.de/forschung/sonstiges/laengsteundtiefste/index.htm: Liste over Tysklands lengste grotter. Datauttrekk desember 2010.
- www.caverbob.com: Liste over Verdens lengste og USAs lengste grotter. Datauttrekk oktober 2010.
- www.hoehle.org/long&deep.php: Pdf-fil med liste over de lengste grottene i Østerrike per desember 2010.
- www.speleo.ch/~documents/cavites_de.php: Pdf-fil med liste over de lengste grottene i Sveits. Datauttrekk desember 2010.
- www.speleo.no: Liste over Norges lengste grotter. I hovedsak data fra David. St. Pierre. Datauttrekk oktober 2009.
- www.ukcaves.co.uk/all-longest: Liste over Storbritannias lengste grotter. Datauttrekk november 2010.



Figur 2. Lengdefordeling av de lengste, kjente grottene i ulike regioner. Samme data som i Figur 1, men linjene (stigningstallet) er basert på den delen av datasettet som gir best tilpasning til ”power law”.