Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

# Matematikkeksamen gjennom tre reformer

En analyse av avgangseksamen på høyeste nivå i den videregående skolen

—

**Heidi Nygård Arntzen**

*Masteroppgave i pedagogikk, mai 2015*

## FORORD

Min bakgrunn er fra Universitetet i Tromsø der jeg studerte matematikk, informatikk og pedagogikk på 80- og 90-tallet. Senere har jeg arbeidet flere år i skoleverket, både i ungdomsskolen og i den videregående skolen, der jeg i all hovedsak har undervist i informatikk og matematikk.

Et masterstudium ved siden av full jobb har vært både krevende og utfordrende, men også lærerikt og spennende. Arbeidet med denne oppgaven har omfattet en stor mengde data og informasjon, og har krevd rikelig med tålmodighet og god struktur. Det er mange som skal takkes.

Jeg vil rette en takk til min biveileder Anne Birgitte Fyhn, som etter et besøk på min arbeidsplass, satte meg på tanken om å ta en master. Videre vil jeg takke min hovedveileder Per Øystein Haavold for konstruktive innspill og konkrete tilbakemeldinger underveis i arbeidet.

Takk til en alltid positiv avdelingsleder ved min arbeidsplass, som i en hektisk hverdag la til rette for utallige turer til Tromsø gjennom to år.

Den største takken går til en tålmodig familie, for omtanke, korrekturlesning, gode samtaler og diskusjoner. Uten dere hadde jeg ikke kommet i havn.

Harstad, mai 2015

Heidi Nygård Arntzen

## SAMMENDRAG

Elever i norsk skole har de siste årene deltatt i flere nasjonale og internasjonale studier. Nedslående norske resultater, spesielt i matematikk, får mye oppmerksomhet. Resultatene av disse undersøkelsene påvirker utdanningspolitikken i Norge. Nye reformer, med nye lærebøker og nye eksamensformer er iverksatt, med ønske om å bedre kvaliteten i norsk skole. Eksamen er en av flere faktorer som påvirker undervisningspraksisen i skolen. Dette er utgangspunktet for denne oppgaven, som har sett på endringer i matematikkeksamen på høyeste nivå i videregående skole gjennom de tre siste reformene.

Masteroppgaven presenterer resultatene av en analyse av 30 eksamenssett, med til sammen 1120 deloppgaver i tidsrommet 1978 til 2013. Studien benytter en tilpasset versjon av rammeverket til TIMSS Advanced 2008, og gjør en analyse av alle deloppgaver i forhold til innholdskategori, type matematikk og kognitivt nivå.

Algebra er et emne som peker seg ut med svake norske resultater. Analysen viser at den største observerte endringen når det gjelder innholdskategori, er *algebra*. Under Reform 94 var det en markant nedgang i andelen algebraoppgaver gitt til eksamen. Dette har endret seg med Kunnskapsløftet, der andelen algebraoppgaver nesten er tilbake på samme nivå som under Reform 74. Analysen viser også at en større andel av algebraoppgavene fra Reform 74 lå på et høyere kognitivt nivå enn for de andre to reformene. Under Kunnskapsløftet har andelen av oppgaver i kategorien *å kunne* hatt en stor økning. Videre skiller Reform 94 seg ut med en langt høyere andel oppgaver av typen *anvendt matematikk*. Oppgaver av typen *å resonnere* er lavt representert i alle tre reformene.

# INNHOLD

# 1. INNLEDNING

## 1.1 Bakgrunn for valg av tema

Skolen har en viktig oppgave når det gjelder å formidle kunnskap og verdier. Utdanning har verdi både for den enkelte og for samfunnet. Skolen har som formål å hjelpe den enkelte til å utnytte sine evner og anlegg, og å formidle kunnskap og verdier som tjener samfunnets beste. For den enkelte elev har opplæringen betydning for utdanningsforløp og karriere, og er i mange sammenhenger en nødvendig forutsetning for å oppnå andre goder i livet. I tillegg til at skolen skal gi faglig utbytte til unge mennesker, betraktes den som en av de viktigste arenaene for utjevning av sosiale forskjeller.

Politikere fra ulike ståsteder hevder at å satse på utdanning er helt avgjørende for Norges framtid. De viser til at offentlige og private aktører i stadig større grad etterspør arbeidskraft med formell kompetanse. I noen grad dreier debatten seg om hvilken kompetanse som etterspørres, og i hvor stor grad skolen er tilpasset denne etterspørselen.

I Norge brukes mye ressurser på skolen. I likhet med de fleste andre vestlige land, har det vært en økning i det generelle utdanningsnivået de siste tiårene. Andelen av befolkningen som tar utdanning ut over grunnskolen har økt betraktelig, og de aller fleste tar i dag videregående opplæring. Samtidig har det skjedd en utjevning mellom by og land og mellom kjønn. I takt med samfunnsendringer har skolen vært gjennom omfattende reformer og evalueringer av disse.

Norske skoleelever har de siste årene deltatt i flere nasjonale og internasjonale studier knyttet til undervisning og utdanning. Resultatene av disse undersøkelsene får mye oppmerksomhet, og påvirker utdanningspolitikken i Norge. Elevenes faglige prestasjoner blir på en del områder betraktet som nedslående, og viser et middels kompetansenivå internasjonalt, både i lesing, naturfag og matematikk. I tillegg er forskjellene mellom norske elever store, til tross for vårt sterke likhetsideal (Grønmo et al, 2010).

Også universiteter og høyskoler gir uttrykk for en økende bekymring over studentenes manglende kunnskaper innen realfag, og da spesielt matematikk. Verdens Gang (7.2.2014) omtaler en rapport fra Eurostudent, som viser at norske studenter bruker langt mindre tid på studier enn studenter fra resten av Europa. I samme avis leser vi kunnskapsminister Torbjørn Røe Isaksens bekymring:

*"Jeg frykter i verste fall at dette handler om en kultur hvor vi systematisk forventer for lite av elever og studenter, og dermed legger opp en undervisning som er mindre ambisiøs enn den kunne vært. "*

De skuffende norske resultatene har skapt mange avisoppslag, og har engasjert både politikere, forskere, lærere, foreldre og elever. Flere har gitt uttrykk for en noe kritisk holdning til de ulike testene, og mener at testene spiller en for dominerende rolle i skolen. Argumentasjonen går i noen grad ut på at testene reflekterer et smalt spekter av de målene det er enighet om at skolen i Norge skal oppfylle. Testene har som formål å måle kunnskap og fagkompetanse, og i mindre grad elevenes evne til kritisk tenkning, samarbeid eller mellommenneskelig forståelse. Professor Svein Sjøberg er en av dem som har frontet kritikken mot disse testene, og mener at dette testregimet tar oppmerksomheten vekk fra hva skole og utdanning skal handle om (Bedre skole 4/2014).

I denne sammenhengen er det relevant å spørre i hvilken grad drilling av oppgavetyper som går igjen i disse testene, blir vektlagt i forhold til skolens intensjon og målsetting. Samtidig sier omfanget noe om hvilken betydning slike undersøkelser tillegges av dem som styrer skolen. Ønsket er at informasjonen fra disse testene skal bidra til en faglig utvikling av skolen. Slik sett dreier debatten seg om hvorvidt testene gir et korrekt bilde av de mål vi har for utdanningen, og om vi får de ønskede effekter av de store ressursene vi bruker på skolen. Det snakkes om ”kvalitetskrise” i skolen, og man diskuterer hvorvidt det mange kaller for ”reform-iveren” i norsk skole, har vært vellykket.

Mange har sterke meninger om skolen. Diskusjonen om skolens innhold og kvalitet har stor aktualitet. Fordi skolen er en samfunnsinstitusjon vi alle har opplevd på nært hold, preges skoledebattene av heftige meningsytringer om hvorvidt den norske skolen er bra eller dårlig. Debatten om norsk skole er en levende debatt, slik den skal være i et demokrati.

## 1.2 Problemstilling og avgrensning

Både av politikere og i mediene blir nasjonale og internasjonale undersøkelser brukt som referansegrunnlag for å bedømme kvaliteten i norsk skole. Det har blitt uttrykt bekymring over for dårlige prestasjoner i matematikk gjennom flere år, og ulike tiltak er iverksatt med ønske om å snu den negative trenden.

Med nye utdanningsreformer blir det gjort forsøk på å imøtekomme endringer og krav fra samfunnets side. Nye læreplaner utvikles, motivert av et ønske om blant annet bedre læringsutbytte. Disse har i ulik grad medført endrede målformuleringer, nye lærebøker og nye eksamensformer. I videregående skole står læreboka sentralt i undervisningen. Det samme gjør eksamen, som skal vurdere i hvilken grad elevene har nådd målene som er nedfelt i læreplanen.

Eksamensoppgavene skal måle de kunnskaper og ferdigheter som elevene har tilegnet seg i løpet av skoleåret. Ulike studier viser en sammenheng mellom vurdering og undervisningspraksis i skolen. I følge Bergqvist (2007) er eksamensoppgavene en rettesnor for hva lærerne ser på som relevant. Kane, Crooks and Cohen (1999), påpeker at flere studier viser at vurdering generelt påvirker elevenes arbeidsinnsats. Elevene engasjerer seg mer aktivt i oppgavetyper de vet kan bli gitt i vurderingssammenheng.

Wilson (2007) bruker begrepet ”high-stakes tests” om tester, eksempelvis eksamen, som kan ha betydning i forhold til videre utdanning og arbeid. Hun har gjort en studie som belyser hvilken påvirkning slike tester har på undervisningen. Hun finner, i likhet med Bergqvist, at lærere tilpasser undervisningen etter vurderingsformene, Også Alseth et al (2003) mener at den skriftlige eksamen i matematikk er sterkt styrende for undervisningen:

"Vurdering *har hele tiden vært et viktig pedagogisk diskusjonsemne. I særlig grad synes sluttvurdering å ha en styrende effekt på praksis i skolens matematikk"* (s 18). Videre heter det (s 43): "Samtidig *finnes det fortsatt et felles pensum og felles skriftlig eksamen som er sterkt styrende for innholdet i norsk matematikkundervisning."*

Jarning (2010) omtaler utviklingen av kunnskapskontroll og resultatvurdering over tid. Skolen reguleres gjennom lover og læreplaner, mens eksamen og tester er viktige sider ved sluttkontroll. I følge Jarning (2010) har eksamen fungert som kontrollfunksjon og skapt læringstrykk. Videre sier han at design av eksamensterskler har vært viktige tiltak for å gi retning og dynamikk til fagfelt. Fordi eksamensoppgavene gir et bilde av hvilke kunnskaper det er forventet at elevene skal ha, og samtidig er styrende for undervisningen, mener Bergqvist (2007) utformingen av eksamensoppgavene burde være gjenstand for mer forskning.

Utformingen av eksamen har praktiske konsekvenser både for elever og lærere, og endringer i eksamensoppgavenes form og innhold vi kunne påvirke undervisningspraksis. Kartlegging av endringer i eksamensoppgavene over en lengre periode, kan slik sett si noe om endrede forventninger til elevene og endringer i undervisningspraksis.

Skolen har vært mitt arbeidsfelt i mer enn tjue år, og som lærer i matematikk har jeg fulgt flere elevkull gjennom undervisning og eksamen gjennom de tre siste reformene. Eksamen gjenspeiler de forventninger som stilles til elevenes kunnskaper i et fag. I debatten om stadig dårligere resultater i matematikk, blir det derfor relevant å se på hvordan eksamen har endret seg over tid. Jeg har derfor valgt å undersøke i hvor stor grad avsluttende skriftlig eksamen i matematikk har endret seg gjennom de tre siste læreplanperiodene, i innholdsmessig og kognitiv forstand.

Dette er utgangspunkt for følgende problemstilling:

*Hva kjennetegner det matematiske og kognitive innholdet i matematikkeksamen fra de tre siste læreplanperiodene?*

Denne problemstillingen blir videre utdypet gjennom følgende tre spørsmål:

1. *Hvilke forskjeller og likheter er det mellom eksamensoppgaver i matematikk når det gjelder innholdskategorier?*

2. *Hvilke forskjeller og likheter er det mellom eksamensoppgaver i matematikk når det gjelder forholdet mellom ren og anvendt matematikk?*

3. *Hvilke forskjeller og likheter er det mellom eksamensoppgaver i matematikk når det gjelder kognitivt nivå?*

Det første spørsmålet tar for seg hvordan ulike innholdskategorier fordeler seg under reformene. I denne oppgaven benyttes også begrepene *tema* og *emne* om innholdskategorier. Det andre spørsmålet ser på forholdet mellom oppgaver som er av ren matematisk art og oppgaver satt inn i en praktisk eller dagligdags kontekst. Det siste spørsmålet tar for seg hvilket kognitivt nivå de ulike oppgavene representer, og fordelingen av disse. Med kognitivt nivå menes hvilke kunnskaper og ferdigheter det er forventet at elevene skal bruke for å kunne løse oppgaven.

Av hensyn til masteroppgavens omfang, har jeg valgt å avgrense analysen til ett undervisningstrinn. En av de internasjonale undersøkelsene retter seg mot elever som tar høyeste nivå i matematikk i videregående skole. Analysen er derfor avgrenset til eksamensoppgaver for avgangselever i utdanningsprogrammet som nå kalles studiespesialisering. Dette faget har endret navn gjennom ulike læreplaner, fra 3MN under Reform 74, til 3MX under Reform 94, og dagens R2 etter Kunnskapsløftet. Dersom forventningene til elevene har endret seg over tid, er det nærliggende å tro at dette vil kunne komme til uttrykk gjennom endringer i eksamensoppgavene.

Det kunne vært relevant også å undersøke hvordan karakterene fordeler seg etter sensurering av eksamen, og hvordan fordelingen har endret seg over tid. En slik karakterfordeling har ikke vært mulig å få tak i for eksamen gitt under Reform 74, og bare delvis for Reform 94. Karakterfordelingen for de ulike eksamensoppgavene vil derfor ikke bli tatt med i denne oppgaven. De ulike fagplanene i matematikk, endringer, og prosesser som har ført fram til disse endringene, vil bli nevnt, uten at det vil bli gått i detalj inn på dette.

## 1.3 Nasjonale og internasjonale undersøkelser

Skolemyndighetene har et ønske om og et behov for å vite om elevene tilegner seg ønskede kunnskaper og ferdigheter. Økt internasjonalisering gjør det viktig også å kunne vurdere norsk opplæring i et internasjonalt perspektiv. Elever i norsk skole deltar i flere internasjonale komparative studier. Indikatorer og målinger er blitt en del av skolenes hverdag. TIMSS og PISA er internasjonale studier rettet mot elever i grunnskolen, mens TIMSS Advanced er rettet mot elever i den videregående skolen. Resultatene av undersøkelsene i grunnskolen har betydning også for elevene i videregående skole. Den kompetansen elevene opparbeider seg tidlig i skolegangen, vil kunne legge føringer for undervisningsopplegget i videregående skole, og ha innflytelse på elevenes valg av fordypning i matematikk. Elevenes prestasjoner og interesse for matematikk er også påvirket av andre faktorer, som eksempelvis lærerens kompetanse og elevenes hjemmeforhold.

### 1.3.1 Pisa

PISA (Programme for International Student Assessment) er en internasjonal undersøkelse der man har som mål å kartlegge 15-åringers kompetanse og ferdigheter innenfor fagområdene lesing, matematikk og naturfag. Denne aldersgruppen vil i de fleste land være ferdig med den obligatoriske skolegangen, og PISA ønsker å undersøke hva elevene på dette tidspunktet behersker i kjernefagene.

PISA arrangeres i regi av OECD (Organisation for Economic Cooperation and Development), der den norske delen av PISA prosjektet er finansiert av Kunnskapsdepartementet. PISA-undersøkelsen gjennomføres hvert tredje år, og fokuset på de ulike fagene varierer. Norge har deltatt siden oppstarten i 2000. Undersøkelsen tar ikke utgangspunkt i landenes læreplaner, men er i hovedsak ment å måle elevenes evne til å bruke kunnskaper og erfaringer i konkrete situasjoner. Undersøkelsen ønsker samtidig å belyse hvilke faktorer som fremmer god læring, eksempelvis i hvor stor grad elevenes sosiale bakgrunn og skolens ressurser påvirker prestasjonene. Resultatene fra 2006 viser at Norge kom dårligst ut i Norden, der Finland skiller seg ut med et høyt gjennomsnitt og liten spredning mellom elevene. Innenfor matematikk presterer de østeuropeiske landene langt over OECD-gjennomsnittet, mens norske elever ligger rundt gjennomsnittet. Resultatene fra siste Pisa-undersøkelse i 2012, viser at så mange som en av fem norske elever ligger under kritisk nivå i matematikk. Etter en liten bedring fra 2006 til 2009, viser de siste resultatene at norske elevers prestasjoner igjen peker nedover (Kjærnsli & Olsen, 2013).

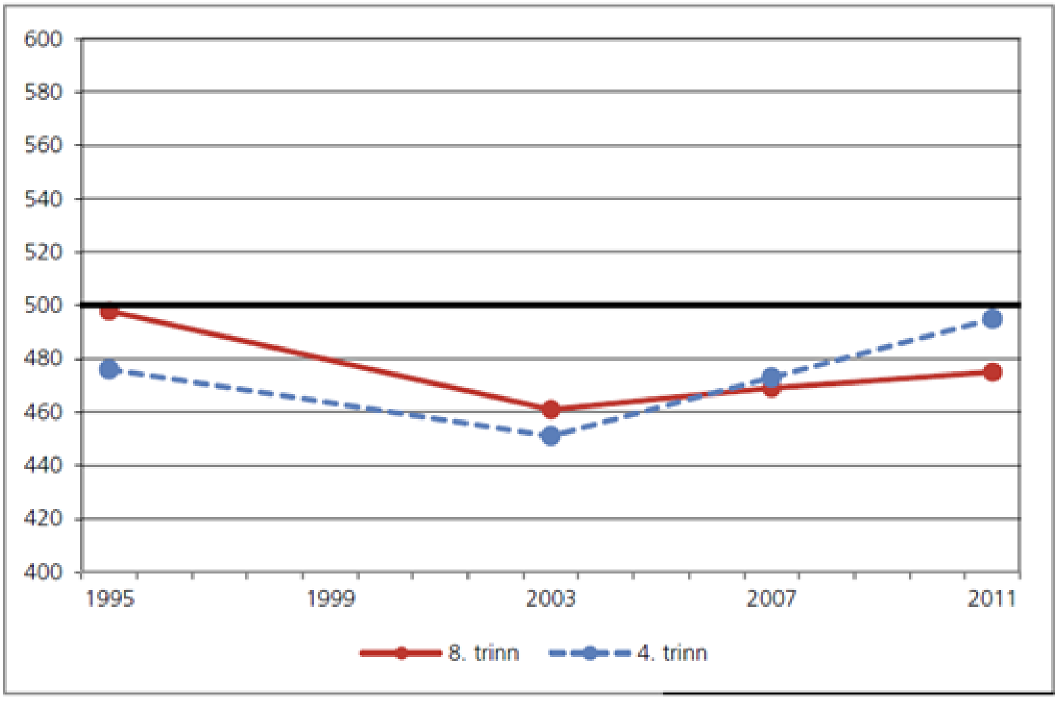
### 1.3.2 TIMSS

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) er en annen internasjonal komparativ studie av matematikk og naturfag i grunnskolen. TIMSS gjennomføres i regi av IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement), og sammenligner elevprestasjoner både nasjonalt og internasjonalt. Denne undersøkelsen gjennomføres i 4. og 8. klasse, og søker i likhet med Pisa-undersøkelsene å belyse faktorer som påvirker læringsutbyttet. TIMSS gjennomføres hvert 4. år og kartlegger elevenes kunnskaper, ferdigheter og holdninger i matematikk og naturfag. Norge har deltatt i TIMSS i 1995, 2003, 2007 og i 2011. Elever, lærere og skoleledere besvarer egne spørreskjemaer, der hensikten er å få et best mulig grunnlag om hva som påvirker elevenes resultater på en positiv måte. Målet med dette er å kunne si noe om hva som kjennetegner skoler som presterer bra (Grønmo et al, 2012).

Resultatene fra TIMSS 2011 viser tegn til bedring i norske elevers prestasjoner i både matematikk og naturfag. I rapporten for TIMSS 2011, *Framgang, men langt fram*, blir det likevel påpekt at det fortsatt er et stykke fram til at vi kan si at vi presterer godt, både i et nasjonalt og internasjonalt perspektiv. I et internasjonalt perspektiv er de norske prestasjonene fortsatt svake. Norske elevers prestasjoner ligger like under gjennomsnittet både i 4. og 8. klasse (Grønmo et al, 2012).

Sammenlignet med de øvrige nordiske landene, framstår de norske resultatene noe bedre enn i et internasjonalt perspektiv. Mens Norge og Sverige hadde den samme negative tendensen fra 1995 til 2003, viser svenske elever ingen tegn til bedring, og fortsetter sin negative trend. Også Finland har hatt en markant nedgang fra 1999 til 2011. Det blir påstått at det i de nordiske landene har vært lagt stor vekt på dagligdagsmatematikk, og mindre vekt på den matematikken elevene trenger for videre studier og profesjoner (Grønmo et al, 2012).

TIMSS er en trendstudie, det vil si at undersøkelsen er designet for at man i tillegg til å sammenligne mellom land, også legger til rette for å kunne måle utvikling over tid. I TIMSS 2011 er norske elevers prestasjoner bedre enn i 2007, både i matematikk og naturfag på begge trinn. Utviklingen i matematikkprestasjoner for norske elever illustreres i figuren under, hentet fra rapporten *Framgang, men langt fram* (Grønmo et al, 2012, s 17).



Figur 1 - Utvikling i norske elevers matematikkprestasjoner på 8. og 4. trinn i perioden 1995- 2011.

Figuren viser at det er en nedgang i norske elevers matematikkprestasjoner fra 1995 til 2003 på begge trinn, mens det fra 2003 til 2011 er en bedring. Skalamidtpunktet på 500 er markert på figuren. Etter nedgangen i 2003, ble det gitt ekstra ressurser til matematikkundervisningen på barnetrinnet. Dette kan være en medvirkende årsak til bedringen. På tross av framgang i prestasjoner, viser testene at norske elever mangler grunnleggende kunnskaper i matematikk. I rapporten *Framgang, men langt fram* (Grønmo et al, 2012), uttrykkes det en spesiell bekymring når det gjelder å ivareta de flinke elevene. Norge har klart færre elever som når opp til de høyeste kompetansenivåene i matematikk i TIMSS 2011 enn i 1995. Det vises til at den identifiserte framgangen først og fremst gjelder for de faglig svake gruppene. Ved at vi ikke tar godt nok vare på de talentfulle elevene i grunnskolen, risikerer vi å miste de elevene det er mest aktuelt å rekruttere til realfag i videregående skole.

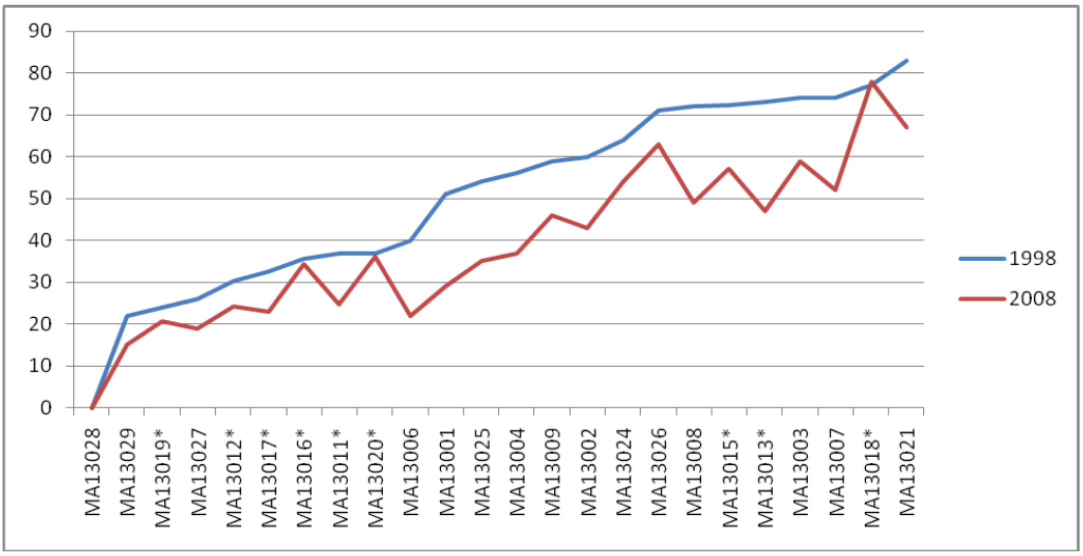
### 1.3.3 TIMSS Advanced

I 1995 ble TIMSS utvidet til også å gjelde elever i avgangsklassene i videregående skole. TIMSS Advanced er som andre TIMSS-undersøkelser i grunnskolen, gjennomført i regi av IEA. *Advanced* viser til at studien omhandler elever som velger full fordypning i matematikk eller fysikk i det siste året på videregående skole.  Dette er elever som har valgt flere realfag, og som vi derfor kan anta er motiverte for å lære matematikk. Studien ble gjennomført i 1995 og i 2008. Også denne studien er designet slik at den i tillegg til å sammenligne resultater mellom land, kan måle utvikling over tid. Norge deltok ikke i den internasjonale studien i 1995, men gjennomførte 1995-studien i 1998. Dette gir en noe større usikkerhet forbundet med norske data fra 1998 enn om de hadde deltatt i 1995. De norske resultatene kom ikke med i den internasjonale databasen, og er dermed ikke med i grunnlaget for den standardiserte skalaen eller beregning av det internasjonale skalerte gjennomsnittet.

Resultatet gir likevel inntrykk av hvordan Norge gjorde det i forhold til andre land, og gir også et grunnlag for å sammenligne endringer i norske prestasjoner fra 1998 til 2008 (Grønmo et al,2010).

I TIMSS Advanced er det store variasjoner mellom deltakerlandene når det gjelder gjennomsnittlig alder, antall år på skolen og ikke minst hvor stor andel av årskullet som har valgt høyeste nivå i matematikk. I noen land kan avansert matematikk være for en mindre elite, mens det i andre land er et fag for elever i sin alminnelighet. Dette må tas hensyn til når man tolker resultatene. Norske elever presterer en gjennomsnittscore i matematikk på 439. Dette er signifikant lavere enn det internasjonale skalerte gjennomsnittet på 500 (Grønmo et al,2010).

Vel så interessant som å kunne sammenligne resultatene med andre land, er å kunne måle utvikling over tid i eget land. Figuren under er hentet fra boka *Matematikk i motvind*, og viser resultatene fra undersøkelsen TIMSS Advanced for 1998 og 2008 (Grønmo et al, 2010, s 58)



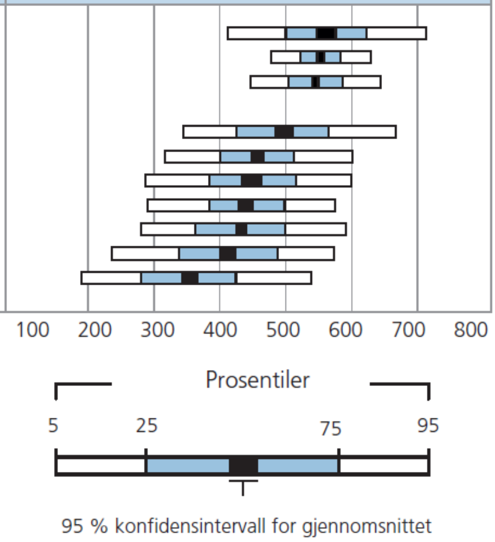

Figur2 - Prosentandelen av norske 3MX-elever som fikk riktig på de oppgavene som var identiske i 1998 og 2008 (trendoppgaver).

Figuren viser at det er en tilbakegang i norske elevers matematikkprestasjoner i 2008 i forhold til 1998. Disse resultatene samsvarer også med resultater fra TIMSS -undersøkelser av elever i grunnskolen. Det var i tillegg en mindre andel av årskullet som valgte matematikk på høyeste nivå i 2008 enn i 1998. Dette til tross for en satsing på økt rekruttering i perioden (Grønmo et al, 2010).

Dette er den første internasjonale studien for videregående skole hvor man kan se på utviklingen av avgangselevers prestasjoner i matematikk over tid. Norske elever presterte i tillegg svakere enn elever i de fleste andre landene som omfattes av studien.

1 Hovedfunn og trender i TIMSS Advanced 2008

| Land | Prosent-andel av årskullet | Alder | År på skolen | Skår | Fordeling av prestasjoner |
|---|---|---|---|---|---|
| Russland | 1,4 | 17,0 | 10 eller 11 | 561 | |
| Nederland | 3,5 | 18,0 | 12 | 552 | |
| Libanon | 5,9 | 17,9 | 12 | 545 | |
| **Skalert gjennomsnitt** | | | | **500** | |
| Iran | 6,5 | 18,1 | 12 | 497 | |
| Slovenia | 40,5 | 18,8 | 12 | 457 | |
| Italia | 19,7 | 19,0 | 13 | 449 | |
| **Norge** | **10,9** | **18,8** | **12** | **439** | |
| Armenia | 4,3 | 17,7 | 10 | 433 | |
| Sverige | 12,8 | 18,8 | 12 | 412 | |
| Filippinene | 0,7 | 16,4 | 10 | 355 | |




Figur 3 - Hovedresultater i matematikk for alle landene som deltok i TIMSS Advanced i 2008.

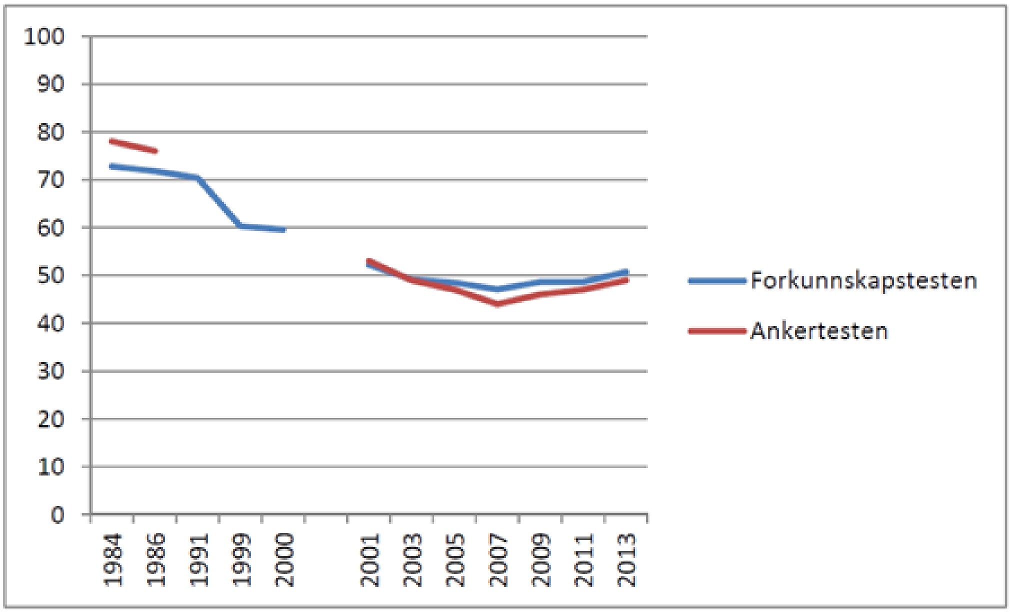
Figuren er hentet fra *Matematikk i motvind (2010, s 15)*, og viser både andelen av elevkullet som velger høyeste nivå i matematikk, gjennomsnittlig alder på de som tar testen, antall år de går på skole, og til slutt gjennomsnittscoren på prøven. Norge scorer relativt lavt med en andel på 10.9 prosent av årskullet som tar høyeste nivå i matematikk. Imidlertid scorer Norge høyere enn Sverige, som har enn litt høyere andel elever med høyeste fordypning. De norske resultatene samsvarer med tidligere analyser av data fra grunnskolen (Grønmo et al, 2010). Neste undersøkelse i TIMSS Advanced skal gjennomføres i 2015, hvor blant annet elever fra min skole skal delta.

### 1.3.4 Norsk matematikkråd

Norsk matematikkråd er et frittstående, rådgivende organ og skal gi råd i saker etter anmodning fra departementer og ulike forsknings- og utdanningsråd. Rådet har jevnlig gjennomført undersøkelser blant begynnerstudenter på det som kan betegnes som matematikktunge studier siden 1984. Studenter som starter på krevende matematikkstudier ved høyskoler og universiteter i Norge, er testet i grunnleggende matematikkunnskaper. Testen konsentrerer seg om basiskunnskaper og basisferdigheter som dekkes av den obligatoriske matematikkundervisningen i norsk skole. Oppgavene er hentet fra grunnskolens pensum, og ligger innenfor områdene tall og tallregning, algebra og geometri. Krevende studier er her definert som studier der studentene leser matematikk tilsvarende ett års studium. Eksempler på studier med et slikt matematikkomfang er lærer-, ingeniør-, økonomi- og realfagsutdanninger. Fra 2001 har testen vært gitt annethvert år og med uendrede oppgaver. Undersøkelsen er ikke en test av den enkelte student, og heller ikke en evaluering av de utdanningsinstitusjonene som deltar (Nortvedt, 2014).

Allerede i 1984 ble forkunnskapstesten gjennomført, fordi en var bekymret over det faglige nivået til begynnerstudentene. Denne bekymringen er også en begrunnelse for senere gjennomføringer, der en kartlegger utviklingen til begynnerstudenters ferdigheter i grunnskolens matematikkpensum. Testen har gjennomgått flere endringer i perioden fra 1984 til 2000, og ble i en periode på nittitallet ikke gjennomført. Testen som ble brukt i 1984 var mer omfattende enn den testen som er brukt de senere årene. I 2001 ble testen revidert, og er siden brukt med uendrede oppgaver. Et utvalg av disse oppgavene har vært med på de fleste gjennomføringer, og gjør det til en viss grad mulig å sammenligne resultatene tilbake til 1980- tallet. Disse oppgavene blir kalt ankertesten, og består av et utvalg på seks oppgaver (Nortvedt, 2014).

Figuren under er hentet fra Norsk matematikkråds forkunnskapstest 2013 (Nortvedt, 2014 s. 11). Den viser resultater fra første gjennomføring i 1984 og fram til 2013, både for studenter på forkunnskapstesten og for ankertesten. Den sterkeste studentgruppen i 2011 oppnådde score klart under gjennomsnittet fra 1984. Det gir grunn til bekymring fordi testen måler basiskunnskaper og ferdigheter fra obligatorisk undervisning i grunnskolen.



Figur 4 -Resultater i prosent på forkunnskapstesten og ankertesten fra 1984 til 2013.

Bruddet i grafen mellom 2000 og 2001 skyldes at testen ble endret flere ganger i perioden fra 1984 til 2001. Samtidig var det endringer i 1991 og 1999 som medførte at ankertesten ikke var komplett ved disse gjennomføringene. Ankertesten viser at studentenes kunnskaper sank i perioden fra 1984 til 2007. I denne perioden begynte en stadig større andel med fullført videregående skole i høyere utdanning. Utvalget av studenter som deltar på testen endres dermed fra gjennomføring til gjennomføring. Strukturen i høyere utdanning har også endret seg gjennom de siste årene. Universiteter og høyskoler er slått sammen, noen høyskoler har fått universitetsstatus, og kurstilbudet endres over år. Det kan derfor stilles spørsmål om det er sammenlignbare grupper som studeres. Sammenligning over tid og mellom ulike studentgrupper er vanskelig. I tillegg er testen revidert. Også denne testen har vært gjenstand for kritikk.

Denne oppgaven tar ikke stilling til gjennomføring eller diskusjonen rundt resultatene. I følge Norsk matematikkråd konsentrerer testen seg om basiskunnskaper fra grunnskolen, slik at endringer i struktur og kursoppsett ikke spiller noen vesentlig rolle for resultatene. Samtidig hevder de at store grupper som ingeniørstudenter representerer en stabilitet på tvers av gjennomføringene. Det gir derfor mening å sammenligne gjennomsnittet for alle studenter i utvalget over tid, og betrakte dette som et uttrykk for utviklingstrender i forkunnskaper. Norsk matematikkråd hevder testen både er reliabel og valid (Nortvedt, 2014).

# 2. TEORI

I teorikapittelet presenteres begrepet matematisk kompetanse slik det er definert av Niss & Jensen (2002), og slik det er beskrevet i læreplanen for Kunnskapsløftet. Begrepene læreplan og reformer blir definert, samt rammeverktøyet til TIMSS Advanced 2008 som danner grunnlaget for analysen i denne oppgaven. Til slutt blir det gitt et tilbakeblikk på utdanningshistorien, og tidligere forskning innenfor oppgavens tema.

## 2.1 Sentrale begreper

I læreplanen for matematiske fellesfag kan vi lese om faget matematikk som en del av den globale kulturarven vår. Matematisk kunnskap er viktig for den enkelte, både som grunnlag for videre utdanning og fordi matematikkunnskaper påvirker identitet, tenkemåte og selvforståelse. Faget beskrives som et fundament for å forstå sammenhenger i naturen og samfunnet, i tillegg til at arbeid med faget er utviklende i seg selv. Matematikkfaget i skolen skal være med å utvikle den matematiske kompetansen som samfunnet og den enkelte trenger.

### 2.1.1 Matematisk kompetanse

Hovedelementet av det som måles i matematikkprøver og tester på ulike nivåer, er elevenes kompetanse i matematikk. Kompetansebegrepet er sammensatt, og det finnes flere definisjoner av matematisk kompetanse, eksempelvis Brekke (2002), Niss & Jensen (2002), Lithner (2008) og NCTM (2000).

Eksamensoppgavene måler elevenes kompetanse ved avslutningen av skoleåret, basert på målformuleringer i fagplanen. Eksamen skal måle et bredt spekter av matematiske ferdigheter og prosesser, og inneholder derfor oppgaver som krever ulik kompetanse. Forståelsen av matematisk kompetanse i den gjeldende læreplanen for Kunnskapsløftet bygger i stor grad på forståelsen til Niss & Jensen (Dale et al 2011) .

I 2002 kom rapporten *Kompetencer og matematiklæring* fra det danske Undervisnings-ministeriet. Her defineres matematisk kompetanse på følgende måte:

*" ...at matematisk kompetence består i at have viden om, at forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematik og matematikvirksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå"* (Niss & Jensen, 2002, avsnitt 4.1). Videre heter det: *"...at en matematisk kompetence er indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer"* (Niss & Jensen, 2002, avsnitt 4.1).

I den samme rapporten har Niss og Jensen delt matematisk kompetanse inn i åtte delkompetanser, som igjen er delt inn i to hovedgrupper. De fire første delkompetansene er knyttet til det *å kunne svare og spørre i og med matematikk*. De fire siste delkompetansene er knyttet til det *å kunne håndtere matematikkens språk og redskaper*.

I den første hovedgruppen finner vi *tankegangskompetanse,* som handler om å kunne tenke matematikk, stille spørsmål og forstå hvilke svar som er mulig å oppnå. *Problemløsningskompetanse* består i å kunne formulere og løse matematiske problemer. *Modelleringskompetanse* vil si å kunne analysere og bygge matematiske modeller, mens *resonneringskompetanse* innebærer å være i stand til å forstå, bedømme og argumentere for svar på matematiske spørsmål.

I den andre hovedgruppen finner vi *representasjonskompetanse,* som innebærer å kunne forstå og benytte seg av ulike matematiske representasjoner. *Symbol- og formalismekompetanse* handler om å kunne håndtere symbolholdige utsagn, som for eksempel matematiske formler. *Kommunikasjonskompetanse* vil si å være i stand til å kommunisere i, med og om matematikk, mens *hjelpemiddelkompetanse* går ut på å være i stand til å kunne betjene ulike tekniske hjelpemidler. Disse åtte ferdighetsområdene overlapper hverandre delvis, og utgjør til sammen en persons helhetlige kompetanse.

I læreplanen for Kunnskapsløftet, som er gjeldende i dag, står det:

«*Matematisk kompetanse inneber å bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysninga er. Dette har og språklege aspekt, som det å formidle, samtale om og resonnere omkring idear. I det meste av matematisk aktivitet nyttar ein hjelpemiddel og teknologi*» (Læreplan i matematikk fellesfag, 2013).

I Kunnskapsløftet er kompetanse innført som et gjennomgående begrep, med konkrete mål for hva elevene skal kunne etter endt opplæring, omtalt som kompetansemål. Læreplanen beskriver fem grunnleggende ferdigheter som er nødvendige forutsetninger for læring og utvikling i skole, arbeid og samfunnsliv.

Disse grunnleggende ferdighetene er:

- å kunne uttrykke seg muntlig
- å kunne uttrykke seg skriftlig
- å kunne lese
- å kunne regne
- å kunne bruke digitale verktøy

- I matematikk forstås disse grunnleggende ferdigheter slik (Egen gjengivelse fra Læreplan i matematikk fellesfag, 2013):

Å kunne utrykke seg muntlig i matematikk innebærer å gjøre seg opp en mening, stille spørsmål, argumentere og forklare en tankegang ved hjelp av matematikk. Det vil si å være med i samtaler, kommunisere ideer og drøfte matematiske problem, løsninger og strategier med andre.

Å kunne utrykke seg skriftlig i matematikk handler om å kunne løse problemer ved hjelp av matematikk, beskrive og forklare en tankegang, samt sette ord på oppdagelser og ideer. Tegninger, skisser, figurer, tabeller og diagram benyttes i tillegg til matematiske symboler og det formelle språket i faget.

Å kunne lese i matematikk innebærer å tolke og dra nytte av tekster med matematisk innhold og innhold fra dagligliv og yrkesliv.

Å kunne regne i matematikk omhandler problemløsning og utforsking med utgangspunkt i praktiske situasjoner og matematiske problemer. Det handler om å kjenne til og mestre regneoperasjoner, ha evne til å bruke varierte strategier, gjøre overslag og vurdere rimeligheten av svarene.

Å kunne bruke digitalt verktøy i matematikk vil si å bruke slike verktøy til spill, visualisering og publisering. Det handler om å kjenne til, bruke og vurdere digitale hjelpemidler til problemløsning, simulering og modellering. I tillegg kunne finne informasjon, analysere, behandle og presentere data med hensiktsmessige hjelpemidler.

Disse grunnleggende ferdighetene finnes integrert i kompetansemålene på alle trinn og fag, både i grunnskolen og i den videregående skole.

Det kreves ulik matematisk kompetanse for å løse forskjellige typer matematiske problemer. De ulike kompetansene må oppøves slik at de kan tas i bruk i ulike situasjoner. Siden eksamensoppgavene skal måle elevenes kompetanse ved slutten av skoleåret, bør de inneholde oppgaver som måler et bredt spekter av elevenes kompetanse.

### 2.1.2 Reformer

Nye reformer har gjerne utgangspunkt i faktorer som utilfredsstillende resultater i skolen og høyt frafall. I tillegg forsøker myndighetene gjennom reformer å imøtekomme krav som stilles til utdanningssystemet fra samfunnets side. Utdanningsreform kan forstås som systemendring som blir gjennomført i hele utdanningssystemet. I denne oppgaven blir det sett nærmere på de tre siste store utdanningsreformer som angår den videregående opplæring: Reform 74, Reform 94 og Kunnskapsløftet. Fordi reformer kan gripe inn målformuleringer, pensum og vurderingskriterier, blir det ofte utviklet nye læreplaner i forbindelse med en utdanningsreform.

### 2.1.3 Læreplanen

Gjennom tidene har læreplaner blitt til på ulike måter, med ulikt idegrunnlag og ulik utforming. Hvor detaljstyrende disse læreplanene har vært, og hvordan målene er formulert, har endret seg over tid. Tidligere læreplaner kan sees på som historiske tekster som forteller om intensjonene en hadde for skolen, og hva man anså som viktig.

I Norge har det vært tradisjon for sentralt gitte læreplaner, og det offentlige skolesystemet har i dag et felles læreplanverk. Både grunnskolen og videregående skole har dette læreplanverket som styringsdokument, der myndighetene legger føringer for hvilken kompetanse de anser som viktig. Opplæringsloven sier at læreplanen skal være styrende for undervisningen (Lov om grunnskolen og den videregående opplæringa). Den omhandler derfor både organisering av undervisningen og hvilke kunnskaper som er sentrale i de ulike fag. I tillegg angir læreplanen det verdimessige, kulturelle og kunnskapsmessige grunnlaget for opplæringen.

I denne oppgaven brukes begrepet *fagplan* om den delen av læreplanen som beskriver nasjonale forventninger til elevene i de enkelte fagene. Planen inneholder målformuleringer i fagene, og kan angi retningslinjer for arbeidsmåter og vurderingsopplegg. En slikt begrepsmessig skille mellom læreplan og fagplan er ikke konsekvent gjennomført i de ulike reformene, hvor begrepet læreplan har vært brukt både om overordnede planer og om planen i de enkelte fag.

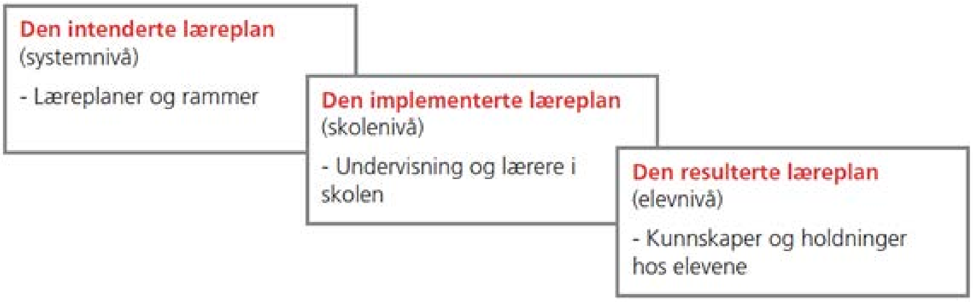
En ny læreplan får konsekvenser også for matematikkfaget, selv om den ikke nødvendigvis berører undervisningen umiddelbart. Nye fagplaner medfører nye lærebøker, som igjen har innvirkning på innhold og framstilling av fagstoff. I tillegg påvirker nye læreplaner eksamensoppgavene. Erfaring og forskning viser at det kan være lang vei fra intensjonene bak en læreplan til det elevene møter i skolen. Det som står i læreplanen er ikke nødvendigvis det elevene blir undervist i. Lærebokforfattere og lærere skal tolke planene, og kan ha ulik forståelse av innholdet. Læreplanene blir ofte innført over en periode, og det er sjelden en dramatisk innholdsendring ved overgangen fra en læreplan til en annen.

### 2.1.4 Goodlads læreplannivåer

En læreplan kan sies å ha ulike ansikter eller framtredelsesformer. Den engelske forskeren John Goodlad (1979) beskriver fem ulike læreplannivåer fra læreplanide til virkeliggjøring i opplæringssituasjonen:

- ideenes læreplan, ideer som framkommer av ulike strømninger i samfunnet
- den formelle læreplanen, slik den foreligger
- den oppfattede læreplanen, slik den blir tolket
- den operasjonaliserte læreplanen, slik den blir gjennomført i skolen
- den erfarte læreplanen, slik elever og foreldre opplever den.

TIMSS Advanced er en læreplanbasert studie, der man tar utgangspunkt i ulike aspekter ved det som kalles et utvidet læreplanbegrep. På engelsk er dette kalt *curriculum*. Dette utvidete læreplanbegrepet inkluderer alle nivå i skolesystemet, både systemnivå, skole/klassenivå og elevnivå. Begrepet baserer seg på tidligere forskning innen læreplanteori (Goodlad, 1979, 1986, i Grønmo et al, 2010). Prosjektet har som mål å samle inn og analysere data på tre forskjellige nivåer, illustrert i figuren under.




Figur 5 - De tre nivåene av "læreplanen" i TIMSS Advanced (Grønmo et al, 2010, s.28).

Systemnivå - den intenderte læreplan, er læreplanen slik den legges til rette av de nasjonale myndighetene. Innholdet gjenspeiler seg i læreplandokumenter og inkluderer rammefaktorer som hvordan skolesystemet skal organiseres og hvilke muligheter elevene har for valg av skole og fag. Dette er den tilsiktede læreplanen, som forteller hva slags utdanningstilbud samfunnet ønsker at elevene skal få (Grønmo et al, 2010). Også eksamensordningen kan legges til dette nivået, fordi eksamen kan anses som et viktig styringsredskap i skolen

Klasseromsnivå - den implementerte læreplan, henviser til hvordan den intenderte læreplan blir tolket og implementert på klasseromsnivå. Læreplandokumenter vil tolkes blant annet av lærebokforfattere og lærere, og iverksettes i klasserommet. Dette nivået handler om hvordan intensjonene fra systemnivå blir omsatt i praksis. Dette er avgjørende for selve undervisningen og det som skjer i timene.

Elevnivå - resultert læreplan, omhandler elevens læringsresultater i form av kunnskaper og ferdigheter elevene har tilegnet seg, samt holdninger de har utviklet.

Det er den intenderte læreplanen som er gjenstand for analyse i denne oppgaven. Det kan være uoverensstemmelser mellom de ulike nivåene, mellom de formelle læreplanene og det som faktisk skjer i klasserommet. Eksamen kan fungere som et viktig innslag av sluttkontroll. Oppgaver gitt til eksamen kan ses på som et mål på ønsket eller forventet kompetanse i forhold til målene i den intenderte læreplanen.

Erfaringer fra egen skole ved innføring av nye læreplaner, er at lærere bruker tid på å studere hva som er nytt, og hvilke endringer som er nødvendig. Diskusjonen går da i hovedtrekk ut på å gjøre endringer i undervisningens form og innhold, i forhold til hvor omgripende reformen er. Hvordan lærere møter nye planer, avhenger av hvor mye læreplanene endrer seg, men også av tidligere undervisningserfaring og endringsvillighet i forhold til hvor positivt en ser på egen skolehverdag.

### 2.1.5 Vurdering

En av skolens sentrale oppgaver er å vurdere. Vurdering skal sikre en nasjonal standard i opplæringen, slik at et godt og likeverdig opplæringstilbud kan gis til alle. I Norge har vi lange tradisjoner med et formelt vurderingssystem. Vurdering av elevenes kunnskapsnivå foregår både i grunnskolen og i videregående skole, og kan ses på som et redskap for å se om elevene har nådd de mål som er satt for undervisningen. Eksamen skal sikre at undervisningen er i tråd med de forventninger læreplanen gir uttrykk for. I tillegg blir eksamenssystemet brukt til å sortere elever til videre studier og arbeidsliv, og kan slik sies å ha en selekterende funksjon (Udir-1-2010).

Det skilles mellom underveisvurdering og sluttvurdering. Hensikten med vurdering underveis er å informere og motivere elevene med å nå opplæringsmålene. Avsluttende vurdering kommer til uttrykk gjennom standpunkt- og eksamenskarakterer (Udir-1-2010).

Eksamenskarakteren skal gjenspeile i hvor stor grad elevene har nådd målene i fagplanen. Karakterene er uttrykk for i hvilken grad elevene besitter den form for evner og talent som belønnes i skolesystemet, og er i stor grad bestemmende for hvilke muligheter elevene har til høyere utdanning og videre adgang til arbeidslivet.

Oppgaver gitt til eksamen står sentralt i undervisningen, og blir ansett som viktige av både elever og lærere. Begrepet "*high-stakes tests*" brukes om tester hvor utfallet er viktig for de som tar disse. Wilsons (2007) studie viser at lærere og elever bruker mest tid på oppgavetyper som gis på slike tester.

Gode tester kan danne utgangspunkt for nyttig evaluering og utvikling. I de nasjonale og internasjonale testene kan det være ulike elementer som måles. Lærerens undervisning kan evalueres gjennom elevenes resultater, landets skoler kan testes for å se hvordan de klarer seg i forhold til hverandre, eller tester kan ha som formål å få fram forbedringspotensial i skolen.

## 2.2 Rammeverket i TIMSS Advanced

For å kunne analysere eksamensoppgaver, trengs et verktøy eller en metode som ramme for analysen. Det finnes flere ulike analyseverktøy man kan anvende til dette. Et hjelpemiddel når man skal vurdere læreplaner, læreverk eller oppgaver, er Blooms taksonomi eller klassifisering (Imsen, 2009). Analyseverktøyet er utviklet av Benjamin Bloom for å gi lærere en mulighet til å sortere oppgaver etter nivå av kunnskap. Blooms originale taksonomi definerer tre separate læringsdomener: et kognitivt, et affektivt og et psykomotorisk (Bloom, 1956). Det kognitive læringsdomenet omhandler kunnskap, det affektive domenet tar for seg holdninger mens det psykomotoriske dreier seg om fysiske ferdigheter. Det kognitive området består av seks ulike nivå: *kunnskap, forståelse, anvendelse, analyse, syntese og vurdering*. Disse er hierarkisk oppbygd, slik at hvert nivå inkluderer det forrige. I følge Krathwohl (2002) er Blooms taksonomi en av de mest brukte innenfor utdanning. Denne taksonomien ble publisert første gang i 1956, og har siden den gang vært brukt av mange pedagoger i vurderingssammenheng.

TIMSS Advanced retter seg mot elever i videregående skole som har valgt fordypning i matematikk eller fysikk siste året på videregående skole. Undersøkelsen tester elevenes faglige kompetanse, og en del bakgrunnsvariabler kartlegges. Eksempler på dette er elevenes holdninger til faget, organisering og arbeidsmåter i matematikk. I tillegg kartlegges lærernes utdanningsbakgrunn og gjennomført etterutdanning. Sammen med tidligere TIMSS studier fra grunnskolen, gir dette muligheter for å se situasjonen for matematikkfaget i en sammenheng, fra barnetrinn, ungdomstrinn og til videregående skole. Oppgavene elevene testes i skal være relevante i forhold til hva elevene er undervist i.

Rammeverket til TIMSS Advanced 2008 er valgt i denne studien fordi den er læreplanbasert, og i tillegg rettet mot avgangselever i videregående skole som har valgt høyeste fordypning i matematikk. Grønmo et al (2010) hevder at selv om TIMSS Advanced ikke undersøker alt som er viktig i skolen, blir det som undersøkes behandlet med solide metoder og høy kompetanse.

Rammeverket i TIMSS Advanced definerer hvilke kunnskaper og ferdigheter elevene testes i. Rammeverket for 2008 bygger på rammeverket fra 1995, og er utviklet gjennom drøftinger mellom deltakerlandene. Rammeverket fokuserer på to dimensjoner, innhold og kognitivt nivå.

Innholdsdimensjonen angir ganske spesifikt hvilke faglige emner som testes. Den kognitive kategorien beskriver hvilken kunnskap det forventes at elevene skal bruke i arbeidet med oppgavene, om det for eksempel er en ren rutineoppgave eller om det kreves en mer kompleks løsningsstrategi. Blooms taksonomi er godt kjent og anerkjent i utdanningsforskning, og har flere felles elementer med den kognitive dimensjonen i rammeveket til TIMSS Advanced fra 2008:

"*...this (Blooms) taxonomy has several elements in common with the cognitive dimension in the 2008 TIMSS Advanced framework*..." (Pedersen, 2013, s 6).

Denne undersøkelsen vil derfor med utgangspunkt i analyseverktøyet til TIMSS Advanced 2008 kategorisere eksamensoppgavene etter emne og kognitivt nivå. I tillegg vil oppgavene bli inndelt etter type matematikk, det vil si ren eller anvendt matematikk. Rammeverket blir et redskap for å tydeliggjøre eventuelle forskjeller mellom oppgavetyper gitt under de ulike reformene. Det har vært nødvendig å gjøre noen tilpasninger, som det blir redegjort nærmere for.

Eksamensoppgavene som analyseres, er ment å gjenspeile hvilke forventninger som stilles til elevenes matematikkompetanse, men i motsetning til TIMSS Advanced studiene, vil ikke elevenes faktiske læringsutbytte (eksamensresultater) bli behandlet i denne oppgaven. Målgruppen vil være den samme, og TIMSS Advanced sin metodikk med kategorisering av oppgaver, vil også være hensiktsmessig i forhold til min analyse. Jeg skal i det følgende beskrive disse kategoriene nærmere.

### 2.2.1 Innholdskategorier i TIMSS Advanced

Rammeverket i TIMSS Advanced 2008 (Garden et al, 2006) benytter innholdskategoriene *algebra*, *kalkulus* og *geometri*. Emnet algebra inneholder hovedsakelig komplekse tall, følger og rekker, ligninger og ulikheter, og ulike representasjoner av funksjoner (som symbolske uttrykk, grafer, tabeller og ordnede par). Elevene forventes å kunne bruke egenskapene til reelle og komplekse tall, kunne utforske grunnleggende egenskaper ved følger og rekker, og vise evne til å arbeide med ulike typer ligninger.

1. Perform operations with complex numbers.
2. Determine the nth term of numeric and algebraic series, and the sums to n terms or infinity of series.
3. Solve straightforward problems involving permutations, combinations, and probability.
4. Solve linear, simultaneous, and quadratic equations and inequalities. Indicate whether a value (or values) satisfies a given equation or inequality. Solve surd (radical) equations, logarithmic, and exponential equations.
5. Recognize and generate equivalent representations of functions as ordered pairs, tables, graphs, formulas, or words.
6. Determine signs and values of functions, including rational functions, for given values and ranges of the variable. Evaluate a function of a function.

TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks.

Emneområdet kalkulus omfatter differensial- og integralregning, i hovedsak grenseverdier, derivasjon og integrasjon. I dette ligger å forstå begrepene, ha ferdigheter i å beregne grenseverdier, og å integrere og derivere funksjoner, og kunne anvende dette til å løse både matematiske og praktiske problemer.

1. Evaluate limits of functions, including rational functions. Know the conditions for continuity and differentiability of functions.
2. Differentiate polynomial, exponential, logarithmic, trigonometric, rational, radical, composite, and parametric functions. Differentiate products and quotients.
3. Use derivatives to solve problems (e.g., in kinematics, optimization, and rates of change).
4. Use first and second derivatives to determine gradient, turning points, and points of inflection of polynomial and rational functions, and sketch and interpret graphs of functions.
5. Integrate polynomial, exponential, trigonometric, and rational functions. Evaluate definite integrals, and apply integration to compute the area under a curve.

TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks.

Emnet geometri er i TIMSS Advanced sammensatt av fire delområder: Euklids geometri, analytisk geometri, trigonometri og vektorer. Her forventes det at elevene kan bruke egenskapene til geometriske figurer og trigonometri i problemløsning, bevise enkle geometriske setninger, kjenne ligningen for en sirkel i planet, løse trigonometriske ligninger, og å kunne regne med vektorer.

1. Use the properties of geometric figures to solve problems. Prove straightforward geometric propositions in two and three dimensions.
2. Use gradients, y-axis intercepts, and points of intersection of straight lines in the Cartesian plane in solving problems.
3. Know and apply the equations and properties of circles in the Cartesian plane. Derive tangents and normals to given points on a circle.
4. Use trigonometry to solve problems involving triangles. Know the properties of sine, cosine, and tangent graphs, and solve straightforward equations involving these functions.
5. Apply the properties of vectors and their sums and differences to solve problems.

TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks.

Oppgavene i TIMMS Advanced er ikke direkte knyttet til en norsk læreplan, og det meldte seg derfor et behov for å spesifisere hvilke oppgaver som tilhører de ulike kategoriene. De matematiske emnene i de norske læreplanene og de matematiske emnene i TIMSS er ikke fullstendig sammenfallende. Sannsynlighet og kombinatorikk var kun pensum i 3MX under Reform 94. Disse emnene er, som i som i TIMSS Advanced, plassert i innholdskategorien *algebra.* For en tydeligere analyse, er de tillegg også registrert i en egen kategori *sannsynlighet*.

Med utgangspunkt i TIMSS Advanced og nødvendige tilpasninger, blir inndelingen slik:

Algebra
- Komplekse tall
- Følger og rekker
- Ligninger og ulikheter
- Eksponentialligninger, logaritmer og eksponentialfunksjoner
- Induksjonsbevis
- Konstruere/tegne grafer, ordnede par, tabeller og tekst som svarer til en gitt funksjon
- Beregne en gitt funksjons verdi inkludert funksjoner av funksjoner

Kalkulus
- Grenseverdi og kontinuitet
- Derivasjon av polynom, samt bruk av produktregelen, brøkregelen og kjerneregelen
- Drøfting av funksjoner; ekstremalpunkt, vendepunkt og skjæringspunkt med akser
- Ubestemt integral, integrasjon ved substitusjon, delvis integrasjon og integrasjon ved delbrøkoppspalting
- Differensialligninger

Geometri

- Bruke egenskaper til geometriske figurer og bevise enkle geometriske setninger
- Kjenne ligningen for sirkelen
- Regne med vektorer, finne vinkler og avstander
- Løse trigonometriske ligninger

Sannsynlighet

- Betinget sannsynlighet
- Sannsylighetsfordeling
- Forventningsverdi, varians og standardavvik
- Binomisk fordeling
- Normalfordeling

### 2.2.2 Kognitive kategorier i TIMSS Advanced

Rammeverket til TIMSS Advanced (Garden et al, 2006) består av de kognitive kategoriene *å kunne*, *å anvende* samt *å resonnere.* Kategoriene beskriver hvordan det forventes at elevene skal bruke kunnskapene sine når de løser matematikkoppgavene, om det for eksempel er en ren rutineoppgave, eller om det kreves mer komplekse løsningsstrategier.

Den norske TIMSS - rapporten *Matematikk i motvind*, beskriver de kognitive kategoriene, men vektlegger ikke dette ved analysen av elevenes besvarelser. Rapporten har med eksempler på ulike oppgaver, uten å presisere hvilke kognitivt nivå oppgavene tilhører. Dette med unntak av kategorien *å resonnere*. Årsaken er at en oppgave som er klart rutinepreget i ett land, ut fra landets læreplaner og undervisningstradisjoner, kan vurderes som en krevende problemløsningsoppgave med krav til resonnement i et annet land.
I denne studien er oppgaver elevene er kjent med fra læreboka, definert som rutineoppgaver. Dette diskuteres nærmere i oppgavens metodedel.

I praksis er det et visst hierarki av de kognitive områdene når det gjelder hvor krevende oppgavene er for elevene. Det finnes i tillegg ulike vanskelighetsgrader innenfor hvert område (Lie et al, 2010).

*Å kunne* betyr blant annet å huske fakta, gjenkjenne objekter og uttrykk, hente informasjon fra grafer og tabeller og beherske algoritmer, som for eksempel løsning av standard ligninger og derivasjon av standard funksjoner. Kategorien *å kunne* handler om å reprodusere kunnskap og å utføre enkle mekaniske regneoperasjoner.

| | Behaviors Included in the Knowing Domain | |
|---|---|---|
| 1 | **Recall** | Recall definitions, terminology, notation, mathematical conventions, number properties, geometric properties. |
| 2 | **Recognize** | Recognize entities that are mathematically equivalent (e.g., different representations of the same function or relation). |
| 3 | **Compute** | Carry out algorithmic procedures (e.g., determining derivatives of polynomial functions, solving a simple equation). |
| 4 | **Retrieve** | Retrieve information from graphs, tables, or other sources. |

TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks (IEA, 2006)

*Å anvende* innebærer å bruke kunnskaper og ferdigheter til å velge metoder og prosedyrer for å løse oppgaver, å representere matematisk informasjon på ulike måter, å modellere situasjoner, og å løse rutineoppgaver.

| | Behaviors Included in the Applying Domain | |
|---|---|---|
| 1 | **Select** | Select an efficient/appropriate method or strategy for solving a problem where there is a commonly used method of solution. |
| 2 | **Represent** | Generate alternative equivalent representations for a given mathematical entity, relationship, or set of information. |
| 3 | **Model** | Generate an appropriate model such as an equation or diagram for solving a routine problem. |
| 4 | **Solve Routine Problems** | Solve routine problems, (i.e., problems similar to those students are likely to have encountered in class). For example, differentiate a polynomial function, use geometric properties to solve problems. |

TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks (IEA, 2006)

*Å resonnere* betyr å tenke logisk, å analysere informasjon og trekke gyldige konklusjoner, å generalisere resultater, å kombinere matematiske ideer, kunnskaper og ferdigheter, å begrunne påstander ut fra matematiske resultater og egenskaper, og å løse komplekse problemer som ikke er rutinepreget. Dette gjelder både i rent matematiske og i anvendte sammenhenger. Her kreves resonnement, enten fordi konteksten i oppgaven er ukjent for elevene, fordi løsningen på oppgaven krever kunnskap og forståelse fra ulike områder i matematikken, eller fordi man må løse oppgaven i flere trinn.

| | Behaviors Included in the Reasoning Domain | |
|---|---|---|
| 1 | **Analyze** | Investigate given information, and select the mathematical facts necessary to solve a particular problem. Determine and describe or use relationships between variables or objects in mathematical situations. Make valid inferences from given information. |
| 2 | **Generalize** | Extend the domain to which the result of mathematical thinking and problem solving is applicable by restating results in more general and more widely applicable terms. |
| 3 | **Synthesize/ Integrate** | Combine (various) mathematical procedures to establish results, and combine results to produce a further result. Make connections between different elements of knowledge and related representations, and make linkages between related mathematical ideas. |
| 4 | **Justify** | Provide a justification for the truth or falsity of a statement by reference to mathematical results or properties. |
| 5 | **Solve Non-routine Problems** | Solve problems set in mathematical or real-life contexts where students are unlikely to have encountered similar items, and apply mathematical procedures in unfamiliar or complex contexts. |

TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks
(IEA, 2006)

Eksempel på en av de frigitte oppgavene fra TIMSS Advanced i denne kategorien er:

Trekanten *PQR* er en rettvinklet likebeint trekant med den rette vinklen i *P*.
Hvis *PT* er en median i trekanten, så er *PT* like lang som

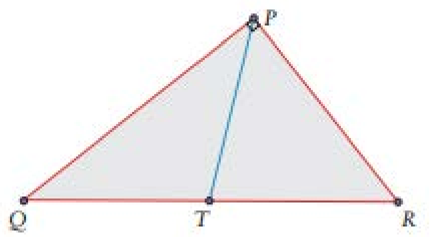
Ⓐ *PR*

Ⓑ *PQ*

Ⓒ *QR*

Ⓓ *QT*

Dette er en oppgave innen geometri. Elevene får ingen hjelp i form av figur, og det er helt avgjørende at de vet hva en median er. Ut fra dette vet man at T ligger på hypotenusen QR. En måte å løse oppgaven på, er ved hjelp av resonnement og *Tales' setning. Tales' setning* sier: *sentrum i den omskrevne sirkelen ligger midt på hypotenusen.* I dette tilfellet ligger sentrum i T, og medfører at TQ, TP og TR er radier i sirkelen, og dermed like lange. Trekanten kan se slik ut:




Alternativ D viser derfor riktig svar.

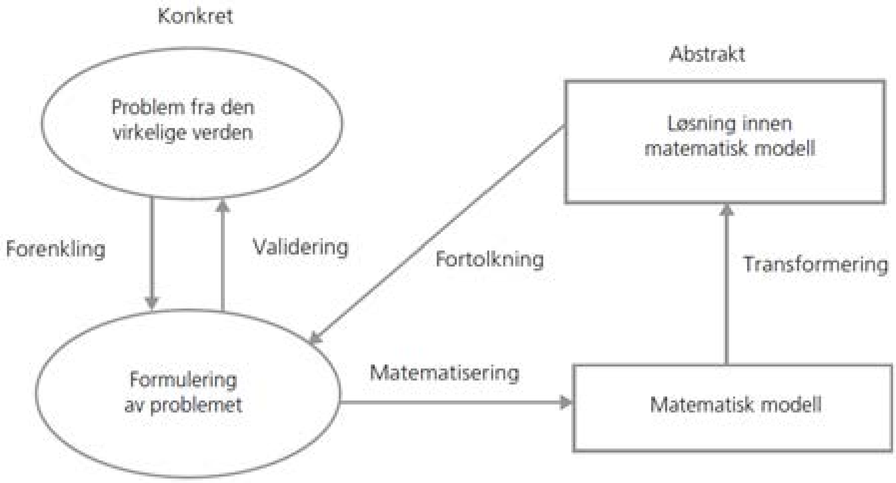
En annen måte å løse oppgaven på er å ta hensyn til at trekanten er likebeint. Det betyr at PQ og PR må være like lange. Medianen PT vil stå vinkelrett på hypotenus QR, slik at medianen blir høyde i ytrekanten. Dette gir to trekanter TPQ og TPR som er kongruente med hverandre, og formlike med den store trekanten PQR. Dermed kan oppgaven løses uten *Tales' setning*.

I TIMSS Advanced er denne oppgaven kategorisert i den kognitive kategorien *Resonnere (Grønmo et al, 2010, s 112).*

### 2.2.3 Ren og anvendt matematikk

I denne undersøkelsen vil *ren matematikk* si oppgaver uten kontekst, mens *anvendt matematikk* er oppgaver der elevene må forholde seg til et fenomen fra virkeligheten.
I kategorien *anvendt matematikk* er oppgavene satt inn i en praktisk (dagligdags) kontekst, og er tekstbaserte oppgaver der elevene selv må finne en matematisk representasjon for å løse oppgaven. Dette er illustrert i figuren under (Grønmo et al,2010 s.32). Matematisering

er et begrep som brukes om prosessen der elevene går fra et problem i den virkelige verden til en matematisk oversetting av dette.




Figur 6 - Forholdet mellom den virkelige verden og den matematiske verden.

Høyre side av figuren viser den matematiske verden. Dette er arbeid med tall og algebraiske uttrykk uten å knytte det til problemer fra virkeligheten. Eksempler på ren matematikk kan være addisjon, multiplikasjon eller en algebraisk ligning, og er en abstrakt verden med definerte symboler og regler. Omforming av formler og manipulering med matematiske symboler er eksempler på ren matematikk.

Venstre side viser til problemer i den virkelige verden. Her vil man ta utgangspunkt i et problem med en gitt kontekst, og "flytte det over" til den matematiske verden. I anvendt matematikk blir altså problemet "oversatt" til et matematisk uttrykk og løst ved hjelp av ren matematikk. Løsningene relateres så tilbake til den virkelige verden. Anvendt matematikk forutsetter gode kunnskaper i ren matematikk.

## 2.3 Tidligere forskning

Det har blitt påpekt at vurdering har tilbakevirkende kraft på undervisningen (Bergqvist, 2007, Wilson, 2007). Dette støttes av Niss & Jensen (2002), som mener at vurdering har en vesentlig tilbakevirkende innflytelse på undervisnings- og læreprosesser, og kan derfor betraktes som et nyttig instrument i undervisningspraksis. Kompetanse, kunnskap og ferdigheter som ikke gjøres til gjenstand for vurdering, blir lett usynlige. Dette betyr at den kompetanse man ønsker at eleven skal utvikle, ikke bare må settes på dagsorden i undervisningen, men også settes på dagsorden i vurderingssammenheng. I følge Niss & Jensen (2002) vil vurderingsformene være et meget effektivt instrument for hva skolen anser for henholdsvis viktig og uviktig, i langt større grad enn formålsformuleringer, lærebokformaninger og læreforedrag. Dersom en ønsker å endre eller utvikle undervisningspraksis i matematikk, kan det utvikles nye vurderingsformer som støtter opp om ønsket praksis.

*"I al matematikundervisning er evalueringsspørgsmål af central betydning, hvad enten man tænker på forskellige former for afsluttende evaluering, herunder prøver og eksamener, eller på løbende evaluering knyttet til selve undervisningen. Der er overvældende forskningsmæssig evidens for, at uanset hvilke evalueringsformer der benyttes, udøver evalueringen en væsentlig tilbagevirkende indflydelse på undervisnings- og læreprocesser. Kort og sloganagtigt bliver det nogle gange formuleret som "det, man evaluerer, er det, man opnår" (og også det, man får øje på).*

*Det, der ikke evalueres, overses" (Niss & Jensen, 2002, avsnitt 10.3.5)*

Lignende konklusjoner finner vi hos Schoenfeld (2007), som påpeker at tester spiller en avgjørende rolle for undervisningspraksis. Utformingen av gode tester er derfor viktig, og har betydning for hvilken kunnskap elevene tilegner seg. Siden elevene ser på disse testene som en mal for hva de trenger å vite, er det viktig at testene er robuste og representerer en høy standard. Settes standarden lavere, slik at flere elever scorer bra, svekkes undervisningen, og setter begrensninger på hva elevene lærer.

*" This is an example of what has been called the WYTIWYG phenomenon — "What You Test Is What You Get." WYTIWYG can play out in various ways. For example, if the high-stakes assessment in mathematics focuses on procedural skills, teachers may drill their students for procedural fluency — and conceptual understanding and problem solving skills may be left unaddressed as a consequence"* Schoenfeld (2007, s.12).

Aina Fossum (2009) har i sin masteroppgave analysert eksamensoppgaver i matematikk gjennom to reformer for kursene 2MX og R1. Dette er elever som har valgt full fordypning i matematikk og går 2. året på videregående skole. Etter Kunnskapsløftet skiftet 2MX navn til R1, og eksamensoppgavene ble todelt, en del med og en del uten hjelpemidler. Fossum undersøkte om eksamensoppgavene endret seg ved overgangen til ny eksamensform. Studien sammenlignet oppgavene fra 2MX med oppgavene i R1, og undersøkte hvilken løsningsstrategi oppgavene krevde, i forhold til om de kunne løses ved hjelp av algoritme eller ved problemløsning. Fossum konkluderte med at det ikke er noe som peker i retning av økt krav til problemløsning etter denne todelingen, og fant større ulikheter på eksamenssett innenfor samme reform enn på tvers av reformene.

"*Resultatet av oppgaveanalysen viser at krav til problemløsning varierer mer mellom enkelte oppgavesettene enn mellom R1-eksamen og 2MX-eksamen sett under ett*" (Fossum, 2009, s.3). Videre skriver hun: " *Jeg har funnet stor likhet mellom oppgavesettene når det gjelder oppbygning, men at det er en økning i antall tekstoppgaver og noe økning i arbeidsmengde*" (Fossum, 2009, s.3 ).

Håkon Olsrud (2009) har skrevet masteroppgave i matematikkdidaktikk der han ser på bevisets plass i læreplanene for videregående skole fra 1896 til 2009. Hensikten er å belyse bevisets posisjon i matematikkpensum for videregående skole i denne tidsperioden, gjennom en analyse av læreplaner, lærebøker og eksamensoppgaver.

Olsrud finner at matematisk bevis har hatt ulikt fokus gjennom ulike læreplaner. Beviset har en større plass i undervisningen ved *Lov om høiere almenskoler* av 1896 og 1935, da gymnasene var for en mindre del av årskullet enn de påfølgende læreplanene. I læreplanene fra 1976 og 1995 fikk anvendelser innenfor matematikk en større rolle, og bevisteori ble nedprioritert. Etter revisjon av R94 i 2000, fikk bevis en enda mindre rolle. Med Kunnskapsløftet kommer bevis inn i læreplanen igjen, og det ser ut til at bevis nå vektlegges mer enn i planene fra 1976 og 1994. Også i forhold til *Lov om høiere almenskoler* omtaler Kunnskapsløftet bevis i større grad.

## 2.4 Et utanningshistorisk tilbakeblikk

Den norske skolen har ikke alltid sett ut slik den fremstår i dag, med like rettigheter og muligheter for alle. Skolen har endret og utviklet seg i takt med strømninger i samfunnet, og politiske føringer har vært avgjørende for større eller mindre endringer i skolen. Utdanningsforskning, politikk og beslutningsprosesser er uløselig sammenvevd (Cohen et al, 2007). Som bakgrunn for å forstå dagens situasjon gis det et kort tilbakeblikk på norsk skolehistorie.

### 2.4.1 Skolen og klassesamfunnet

Rundt 1850 besto grunnskoleutdanningen av flere parallelle løp. Elevene gikk i ulike skoler ut fra den stand eller klasse de tilhørte. Allmuen gikk i allmueskolene, som stort sett rekrutterte til kroppsarbeid. Tilhørte man det øvre sosiale lag, kunne man velge mellom egne betalingsskoler, latinskoler eller borgerskoler. Disse utdanningene rekrutterte til yrker innen handel og håndverk. Barn av embetsmenn gikk i latinskolen, som rekrutterte til universitetene (Andersen, 1999).

I 1896 kom *Lov om høyere skoler*. Loven omfattet folkeskole, middelskole og gymnas. Disse hadde erstattet henholdsvis allmueskole, borgerskole og latinskole. Etter denne loven gikk elevene fem år i folkeskolen, og kunne så velge å gå over i en fireårig middelskole, og videre over i et treårig gymnas. Dette var et viktig grunnlag mot utviklingen av enhetsskolen, og reformen medførte at latinen ikke lenger fikk så fremtredende plass (Andersen, 1999).

### 2.4.2 Enhetsskolen

Allerede i tiden etter århundreskiftet var enhetsskoletanken et bærende prinsipp i norsk skolepolitikk. Slik sett har enhetsskoletanken hatt lange tradisjoner i norsk skolehistorie. Intensjonen var at skolen skulle omfatte alle barn, være nasjonalt samlende og sosialt utjevnede. I dette lå at alle barn skulle gå i samme skole og få samme undervisning gjennom hele den skolepliktige alder (Andersen, 1999). Det ble i den forbindelse arbeidet for å utvide den obligatoriske folkeskoletiden for alle. I 1920, etter flere reformer, fattet Stortinget vedtak om at datidens parallellskolesystem skulle erstattes av en felles sjuårig folkeskole.

I 1935 kom en ny lov om de høyere allmenndannende skolene, realskoler og gymnas. Loven fokuserte på skolens organisatoriske oppbygning. Pedagogiske ideer kom mer i bakgrunnen.

Middelskolen skiftet navn til realskole, der de to første årene ble felles med gymnasets to første år. I 1945 besto den høyere allmennskolen i Norge av realskoler og gymnas, regulert etter loven fra 1935 (Andersen, 1999).

### 2.4.3 Normalplanene av 1939

Tidlig på 1930-tallet ble det utviklet nye planer for folkeskolen gjennom komiteen for pedagogisk forskning, som ble ledet av Bernhof Ribsskog og Anathon Aall. Dette ble omtalt som den første mønsterplanen for grunnskolen som bygget på vitenskapelig pedagogikk, og var i bruk helt til den ble erstattet av M-74. Men fortsatt var det slik at byfolkeskolen og landfolkeskolen hadde separate planer (Mosvold, 2002).

Interessant å merke seg er at allerede i 1936 var Ribsskog og Aall kritisk til "puggeskolen":

*"Skolens effektivitet måles etter mengden av oppsamlet "kunnskap". Derfor er pensa etterhånden økt, flere og flere detaljer etterhånden tatt med, likesom også fagdelingen har hatt en tendens til å øke. Dette går ikke bare ut over fordypelse, forståelse, oversikt, således at den ervervede kunnskap i seg selv blir mindre verdifull. Også metodene påvirkes i mindre heldig retning. Læreren "meddeler" kunnskapen istedenfor å lede eleven til å finne den"*
(Ribsskog & Aall, 1936, s 7).

I tillegg var Ribsskog og Aall opptatt av den praktiske dimensjonen i all læring, og mente at lærene var for bundet opp av eksamen og eksamensformen i undervisningen.

*"Ordet betegner jo nå et pedagogisk prinsipp, vel kjent av alle. Det er elevaktivitetens prinsipp. Denne elevaktivitet er skapende, produktiv, ikke bare reproduserende … Herunder trer læreren tilbake, blir leder, rådgiver, kritiker. Og stoffet blir råstoff, ganske visst ikke uten egenverdi, men i pedagogisk henseende vesentlig av betydning som arbeidsstoff. Bearbeidelsen av dette stoff er undervisningens formål og mening"*
(Ribsskog & Aall, 1936, s 8).

*"Men innenfor de områder hvor elevenes evner strekker til, bør vi fortrinnsvis la elevene arbeide med oppgaver hentet fra erhvervslivet selv: fra handel, industri, jordbruk, skogbruk, fiskeri og andre næringsveier, fra livet i hjem, i kommune og stat»*
(Ribsskog & Aall, 1936, s 117).

Ideen om økt anvendt matematikk i skolen har altså historiske røtter, lenge før det fikk sin renessanse med Reform 94, der den praktiske matematikken skulle vise seg å få en større plass

### 2.4.4 Etterkrigstiden

I 1945 hadde Norge en felles sjuårig folkeskole, men med store forskjeller mellom by og land. Skolene på landet hadde snevrere skoletilbud og kortere skoletid enn skolene i byene. Det ble gjort forskjell på guttet og jenter når det gjaldt timetall og innhold i undervisningen. Mens jentene skulle utdannes til gode husmødre, skulle guttene forberedes til yrkes- og samfunnsliv. En av de store oppgavene etter krigen ble å lage en mer enhetlig skole over hele landet. Norsk skole gikk derfor gjennom flere reformer i årene etter 1945.

Rundt 1950 økte søkningen til videregående skoler i Norge. Økningen kom både i byene og distriktene, og kom fra alle lag av befolkningen. Antall gymnaselever økte fra 11 000 i 1959 til 50 000 i 1970. Antall elever i fag- og yrkesskoler økte i samme periode fra 30 000 til 90 000 (St.meld.nr.16/ 2006-2007).

Loven om en felles folkeskole kom i 1959. Den medførte at skillet mellom by- og landsfolkeskolene ble opphevet, og med *lov om grunnskolen* i 1969 ble alle kommuner pålagt å utvide den 7-årige skoleplikten til 9 år. Denne overgangen medførte behov for endringer også i utdanningsnivåene over.

Gjennom 60-tallet ble det prøvd ut et kursplansystem i ungdomsskolen med ulik vanskelighetsgrad. Elevene ble fordelt på tre kursplan i fagene matematikk, norsk og engelsk. Igjen var det i stor grad elever fra de høyere sosiale lag som valgte høyeste kursplan. Dette førte til en ny plan for grunnskolen, Mønsterplanen, der elevene skulle gå i samme klasse gjennom hele ungdomsskolen og få undervisning etter sine forutsetninger (St.meld.nr.16/ 2006-2007).

Endringer i grunnskolen fikk konsekvenser for den videregående skolen. Det ble satt i gang en rekke utredninger, blant annet fra Gjelsvik-utvalget og Steen-komiteen. Utredningene resulterte i at videregående skoler ble gjenstand for gjennomgripende reformer utover 70-tallet, både når det gjaldt skolens ytre oppbygning, struktur og faglig og pedagogisk innhold. Mot slutten av sekstiårene, og over i syttiårene, ble det etablert et eget forskningsområde, matematikkdidaktikk, som fikk betydning for undervisningen i mange land (St.meld.nr.16/ 2006-2007).

### 2.4.5 Reform 74

*Lov om videregående opplæring* kom i 1974 og ble iverksatt 1. januar 1976 med intensjon om å samle gymnas og yrkesskole i en felles videregående skole. Ambisjonen var å viske ut skillet mellom disse utdanningene. Nå skulle all ungdom så vidt mulig ha rett til tre års utdanning etter grunnskolen. Det tradisjonelle gymnaset forsvant, og hele den videregående opplæringen endret struktur. Den offisielle betegnelsen ble videregående opplæring. Samtidig var det et økende antall elever som søkte seg til videregående skoler, men kapasitetsproblemer førte til at ikke alle fikk ta del i denne utdanningen.

Fagkretsen i de ulike kurs i den videregående skole var delt inn i felles allmenne fag, studieretningsfag og valgfag. Fra og med andre år kunne elevene velge studieretning (linje). Valg på tvers av linjene var bare unntaksvis mulig. Studieretning for allmenne fag var bygd opp slik at elevene fikk et første felles år, kalt grunnkurs.

Fordypningen startet andre året, og på naturfaglinjen lå hovedvekten på to eller flere av fagene matematikk, fysikk, kjemi og biologi. For at fordypningen skulle få den nødvendige tyngden, stiltes det bestemte krav til fagkombinasjonene innenfor linjen. Hver elev måtte velge minst 15 timer linjefag innenfor sin linje i løpet av 2. og 3. år. Elevene måtte velge minst to linjefag og i minst ett linjefag måtte elevene følge undervisningen over to år (Læreplan, Del 3a, 1976).

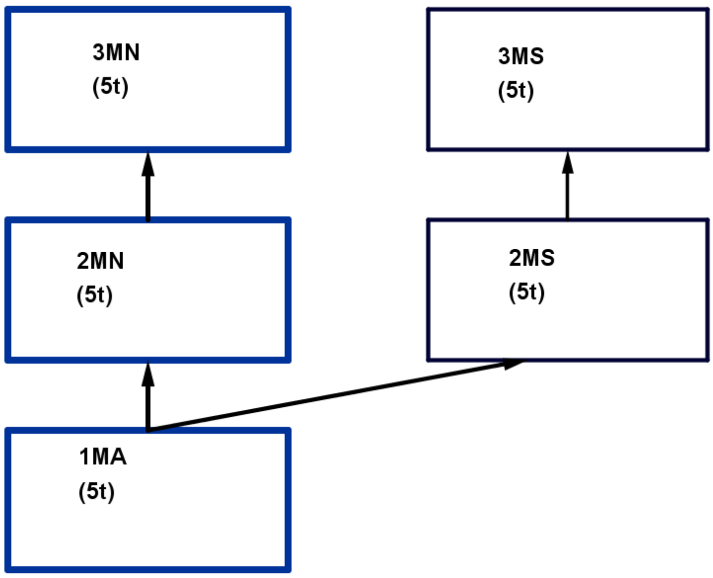
Denne strenge inndelingen og begrensning i elevenes valgmulighet gikk man bort fra i Reform 94. Verd å merke seg er at denne begrensingen er kommet tilbake under Kunnskapsløftet, der elevene igjen må følge to fag over to år fra samme studieretning, i dag kalt programområde.

I læreplanen for den videregående skole, generell del, s.7, står det:

*"Elevene skal så vidt mulig få starte på det faglige nivå de har de har nådd fram til ved inntaket i den videregående skolen, og undervisningen må legges opp i et tempo, og med et omfang som høver for den enkelte så langt dette er praktisk høvelig."*

Den enkelte skole fikk i større grad avgjøre en rekke saker som tidligere hadde vært bestemt av myndighetene, blant annet hvilke valgfag den enkelte skole skulle tilby og hvordan undervisningen skulle være ordnet. I tillegg kunne skolene utarbeide lokale regelverk i forhold til elevenes rettigheter og plikter. Fagplanene var veiledende. Både lærere og elever var gitt større frihet enn i tidligere læreplaner både når det gjaldt valg av emner, arbeidsoppgaver og arbeidsmåter.

De ulike kursene i matematikk under Reform 74 hadde denne strukturen:




Figur 7 - Matematikkfagene under Reform 74.

1 MA var et felles, obligatorisk kurs for alle elevene første skoleår. Bak lå et ønske om at alle skulle ha like muligheter til å tilegne seg kunnskaper i matematikk, og var slik sett en videreføring av enhetsskoletanken. 1MA var et 5-timersfag som var delt inn i kjernestoff og tilvalgsstoff.

Utfordringene med dette kurset var hvordan en både skulle ivareta de elevene som skulle fortsette med matematikk, og samtidig gi et godt tilbud til de som skulle slutte med faget etter første året. Enkelte ansatte på skoler og universitetene hevdet at en av årsakene til nivåsenkningen i matematikk skyldtes dette første felles året, der krav om faglighet kom i konflikt med enhetsidealene (Skarpenes, 2004). Det ble presisert at opplæringen i matematikk skulle variere etter den utdanningsveg elevene valgte. Faget ble framstilt både som redskapsfag og som grunnlag for senere studier i matematikk og andre fag. Undervisningen skulle også legge til rette for teknologisk utvikling, og det ble presisert at elevene måtte få oppleve glede ved å arbeide med faget, slik at faget kunne få en verdi i seg selv (Læreplan, Del 3a, 1976).

Fagplanene i matematikk 3MN gjennomgikk en del endringer mellom 1974 og 1994, stort sett som en rekke presiseringer av den foreliggende plan. Kurset bygget på 2MN. Fagplanen så slik ut (Læreplan, Del 3a, 1976, s. 63):

*Geometri*

Tyngdepunkt i trekant. Median
Likninga for ei rett linje på normalform. Avstand frå eit punkt til ei rett linje
Tverrvektor (vektornormal)
Liknings- og parameterframstilling for plan
Døme på parameterframstilling for plane kurver
Definisjon av vektorprodukt
Normalvektor for plan, normalform for plan
Parameterframstilling for linje i rommet
Avstand mellom punkt og plan, mellom punkt og linje og mellom to punkt
Vinklane mellom to linjer, to plan og mellom linje og plan
Volumutrekning ved hjelp av integral. Prisme, pyramide og omdreiningslekam

*Funksjonslære og algebra*

Den deriverte av trigonometriske funksjonar
Trigonometriske likningar, spesielt $a \cos x + b \sin x = c$ og $\sin nx = \cos mx$
Enkle trigonometriske ulikskapar
Omvend funksjon
Logaritmefunksjonar med e og 10 som grunntal
Allmenne eksponentialfunksjonar og eksponentialfunksjonar med e som grunntal
Allmenn potensfunksjon $x^r$ med derivert
Den deriverte av logaritmefunksjonar og eksponentialfunksjonar
Differensial. Døme på bruk av differensial til å finne tilnærmingsverdiar for funksjonsverdiar
Døme på integrasjon som grense for sum, med døme på bruk
Integrasjonsmetodar. Delvis integrasjon. Integrasjon ved substitusjon
Oppdeling av delbrøk med nemnar av første grad
Talfølgjer. Konvergens av talfølgjer
Induksjonsprov
Rekkjer. Aritmetiske og geometriske rekkjer
Konvergens og divergens av rekkjer, spesielt behandla for geometriske rekkjer

De enkelte fagplaner var laget som rammeplaner. De var så omfattende at det måtte gjøres utvalg både for den enkelte klasse og for den enkelte elev. Fagplanen i matematikk var gitt som en emneliste over temaer en kunne gjennomgå. Vektorregning og funksjonslære dominerer, og induksjonsbevis er med som eget punkt. Fagplanen måtte ikke oppfattes som minstekrav, men rammer som en kunne velge stoff innenfor. Under Reform 74 var matematikk knyttet til dagliglivet spesielt nevnt (Læreplan, 1976, Del 3a, s. 58):

*"Særlig er det viktig at elevane får grunnlag for å forstå den stadig større rolla som visse delar av bruksmatematikken spelar i dagens samfunn og i debatten om samfunnsspørsmål."*

Målene for matematikkopplæringen var formulert slik (Læreplan, 1976, Del 3a, s. 57):

*Gjennom arbeidet med faget matematikk skal elevene få*

- *nødvendig kunnskap og dugleik når det gjeld både den utdanningsvegen som er vald og dei behov som er vanlig i et moderne samfunn,*
- *god kjennskap til grunnleggjande emne og omgrep i faget,*
- *forståing for matematiske problemstillingar og matematisk metode,*
- *forståing for kva matematikken har å seie for utviklinga i vitskap og teknikk*
- *så gode føresetnader som mogleg for sjølvstendig å kunne arbeide videre med faget.*

Elevene fikk standpunktkarakterer etter hvert kurs. Til eksamen skulle elevene særlig prøves i de emnene som en hadde lest på dette kurset, men prøven kunne også omfatte emner som krevde kunnskaper fra tidligere kurs.

### 2.4.6 Eksamen under Reform 74

Eksamenstiden for 3MN var 5 timer. Lommeregner og formelsamling var tillatte hjelpemidler under hele eksamen. Eksamen kunne også omhandle stoff fra tidligere kurs, som for eksempel 1MA og 2MN. Elevene måtte tegne alle grafene for hånd på millimeterpapir, og det var ikke tillatt med grafiske eller programmerbare lommeregnere, i den grad det fantes.

### 2.4.7 Veierødmodellen

Under Reform 74 måtte elevene velge fag innenfor den linjen de hadde valgt, og kunne i svært liten grad velge fag på tvers av linjestrukturen. Rådet for videregående opplæring (RVO) oppnevnte en arbeidsgruppe, ledet av Tom Veierød, som skulle se på denne rigide strukturen. Gruppen leverte sin innstilling i 1982, med forslag om å avvikle linjene. Veierødmodellen ble forsøkt noen år, og selv om realistene protesterte og mente at kunnskapene i naturfagene trengte hverandre, ble modellen gjennomført i alle skoler fra 1988. Det var en viktig side ved utdanningstenkningen i Norge på denne tiden at større frihet skulle føre til et økt læringsutbytte. Andre tok til orde for at en slik ubundet fleksibilitet kunne gi et dårligere læringsutbytte. Læring i enkelte fag kan hjelpe læring i andre fag. Kan du matematikk, er det enklere med fysikk, og motsatt (Skarpenes, 2004).

### 2.4.8 Rugeutvalget

I 1986 nedsatte RVO en gruppe som skulle se på matematikkfaget sin plass i skolen, det såkalte Rugeutvalget. Året etter leverte de sin innstilling, *Reform av videregående* *skolematematikk*. Utvalget uttykte bekymring for nivåsenkningen i matematikk. Her kunne man lese at samtidig som matematikk ble viktigere og viktigere, kunne elevene mindre og mindre. Utvalget pekte på at elevene brukte mindre tid på lekser enn tidligere, og at datamaskinene skapte avstand mellom det som foregikk i skolen og det som foregikk utenfor. Rugeutvalget understreket viktigheten av faget 1MA i norsk skole. Kurset var obligatorisk for alle på allmennfaglig studieretning, og hadde over 30 000 elever. Man mente at skolen burde tilføres ekstra midler for å gjøre det mulig med differensiering i faget.

Rugeutvalget konkluderte også med at matematikkundervisningen burde knyttes nærmere elevenes virkelighet. Den skulle i tillegg øve elevene i problemløsning og kritisk tenkning. Datamaskinene og lommeregnere hadde skapt endringer i bruken av matematikk, og utvalget mente derfor at disse måtte sterkere inn i undervisningen. Selv om utvalget understreket at faget var mye mer enn data, og måtte beholde sin særegenhet, var ønsket at emnene i matematikk ble brakt nærmere *den virkelige verden*, og at tradisjonell faglig regning og oppgaveløsning ble mindre relevant.

Senere kom rapporten *Matematikk og EDB*. Også her ble det uttrykt bekymring for nivåsenkningen. Årsaken til dette var oppløsningen av kursplanene på ungdomsskolen, timetallredusering og manglende vilje til differensiering. I 1991 ble det sendt forslag om fagplan til RVO, der grunnkurset i matematikk ble foreslått nivådelt. Idealer om likhet og solidaritet kom i konflikt med kunnskapsutviklingen til elevene, ble det hevdet. Også denne rapporten uttrykte ønske om flere digitale hjelpemidler i faget, fordi man mente at teknologien ville gjøre faget mer anvendelig og virkelighetsnær for elevene (Skarpenes, 2004). Enkelte ville gå enda lengre, og tok til orde for å dele 1MA i to atskilte kurs. De mente at et felles år med undervisning i matematikk, var en av årsakene til nivåsenkningen. Diskusjonen om nivåsenkning er fortsatt levende.

### 2.4.9 Reform 94

Reform 94 var både en strukturreform, en rettighetsreform og en innholdsreform. Strukturreformen innebar at 109 ulike grunnkurs ble redusert til 13, og det ble innført en felles kjerne av allmenne fag i grunnkursene. I tillegg ble linjene i videregående skoler oppløst. Nå kunne elevene velge fag fritt blant studieretningsfagene, og ønsket var at denne friheten ville føre til større læringsvillighet. Innholdet i skolefagene ble gjort mer praktiske, og læringen ble i enda sterkere grad tilpasset den enkelte elev. Rettighetsreformen medførte at all ungdom mellom seksten og nitten år fikk lovfestet rett til tre års videregående utdanning. Med skolestart for seksåringene, som ble innført i 1997, ble det i realiteten 10 års obligatorisk skolegang i Norge.

Under Reform 94 økte søkningen til videregående skole. I tiårsperioden fra 1993 steg andelen av årskullet som søkte videregående utdanning direkte fra 79 % til 96 % (St.meld. nr. 16, 2006-2007). Det ble lagt sterkere vekt på det felles allmenndannende innholdet i opplæringen, noe som resulterte i en generell læreplandel, som skulle være felles både for grunnskolen, videregående opplæring og voksenopplæringen. Denne delen av læreplanen skildret sentrale forhold ved elevenes utvikling som opplæringen skulle ta utgangspunkt i. Med Reform 94 ble begrepet ”Det hele mennesket” konstruert. I den generelle delen, som skulle gjelde både for grunnskolen (L97) og den videregående skolen (R94), beskrives de ulike aspektene ved mennesket slik:

*Det meningssøkende menneske, Det skapende menneske, Det arbeidende menneske, Det allmendannete menneske, Det samarbeidende menneske, Det miljøbevisste menneske.*

Det var altså ikke bare frafallsprosenten eller bekymring for kvalitet som førte til utviklingen av de nye fagplanene. Selve kunnskapsbegrepet var i endring. I *Prinsipper og retningslinjer for 10-årig grunnskole - ny læreplan* (St.meld.nr 29,1994-95) blir det beskrevet slik:

*"Det overordnede utgangspunkt er at opplæringen skal gi barn og unge en bred livsforberedelse og stimulere utvikling av hele mennesket, slik det er redegjort for i generell del av læreplanen."*

I følge Skarpenes (2004) var det på den tiden klare antifaglige trekk ved de siste tiårenes skolepolitikk. Skarpenes mente at kunnskapen og pedagogikken i de generelle læreplanene og i de obligatoriske delene i matematikkfaget hadde endret seg. Pedagogikken fikk større innflytelse, samtidig som det hadde skjedd et skifte i synet på hva som var viktig allmenndannende kunnskap. Dette kunnskapssynet påvirket også innholdet i fagenes planer, og oppfatningene av hvordan elevene skulle evalueres. Kunnskap forankret i fag og fagtradisjoner ble nedtonet, til fordel for kunnskap forankret i det man mente fra samfunnets side var relevant for den enkelte elev.

Skarpenes *(2004, s 318)* omtaler det brede kunnskapsbegrepet og konstruksjonen av "Det hele mennesket" slik:

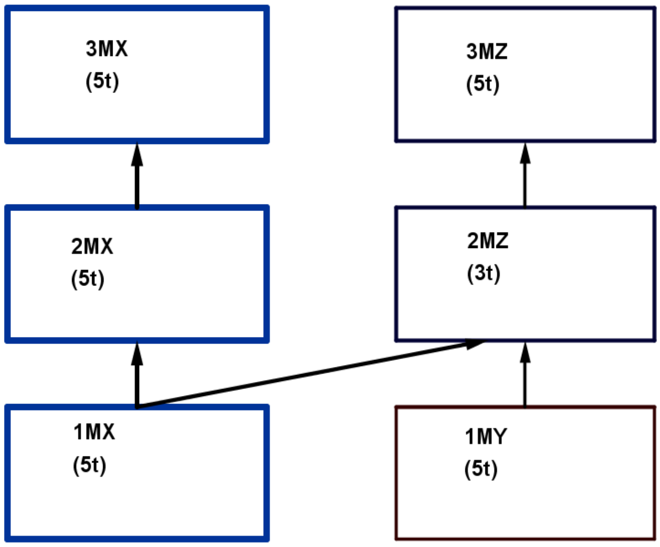
*"Skolen skulle reformeres fordi kunnskapssamfunnets markedsøkonomi var i rask og kontinuerlig endring»*

Videre hevder han:

*"Reformaktørene krevde altså en kunnskap i skolen som skulle gjøre elevene omstillingsdyktige og mottakelige for endringer" (Skarpenes 2004, s 319).*

Under Reform 94 ble matematikkfaget første året delt inn i tre enheter; 1M, 1X og 1Y, der 1M besto av kjernestoff felles for alle. Første halvår var felles med pensum fra 1M. Etter gjennomført 1M skulle elevene tidlig i andre halvår velge 1X eller 1Y. 1Y vektla praktiske anvendelser, og la grunnlaget for studieretningsfagene 2MY og 3MY, mens 1X la grunnlaget for 2MX og 3MX. Fra og med skoleåret 2001/2002 ble betegnelsene 2MY og 3MY erstattet med betegnelsene 2MZ og 3MZ.

De ulike kursene under Reform 94 hadde denne strukturen:




Figur 8 - Matematikkfagene under Reform 94.

I læreplanens kapittel 1, Generell informasjon, s.6, står følgende:

*"Studieretningsfagene 2MX og 3MX er primært beregnet for elever som ønsker å arbeide videre med matematikk innenfor områder som f.eks. naturvitenskap, teknologi, datafag, undervisning og økonomi. Fagene gir det idemessige og regnetekniske grunnlaget for videre arbeid både med matematikk og med fag der matematikk er et naturlig redskap."*

Læreplanen sier videre at en i så stor grad som mulig skal ta utgangspunkt i praktiske problemstillinger knyttet til daglig- og yrkesliv. Med den nye læreplanen for grunnskolen, L97, fikk nytteaspektet en enda mer framtredende plass i matematikk, der *Matematikk i dagliglivet* er et av fem hovedtemaer. Dette fikk også betydning for pensumet i 2MX og 3MX, som ble justert i 2000. Elevene skal også ha mulighet til å utforske matematikken uten at det direkte er koblet til anvendelser.

Utdrag fra fagplanen i 3MX (Læreplan for videregående opplæring, 2000)

*Mål 1: Kultur, språk og kommunikasjon*
*Elevene skal kunne tolke og formidle matematisk informasjon på muntlig, skriftlig og grafisk form. De skal kunne gjennomføre matematiske resonnementer, ha innblikk i matematikkens historie, og kjenne til noe av fagets betydning for samfunns- og kulturliv.*

*Hovedmomenter:*
*Elevene skal*

*1a* *kunne samtale og samarbeide om matematiske spørsmål og kunne presentere og begrunne egne oppgaveløsninger og undersøkelser*
*1b* *kunne lese og forstå en enkel matematisk tekst, gjøre rede for innholdet og bruke det i oppgaveløsing*
*1c* *kjenne begrepene implikasjon og ekvivalens og være kjent med noen vanlige matematiske bevistyper*

*1d kjenne matematiske bevis for noen sentrale resultater i faget og selv kunne gjennomføre matematiske resonnementer*
*1e kjenne til matematikkens flerkulturelle historie og ha innblikk i matematikkens betydning for naturvitenskap, teknologi, samfunnsliv og kultur*

*Mål 2: Modellering, eksperimentering og utforsking*

*Elevene skal ha innsikt i samspillet mellom matematikk og virkelighet, og de skal kunne løse oppgaver som krever kreativitet, fantasi og innsikt. De skal kunne bruke teknologiske verktøy på en hensiktsmessig måte i modellering, utforsking og problemløsing.*

*Hovedmomenter:*
*Elevene skal*

*2a kunne formulere og analysere enkle matematiske modeller og kunne vurdere deres gyldighet*
*2b kunne reflektere over og vurdere egne metoder og resultater og kunne diskutere dem med andre*
*2c kunne bruke teknologiske verktøy i utforsking og problemløsing*
*2d kjenne forskjellen på analytiske og numeriske løsninger og kunne angi svar på eksakt form eller med fornuftig avrunding*
*2e kunne oppdage og eksperimentere med mønstre, systemer og sammenhenger og kunne undersøke om resultatene de kommer fram til, har generell gyldighet*
*2f kunne formulere og løse problemer der de må kombinere sine matematiske kunnskaper og ferdigheter med initiativ, originalitet og innsikt.*

*Mål 3: Rekker*
*Elevene skal kunne regne med geometriske og aritmetiske rekker og kunne bruke dem til å løse praktiske problemer.*

*Hovedmomenter:*
*Elevene skal*

*3a kunne summere endelige aritmetiske og geometriske rekker*
*3b kunne regne med uendelige geometriske rekker med konstante kvotienter*
*3c kunne bruke lommeregneren til å summere sekvenser av tall*
*3d kunne bruke rekker til å utforske geometriske forhold og mønstre*
*3e kunne bruke rekker til å løse praktiske problemer blant annet i forbindelse med sparing og avbetalingskjøp*

*Mål 4: Trigonometriske funksjoner*
*Elevene skal kunne regne med trigonometriske funksjoner og kunne bruke dem til å løse praktiske problemer*

*Hovedmomenter:*
*Elevene skal*

*4a kjenne absolutt vinkelmål, kunne regne om mellom grader og radianer og kjenne definisjonene til sinus-, cosinus- og tangensfunksjonene*
*4b kjenne de eksakte verdiene til sinus, cosinus og tangens til 0, 30, 45, 60 og 90 grader og kunne bruke disse verdiene til å finne vinkler i andre kvadranter og omløp*
*4c kunne bruke formlene for sinus og cosinus til summer og differanser samt formelen sin2x + cos2x = 1*
*4d kunne derivere og integrere trigonometriske funksjoner*
*4e kunne finne amplitude, periode og fase til en harmonisk svingning ut fra funksjonsgrafen, kunne skrive om uttrykk fra formen a sin(cx) + b cos(cx) til A sin (cx + d) og kunne bruke resultatet til å analysere funksjoner og løse ligninger*
*4f kunne bruke trigonometriske funksjoner til å modellere periodiske fenomener*

*Mål 5: Integralregning*
*Elevene skal kunne bruke de vanligste metodene til å løse integraler, og de skal kunne løse praktiske problemer ved hjelp av integrasjon*

*Hovedmomenter:*
*Elevene skal*

*5a* *kunne beregne integraler ved hjelp av variabelskifte og delvis integrasjon*
*5b* *kunne bruke integraler til å beregne volumer*
*5c* *ha kjennskap til den historiske utviklingen av noen grunnleggende problemstillinger i numerisk matematikk*

*Mål 6: Vektorer og vektorfunksjoner*
*Elevene skal kunne regne med vektorer og parametriserte kurver i planet og i rommet*

*Hovedmomenter:*
*Elevene skal*

*6a* *kunne bruke de geometriske og algebraiske definisjonene av operasjonene addisjon, subtraksjon, skalarprodukt og multiplikasjon med en skalar for tredimensjonale vektorer*
*6b* *kunne finne ligningen for et plan gjennom et gitt punkt og med en gitt normalvektor*
*6c* *kunne finne avstanden mellom to punkter i rommet og kjenne ligningen for en sirkel i planet og en kuleflate i rommet*
*6d* *kunne finne avstanden fra et punkt i planet til en linje og fra et punkt i rommet til et plan*
*6e* *kunne bruke vektorfunksjoner til å parametrisere kurver i planet og i rommet, kunne derivere vektorfunksjoner og finne hastighet, akselerasjon og buelengde*
*6f* *kunne bruke polarkoordinater til å fremstille kurver i planet og til å beregne arealer*

*Mål 7: Sannsynlighetsregning og statistikk*
*Elevene skal kunne regne med sannsynlighetsfordelinger, forventning og varians og kjenne til sammenhengen mellom modellparametere og parameterestimat.*

*Hovedmomenter:*
*Elevene skal*

*7a* *kjenne begrepene fordeling og stokastisk variabel for endelige utfallsrom og kunne finne forventning, varians og standardavvik*
*7b* *kjenne regnereglene for forventningen til en lineær kombinasjon av to stokastiske variable og variansen til en lineær kombinasjon av to uavhengige stokastiske variable*
*7c* *kjenne forventning og varians til en binomisk fordeling*
*7d* *kjenne normalfordelingene og kunne regne ut sannsynligheter knyttet til normalfordelinger*
*7e* *ha kjennskap til den sentrale grensesetningen og kunne beregne sannsynligheter ved å tilnærme binomiske fordelinger med normalfordelinger*
*7f* *forstå at utvalg fra en stor populasjon kan betraktes som uavhengige gjentak og kunne beregne punktestimat med standardfeil og tilnærmet konfidensintervall for en populasjonsandel og et populasjonsgjennomsnitt.*

Fagplanen inneholder 7 mål med hovedmomenter og formuleringer som at eleven skal: *kunne*, *ha kjennskap til*, *forstå* og *drøfte.* Til forskjell fra emnelisten i Reform 74, var dette en målstyrende plan, der en i den generelle delen kan lese:

*«Mål i denne sammenhengen er: a) noe en arbeider mot b) noe en kan vite om en nærmer seg eller ikke» (L-93, s4)*

I tillegg skulle alle elever gjennomføre et større arbeid eller en prosjektoppgave i matematikk, der tema og problemstilling skulle velges innefor læreplanens rammer. Dette arbeidet kunne også inngå i et tverrfaglig prosjekt. Egne erfaringer fra denne perioden, var at det kunne være vanskelig å finne gode tverrfaglige prosjekt som ga utbytte i alle de involverte fagene, og at noen av de største prosjektene "stjal" en del undervisningstid.

### 2.4.10 Eksamen under Reform 94

Eksamenstiden i 3 MX var 5 timer med formelsamling og grafisk lommeregner tilgjengelig under hele eksamen. Det hadde ikke tidligere vært tillatt å bruke grafiske lommeregnere. Lommeregneren kunne brukes til å lage verditabeller, tegne grafer og til å lese av verdier på grafen. Grafisk lommeregner kunne også brukes innenfor regresjon og sannsynlighetsregning.

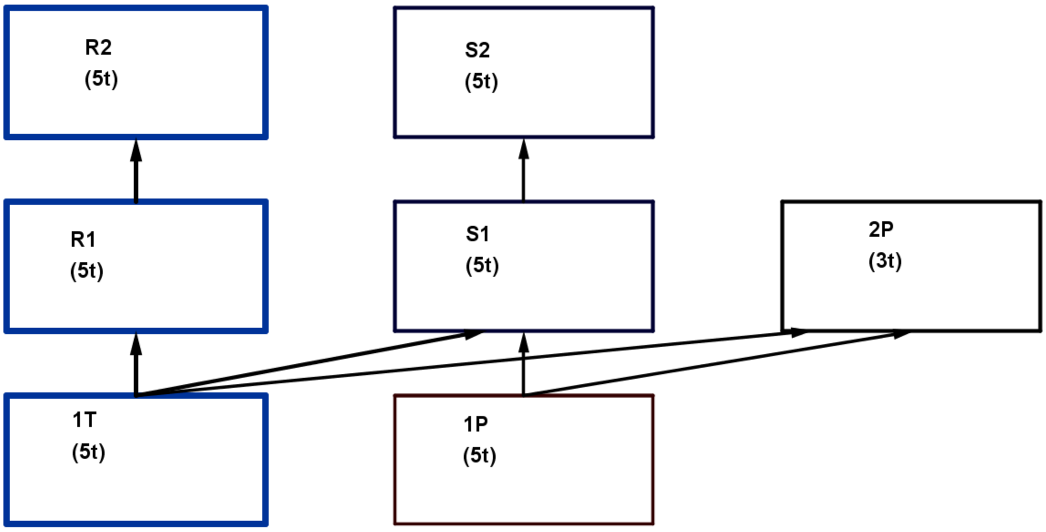
### 2.4.11 Kunnskapsløftet

Høsten 2006 ble den store utdanningsreformen Kunnskapsløftet, med den tilhørende læreplanen tatt i bruk. Kunnskapsløftet er en reform både for grunnskolen og den videregående skolen, og ble påbegynt under Bondevik II-regjeringen. Den overordnede målsetningen var ønsket om økt læringsutbytte og reduksjon av frafall. Den generelle delen i læreplanen for Kunnskapsløftet ble videreført fra R94 og L97. Strukturen i videregående opplæring ble ikke endret. Det kom nye betegnelser og sammensetninger av fag, samt nye fagplaner i alle fag (St.meld.nr 20, 2012-2013).

Under Kunnskapsløftet brukes betegnelsene programområde, programfag og fellesfag. De to første erstatter studieretning og studieretningsfag. Utdanningsprogrammene for studiespesialisering tilbyr programområder innen formgivningsfag, realfag og språk, samfunnsfag og økonomi, som alle fører til generell studiekompetanse. Elevene må følge minst to fag over to år innenfor samme programområde. Dette representerer en stor innstramming når det gjelder elevenes valgmuligheter. Fra at elevene kunne velge fritt blant studieretningsfagene under Reform 94, ble det under Kunnskapsløftet lagt enda større begrensninger på elevenes valgmuligheter enn under Reform 74. Her kunne elevene velge kun ett linjefag over to år. Læreplanen sier lite spesifikt om metode, og gir skolene større handlingsrom enn i Reform 94.

I matematikk skal elevene allerede fra skolestart velge mellom de to fagene 1T (teoretisk) og 1P (praktisk). Løpene er forskjellige, både i innhold og vanskelighetsgrad. 1T er mer krevende enn 1P, og legger grunnlaget for videre fordypning i matematikk. Disse valgene er avgjørende for fremtidige studier.

De ulike kursene under Kunnskapsløftet har denne strukturen:




Figur 9 - Matematikkfagene under Kunnskapsløftet.

På VG2 kan elevene velge fordypning i matematikk. Matematikk for realfag består av programfagene R1 og R2, og gir fordypning i matematikk for videre studier. Matematikk for samfunnsfag består av de to programfagene S1 og S2, og skal gi kunnskaper og ferdigheter som vil være til hjelp for å forstå og analysere viktige samfunnsproblemer. De elevene som ikke velger R1 eller S1, må likevel velge matematikk i 2 klasse. Dette faget heter 2P, og er en fortsettelse av den praktiske 1P. Etter Kunnskapsløftet kan altså ikke elevene slutte med matematikk etter første året.

I læreplanen for Kunnskapsløftet blir bruk av hjelpemidler og teknologi framhevet som en viktig del av faget, uten at det spesifiseres hvilke hjelpemidler det dreier seg om. Læreplanene introduserer digital kompetanse som en grunnleggende ferdighet. Dette har resultert i at nesten alle elever i videregående skole har hver sin bærbare PC.

I fagplanen i matematikk for realfag, programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram, framkommer kompetansemål slik (Læreplan i matematikk for realfag*)*:

***Geometri***
*Hovedområdet handler om måling, regning og analyse av figurer i rommet. Videre dreier det seg om koordinater, ligninger og vektorer som brukes til å bestemme figurer og beregne lengder, vinkler, areal og volum. I tillegg inngår tredimensjonale vektorer, skalar- og vektorprodukt og parameterframstilling.*

*Mål for opplæringen er at eleven skal kunne*

- *utføre beregninger med tredimensjonale vektorer som er representert både geometrisk og på koordinatform*
- *bruke og tolke skalar- og vektorproduktet i beregning av avstander, vinkler, areal og volum*
- *bruke vektorregning til å finne lignings- og parameterframstillinger til linjer, plan og kuleflater*
- *beregne lengder, vinkler og arealer i legemer avgrenset av plan og kuleflater*

***Algebra***
*Hovedområdet handler om å analysere og regne på tallmønstre og på endelige og uendelige summer av tall. Grunnleggende teknikker i hovedområdet er rekursjon og induksjon. Videre dreier det seg om rekker, konvergens og induksjonsbevis.*

*Mål for opplæringen er at eleven skal kunne*

- *finne og analysere rekursive og eksplisitte formler for tallmønstre med og uten digitale hjelpemidler, og gjennomføre og presentere enkle bevis knyttet til disse formlene*
- *gjennomføre og gjøre rede for induksjonsbevis*
- *summere endelige rekker med og uten digitale hjelpemidler, utlede og bruke formlene for summen av de n første leddene i aritmetiske og geometriske rekker, og bruke dette til å løse praktiske problemer*
- *regne med uendelige geometriske rekker med konstante og variable kvotienter, bestemme konvergensområdet for disse rekkene og presentere resultatene*

***Funksjoner***
*Hovedområdet handler om bruk av periodiske funksjoner til å modellere periodiske fenomener. Videre dreier det seg om derivasjon og integrasjon av sentrale funksjoner i modellering og beregninger. Sentrale funksjoner som inngår i hovedområdet, er polynomfunksjoner, potensfunksjoner, rasjonale funksjoner, logaritmefunksjoner, eksponentialfunksjoner, periodiske funksjoner og sammensetninger av dem.*

*Mål for opplæringen er at eleven skal kunne*

- *forenkle og løse lineære og kvadratiske ligninger i trigonometriske uttrykk ved å bruke sammenhenger mellom de trigonometriske funksjonene*
- *derivere sentrale funksjoner og bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte slike funksjoner*
- *omforme trigonometriske uttrykk av typen a sin kx + b cos kx , og bruke dem til å modellere periodiske fenomener*
- *gjøre rede for definisjonen av bestemt integral som grense for en sum og ubestemt integral som antiderivert*
- *beregne integraler av de sentrale funksjonene ved antiderivasjon og ved hjelp av variabelskifte, ved delbrøkoppspalting med lineære nevnere og ved delvis integrasjon*
- *tolke det bestemte integralet i modeller av praktiske situasjoner og bruke det til å beregne arealer av plane områder og volumer av omdreiningslegemer*
- *formulere en matematisk modell ved hjelp av sentrale funksjoner på grunnlag av observerte data, bearbeide modellen og drøfte resultat og framgangsmåte*

***Differensialligninger***
*Hovedområdet handler om bruk av matematikk til å analysere og regne på dynamiske fenomener. I dette hovedområdet inngår standardmetoder for lineære og separable differensialligninger som anvendes på praktiske problemer. I tillegg dreier det seg om sentrale begreper som initialbetingelser, retningsdiagrammer og integralkurver.*

*Mål for opplæringen er at eleven skal kunne*

- *modellere praktiske situasjoner ved å omforme problemstillingen til en differensialligning, løse den og tolke resultatet*

- *løse lineære første ordens og separable differensialligninger ved regning og gjøre rede for noen viktige bruksområder*
- *løse andre ordens homogene differensialligninger og bruke Newtons andre lov til å beskrive frie svingninger ved periodiske funksjoner*
- *løse differensialligninger og tegne retningsdiagrammer og integralkurver, og tolke dem ved å bruke digitale hjelpemidler.*

Fagplanen i matematikk, R2, består altså av kompetansemål, delt inn i fire hovedområder. I tillegg til hvilke tema elevene skal ha kunnskap om, sier planen også noe om hvilket nivå denne kunnskapen skal ligge på. Elevene skal kunne tolke, gjøre rede for, beskrive og drøfte.

### 2.4.12 Eksamen under Kunnskapsløftet

Eksamenstiden i R2 er 5 timer. Skriftlig eksamen er nå todelt, en del uten hjelpemidler, og en del med alle hjelpemidler, unntatt Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. Første del av eksamen er uten hjelpemidler. Elevene har ikke formelsamling tilgjengelig på denne delen, men har gjennom året fått kjennskap til formler som forutsettes kjent under denne delen.

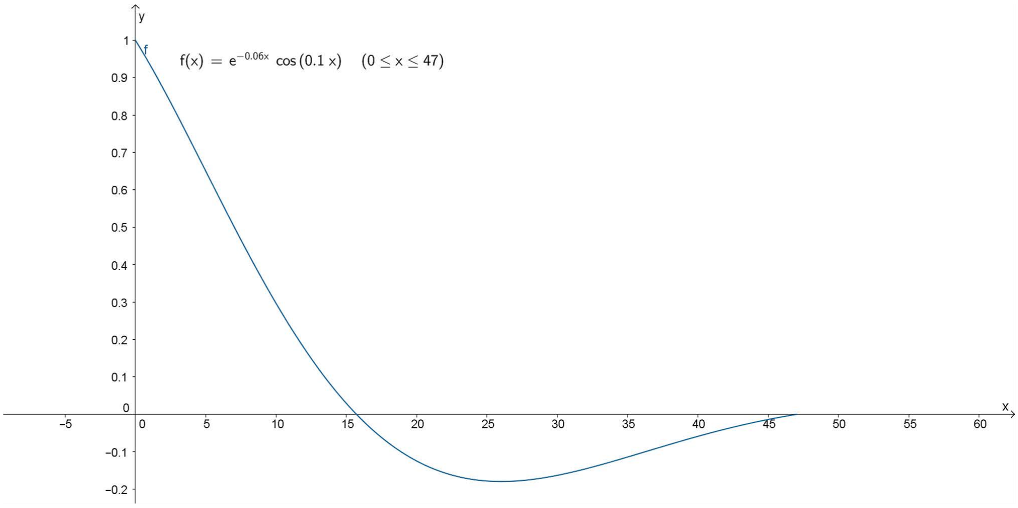
I denne delen prøves elevene i regneferdigheter og grunnleggende matematikkforståelse, begreps- og tallforståelse, evne til resonnement og fagkunnskaper. Oppgavene er laget ut fra kompetansemålene i læreplanen, men det forutsettes at elevene behersker grunnleggende formler og framgangsmåter fra tidligere kurs og skolegang.

Digitale ferdigheter er innført som en av fem grunnleggende ferdigheter i Kunnskapsløftet. Del 2 på eksamen gir muligheter for å vurdere elevenes ferdigheter innen digitale verktøy. Ved vår skole har dette resultert i at også andre prøver blir utformet med to adskilte deler. En del uten hjelpemidler og en del med alle tillatte hjelpemidler.

Med digitale verktøy regnes grafisk kalkulator, som også var tillatt under Reform 94. I tillegg kan eleven ta i bruk regneark, CAS samt graftegner på datamaskinen. CAS står for Computer Algebra System og er en programvare, som i tillegg til tall også kan regne med symboler. Elevene kan velge å bruke datamaskin for å tegne graf, for deretter å ta ei utskrift.

Eksempel på graf tegnet i geogebra:

$$f(x) = e^{-0.06x} \cdot cos(0.1x)\,, \quad D_f = [0, 47]$$




Elevene kan bruke CAS ved oppgaveformuleringer som "Regn ut...", "Finn ved regning...", "Bestem... ved regning" og lignende.

Eksempler på bruk av CAS:

*Deriver funksjonen gitt ved:*

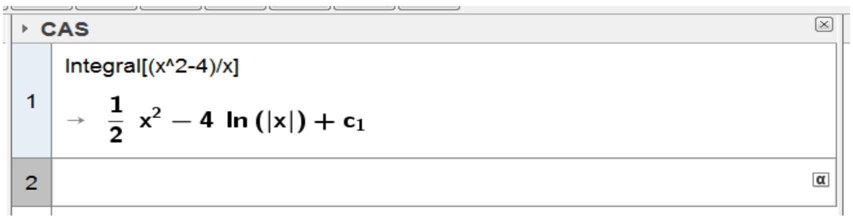
$$f(x) = \ln(x^2 + 3x)$$

Oppgaven løses ved å bruke kommandoen *Derivert* og så skrive inn oppgaven.


*Finn integralet*

$$\int \frac{x^2-4}{x}\,dx$$

Oppgaven løses ved å bruke kommandoen *Integral* og så skrive inn oppgaven.



# 3. METODE

I denne delen blir det redegjort for forskningsdesign, metode og datainnsamling for denne oppgaven. Avsnittet definerer også vitenskapelig ståsted for undersøkelsen.

## 3.1 Design og metode

Ringdal (2007) beskriver design som plan eller skisse for undersøkelsen, mens Grønmo (2004) forklarer metode som en framgangsmåte for innsamling og behandling av ulike typer data. Metoden er redskapet for å komme fram til ny viten og forståelse, og kan hjelpe forskeren med valg i forbindelse med planlegging og gjennomføring av en studie.

### 3.1.1 Kvalitativ og kvantitativ forskning

Innenfor samfunnsvitenskapen skilles det tradisjonelt mellom to hovedformer for metode, kvantitativ og kvalitativ, der Grønmo (2004) mener begrepene refererer til egenskapene ved de data som samles inn og analyseres. Hvilken av de to metodiske tilnærmingene som er mest hensiktsmessig, avhenger av problemstillingen som skal belyses. Kvantitativ forskning er tallbasert, og egnet for å samle inn store mengder data. Kvalitativ forskning egner seg best i forbindelse med analytiske beskrivelser, der formålet er å beskrive totale situasjoner (Grønmo, 2004).

Kvalitative studier er preget av fleksibilitet, der opplegget kan bli endret og tilpasset underveis. En slik tilnærming er også preget av nærhet og sensitivitet, ved at forskeren selv arbeider med sine kilder. Kvantitative studier karakteriseres av en sterk strukturering, der hensikten er at alle enhetene skal behandles på samme måte, og er i større grad preget av avstand og selektivitet. Kvantitative metoder innebærer en viss distanse mellom den som undersøker og det som skal undersøkes, mens kvalitative metoder kan innebære at forskerens person og perspektiver vil kunne påvirke resultatet (Grønmo, 2004).

I følge Grønmo (1996, s 74) kan kvantitative og kvalitative metoder utfylle hverandre:

*… ett og samme fenomen kan ha både kvalitative og kvantitative aspekter, at ulike sosiale fenomener kan studeres ved hjelp av både kvalitative og kvantitative data, og at både kvantitative og kvalitative data kan samles inn og behandles ved hjelp av ulike metoder - som intervju, observasjon, innholdsanalyse og så videre. Hver enkelt av disse forskjellige metodene kan altså brukes i forbindelse med både kvalitative og kvantitative data.*

Videre leser vi at:

*"… kvalitative og kvantitative tilnærminger ikke står i et konkurrerende, men i et komplementært forhold til hverandre. I mange tilfeller kan den ene tilnærmingens svakheter langt på vei oppveies av den andres sterke sider" (*Grønmo, 1996, s. 106).

### 3.1.2 Mixed methods

For å få fram et større mangfold, kan man kombinere disse metodene i en og samme studie. Johnson (Johnson et al, 2007) sammenfatter ulike definisjoner av en tredje metode, kalt *mixed methods*. Her blir dette begrepet forklart som en syntese av kvantitativ og kvalitativ metode, og inkluderer elementer fra begge disse metodene innenfor ett og samme studie. *Mixed methods* er en stadig mer anerkjent metode, og kan regnes som en tredje forskningsmetode, der hensiken er å oppnå en dypere og bredere forståelse av et fenomen. Johnson (2007) definerer mixed methods slik:

*"Mixed methods research is the type of research in which a researcher or team of researchers combines elements of qualitative and quantitative research approaches (e.g., use of qualitative and quantitative viewpoints, data collection, analysis, inference techniques) for the broad purposes of breadth and depth of understanding and corroboration"* (Johnson et al 2007, s. 123).

Videre heter det:

*"This definition refers to mixed methods research as a type of research: A mixed methods study would involve mixing within a single study; a mixed method program would involve mixing within a program of research and the mixing might occur across a closely related set of studies"* (Johnson et al 2007, s. 123).

Framgangsmåten for å studere bestemte fenomen avhenger i en viss grad av disse spesielle fenomenenes egenart. I følge Grønmo(2004) bør problemstillingen styre valg av metode. Mixed methods er en nyttig strategi for å skaffe seg en mer fullstendig forståelse av en problemstilling, og kan være det beste alternativet for kunnskapsutvikling (Creswell, 2003).

Denne studien ønsker å undersøke hva som kjennetegner det matematiske og kognitive innholdet i matematikkeksamen fra de tre siste læreplanperiodene.

Valg av metode bør skje i lys av de forskningsspørsmål som er stilt. Disse er:

1. *Hvilke forskjeller og likheter er det mellom eksamensoppgaver i matematikk når det gjelder innholdskategorier?*

2. *Hvilke forskjeller og likheter er det mellom eksamensoppgaver i matematikk når det gjelder forholdet mellom ren og anvendt matematikk?*

3. *Hvilke forskjeller og likheter er det mellom eksamensoppgaver i matematikk når det gjelder kognitivt nivå*

For å svare på problemstillingen er det i denne oppgaven benyttet et *mixed methods* forskningsdesign. Et argument for å velge *mixed methods* design er å kunne dra nytte av fordelene ved både kvalitative og kvantitative metoder, samtidig som en kan redusere hver metodes svakheter. En slik tilnærming gjør at en kan oppnå en bredde- og dybdeforståelse av et fenomen man ellers ikke ville fått (Creswell, 2003).

Det er flere varianter av mixed methods design. Creswell (2003) beskriver hvordan en kombinasjon av kvantitative og kvalitative tilnærminger kan være effektive i en forskningsdesign. Eksempelvis kan informasjon fra en kvalitativ undersøkelse benyttes for å utvikle ny kunnskap, som igjen kan danne grunnlag for en kvantitativ undersøkelse. Den kvalitative metoden kan også benyttes i etterkant av en kvantitativ undersøkelse for å utdype en kvantitativ tilnærming. Alternativt kan forskeren etter innsamling av data, kvantifisere kvalitative funn, slik det er gjort i denne studien. Her er oppgavene i hvert eksamenssett kategorisert med tanke på innhold (emne), type matematikk og kognitivt nivå. Under klassifiseringen er det gjort en kvalitativ vurdering av hver oppgave ved hjelp av et analyseverktøy. Fordi denne analysen krever en tolkning av oppgavene, har den en kvalitativ tilnærming. Videre er oppgavene talt opp og presentert i ulike diagrammer, for å gi en oversikt over hvordan kategoriene fordeler seg i de ulike reformene. Resultatet av studien er de opptalte størrelsene, som kan analyseres ved bruk av kvantitative metoder. Tolkning av tekster vil være en kvalitativ tilnærming, mens opptelling innen ulike kategorier vil være en kvantitativ tilnærming. Den kvantitative metoden kartlegger utbredelse, mens den kvalitative tar for seg fortolkningen av oppgavene i form av emne, type matematikk og kognitivt nivå.

Nærhet til kildene er noe som kan påvirke tolkningen av resultatene. Min erfaringsbakgrunn som matematikklærer gjennom flere år der jeg i hovedsak har benyttet et bestemt læreverk, vil kunne prege tolkningene mine. Utfordringen kan være at det er vanskelig å opptre nøytralt i forskerrollen, og at resultatene kan bli styrt mot det jeg ønsker å se. Samtidig kan andre viktige ting ikke bli fanget opp. Derimot er min nærhet til kildene begrenset. Jeg har ikke bidratt til utforming av eksamensoppgavene, og analyseapparatet er utviklet av andre, selv om jeg har gjort noen tilpasninger. Det er ingen risiko i forhold til å påvirke datamaterialet, derimot er det en risiko for at min forståelse vil påvirke analysen, siden jeg selv i dette tilfellet er instrumentet for undersøkelsen. Jeg må derfor være bevisst på at kvaliteten på analysene i stor grad avhenger av meg som forsker.

### 3.1.3 Hermeneutikk

Målet med denne studien er å oppnå innsikt, og forhåpentlig ny forståelse. Den vitenskapsteoretiske fortolkningsrammen danner grunnlaget for forståelsen som utvikles i forskningsprosessen.

Hermeneutikk var opprinnelig et begrep for læren om fortolkning av tekster (Thagaard, 1998). Gilje & Grimen (1995) forklarer hermeneutikk som en metode for å oppnå forståelse av handlinger, tekster, kunstverk eller sosiale fenomener. En hermeneutisk tilnærming legger vekt på at det ikke finnes èn sannhet. De tolkningene som gjøres av et fenomen, vil alltid preges av kontekst og tolkerens forforståelse (Thagaard, 1998).

Den hermeneutiske sirkelen beskrives som forbindelsen mellom det vi fortolker, vår forforståelse og konteksten det fortolkes i. All fortolkning er i stadig bevegelse mellom helhet og del, der ulike komponenter påvirker og er i samhandling med hverandre (Gilje & Grimen, 1995).

En grunntanke i hermeneutikk er altså at vi alltid forstår noe ut fra visse forutsetninger, og at mening skapes og kun kan forstås i en sammenheng eller kontekst. Oppgavens teoridel danner ramme for tolkningen, slik at den skal fremstå som meningsfull. Skolen er i stadig endring, og har ikke alltid sett ut slik den gjør i dag. For å belyse dette, ble det i avsnitt 3 gitt et kort skolehistorisk tilbakeblikk fram til dagens skole.

Vår bakgrunn og våre forutsetninger påvirker vår forståelse av fenomener (Gilje & Grimen, 1995). Min undervisningspraksis gjennom mange år, der hovedsaklig ett læreverk er benyttet, vil i ulik grad farge mine tolkninger. I min studie er det min gjengivelse og forståelse av den informasjonen jeg innhenter, som presenteres. Her ligger det mulige feilkilder. Hvordan jeg leser og tolker dokumentene er avgjørende. En av utfordringene i min studie, blir å utfordre min forforståelse, samt overvinne begrensingene den representerer for å kunne tilegne meg ny kunnskap. Utfordringene ved å forske i egen kultur, er at en står så nær feltet at det kan være vanskelig å opptre nøytralt i rollen som forsker. Jeg har under kategoriseringen av eksamensoppgavene prøvd å ta hensyn til dette.

### 3.1.4 Dokumentanalyse

Dokumentanalyse er nyttig i studier der en ønsker å se endringer over tid (Cohen et al, 2007). Dokumenter skrevet i den offentlige sfære, og av dyktige fagfolk kan inneholde verdifull informasjon. Samtidig kan det være en del utfordringer med dokumenter. Dokumentene kan være av dårlig kvalitet, ufullstendige eller mangelfulle, og er i utgangspunktet skrevet i en annen sammenheng og for et annet formål enn som forskningsdata. Samtidig må dokumenter forstås i den tid de er skrevet i (Cohen et al, 2007).

For å svare på problemstillingen i denne studien, benyttes dokumentanalyse. Dokumentene består av sentralt gitte eksamensoppgaver gjennom tre reformer, utgitt av Utdanningsdirektoratet. Dette er offentlige dokumenter, skrevet av fagfolk i den hensikt å måle avgangselevenes kunnskaper og ferdigheter i matematikk. I tillegg til eksamenssettene har andre skriftlige dokumenter blitt benyttet i undersøkelsen. Dette er løsningsforslag, formelsamlinger og lærebøker. Læreboka kan ses på som en slags implementert læreplan. Selv om godkjenningsordningen for lærebøker ble opphevet i år 2000, har læreboka fortsatt en framtredende stilling i klasserommet. I tillegg er gjeldende læreplaner og veiledninger gitt til eksamen brukt som referansegrunnlag.

Fordelen med en dokumentanalyse er at forskeren kan observere uten selv å bli observert. Det er ingen risiko for at forskeren skal påvirke datamaterialet. Derimot er det en risiko for at forskerens forforståelse vil påvirke analysen, siden forskeren selv er instrumentet for undersøkelsen. Jeg har derfor valgt å gjøre rede for de valg som er fattet underveis, slik at det er mulig å følge prosessen som er utført i denne oppgaven.

## 3.2 Innsamling av data

I dette studiet er data hentet fra følgende eksamenssett, alle gitt til ordinær eksamen:

- 16 eksamenssett i 3MN fra Reform 74
- 9 eksamenssett i 3MX fra Reform 94
- 5 eksamenssett i R2 fra Kunnskapsløftet

Eksamenssettene gitt under Reform 74 var arkivert på min skole. Dette gjelder eksamen i perioden 1978 til 1995, med unntak av eksamen gitt vår 1985 og vår 1986. Oppgavene gitt under Reform 94 finnes tilgjengelig i eksamenshefter, og gjelder eksamen i perioden 1998 til 2007, med unntak av vår 2003. Eksamensoppgavene under Kunnskapsløftet er hentet fra Utdanningsdirektoratet sine nettsider, og består av settene fra 2009 til 2013. De utelatte settene lot seg enten ikke framskaffe, eller manglet løsningsforslag/fasit.

Det ville bli for omfattende å analysere eksamensoppgavene i lys alle lærebøker som finnes tilgjengelig. Jeg har for alle reformene benyttet læreboka som er utgitt av Aschehoug forlag under kategoriseringen. Jeg har mest erfaring med dette læreverket fordi det er den læreboka vi over lang tid har valgt å bruke ved vår skole. Valg av læreverk kan ha betydning for resultatet av denne undersøkelsen i forhold til klassifiseringen av eksamensoppgavene. Hvilke eksamensoppgaver som oppleves kjent for elevene, vil avhenge av eksemplene i læreboka. Til gjengjeld vil de fleste elever bare ha kjennskap til ett læreverk.

For alle tre fagene er Aschehougs læreverk av Erstad/Bjørnsgård/Heir mfl benyttet. Løsningsforslag og fasit er hentet fra Aschehoug og Eksamensforlaget (3MN), Fagbokforlaget (3MX) og fra nettstedet Lokus.no (3MX og R2).

Resultatene fra denne delen av analysen vil utgjøre data for den kvantitative undersøkelsen. Her vil oppgavene gitt under de tre reformene sammenlignes og presenteres.

### 3.2.1 Klassifisering av oppgavene

Analysen besto i å klassifisere 1120 deloppgaver fra 30 eksamenssett etter emne, type matematikk og kognitivt nivå. I denne delen presenteres framgangsmåten for undersøkelsen, det vil si hvordan klassifiseringen og analysen ble utført. Hvordan oppgavene er kategorisert og analysert, er viktig for kvaliteten på studien.

Rammeverket som ble benyttet i klassifiseringen, er i hovedtrekk det samme som er brukt i TIMSS Advanced undersøkelsen fra 2008. Her testes elever fra ulike land, med ulike læreplaner (curriculum), og retter seg mot elever som har valgt matematikk eller fysikk siste året i videregående skole. Rammeverket er utviklet med blant annet sikte på å samle inn informasjon om kunnskap og ferdigheter i matematikk og fysikk hos elever i videregående skole, og er derfor relevant i forhold til mitt materiale. TIMSS Advanced er, i likhet med de andre TIMSS-studiene, planlagt og ledet av topp internasjonal ekspertise på moderne testteori (Grønmo et al, 2010). Rammeverktøyet er utfyllende presentert i avsnitt 2.2.

Analyseverktøyet legger føringer for kategoriseringen. Det kan likevel være ulike oppfatninger av hvilke kategorier de ulike oppgavene skal fordeles i. For å imøtegå dette er det viktig å være konsekvent, slik at en endring i vurderingen bare vil føre til at søylene øker eller minker for de ulike kategoriene, men ikke at forholdet mellom dem endres.

Klassifiseringen av oppgavene baserer seg på at elevene som har brukt den aktuelle læreboka, har en felles referanseramme når det gjelder kjennskap til teori og algoritmer. Det antas da at elevene har løst oppgavene fra hoveddelen i boka og lest teorien.

Bruk av hjelpemidler har variert ved eksamen under de ulike reformene. Dette er ikke tatt hensyn til under kategoriseringen, men er kommentert for de ulike reformene. Hvor mye hjelpemidlene var til hjelp under eksamen, er ikke mulig å si noe om ut fra denne undersøkelsen.

Følgende variabler ble brukt i sorteringen av oppgaver: tema, kognitivt nivå og type matematikk (ren eller anvendt).

Klassifiseringen av hver oppgave ble utført slik:

1) Analyse av oppgaven

   - Hvilken innholdskategori tilhører oppgaven? (tema)
   - Løsning av oppgaven
   - Sammenligning med aktuell lærebok
   - Hvilket kognitivt nivå kreves for å løse oppgaven?
   - Er det en tekstoppgave eller en ferdig oppstilt oppgave? (type matematikk)

2) Konklusjon (kategorisering)

Med utgangspunkt i rammeverktøyet ble oppgavene kategorisert og registrert etter tema, i betydning innholdskategori. Klassifiseringsverktøyet skiller mellom innholdskategoriene *algebra*, *kalkulus*, *geometri* og *sannsynlighet*. En oppgave kan omfatte mer enn et emne, og oppgaven kategoriseres da ut fra hvilket emneområde som i størst grad berøres.

Den neste inndelingen tar for seg hvilke ferdigheter som kreves av elevene for å løse oppgaven. Innenfor kognitivt nivå skiller rammeverket mellom kategoriene *å kunne*, *å anvende* og *å resonnere.* Elevene kan bruke ulike strategier for å løse en oppgave. Denne studien tar ikke for seg hvordan elevene faktisk løste oppgavene. Hvis en oppgave kan løses på flere måter, er den klassifisert som *å kunne* eller *å anvende,* dersom oppgaven kan løses ved bruk av kjente formler eller prosedyrer fra læreboka. Oppgaven og dens løsningsforslag ble sammenlignet med oppgaver i hoveddelen i læreboka fra Aschehoug. De ble ikke vurdert opp mot oppgaver gitt i oppgavesamlingen eller oppgaver fra andre kilder som elevene i ulik grad kan ha benyttet.

En oppgave blir klassifisert i kategorien *å kunne* dersom den forutsetter at eleven skal huske eller gjenkjenne fakta. Eksempler på dette er spørsmål om hva som kjennetegner en geometrisk rekke, eller hva som skal til for at en funksjon har en omvendt funksjon. Også oppgaver der elevene skal tegne og lese av grafer med oppgitt funksjonsuttrykk, faller inn under kategorien *å kunne*. Dette er uavhengig av om elevene tegner disse på papir, eller ved hjelp av digitale verktøy som lommeregner eller dataverktøy. Derivasjon av en funksjon bestående av flere ledd, der elevene ikke må velge noen bestemt derivasjonsregel, faller også inn under denne kategorien.

En oppgave som blir sortert under kategorien *å anvende*, er oppgavetyper som er kjent for elevene fra læreboka, i denne studien Aschehougs læreverk. Oppgaver av denne typen kan være bruk av derivasjonsreglene eller kjente integrasjonsteknikker som delvis integrasjon, substitusjon eller delbrøkoppspalting. Disse kan sees på som rutineoppgaver, der en kan benytte en algoritme eller en gitt framgangsmåte. Her må elevene velge metode og bruke denne for å løse den aktuelle oppgaven.

Oppgaver som ikke er rutinepreget for elevene, faller inn under den siste kategorien, *å resonnere.* Denne kategorien inneholder oppgaver som ikke er kjent for elevene fra læreboka. Elevene må analysere informasjon, bruke kunnskaper og ferdigheter, og kunne begrunne påstander matematisk for å komme fram til en løsning. Deler av løsningen kan likevel være basert på kjente algoritmer. Et eksempel på oppgaver i denne kategorien er som følger: Elevene får oppgitt informasjon om en kontinuerlig funksjon i form av egenskaper til selve funksjonen, den deriverte og den dobbeltderiverte. Ut fra denne definisjonen skal elevene lage en skisse av grafen. Her må elevene tolke informasjonen som ligger i de ulike punktene og oversette disse matematisk før grafen kan skisseres.

Når oppgavene skal kategoriseres etter kognitivt nivå, vil den samme oppgaven kunne havne i ulike kategorier. De forskjellige lærebøkene inneholder ulike eksempler og teoritekst. Slik sett vil elevene til en viss grad inneha forskjellig kunnskap. En oppgave som for en elev faller inn under kategorien *å anvende,* vil for en annen elev høre til under kategorien *å resonnere*. Dette vil være bestemt av i hvor stor grad eleven har fått trening i denne type oppgave.

Til slutt ble oppgavene sortert innenfor kategorien ren eller anvendt matematikk, det vil si om oppgaven er satt inn i en praktisk kontekst eller ikke. Konteksten i en oppgave kan være med å hjelpe elever å velge løsningsstrategi (Bergqvist, 2007). Banksparing som kontekst kan lede elevene mot algoritmer som omhandler eksponentiell vekst. Men tekstoppgaver kan også i noen grad gi elevene ekstra utfordringer, der vanskeligheter med å tolke teksten kan hindre elevene i å løse oppgaver de i utgangspunktet kan.

Etter hver analyse ble resultatene registrert i et Excel regneark (vedlegg 1).

### 3.2.2 Eksempler på klassifisering av oppgaver.

**Fra Reform 74:**

Alle de undersøkte eksamenssett fra Reform 74 består av fire eller fem hovedoppgaver. Ikke alle oppgavene er strengt inndelt i deloppgaver. Noen oppgaver ble i denne undersøkelsen nødvendig å dele opp slik at det skulle bli mulig å gjøre kategorisering og opptelling. Andre ville kanskje hatt en annen inndeling.

**Eksempel**

*Finn f '(x) når:*

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2} \qquad D_f = R$$

Denne oppgaven er hentet fra eksamen i 3MN, 1987. Oppgaven består i å derivere et produkt.

Tema:
Derivasjon faller inn under innholdskategorien *kalkulus*. Derivasjon er et sentralt begrep for å kunne forstå variasjoner i funksjonsverdier. I et gitt punkt på grafen er den deriverte lik stigningen til tangenten i punktet. Denne oppgaven løses ved å bruke formelen for derivasjon av et produkt, som elevene under Reform 74 kunne finne i formelheftet. Derivasjon var mest sentralt i 2MN, men elevene skulle også prøves i stoff fra tidligere kurs til eksamen i 3MN.

Løsning:
$f\,'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$

Sammenligning med aktuell lærebok:
Lignende oppgaver i læreboka til 3MN (Oppgave 77, s 108):

*Gitt funksjonen* $f(x) = (x+1)e^x$
*Finn eventuelle nullpunkt, ekstremalverdier og vendepunkter for f.*

Kognitiv kategori:
Det finnes flere eksempler i læreboka på drøfting av funksjoner, med eksempler på metoder innen derivasjon. Kategorien *å anvende* innebærer å bruke kunnskaper og ferdigheter til å velge metoder og prosedyrer for å løse oppgaven. Her må elevene velge produktregelen. Disse oppgavene kan variere i vanskelighetsgrad, men er kjent for elevene fra læreboka, slik at det for eleven i hovedsak dreier seg om å velge en kjent metode. Oppgavene kan ses på som standardiserte oppgaver, og er kategorisert i kategorien *å anvende.*

Type matematikk:
Oppgaven er ferdig oppstilt, uten kontekst, og er av typen *ren matematikk*.

Konklusjon:

| Eksamen | Oppgave | Tema | Kognisjon | Type matematikk | Stikkord |
|---|---|---|---|---|---|
| **1987** | | | | | |
| | $1a_1$ | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Derivasjon, produktregelen |

**Eksempel**

*Skriv definisjonen på konvergens av en tallfølge og konvergens av en rekke*.

Tema:
Oppgaven er hentet fra eksamen 3MN gitt våren 1989. Tallfølger og rekker tilhører kategorien *algebra*. Her må elevene huske definisjonen på konvergens.

Løsning:
*Dersom $a_n$ nærmer seg et bestem tall A som grense når n går mot uendelig, sier vi at tallfølgen er konvergent.*

*Dersom summen av de n første leddene i en rekke går mot en grenseverdi når n går mot uendelig, sier vi at rekken konvergerer mot denne grenseverdien.*

Sammenligning med aktuell lærebok:
Løsningen på oppgaven er hentet fra læreboka i 3MN (s 236, s 246). Her må elevene reprodusere kunnskap, og kunne gjengi definisjonen på konvergens.

Kognitiv kategori:
Dette kan gjengis uten at elevene har forståelse for begrepet. Oppgaven er kategorisert i den kognitive kategorien *å kunne*.

Type matematikk:
Oppgaven beskriver kjennetegn på konvergens, og er av typen *ren matematikk*.

Konklusjon:

| Eksamen | Oppgave | Tema | Kognisjon | Type matematikk | Stikkord |
|---|---|---|---|---|---|
| **1989** | | | | | |
| | $1d_1$ | Algebra | Kunne | Ren matematikk | Definisjon på tallfølge og konvergens av en rekke |

**Eksempel**

En funksjon f er gitt ved

$f(x) = 4000 - 100x + 600 \cdot cos(\pi/6\, x), \quad D_f = [0, 13]$

*Antall fisk i en innsjø i perioden 1980 - 1993 kan tilnærmet beskrives ved* $f(x)$ *der* $x \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 13\}$. *Her er x antall år etter 1980, dvs. at f(0) svarer til gjennomsnittlig antall fisk i 1980, f(1) svarer til gjennomsnittlig antall fisk i 1981 osv.*

*a) Hva er gjennomsnittlig antall fisk i innsjøen i 1984?*

Tema:
Oppgaven er hentet fra eksamen 3MN gitt våren 1995. Å beregne en gitt funksjonsverdi tilhører kategorien *algebra*. Her skal elevene beregne f(4), og oppgaven er derfor kategorisert i innholdskategorien *algebra*.

Løsning:
$f(4) = 4000 - 100 \cdot 4 + 600 \cdot cos(\pi/6 \cdot 4) = 3300$

Sammenligning med aktuell lærebok:
Det er flere eksempler fra læreboka der elevene skal regne ut funksjonsverdier.
Et eksempel fra læreboka (s. 38)

$f(x) = 2cos\, 2x + 1$ Elevene skal regne ut f(0) og f($\pi$)

Kognitiv kategori*:*
Å finne funksjonsverdier er elevene godt kjent med når de for eksempel skal tegne graf. Oppgaver der elevene skal regne ut funksjonsverdier ut fra en gitt funksjon, er kategorisert i den kognitive kategorien å *kunne*

Type matematikk:
Oppgaven er satt inn i en kontekst, og er av typen *anvendt matematikk*.

Konklusjon:

| **Eksamen** | **Oppgave** | **Tema** | **Kognisjon** | **Type matematikk** | **Stikkord** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1995** | | | | | |
| | 2a | Algebra | Kunne | Anvendt matematikk | Finne funksjonsverdi |

**Fra Reform 94:**

Settene i 3MX besto av fem oppgaver med deloppgaver, og fra og med 2004 var oppgave 4 en alternativ oppgave, der elevene kunne velge mellom to oppgaver. Under Reform 94 kunne ikke elevene prøves i stoff fra tidligere kurs.

**Eksempel**

*Et plan α skjærer koordinataksene A(a, 0, 0), B(0, b, 0) og C(0, 0, c), der a≠0, b≠0 og c≠0. Bestem vektorkoordinatene til* $\overrightarrow{AB}$ *og* $\overrightarrow{AC}$

Tema*:*
Dette er en oppgave hentet fra eksamen i 3MX våren 2004. Vektorregning faller inn under innholdskategorien *geometri*. Her skal elevene finne et uttrykk for en vektor mellom to punkt.

Løsning:
$\overrightarrow{AB} = [0 - a, b - 0, 0 - 0] = [-a, b, 0]$
$\overrightarrow{AC} = [0 - a, 0 - 0, c - 0] = [-a, 0, c]$

Sammenligning med aktuell lærebok:
I læreboka er det flere oppgaver og eksempler der elevene skal finne et utrykk for en vektor mellom to punkt.

Et eksempel fra læreboka (s. 24):

*Det er gitt to punkter A (-3, -4) og B(5, -1). Vektoren fra A til B er*
$\overrightarrow{AB} = [5 - (-3), (-1-(-4)] = [8, 3]$

Kognitiv kategori:
Elevene har tilgang til formelhefte under eksamen, der formelen for vektor mellom to punkter er oppgitt. Her kan elevene bytte ut bokstavene i formelen med tall/bokstaver gitt i oppgaven. Oppgaven kategoriseres i den kognitive kategorien *å kunne.*

Type matematikk:
Oppgaven er uten kontekst og kategorisert som r*en matematikk*.

Konklusjon:

| Eksamen | Oppgave | Tema | Kognisjon | Type matematikk | Stikkord |
|---|---|---|---|---|---|
| 2004 | | | | | |
| | 1d1 | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Finne vektorkoordinater |

**Eksempel**

*I denne oppgaven vil vi studere funksjonen g gitt ved*

$g(x) = 3e^{-x} \cdot sin(6x)\, for\ x \in < 0, 2 >$

*Skisser grafen til* $h(x) = -3e^{-x}$ *og* $i(x) = 3e^{-x}$ *i samme koordinatsystem som g. Forklar hvordan du av funksjonsuttrykket til g(x) ser at grafen til g må ligge mellom grafene til h og i.*

Tema:
Oppgaven er hentet fra eksamen i 3MX våren 2005. Trigonometriske funksjoner tilhører innholdskategorien *algebra.* Eleven har tilgang til grafisk lommeregner og kan tegne grafene på lommeregneren, og videre skissere grafene på papir.

Løsning:
En forklaring elevene kan bruke er at:

-1 ≤ $\sin(6x)$ ≥ 1, samt at *3*$e^{-x}$ alltid er større enn 0 for å forklare at h(x) ≤ g(x) ≥ i(x).

Sammenligning med aktuell lærebok:
Det finnes ikke lignende oppgaver i læreboka, og elevene kan ikke anvende en kjent metode for å løse oppgaven. Selv om de kan tegne grafene på en grafisk lommeregner, og slik se at dette stemmer, er oppgaven å forklare dette ut fra funksjonsuttrykkene.

Kognitiv kategori:
Oppgaven kategoriseres i den kognitive kategorien *å resonnere.*

Type matematikk:
Oppgaven er typen *ren matematikk.*

Konklusjon:

| **Eksamen** | **Oppgave** | **Tema** | **Kognisjon** | **Type matematikk** | **Stikkord** |
|---|---|---|---|---|---|
| **2005** | | | | | |
| | 2e | Algebra | Resonnere | Ren matematikk | Forklar at graf g ligger mellom graf h og i |

**Eksempel**

*Bestem integralet*

$$\int x \cdot \cos x\, dx$$

Tema:
Oppgaven er hentet fra eksamen 3MX våren 2005. Integralregning faller inn under kategorien kalkulus.

Løsning:
Oppgaven kan løses ved delvis integrasjon.

u' = $cos\ x$
u = $sin\ x$
v' = 1
v = $x$

$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$$

Sammenligning med aktuell lærebok:
Det finnes flere oppgaver og eksempler på delvis integrasjon i læreboka. Et eksempel er (s. 115):

$$\int \cos x \cdot \cos x \, dx$$

Kognitiv kategori:
Delvis integrasjon er en av tre metoder som blir gjennomgått i læreboka. Andre metoder for integrasjon er *substitusjonsmetoden* og *delbrøkoppspalting*. Formelen for delvis integrasjon er gitt ved:

$$\int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$$

For å løse oppgaven kan eleven velge en metode kjent fra læreboka, og oppgaven kategoriseres i kategorien *å anvende*

Type matematikk:
Oppgaven er typen *ren matematikk.*

Konklusjon:

| **Eksamen** | **Oppgave** | **Tema** | **Kognisjon** | **Type matematikk** | **Stikkord** |
|---|---|---|---|---|---|
| **2005** | | | | | |
| | 1b1 | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Delvis integrasjin |

**Fra Kunnskapsløftet:**

Eksamen gitt de to første årene etter innføringen av Kunnskapsløftet, 2009 og 2010, var utformet slik at en av oppgavene i Del 2 kom i to varianter, der elevene kunne velge alternativ 1 eller alternativ 2. At det er innført en del uten hjelpemidler fører til at elevene må kunne flere formler utenat

Kategoriseringen tar ikke hensyn til om elevene hadde tilgang til formelsamling eller ikke. Fordi elevene ikke har formelsamling tilgjengelig under del, må en anta at de har lært seg de formlene de kan få bruk for i løpet av året. Selv om bruk av hjelpemidler varierer fra den ene reformen til den andre, er oppgavene behandlet likt i forhold til kategorisering. For eksempel er oppgaver der elevene blir bedt om å tegne graf, kategorisert under innholdskategorien *algebra* og *den* kognitive kategorien *å kunne,* uavhengig av om de gjør dette på papir eller ved hjelp av digitale hjelpemidler.

**Eksempel**

$Bestem\ summen\ av\ den\ uendelige\ rekka\ \ 2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}\ +\frac{2}{27}+\ldots$

Tema*:*
Oppgaven er hentet fra eksamen i R2, Del 1, i 2009. Dette er en oppgave i innholdskategorien *algebra.*

Løsning:
Den uendelige rekka er geometrisk med $a_1$ = 2 og k = $\frac{1}{3}$.

Siden -1 $\leq k\ \geq$ 1, konvergerer rekka med sum $=\frac{a}{1-k}=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=\frac{6}{2}=3$

Sammenligning med aktuell lærebok:
Det finnes flere eksempler og oppgaver fra læreboka.
Lignende oppgaver i læreboka til R2 (Eksempel 1 s 105):

Skal avgjøre om rekka konvergerer og eventuelt finne summen.
1000 + 800 + 640 +512...

Kognitiv kategori:
Her skal eleven huske formelen for en geometrisk rekke, og vite at rekken er konvergent for k<1. Summen av en uendelig geometrisk rekke med første ledd a og kvotient k er gitt ved

$S=\frac{a}{1-k}$ .

Eleven må vite hva en geometrisk rekke er, og kunne bestemme kvotienten. Dette er en formel som forutsettes kjent til eksamen. I dette ligger at eleven må huske fakta og gjenkjenne objekter, for så å bytte ut bokstavene i formelen med opplysninger fra oppgaven. Oppgaven kategoriseres i den kognitive kategorien *å kunne.*

Type matematikk*:*
Oppgaven er typen *ren matematikk.*

Konklusjon:

| **Eksamen** | **Oppgave** | **Tema** | **Kognisjon** | **Type matematikk** | **Stikkord** |
|---|---|---|---|---|---|
| **2009** | | | | | |
| | 1c | Algebra | Kunne | Ren matematikk | Sum av uendelig rekke |

**Eksempel**

*Følgende informasjon er gitt om en kontinuerlig funksjon f:*

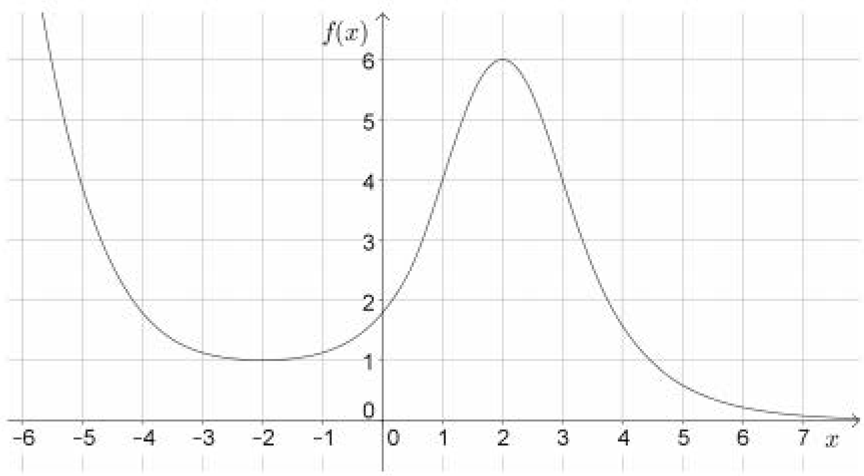
- $f(x) > 0\ for\ alle\ x\ \epsilon\ R$
- $f'(x) < 0\ for\ x\ \epsilon <\leftarrow, -2 > \ \upsilon\ < 2, \rightarrow >$
- $f'(x) = 0\ for\ x = -2\ og\ for\ x = 2$
- $f''(x) = 0\ for\ x = 1\ og\ for\ x = 3$

*Lag en skisse som viser hvordan grafen til f kan se ut.*

Tema*:*
Oppgaven er hentet fra eksamen i R2 våren 2013. Drøfting av funksjoner tilhører innholdskategorien kalkulus.

Løsning:
Det første punktet forteller at grafen til $f$ ligger over x - aksen for alle reelle verdier av x.
Det andre punktet forteller at grafen synker i intervallene $<\leftarrow, -2 > \cup < 2, \rightarrow>$.
Det tredje punktet viser at grafen til f har bunnpunkt for x = -2 og toppunkt for x = 2.
det siste punktet viser at grafen har et vendepunkt for x = 1 og for x = 3.
Elevene skal skissere en graf som har alle egenskapene ovenfor.

Grafen kan se slik ut:



Sammenligning med aktuell lærebok
Drøfting av funksjoner er et sentralt tema både i 1T, R1 og R2. Denne oppgaven skiller seg ut fra de oppgavene elevene kjenner til fra læreboka, og er ikke en typisk rutineoppgave der elevene kan anvende en kjent metode. Elevene må oversette de ulike punktene i oppgavene og tolke den informasjonen som ligger i hvert punkt.

Kognitiv kategori:
Oppgaven kategoriseres i den kognitive kategorien *å* resonnere.

Type matematikk:
Oppgaven er typen *ren matematikk.*

Konklusjon:

| Eksamen | Oppgave | Tema | Kognisjon | Type matematikk | Stikkord |
|---|---|---|---|---|---|
| 2013 | | | | | |
| | 6 | Kalkulus | Resonnere | Ren matematikk | Lag skisse av graf |
| | | | | | ut fra gitte forutsetninger |

## 3.3 Kriterier for kvalitetsvurderinger - reliabilitet og validitet

Datainnsamling er en prosess. Det er en avgjørende forutsetning at datamaterialet har en tilfredsstillende kvalitet slik at analyseresultatene er holdbare (Grønmo, 2004). To viktige kvalitetskriterier er reliabilitet og validitet.

Reliabilitet refererer til datamaterialets pålitelighet, og er knyttet til utvelging og gjennomføring av datainnsamlingen. Betydningen av reliabilitet er forskjellig i kvantitative og kvalitative undersøkelser (Cohen at al, 2007).

Cohen et al (2007) mener begrepet reliabilitet i kvantitativ forskning er synonymt med pålitelighet, konsistens og repliserbarhet over tid. Dette forutsetter at undersøkelsesopplegget er utformet slik at det fungerer på en entydig måte, og at datainnsamlingen blir grundig og systematisk gjennomført. Datainnsamlinger utført flere ganger og under like forhold, bør gi stor grad av sammenfallende resultater.

Når det gjelder reliabilitet i kvalitativ forskning, er egnetheten av begrepet omstridt (Cohen, et al, 2007). Lincoln & Guba (1989, i Cohen et al, 2007) foretrekker å erstatte pålitelighet med begreper som for eksempel troverdighet og nøytralitet. Mens kvantitative forskning antar muligheten for at en med samme metode og samme undersøkelse vil oppnå samme resultat, kan dette være en utfordring for kvalitativ forskning. At kvalitativ metode kan fange opp det unike og særegne i en situasjon, slik at det ikke nødvendigvis kan gjøres likt av en annen forsker, er heller en styrke enn en svakhet (Cohen et al, 2007). For å imøtegå dette, må forskeren redegjøre for hvordan dataene er blitt utviklet i løpet av forskningsprosessen (Thagaard, 1998). I denne studien vil jeg argumentere for troverdighet ved å redegjøre for prosessen som har ført fram til resultatene. Samtidig vil alle analyseskjema være vedlagt.

For å øke reliabiliteten i denne studien, er prosessen med kategoriseringen beskrevet. Pålitelighet er avhengig av instrumentet som brukes i testen. Det betyr at en må ha tillit til verktøyet som ligger til grunn for analysen. Denne studien benytter samme rammeverktøy som TIMMS Advanced 2008, og må slik kunne sies å være pålitelig.

Oppgavene er i stor grad kategorisert av kun en person. Dette kan være en svakhet ved undersøkelsen. For å styrke reliabiliteten, kan mer enn en forsker delta i deler av forskningen (Cohen et al, 2007). I denne studien har et par eksamenssett blitt kategorisert av andre personer. Min veileder har ved hjelp av rammeverket som er brukt i denne oppgaven, kategorisert oppgavene både etter innhold og kognitivt nivå. Det samme har en tidligere lærer i matematikk. Sammenligningen viste at vi i det ene tilfellet var enig i 27 av 29 oppgaver, i det andre tilfellet var vi enig i 30 av 33 oppgaver. Dette gir en interrater på henholdsvis 93,1 % og 90,9 %, noe som kan sies å være en stor grad av samsvar, og dermed styrke reliabiliteten.

Eksamensoppgavene klassifiseres med utgangspunkt i rammeverket som er beskrevet i avsnitt 2.2. Likevel er det gjort en subjektiv vurdering i klassifiseringen, i den forstand at oppgavene gitt til eksamen er vurdert opp mot eksempler i læreboka for å avgjøre grad av kognitivt nivå. I denne oppgaven har jeg i den kvalitative delen med å kategorisere oppgavene i ulike kategorier, forsøkt å være konsekvent i mine observasjoner og tolkninger.

Validitet handler om å undersøke det en tror en undersøker. Validiteten er relatert til utvelgelsen av informasjon, og gjelder datamaterialets gyldighet for de problemstillingene som skal belyses. Validiteten er høy hvis datainnsamlingen fremskaffer data som er relevant for problemstillingen (Grønmo, 2004). Høy reliabilitet er en forutsetning for høy validitet. Data er ikke gyldig for problemstillingen hvis disse ikke er pålitelige, samtidig kan data være pålitelig, uten å være gyldig i forhold til problemstillingen. I denne studien er den analyserte informasjonen utgitt av Utdanningsdirektorarer, og omfatter med noen få unntak alle ordinære eksamensoppgaver i den undersøkte perioden.

Validitet kan også knyttes til en diskusjon om de anvendte målemetodene er dekkende. Rammeverktøyet som er brukt i denne oppgaven, er anerkjent og utviklet over tid. Dette gir likevel ingen garanti for riktig resultat, siden rammeverket kan tolkes og anvendes på flere måter.  For å styrke validiteten, må forskerens tolkninger dokumenteres og begrunnes.

Jeg har underveis i arbeidet forsøkt å stille meg kritisk til å forske i eget miljø, og tatt hensyn til at jeg gjennom min undervisningserfaring kan ha oppfatninger som vil påvirke resultatene. Siden et stort omfang av eksamensoppgavene er analysert er det ikke urimelig å anta at resultatet kan si noe generelt om eksamen gitt de ulike reformene.

## 3.4 Feilkilder

I tillegg til at bruk av kun ett læreverk kan være en kilde til unøyaktigheter, er det under klassifiseringen av oppgavene gjort subjektive vurderinger. I den norske rapporten for TIMSS studien fra 2008, er det ikke spesifisert hvilket kogninitivt nivå de ulike oppgavene tilhører. Rapporten i TIMSS Advanced nevner de kognitive kategoriene, men vektlegger ikke dette ved analysen av besvarelsene. Det var vanskeligheter for deltakerlandene å komme til enighet i spørsmålet om hvilke oppgaver som kan defineres som typiske eller standardiserte.

# 4. RESULTAT

I denne delen presenteres resultatene av undersøkelsen. Disse resultatene danner grunnlaget for å besvare forskerspørsmålene, og er analyseresultatene av den enkelte reform med henblikk på *innholdskategorier*, *kognitivt nivå* og *type matematikk*.

## 4.1 Eksamen gitt under Reform 74

16 eksamenssett med til sammen 392 oppgaver er analysert fra Reform 74.

**Innholdskategorier i Reform 74**

Oppgavene er delt inn etter følgende kategorier: *algebra, kalkulus og geometri*. Figuren under viser en prosentvis fordeling av emnene.

| Reform 74 | Antall | Prosent |
|---|---|---|
| Algebra | 122 | 31,1 % |
| Kalkulus | 148 | 37,8 % |
| Geometri | 122 | 31,1 % |
| **Totalt** | **392** | **100,0 %** |

Tabell 1 - Fordeling av innholdskategorier i Reform 74

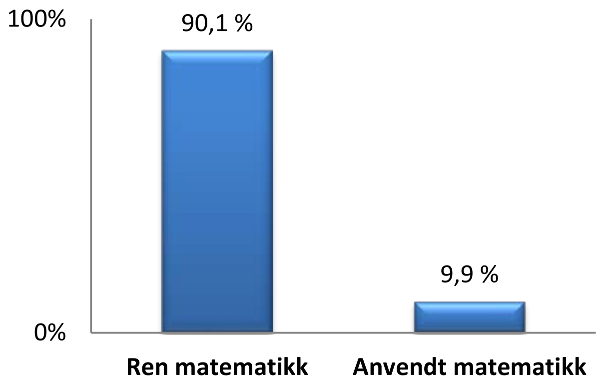
Fordelingen mellom de ulike innholdskategoriene er i store trekk tredelt, med identisk tall for *algebra* og *geometri* og noe høyere for *kalkulus*.

**Type matematikk i Reform 74**

| Reform 74 | Antall | Prosent |
|---|---|---|
| Ren matematikk | 353 | 90,1 % |
| Anvendt matematikk | 39 | 9,9 % |
| **Totalt** | **392** | **100,0 %** |

Tabell 2 - Fordeling av type matematikk i Reform 74.

Fram til 1984 besto alle oppgavene av typen *ren matematikk*. Fra og med 1984 kommer oppgaver av typen *anvendt matematikk* inn i oppgavesettene. Bak tallene tabellen under skjuler det seg altså en vesentlig høyere andel anvendt matematikk i oppgavene etter 1984.




Figur 10 - Fordelingen av type matematikk i Reform 74

### Kognitive kategorier i Reform 74

Når det gjelder kognitive kategorier er det under Reform 74 stor overvekt av oppgaver i kategorien *å anvende*.

| Reform 74 | Antall | Prosent |
|---|---|---|
| Kunne | 57 | 14,5 % |
| Anvende | 294 | 75,0 % |
| Resonnere | 41 | 10,5 % |
| **Totalt** | **392** | **100,0 %** |

Tabell 3 - Fordeling av kognitive kategorier i Reform 74

## 4.2 Eksamen gitt under Reform 94

9 eksamenssett med til sammen 424 oppgaver er analysert fra Reform 94.

### Innholdskategorier under Reform 94

Oppgavene er under Reform 94 delt inn i fire kategorier: algebra, kalkulus og geometri og sannsynlighet. Sannsynlighet kom inn som nytt emne under denne reformen. Figuren under viser en prosentvis fordeling av emnene.

| Reform 94 | Antall | Prosent |
|---|---|---|
| Algebra | 73 | 17,2 % |
| Kalkulus | 162 | 38,2 % |
| Geometri | 113 | 26,7 % |
| Sannsynlighet | 76 | 17,9 % |
| **Totalt** | **424** | **100,0 %** |

Tabell 4 - Fordeling av innholdskategorier i Reform 94

Tabellen viser at kategorien *sannsynlighet* representerer en like stor andel som algebra. Til sammen utgjør disse to kategoriene omtrent samme andel som kategorien *algebra* under Reform 74.

### Kognitive kategorier under Reform 94

| Reform 94 | Antall | Prosent |
|---|---|---|
| Kunne | 62 | 14,6 % |
| Anvende | 316 | 74,5 % |
| Resonnere | 46 | 10,8 % |
| **Totalt** | **424** | **100,0 %** |

Tabell 5 - Fordeling av kognitive kategorier i Reform 94

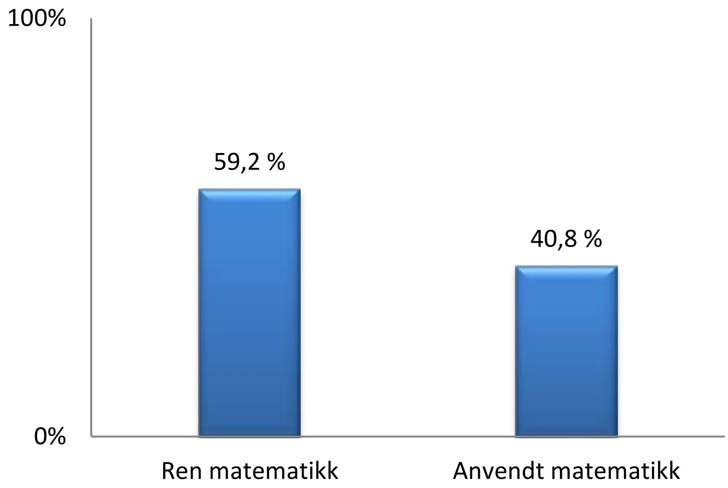
De kognitive kategoriene fra Reform 94 har omtrent samme fordeling som i Reform 74.

### Type matematikk under Reform 94

| Reform 94 | Antall | Prosent |
|---|---|---|
| Ren matematikk | 251 | 59,2 % |
| Anvendt matematikk | 173 | 40,8 % |
| **Totalt** | **424** | **100,0 %** |

Tabell 6 - Fordeling av type matematikk i Reform 94

Anvendt matematikk har en langt større andel i denne reformen enn i Reform 74. Økningen er fra 9,9 til 40,8 prosent. En stor del av de nye sannsynlighetsoppgavene er tekstbaserte.




Figur 11- Fordeling av type matematikk i Reform 94

## 4.3 Eksamen gitt under Kunnskapsløftet

5 eksamenssett med til sammen 304 oppgaver er analysert fra Kunnskapsløftet.

**Innholdskategorier under Kunnskapsløftet**

Oppgavene er delt inn i tre kategorier: algebra, kalkulus og geometri. Emnet sannsynlighet er igjen ute av fagplanen for matematikk R2. Figuren under viser en prosentvis fordeling av emnene.

| KL06 | | |
|---|---|---|
| Algebra | 82 | 27,0 % |
| Kalkulus | 135 | 44,4 % |
| Geometri | 87 | 28,6 % |
| **Totalt** | **304** | **100,0 %** |

Tabell 7 - Fordeling av innholdskategorier i Kunnskapsløftet.

Fordelingen mellom de ulike kategoriene viser at kalkulus har en noe større andel enn under de tidligere reformene. Antall oppgaver under kategorien algebra og geometri er noenlunde likt.

**Kognitive kategorier under Kunnskapsløftet**

| KL06 | Antall | Prosent |
|---|---|---|
| Kunne | 86 | 28,3 % |
| Anvende | 193 | 63,5 % |
| **Resonnere** | **25** | **8,2 %** |
| **Totalt** | **304** | **100,0 %** |

Tabell 8 - Fordeling av kognitive kategorier i Kunnskapsløftet.

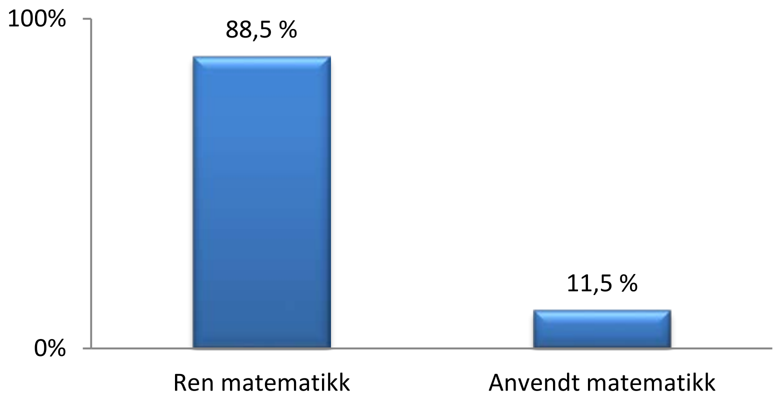
I forhold til Reform 94, er kategorien *Å kunne* økt, fra 14 til 28 prosent. *Å anvende* har en tilbakegang fra 74 prosent til 63 prosent, mens kategorien *Å Resonnere* har en svak tilbakegang.

**Type matematikk under Kunnskapsløftet**

| KL06 | Antall | Prosent |
|---|---|---|
| Ren matematikk | 269 | 88,5 % |
| Anvendt matematikk | 35 | 11,5 % |
| **Totalt** | **304** | **100,0 %** |

Tabell 9 - Fordeling av type matematikk i Kunnskapsløftet.

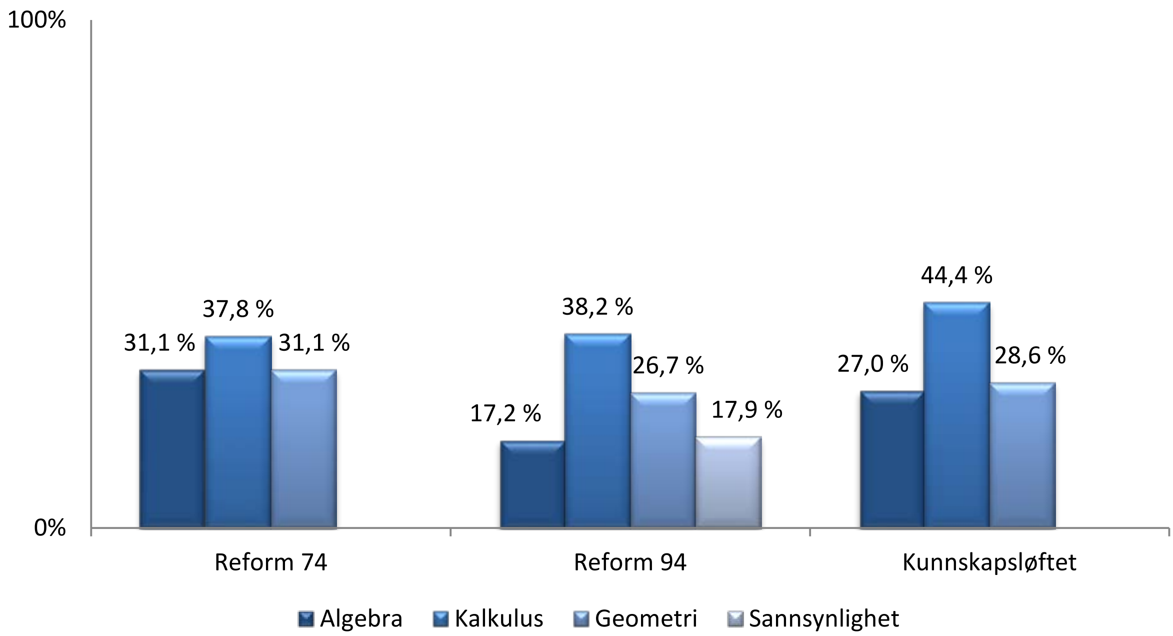
Under Kunnskapsløftet er fordelingen mellom ren og anvendt matematikk omtrent kommet tilbake på gjennomsnittsnivåene fra Reform 74.




Figur 12 - Fordeling av type matematikk i Reform 94.

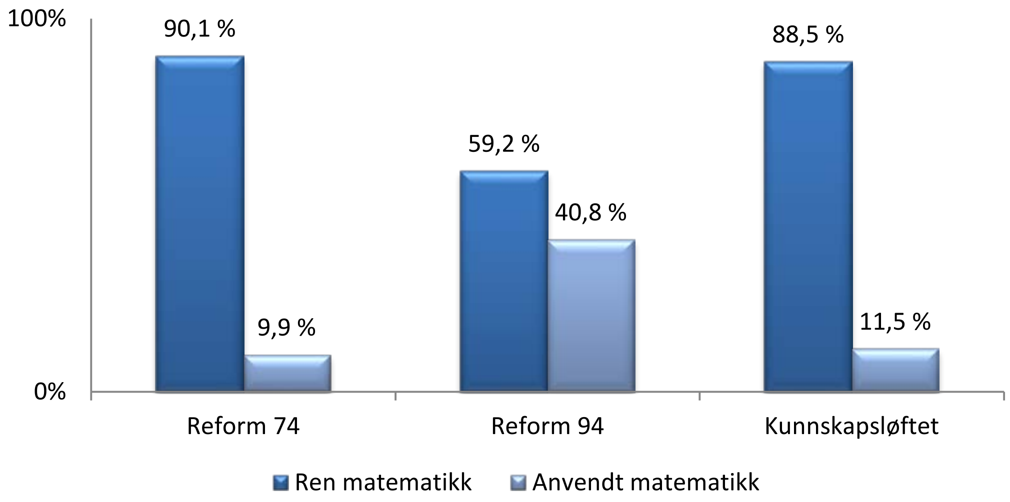
## 4.4 Sammenligning av resultatene fra de tre undersøkte reformene.

Figurene under viser sammenligningene av innholdskategorier, kognitivt nivå og type matematikk.



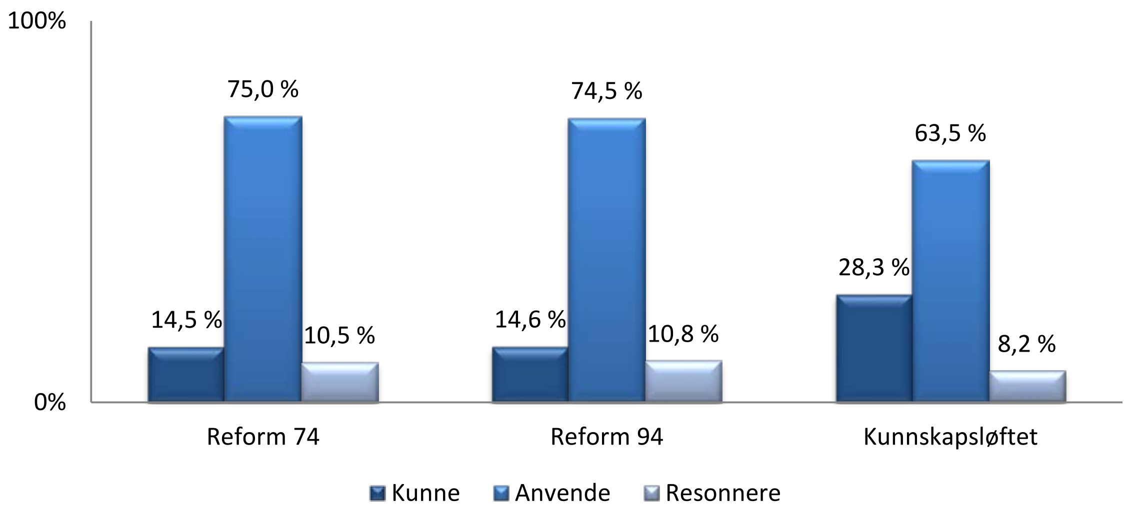

Figur 13 - Fordeling av innholdskategorier gjennom tre reformer.

Reform 94 skiller seg ut med en vesentlig lavere andel av oppgaver innen kategorien *algebra*. TIMSS Advanced plasserer sannsynlighetsoppgaver i kategorien *algebra*. I denne studien er de registrert hver for seg for å få fram nyansene.




Figur 14 - Fordeling av type matematikk gjennom tre reformer.

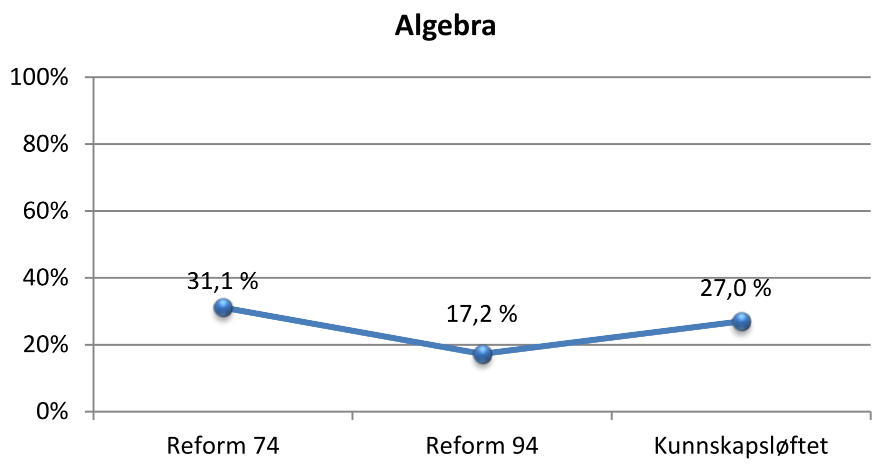
Oppgaver av typen *anvendt matematikk* var sterkt representert i Reform 94




Figur 15 - Fordeling av *kognitivt nivå* gjennom tre reformer.

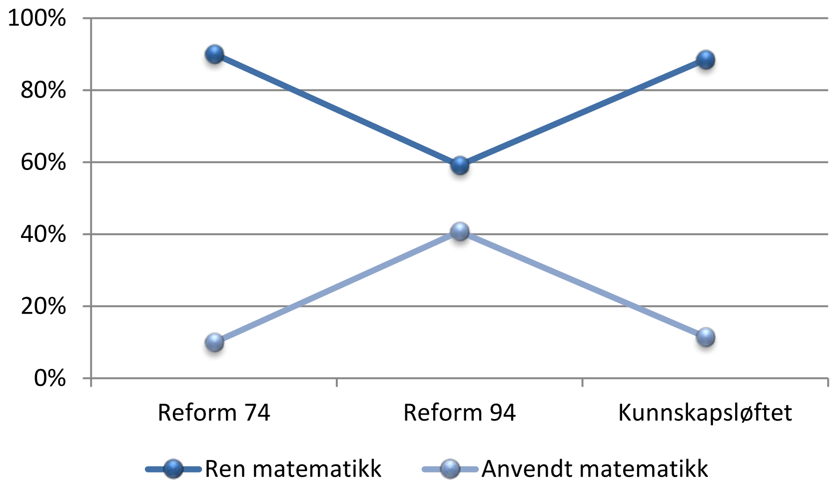
Kategorien *å kunne* har hatt en merkbar økning under Kunnskapsløftet i forhold til de to tidligere reformene.

Figuren under viser endringene i kategorien algebra.




Figur 16 - Utvikling av andel oppgaver i kategorien *algebra.*

Figuren under viser endringene i forholdet mellom ren og anvendt matematikk.




Figur 17 - Utviklingen i forholdet mellom oppgaver i *ren* eller *anvendt matematikk.*

# 5. DISKUSJON

I denne delen drøftes resultatene fra undersøkelsen. Hensikten med denne masteroppgaven har vært å undersøke endringer i eksamensoppgaver gjennom de tre siste reformene, med hensyn på innholdskategorier, type matematikk og kognitivt nivå. Med utgangspunkt i problemstillingen ble tre spørsmål formulert. I det følgende vil jeg diskutere resultatene i forhold til hvert av de tre spørsmålene.

Det første spørsmålet var:

1. *Hvilke forskjeller og likheter er det mellom eksamensoppgaver i matematikk når det gjelder innholdskategorier?*

Emnet *sannsynlighetsregning og statistikk* var med i fagplanen for 3MX, men utelatt for 3MN og R2. TIMSS Advanced plasserer disse oppgavene i innholdskategorien *algebra*. For å få fram nyansene i innholdskategoriene, er de i denne studien også registrert i en egen kategori *sannsynlighet*.

Figur 13 viser endringer i innholdskategoriene. I kategoriene *geometri* og *kalkulus*, har det vært mindre endringer gjennom reformene. Andelen oppgaver i kategorien *kalkulus* var på omlag 38 % under Reform 74 og Reform 94, men har hatt en viss økning under Kunnskapsløftet. Oppgaver i kategorien *geometri* har variert fra 31 % i Reform 74 til omlag 28 % under Reform 94 og Kunnskapsløftet.

Innholdskategorien *algebra* representerer den største observerte endringen mellom reformene. Figur 13 viser at når emnet *sannsynlighet* ble introdusert i Reform 94, forsvant en tilsvarende andel av oppgavetypen *algebra* fra eksamenssettene. Andelen algebraoppgaver har en nedgang fra 31 % under Reform 74 til 17 % under Reform 94. Under Kunnskapsløftet øker andelen algebraoppgaver til 27 %, men har forsatt en lavere andel enn under Reform 74. Figur 16 viser utvilklingen av andelen algebraoppgaver gjennom reformene.

*Algebra* er et emne som peker seg spesielt ut med svake norske resultater i nasjonale og internasjonale tester, både i grunnskolen og i videregående skole. Denne studien referer til tidligere forskning som viser at innholdet i eksamen påvirker praksis i skolen, noe som kan tyde på en nedprioritering av dette grunnleggende emnet i undervisningen under Reform 94. Også TIMSS Advanced fra 2008 kan indikere at det har vært en nedtoning av *algebra* under Reform 94.

*"Det er en klar tilbakegang i de norske 3MX-elevenes matematikkprestasjoner fra 1998 til 2008. Norske elever presterer svakere enn elever i de fleste andre landene som omfattes av studien "* (Grønmoet al, 2010, s.208).

Rapporten fra TIMSS 2007 peker i retning av at også norske grunnskoleelever har fått mindre opplæring i algebra enn jevngamle elever fra andre land (Grønmo & Onstad, 2009, i Grønmoet al, 2010). En svak satsing på algebra i grunnskolen, vil også påvirke læringsutbyttet i videregående skole. Ved vår skole erfarer vi fortsatt at algebra er et emne mange elever strever med når de kommer fra grunnskolen. Dette gir elevene et dårlig utgangspunkt for å velge fordypning i matematikk. I rapporten fra TIMSS 2007 (Grønmo & Onstad, 2009, gjengitt i Grønmoet et al, 2010) bemerkes det at en nedtoning av algebra vil kunne føre til at særlig flinke elever blir fratatt muligheten til å utvikle en høy realfaglig kompetanse. Algebra i grunnskolen kan være den type utfordring som gir elever økt interesse for matematikk, og kan slik stimulere faglig sterke elever til å velge fordypning i faget.

Rapporten *Framgang, men langt fram* fra TIMSS undersøkelsen i 2011, viser trender i prestasjoner for elever på 8. trinn mellom 2007 og 2011. Norske elevers prestasjoner i algebra utmerket seg som spesielt svake i en internasjonal sammenheng.

*"Det som kjennetegner det norske resultatet i begge disse sammenligningene, er at norske elever presterer markant lavere enn de andre landene på områdene Algebra og Geometri, og aller svakest i Algebra. Resultatet for de norske elevene på området Algebra utmerker seg internasjonalt som spesielt svakt. Av de landene som deltok på 8. trinn i 2011, var det bare typiske utviklingsland, med en helt annen ressurssituasjon enn Norge, som lå på eller i underkant av det norske nivået"* (Grønmo et al,  2012, side 25).

Økningen i andelen algebraoppgaver under Kunnskapsløftet kan være et tiltak for å bedre norske elevenes svake resultater i algebra.

Det andre spørsmålet i problemstillingen var:

2. *Hvilke forskjeller og likheter er det mellom eksamensoppgaver i matematikk når det gjelder forholdet mellom ren og anvendt matematikk?*

Figur 14 viser at Reform 94 skiller seg markant ut i dette spørsmålet. Hele 40 % av oppgavene tilhører kategorien *anvendt matematikk*. Fordelingen mellom oppgavetypene *ren* og *anvendt* matematikk før og etter Reform 94 var forholdsvis lik. Både under Reform 74 og under Kunnskapsløftet tilhører omlag 90 % av oppgavene kategorien *ren matematikk,* og bare 10 % *anvendt matematikk*. En forskjell kommer ikke fram i tallmaterialet: Fram til 1984 besto alle oppgavene av typen ren matematikk. Fra og med 1984 kommer oppgaver av typen *anvendt matematikk* inn i oppgavesettene. Bak tallene i tabell 15 skjuler det seg altså en vesentlig høyere andel *anvendt matematikk* i oppgavene etter 1984. I tiden under Reform 74 hevdet mange at matematikk måtte knyttes nærmere elevenes virkelighet. Dette var omtalt i den generelle delen av læreplanen, men ble ikke synlig i eksamensoppgavene før i 1984.

Reform 94 hadde en læreplan med et stort fokus på virkelighetsnær matematikk. Det var en stor økning i antall elever som søkte seg til videregående skole, og heterogene elevgrupper ble brukt som argumentasjon for å trekke sammen elevenes virkelighet og skolematematikken. Ønsket var å gjøre elevenes virkelighet til utgangspunkt for matematikkunnskapene. Under Reform 94 ble matematikk i dagliglivet et av fem hovedtemaer i læreplanen. Dette ble fulgt opp i den nye læreplanen L97 for grunnskolen, der *Matematikk i dagliglivet* kom inn som det første målområdet i læreplanen, med stor vekt på matematikk som redskap og elevenes egenaktivitet. Grønmo et al (2010) har pekt på at endringer i læreplaner har vært motivert av et ønske om å legge større vekt på dagliglivsmatematikk, og at dette har gått på bekostning av mer abstrakt matematikk. I følge Grønmo et al (2010) har økt fokus på matematikk i dagliglivet sammen med en nedtoning av algebra på ungdomstrinnet ført til konsekvenser for elevenes læring i på videregående skole.

Diskusjonen om ren eller praktisk matematikk er ikke ny. Som påpekt innledningsvis, var Ribsskog og Aall allerede i 1936 opptatt av den praktiske dimensjonen i all læring, og mente at lærene var for bundet opp av eksamen og eksamensformen undervisningen. Skarpenes (2004) hevder at konflikten mellom ren eller anvendt matematikk stadig har vært gjenstand for debatt når det gjelder innholdet og undervisningsformene i faget. Under Kunnskapsløftet er andelen oppgaver i kategorien anvendt matematikk igjen betydelig lavere enn under Reform 94. Figur 17 gir en god illustrasjon av utviklingen gjennom reformene.

Det siste spørsmålet i problemstillingen var:

3. *Hvilke forskjeller og likheter er det mellom eksamensoppgaver i matematikk når det gjelder kognitivt nivå?*

Figur 15 viser at fordelingen mellom de kognitive kategoriene er nesten identiske for Reform 74 og Reform 94. Etter Kunnskapsløftet har kategorien *å kunne* økt fra 14 % til 28 %, mens *å anvende* har en tilbakegang fra 74 til 63 %. Likevel har denne kategorien den største andelen av eksamensoppgavene under alle tre reformene. Kategorien *å resonnere* er lavt representert, og ligger på mellom 8 og 10 % under alle reformene.

Både kategorien *å kunne* og *å anvende* dreier seg om grunnleggende ferdigheter hos elevene, et av områdene hvor norske elever scorer lavt i internasjonale studier (Grønmo et al, 2010). Dette gjelder både elever fra grunnskolen og den videregående skolen. TIMSS studiene viste at å trene inn framgangsmåter med sikte på å automatisere ferdigheter, ble mindre vektlagt i norsk skole enn i andre land, og det har vært antydet at dette kan være en medvirkende årsak til svake norske resultater på alle nivå i norsk skole (Grønmo et al, 2010).

Kunnskapsløftet har økt fokuset på å automatisere grunnleggende ferdigheter hos elevene gjennom endringer i eksamensformen. At del 1 av matematikkeksamen er uten hjelpemidler, kan være et forsøk på å gjøre noe med elevenes svake resultater i grunnleggende ferdigheter. Elevene får på forhånd utlevert en liste med formler som forutsettes kjent på del 1 av eksamen, men den er ikke tilgjengelig for elevene under eksamen. Ønsket er at elevene skal legge mer arbeid i forkant av eksamen i form automatisering av formler. Dette kan forklare at kategorien *å kunne* under Kunnskapsløftet har hatt en markant økning. Fra våren 2015 utvides denne delen i programfagene fra to til tre timer, og krever i enda større grad at matematikken sitter i fingrene, at elevene behersker framgangsmåter og kan formler og prosedyrer utenat. Også ved vår skole blir prøver lagt opp med en tilsvarende stor andel uten hjelpemidler.

Figur 15 viser at oppgaver i kategorien *å resonnere* har en lav andel i alle reformene, til tross for at læreplanen for Kunnskapsløftet beskriver matematisk kompetanse som *mer* enn grunnleggende ferdigheter. Matematisk kompetanse innebærer problemløsning, modellering og resonnering. Det å kunne matematikk i betydningen av å reprodusere fakta og definisjoner, samt utføre algoritmer og prosedyrer er ikke nok. Hvis det er et misforhold mellom læreplanens intensjoner og undervisningspraksis, vil elevenes matematiske kunnskap innsnevres. Hvis testene utelukkende fokuserer på ferdigheter, vil andre aspekter bli mindre vektlagt.

Niss & Jensen (2002, avsnitt 4.1), som Kunnskapsløftets læreplan i stor grad bygger på, beskriver matematisk kompetanse som en *"...indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer"* . Elevene må også være i stand til å bruke den matematiske kompetansen de har. En del av elevenes matematiske kompetanse er evne til å formulere, representere og løse matematiske problemer.

Et argument for drilling av prosedyrer, er at en automatisering av visse ferdigheter vil kunne frigjøre kognitiv kapasitet til bruk på mer avanserte matematiske problemer (Grønmo et al, 2010). Resonnering og kritisk sans er også viktige egenskaper hos elevene i matematikk. Det å reprodusere formler og fremgangsmåter har liten egenverdi. Shoenfeld (2007) hevder begge deler er viktig, og mener at styrking av problemløsningskompetansen vil være et viktig bidrag til å øke den grunnleggende forståelsen hos elevene. Matematisk tenkning innebærer mer enn å kunne fakta, teoremer og teknikker. Å utvikle evne til å bygge matematisk modeller, vurdere, argumentere, generalisere og finne nye resultater er alle viktige komponenter for læring i matematikk (Schoenfeld 2007).

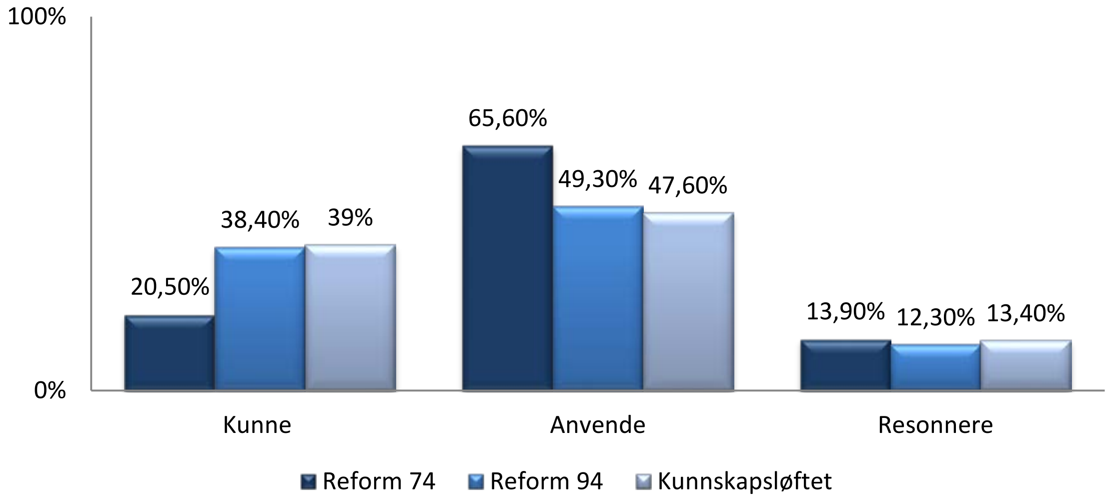
I internasjonale undersøkelser er det en del oppgaver der elevene må resonnere seg frem til svarene. Resultater fra TIMSS viser at kun 1 prosent av norske elever befinner seg på avansert nivå i matematikk. I tillegg er andelen av norske elever som velger høyeste nivå i matematikk nedadgående (Grønmo et al, 2010).

Grunnleggende ferdigheter i matematikk er enkle å teste, og tester av ferdigheter er enkle å forsvare. Schoenfeld (2007) mener det er mulig å lære elever strategier i forhold til problemløsning og matematisk tenkning. Problemløsning kan læres, og med strategier for dette kan elevene bli gode problemsløsere. Å beherske denne type oppgaver krever at elevene får trening i dette. Dette kan være vanskeligere å vurdere, men det er likevel viktig å gjøre det (Schoenfeld, 2007).

Bruk av digitale hjelpemidler har hatt varierende fokus gjennom reformene. Under Kunnskapsløftet er bruk av digitalt verktøy en av fem grunnleggende ferdigheter integrert i kompetansemålene. Bruk av digitale hjelpemidler i utregninger, dreide seg i de to første læreplanene om bruk av lommeregner. Med Kunnskapsløftet har det vært en innføring av digitale hjelpemidler i form av graftegner, regneark og CAS.

Goodlad (1979) beskriver veien fra intensjonen i læreplanen til det som faktisk finner sted i klasserommet som lang. Digitale verktøy har i flere år i varierende grad vært integrert i undervisningen, også ved vår skole. Kanskje er det for å fremskynde denne integreringen at det fra og med eksamen våren 2015 blir stilt eksplisitte krav til et bestemt verktøy ved løsning av oppgavene i form av: “Tegn funksjonen med graftegner”, ”løs ligningen ved hjelp av CAS”. Fokuset på digitale verktøy har i alle fall etter dette fått større oppmerksomhet i min undervisning.

Hvis det er slik at det er et visst hierarki innenfor de kognitive kategoriene når det gjelder hvor krevende oppgavene er for elevene (Lie et al 2010), fremkommer det i denne studien et interessant resultat som ikke var med i problemstillingen min. Som figur 18 viser, var kun omlag 20 prosent av algebraoppgavene i Reform 74 på ”laveste” kognitive nivå, *å kunne.* Hele 65 prosent av oppgavene tilhørte den mer krevende kategorien *å anvende*. I tillegg til at antall algebraoppgaver gikk vesentlig ned under Reform 94, ble også en større andel av disse oppgavene ”enklere”. Selv om antallet algebraoppgaver igjen har økt under Kunnskapsløftet, kan dette likevel indikere et lavere ambisjonsnivå innenfor algebra i forhold til hva tilfellet var før Reform 94.




Figur 18 - Fordeling av kognitive nivå innenfor emnet algebra under de tre reformene.

Innenfor det grunnleggende emnet algebra kan derfor Røed Isaksen ha et poeng i sin bekymring nevnt innledningsvis: ”*Jeg frykter i verste fall at dette handler om en kultur hvor vi systematisk forventer for lite av elever og studenter, og dermed legger opp en undervisning som er mindre ambisiøs enn den kunne vært. ”*

Denne studien viser at det med Reform 94 ble en nedtoning av algebra i den videregående skolen, i form av redusert oppgaveomfang og vanskelighetsgrad til eksamen. Samtidig ønsket man å bedre matematikkunnskapene gjennom å gjøre matematikken mer dagligdags, også gjennom eksamensoppgavene. Til tross for dette, er norske elevers resultater på internasjonale tester svake. Gjennom Kunnskapsløftet er andelen algebraoppgaver løftet, samtidig som den praktiske matematikken er nedtonet. Man forsøker å øke elevenes grunnleggende ferdigheter gjennom å gjøre tre av fem eksamenstimer uten hjelpemidler. Andelen oppgaver i kategorien *å kunne* har økt betraktelig, samtidig som det fortsatt gis få resonneringsoppgaver til eksamen.

Eksamen spiller en avgjørende rolle for undervisningspraksis, og utformingen av gode tester er viktig. Økt fokus på oppgaver der elevene skal reprodusere fakta og definisjoner, samt utføre prosedyrer og algoritmer er viktig, men ikke nok. Matematisk kompetanse skal også innebære strategier for oppgaver som krever resonnering. Et manglende fokus på dette kan medføre at elevene ikke får utviklet ulike kompetanser i matematikk. Samtidig kan elevene få en oppfatning av at matematikkoppgaver utelukkende kan løses ved bruk av kjente algoritmer. Dette vil redusere elevenes læringsutbytte og skape utfordringer for de elevene som ønsker å studere matematikk videre.

# 6. AVSLUTNING

Denne oppgaven prøver å frambringe informasjon om hvordan eksamensoppgavene på høyeste nivå i matematikk har endret seg fra 1978 til 2013. Det har vært en stor jobb.

Mange leter etter forklaringer på hvorfor det har vært nedgang i norske elevers prestasjoner i matematikk. Det er et sammensatt spørsmål. Eksamensoppgavenes form og innhold er en faktor.  Skolens sentrale oppgave er å formidle kunnskaper og ferdigheter, men i de senere år er stadig nye oppgaver blitt en del av skolens hverdag. Tidsaspektet er alltid en faktor, og *tidstyv* er blitt et begrep i skolesammenheng.

Denne oppgaven har vært min tidstyv. Det har vært en lærerik tidstyv.

# LITTERATURLISTE


Alseth, B., Breiteig, T., & Brekke, G. (2003*). Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering - matematikkfaget som kasus.* Notodden: Telemarksforskning.

Andersen, Kjell. (1999). *Allmennutdanning og yrkesutdanning i Norge. Hovedlinjer i utviklingen av videregående opplæring etter 1945.* Høyskoleforlaget AS.

Bedre skole nr. (4/2014). Tidsskrift for lærere og skoleledere. Stibo Graphic A/S.

Bergqvist, E. (2007). *Types of reasoning required in university exams in mathematics.* Journal of Mathematical Behavior 26. 348 - 370.

Bjåstad, S., Jasper, J. (1984). *Eksamensoppgaver i matematikk 2MN - 3MN. Årskurs 2 og 3. 1971 - 1984 H. Alternative pensa ved tradisjonell reallinje og naturfaglinje*. Aschehough & Co.(W.Nygaard).

Bjåstad, S., Jasper, J. (1984). *Fasit til eksamensoppgaver i matematikk 2MN - 3MN. Årskurs 2 og 3. 1971 - 1984 H.* Aschehough & Co.(W.Nygaard).

Bjåstad, S., Jasper, J. (1992). *Eksamensoppgaver. Matematikk 2MN. 3MN. Våren 1987 - Våren 1992. Med fasit og løsninger.* Aurskog. H. Aschehough & Co.(W.Nygaard).

Bloom, B.S., Engelhart, M.D., Furst, E.J., Hill, W.H. & Krathwohl, D.R. (Eds.). (1956). *Taxonomy of Educational Objectives - The Classifivation of Eduvational Goals.* HandBook *1: Cognitive Domain.* London, WI: Longmans, Green & Co. Ltd.

Brekke, G. (2002). *Kartlegging av matematikkforståelse*. *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Oslo. Læringssenteret.

Cohen, L., Manion, L & Morrison, K. (2007). *Research methods in education.* Routledge

Creswell, J.W.(2003). *Research Design. Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches.* Thousand Oaks, CA: SAGE Publications, Inc

Dale, E.L., Engelsen, B.U. & Karseth, B.( 2011). *Kunnskapsløftets intensjoner, forutsetninger og operasjonaliseringer: En analyse av en læreplanreform.* Universitetet i Oslo. (Sluttrapport)

Erstad, G., Bjørnsgård,I. (1987). *Matematikk 3MN*. H. Aschehough & Co. (W.Nygaard).

Erstad, G., Heir, O., Bjørnsgård, I.,Borgan, Ø. & Pålsgård, J.(2002). *Matematikk 2MX.* H. Aschehough & Co. (W.Nygaard).

Erstad, G., Heir, O., Bjørnsgård, I., Pålsgård, J & Skrede, P.A. (2002). *Matematikk 3MX.* H. Aschehough & Co. (W.Nygaard).

Fossum, A. (2009). *Algoritmer og kreativitet til matematikkeksamen. Fra 2MX til R1. Endret eksamensoppgavene seg med eksamensformen?*
https://www.duo.uio.no/bitstream/10852/32356/1/Master_realfagdidaktikk_A_Fossum.pdf

Garden, R.A., Lie, S., Robitaille, D.F., Angell, C., Martin, M.O., Mullis, I.V.S., Foy, P. og Arora, A.(2006). *TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks.* TIMSS & PIRLS International Study Center. Lynch School of Education, Boston College.
http://timss.bc.edu/PDF/TIMSS_Advanced_AF.pdf

Gilje, N., Grimen, H. (1995). *Samfunnsvitenskapenes forutsetninger. Innføring i samfunnsvitenskapenes vitenskapsfilosofi.* Oslo.Universitetsforlaget. AS.

Goodlad, J.I. (1979). *Curriculum Inquiry. The Study of Curriculum Practice.* New York. McGraw-Hill Book Company.

Grønmo, L., Onstad, T., & Pedersen, F. (2010). *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i videregående skole.* Oslo: Unipub

Grønmo, L.S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011.* Oslo: Akademika forlag

Grønmo, S.(1996). *Forholdet mellom kvalitative og kvantitative tilnærminger i samfunnsforskningen*: I Holter, H. og Kalleberg, R. (red) ”*Kvalitative metoder i samfunnsforskning.”* Oslo: Universitetsforlaget, s 73 - 108

Grønmo, S. (2004). *Samfunnsvitenskapelige metoder*. Bergen: Fagbokforlaget

Heir, H., Erstad, G., Borgan, Ø., Moe, H. & Skrede, P.A. (2007). *Matematikk R1.* Aschehoug & Co. (W.Nygaard).

Heir, O., Erstad, G., Moe, H. & Skredde, P.A. (2008). *Matematikk R2*. H. Aschehoug & Co. (W.Nygaard).

Imsen G. (2009.) Lærerens verden. Innføring i generell didaktikk. Oslo. Universitetsforlaget

Jarning, H. (2010). *Resultater som teller - Kunnskapskontroll og resultater i skolens århundre*. I: Elstad, E. & Sivesind, K (red). *PISA - sannheten om skolen?* Oslo: Univerisitetsforlaget

Jensen, K.B.S. (2007). *Anvendelse og modellering i matematik - et teoretisk blik.*
http://www.lmfk.dk/artikler/data/artikler/1202/1202_27.pdf

Johnson, R., Onwuegbuzie, A. & Turner, L. (2007*). Journal of Mixed Methods Research.*
http://mmr.sagepub.com/cgi/content/abstract/1/2/112

Kane, M. T., Crooks, T., & Cohen, A. (1999*). Validating measures of performance. Educational Measurement: Issues and Practice*, 18(2), 5-17.

Kjærnsli, M., Olsen, R. (2013). *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Universitetsforlaget AS

Krathwohl; D.R. (2002). *A Revision of Bloom's Taxonomy: An Overview.* http://www.unco.edu/cetl/sir/stating_outcome/documents/Krathwohl.pdf

Lie, S., Angell, C. & Rohatgi, A. (2010). *Fysikk i fritt fall? TIMSS Advanced 2008 i videregående skole.* Unipub.

Lithner, J. (2008). A Research Framework for Creative and Imitative Reasoning. I: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 67, No. 3, pp. 255-276.

*Lov om grunnskolen og den videregående opplæringa (opplæringslova).* https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61

*Læreplan for den videregående skole. Del 1. Generell del.* (1976). Oslo. Kirke- og undervisningsdepartementet og Gyldendal Norsk Forlag A/S

*Læreplan for den videregående skole. Del 3a. Studieretning for allmenne fag.* (1976). Oslo. Kirke- og undervisningsdepartementet og Gyldendal Norsk Forlag A/S

*Læreplan for grunnskole, videregående opplæring, voksenopplæring. Generell del*. (1993). Oslo. Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet.

*Læreplan for videregående opplæring. (2000). Matematikk. Studieretning for allmenne, økonomiske og administrative fag.* Oslo. Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet.

*Læreplan i matematikk fellesfag, Læreplankode: Mat1-04.* http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Grunnleggende_ferdigheter/

Læreplan i matematikk fellesfag. (2013). Utdanningsdirektoratet. http://www.udir.no/kl06/MAT1-03/Hele/Formaal/

*Læreplan i matematikk for realfag - programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram-kompetansemål.* http://www.udir.no/kl06/MAT3-01/

Magnesen, Jan Arnt. (1991). *3MN. Eksamensoppgaver med besvarelser i naturfag matematikk.* Bergen. Eksamensforlaget.

Magnesen, Jan Arnt. (1995). *3MN. Eksamensoppgaver med besvarelser i naturfag matematikk.* Bergen. Eksamensforlaget.

Mosvold, R. (2002). *Læreplanutvikling i historisk perspektiv - med fokus på "hverdagsmatematikk i dagliglivet".* Rapport 08/02. Telemarksforskning-Notodden.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: The Council.

Nesse, T., Andersen, T. (2002). *Eksamenshefte i 3MX.* Bergen: Fagbokforlaget.

Niss, M., & Jensen, T.H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspirasjon til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriet.

Nortvedt, G.A. (2014). *Norsk matematikkråds forkunnskapstest 2013.* Universitetet i Oslo.

Olsrud, H.G.(2009). *Bevisets plass i norske læreplaner. En historisk oversikt og drøfting av matematiske bevis i videregående skole.*
https://www.duo.uio.no/bitstream/handle/10852/32357/OLSRUD_MASTER.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Pedersen, I.F. (2013). *Abstract, Acta Didactia Norge: Vol. 7 Nr. 1 Art. 5*
*Is TIMSS Advanced an appropriate instrument for evaluating mathematical performance at the advanced level of Norwegian upper secondary school? An analysis of curriculum documents and assessment items*
*https://www.google.no/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CB0QFjAA&url=https%3A%2F%2Fwww.journals.uio.no%2Findex.php%2Fadno%2Farticle%2Fdownload%2F1112%2F991&ei=PhFBVc-CK--P7AbiwYGACA&usg=AFQjCNFHA2rlKd66GXRr4oCTkYNucUmYAw&bvm=bv.91665533,d.ZGU*

Ribsskog, B. & Aall, A. (1936). *Undervisningsplanene i folkeskolen.* Oslo. Gyldendal Norsk Forlag

Ringdal, K. (2007). *Enhet og mangfold. Samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode.* Bergen. Fagbokforlaget

Schoenfeld, A. H. (2007). *Issues and Tensions in the Assessment of Mathematical Proficiency* I: *Assessing Mathematical Proficiencey* (s. 3 - 17). Cambridge University press.

Schoenfeld, A. H. (2007). *What Is Mathematical Proficiency and How Can It Be Assessed?* I: *Assessing Mathematical Proficiencey* (s. 59 - 73). Cambridge University press.

Skarpenes, O. (2004). *Kunnskapens legitimering. En studie av to reformer og tre fag i videregående skole.* Sosiologisk institutt. Universitetet i Bergen.

St.meld.nr.16.(2006 - 2007) *...og ingen sto igjen -Tidlig innsats for livslang læring.* Kunnskapsdepartementet.

(St.meld.nr 20. (2012-2013). *På rett vei.*
https://www.regjeringen.no/nb/dokumenter/meld-st-20-

St.meld.nr 29 (1994-95) *Prinsipper og retningslinjer for 10-årig grunnskole - ny læreplan*
https://www.regjeringen.no/nb/dokumenter/dep/kd/stmeld/1994-1995/stmeld-nr-29-1994-95/1-innledning-sammendrag-og-konklusjoner-/id464079/

Thagaard, T. (1998). *Systematikk og innlevelse. En innføring i kvalitativ metode.* Bergen. Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Utdanningsdirektoratet (Udir-1-2010) Individuell vurdering Udir-1-2010.
http://www.udir.no/Regelverk/Finn-regelverk-for-opplaring/Finn-regelverk-etter-tema/Vurdering/Udir-1-2010-Individuell-vurdering/III-Sluttvurdering-/

*Verdens Gang.(7.2.2014).*
http://www.vg.no/nyheter/innenriks/norge-paa-bunnivaa-i-studietid/a/10121889/

Wilson, L.D.(2007). *High-stakes testing in mathematics. I: Lester F.K.(ed) (2007) Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national teachers of mathemathics*
http://books.google.no/books?id=W4GnocmF02IC&lpg=PA1099&ots=YKIYnwJiNK&dq=Wilson%2C%20L.D.(2007).%20High-stakes%20testing%20in%20mathematics&lr&hl=no&pg=PP1#v=onepage&q&f=false

# FIGURER



# TABELLER

## VEDLEGG 1 Analyseresultater

**Kunnskapsløftet KL06** **Matematikk R2**

Hjelpemidler del 1: Vanlige skrivesaker, passer, linjal med cm-mål og vinkelmåler.
Hjelpemidler del 2: Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

| **Eksamen 2009** | **Oppgav** | **Tema** | **Kognisjon** | **Type matematikk** | **Stikkord** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Del1:** | 1a | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Derivasjon, kjerneregelen |
| | $1b_1$ | Algebra | Kunne | Ren matematikk | Finne vedien f(π), ligger grafen over eller under x-aksen |
| | $1b_2$ | Kalkulus | Kunne | Ren matematikk | Stiger eller synker grafen |
| | 1c | Algebra | Kunne | Ren matematikk | Sum av uendelig rekke |
| | $1d_1$ | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Vektorer, ortogonal |
| | $1d_2$ | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Parallelle vektorer |
| | 1e | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Differensillikning, separabel |
| | $1f_1$ | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Delvis integrasjon |
| | $1f_2$ | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Delbrøkoppspalting |
| | 2a | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Kryssprodukt, areal av trekant |
| | 2b | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Volum av pyramide |
| | 2c | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Likning for plan |
| | | | | | |
| **Del2:** | 3a | Kalkulus | Kunne | Anvendt matematikk | Momentan vekstfart |
| | 3b | Kalkulus | Anvende | Anvendt matematikk | Forklare en modell |
| | 3c | Kalkulus | Anvende | Anvendt matematikk | Løs differensiallikning |
| | 3d | Kalkulus | Kunne | Anvendt matematikk | Løs med initialbetingelser |
| | 3e | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Finn grenseverdi |
| **Alt 1:** | 4a | Algebra | Kunne | Ren matematikk | Tegne graf, digitalt |
| | 4b | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Trigonometrisk likning |
| | 4c | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Vis at sin(u-v) = 2(sinx)^2 |
| | 4d | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Topp-bunn og vendepunkt |
| **Alt 2:** | 4a | Algebra | Kunne | Ren matematikk | Tegne graf, digitalt |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 4b | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Topp-bunn og vendepunkt |
| | 4c | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Finne verdier i en trigonometrisk likning |
| | 4d | Kalkulus | Resonnere | Ren matematikk | Finne a og b i differensiallikning |
| | 5a | Algebra | Kunne | Ren matematikk | Finne ledd og summer i en rekke |
| | 5b | Algebra | Resonnere | Ren matematikk | Sumformel |
| | 5c | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Regresjon, digitalt verktøy |
| | 5d | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Induksjon |

| **Eksamen 2010** | **Oppga** | **Tema** | **Kognisjon** | **Type matematikk** | **Stikkord** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Del1:** | 1a | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Derivasjon, produktregelen |
| | 1b$_1$ | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Integrasjon, delvis |
| | 1b$_2$ | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Integrasjon, delbrøkoppspalting |
| | 1c | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Differensillikning, separabel |
| | 1d$_1$ | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Vis at..bruke oppgitte formler |
| | 1d$_2$ | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Bestem integral |
| | 1e$_1$ | Kalkulus | Resonnere | Ren matematikk | Kombinere kunnskap og ferdigheter, ikke rutineoppgave |
| | 1e$_2$ | Kalkulus | Resonnere | Ren matematikk | Kombinere kunnskap og ferdigheter, ikke rutineoppgave |
| | 2a | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Finne to vektorer + Kryssprodukt |
| | 2b | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Likning for et plan |
| | 2c | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Parameterframstilling for linje |
| | 2d | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Bestem volum av pyramide uttykt ved t, lage modell for å løse standard oppgave |
| | 2e | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Bestem punkt Q slik at volum av pyramide =42, to løsninger |
| **Del2** | 3a | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Løse differensiallikning, Karakteristisk likning, rutine |
| | 3b | Kalkulus | Kunne | Ren matematikk | Differensiallkning med initialbetingelse, rutin |
| | 4a | Algebra | Kunne | Ren matematikk | Tegne graf, digitalt verktøy |
| | 4b | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Nullpunkt ved regninge, trigonometrisk likning |
| | 4c | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Derivasjon, produktregelen |
| | 4d | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Finne fuksjonsverdier til toppunkt ved hjelp av fortegnslinje |
| | 4e | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Skrive på formen $A \sin(cx + \varphi)$ |
| | 4f | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Koble f(x) til sinusfaktoren som svinger mellom -1 og 1 |
| | 5a | Geometri | Anvende | Ren matematikk | n-te nullpunkt kan skrives på formen $x_n = k + (n-1)\pi$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 5b | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Kjenne igjen aritmetisk tallfølge |
| | 5c | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Kjent metode, bruke formler |
| | 5d | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Sum av konvergent rekke, må stille opp rekka |
| **Alt 1:** | 6a | Kalkulus | Anvende | Anvendt matematikk | Modellere situasjoner,Velge prosedyre kjent fra boka |
| | 6b | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Løse differensiallikning, Karakteristisk likning, rutine |
| | 6c | Kalkulus | Resonnere | Anvendt matematikk | Forklar at det går like lang tid hver gang loddet passerer likevektslinja |
| | 6d | Kalkulus | Anvende | Anvendt matematikk | Finne prosent |
| **Alt 2:** | 6a | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Forklare sumformelen |
| | 6b | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Digitalt verktøy, kan prøve seg fram |
| | 6c | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Induksjonsbevis, kjent metode |
| | 6d | Algebra | Resonnere | Ren matematikk | kombinere matematiske ideer, ikke rutinepreget |

| **Eksamen 2011** | **Oppgav** | **Tema** | **Kognisjon** | **Type matematikk** | **Stikkord** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Del1:** | $1a_1$ | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Derivasjon, kjerneregelen |
| | $1a_2$ | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Derivasjon, produktregelen |
| | $1a_3$ | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Derivasjon, kjerneregelen |
| | $1b_1$ | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Delvis integrasjon |
| | $1b_2$ | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Delbrkoppspalting |
| | 1c | Geometri | Resonnere | Ren matematikk | Geometrisk resonnement til å bestemme integral |
| | $1d_1$ | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Forklar og tegn, skalarprodukt |
| | $1d_2$ | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Forklar og tegn, kryssprodukt |
| | 1e | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Kryssprodukt står vinkelrett på to andre vektorer |
| | 1f | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Induksjon, kjent metode |
| | 2a | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Differensiallikning med integrerende faktor |
| | $2b_1$ | Algebra | Kunne | Ren matematikk | Finne funksjonesverdi |
| | $2b_2$ | Algebra | Kunne | Ren matematikk | Finne x-verdi |
| | 2c | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Likning for tangent, finnes en kjent metode |
| **Del2:** | 3a | Algebra | Kunne | Anvendt matematikk | Tegne graf, lese av funksjonsverdi |
| | 3b | Kalkulus | Anvende | Anvendt matematikk | Finne volum av skaftet, rutineoppgave |
| | $4a_1$ | Algebra | Resonnere | Ren matematikk | Geometrisk kontekst, vise formlikhet, ved resonnement komme fram til geometrisk rekke |
| | $4a_2$ | Algebra | Kunne | Ren matematikk | Kjenne igjen geometrisk rekke og konvergens |
| | 4b | Algebra | Resonnere | Ren matematikk | Finne sum både ved bruk av formel og et geometrisk resonnement |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 5a | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Finne punktet A, regne avstand mellom to punkt |
| | 5b | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Parallelle linjer, må plukke ut retningsvektor |
| | 5c | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Finne et uttrykk for en vektor |
| | 5d | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Finne koordinater for punkter, kjent fra læreboka |
| | 5e | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Avstand mellom to linjer, finnes en kjent metode |
| | 6a | Algebra | Kunne | Ren matematikk | Tegne graf, lese av verdier |
| | 6b | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Derivasjon, topp-bunnpunkt |
| | 6c | Kalkulus | Kunne | Anvendt matematikk | Bestem topp-og bunnpunkt, lese av graf |
| | 7a | Algebra | Kunne | Ren matematikk | Tegne graf, digitalt verktøy |
| | $7b_1$ | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Derivasjon ved produkt- og kjerneregel |
| | $7b_2$ | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Drøft graf, tegn fortegnslinje, topp-og bunnpunkt |
| | 7c | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Produktregelen |
| | 7d | Kalkulus | Resonnere | Ren matematikk | Kombinere kunnskaper og ferdigheter, bestemt integral fra 0 til a når a går mot ∞ |

| **Eksamen 2012** | **Oppgav** | **Tema** | **Kognisjon** | **Type matematikk** | **Stikkord** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Del 1:** | $1a_1$ | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Derivasjon, kjerneregelen |
| | $1a_2$ | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Derivasjon, produktregelen |
| | $1a_3$ | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Derivasjon, kjerneregelen |
| | 1b | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Delvis integrasjon |
| | 1c | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Integrasjon med variabelskifte |
| | 1d | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Differensiallikning, lineær |
| | $1e_1$ | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Kovergent geometrisk rekke |
| | $1e_2$ | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Vis at S(x) = … |
| | 2a | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Regneregler, prikkprodukt |
| | 2b | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Regneregler, kryssprodukt |
| | 2c | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Regneregler, vektorer |
| | 3a | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Derivasjon, produktregelen |
| | 3b | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Bunnpunkt, vendepunkt |
| | 3c | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Induksjonsbevis |
| **Del 2:** | 4a | Algebra | Kunne | Anvendt matematikk | Beregne en gitt funksjon verdi. |
| | 4b | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Tegne graf, likevektslinje, amplitude,periode, gjennomsnittlig tidspunkt |
| | 4c | Geometri | Kunne | Anvendt matematikk | Finne x-verdi, lese av graf |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 4d | Geometri | Kunne | Anvendt matematikk | Lese toppunkt av graf |
| | 5a | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Trigonometrisk likning, omforme uttrykk |
| | 5b | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Vis at f(x) = 3x/(x^2+4) |
| | 5c | Algebra | Kunne | Ren matematikk | Lese toppunkt av graf |
| | 5d | Geometri | Anvende | Anvendt matematikk | Løse trigonometrisk likning |
| | 6a | Kalkulus | Anvende | Anvendt matematikk | Løse separabel differensiallikning |
| | 6b | Kalkulus | Anvende | Anvendt matematikk | Bestem konstanten C, samt fart etter 3 sekunder |
| | 6c | Kalkulus | Anvende | Anvendt matematikk | Løse differensiallikning |
| | 7a | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Finn areal av figur |
| | 7b | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Vis ar $S_n$ = (n+1)/2n |
| | 7c | Algebra | Kunne | Ren matematikk | Finn $S_5$ |
| | 7d | Algebra | Resonnere | Ren matematikk | Geometrisk resonnement for å begrunne |
| | 8a | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Likning til plan |
| | 8b | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Avstandsformel, mellom plan |
| | 8c | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Parameterframstilling for linje ut fra tekst og figur |
| | 8d | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Koordinater til punkter |
| | 8e | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Finne likning til kule |

| **Eksamen 2013** | **Oppgav** | **Tema** | **Kognisjon** | **Type matematikk** | **Stikkord** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Del 1:** | 1a | Kalkulus | Kunne | Ren matematikk | Enkel derivasjon |
| | 1b | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Derivasjon, kjerneregelen |
| | 1c | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Produktregelen |
| | 2a | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Integrasjon, variabelskifte |
| | 2b | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Integrasjon, delbrøkoppspalting |
| | 3a | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Kryssprodukt, areal av trekant |
| | 3b | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Prikkprodukt, areal av trekant |
| | 4 | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Løs differensiallikning |
| | 5a | Algebra | Kunne | Ren matematikk | Finne ledd nr 16, og summen av 16 ledd |
| | 5b | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Finne uttrykk for $a_n$ og $s_n$ |
| | 5c | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Løse ulikhet, hvor mange ledd må vi minst ha for å oppnå sum = 400 |
| | 6 | Kalkulus | Resonnere | Ren matematikk | Lag skisse av graf ut fra gitte forutsetninger |
| | 7 | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Induksjonsbevis |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Del 2:** | 1a | Kalkulus | Anvende | Anvendt matematikk | Forklar modell |
| | 1b | Kalkulus | Anvende | Anvendt matematikk | Løse differensiallikning, kan bruke digitalt verktøy |
| | 1c | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Finne grenseverdi når x går mot $\infty$ |
| | 2a | Algebra | Kunne | Ren matematikk | Tegne graf |
| | 2b | Kalkulus | Kunne | Ren matematikk | Topp-bunnpunkt, lese av digititalt |
| | 2c | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Finne areal ved bruk av integral |
| | 3a | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Areal av trekant |
| | 3b | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Likning for plan |
| | 3c | Geometri | Kunne | Ren matematikk | Avstand fra punkt til plan, avstandsformel |
| | 3d | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Finne vinkel mellom to sideflater |
| | 4a | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Finne koordinater til C på en sirkelsektor og likningen til en linje |
| | 4b | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Volum av kjegle ved integrasjon, digitalt verktøy |
| | 4c | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Volum av kulesegment, digitalt verktøy |
| | 5a | Geometri | Anvende | Ren matematikk | Finne uttrykk for omkrets til rektangel + funksjonsuttykk for areal |
| | 5b | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Derivasjon, trigonometrisk funksjon, finne toppunkt,likebeint trekant gir kvadrat |
| | 5c | Kalkulus | Anvende | Ren matematikk | Største areal |
| | 6a | Algebra | Anvende | Ren matematikk | Finne k + summen av geometrisk rekke |
| | 6b | Algebra | Resonnere | Ren matematikk | Forklar at omkrets av nye trekanter er gitt ved.. |
| | 6c | Kalkulus | Resonnere | Ren matematikk | Grenseverdi, forklar formel for omkrets, Sierpinski trekanten |