Fakultet for naturvitenskap og teknologi
Institutt for matematikk og statistikk

Elevers matematiske resonnement

En kvalitativ studie om resonneringer av faglig sterke elever når de løser oppgaver med og uten kontekst.

—

Iselin Sørensen Johansen

MAT-3906 Masteroppgave i matematikk – lærerutdanning

Juni 2015

Forord

Å skrive denne masteroppgaven har vært lærerikt og givende, men også krevende. Jeg vil takke alle som har bidratt faglig og som støtte.

Jeg vil takke læreren som hjalp meg med å rekruttere elever til studien, og elevene tok seg tid til å bli intervjuet. Uten dem ville det ikke vært mulig å gjennomføre studien.

Jeg vil gi en stor takk til mine medstudenter Ingvild, Ida, Maria og Ingebjørg for faglige diskusjoner, støtte og oppmuntringer underveis. Jeg vil også takke mine veiledere Per Øystein Haavold og Ragnar Soleng for råd, konstruktiv kritikk, korrekturlesing og faglig støtte.

Norges Arktiske universitet, Tromsø juni 2015

Iselin Sørensen Johansen

Sammendrag

Det ble valgt å ha følgende problemstilling i denne oppgaven: «Hvordan resonnerer faglig sterke elever når de løser problemer med og uten kontekst i matematikk?». Det ble gjennomført en kvalitativ studie for å undersøke elevenes resonnement. Den kvalitative studien var oppgavebaserte intervjuer med åtte elever ved VG1 Studiespesialiserende. Elevene løste til sammen fire oppgaver i to intervju. Etter de oppgavebaserte intervjuene fikk elevene spørsmål om oppgavene og deres erfaringer med matematikk.

Det ble gjort en analyse av resultatene fra intervjuene. Resultatene ble analysert med utgangspunkt i Lithners (2008) rammeverk for kreativ og imitativ resonnering. Videre ble funnene fra analysen av de ulike oppgavene sammenlignet for å se på hvordan elevene løste oppgaver med og uten kontekst.

Resultatene viser at det var flere som hadde en kreativ resonnering når de løste oppgaver med kontekst sammenlignet med oppgaver uten kontekst. Elevene måtte i større grad tegne, forstå og matematiserte én av oppgavene med kontekst sammenlignet med oppgaven uten kontekst. Når elevene løste oppgaver med kontekst kan dette ha gjort at de ikke så sammenhengen til skolematematikk, og dette er noe som kan gjort at elevene i større grad resonnerte kreativt.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

I denne delen av oppgavene vil jeg gjøre rede for valg av oppgave og problemstilling, oppgavens innhold og oppbygning.

1.1 Bakgrunn for oppgaven

Realistiske problemer i skolen blir ofte jobbet med helt til sist i matematikkundervisningen, etter at elevene har lært algoritmer og prosedyrer for temaet. I artikkelen «*Problem solving and modeling*» viser forfatterne til en sammenligning av det tradisjonelle perspektivet på problemløsning med modelleringsperspektivet (Lesh & Zawojewski, 2007). Lesh og Zawojewski (2007) forklarer at antagelig er problemer fra «virkeligheten» ofte de vanskeligste problemene å løse. Dette gjør at i skolen blir disse realistiske problemene jobbet med helt i slutten av instruksjonene, hvis det er tid til det. Før elevene får jobbe med realistiske problemer lærer de prosedyrer for hvordan de skal løse problemene, og deretter øver de på prosedyrene i flere problemer. Etter at de har lært algoritmene og øvd på disse, jobber elevene med realistiske problemer fra virkeligheten (Lesh & Zawojewski, 2007). Det forfatterne tar opp om realistiske problemer samsvarer med det jeg har opplevd i praksis. Det at problemer fra «virkeligheten» og modellering nedprioriteres i skolen, er en av grunnene til at det i denne oppgaven skal sees på problemer med og uten kontekst.

Ut fra det Lesh & Zawojewski (2007) skriver bruker lærerne mer tid på å lære elevene algoritmer og øve på disse, siden realistiske problemer er de vanskeligste. I litteraturen skiller forfatterne ofte på problemer med og uten en realistisk kontekst som jeg skal komme tilbake til senere i teksten (OECD, 2013). Jeg opplever at det er fokus på problemløsning både i litteraturen og i skolen. Jeg har selv jobbet med matematikkproblemer som har realistiske kontekster i skolen, men det ble mest jobbet med pugging av algoritmer. Mange av de samme problemene hadde lik fremgangsmåte. Ross (1998) skriver at hvis elevene ikke har evnen til å resonnere, handler matematikken bare om å følge prosedyrer og herme etter eksempler, uten å forstå hvorfor. Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) mener at det ikke er tilstrekkelig for elevene å bare jobbe med de samme oppgavene. De skriver at hvis elevene skal forstå algoritmen, så må de jobbe med å forklare og argumentere selv, med mange flere forskjellige problemer. Det er på bakgrunn av dette det er valgt å se på hvordan elever resonnerer.

1.2 Problemstilling

Formålet med denne oppgaven er å få et innblikk i hvordan elever løser problemer med og uten kontekst i matematikk. For å sammenligne hvordan elever løser slike problemer er det valgt å se på deres resonnement. Jeg har derfor valgt følgende problemstilling for min forskning:

«Hvordan resonnerer faglig sterke elever når de løser problemer med og uten kontekst i matematikk?».

For å avgrense oppgaven er det valgt å bare se på hvordan faglig sterke elever resonnerer. Dette er i denne oppgaven elever med høy karakter i matematikkfaget.

For å se nærmere på elevenes resonnement er det valgt å gå ut fra Johan Lithners (2008) rammeverk, hvor kreative og imitative resonnementer er definert. Disse begrepene blir redegjort i kapittel 2 Teori.

1.3 Oppgavens oppbygning

Oppgaven er inndelt slik at det først kommer en teoridel hvor begreper som er relevante defineres, tidligere funn beskrives og det teoretiske rammeverket redegjøres for. Her er det valgt å gå inn på Lithners (2008) rammeverk om resonnering. Etter teorien kommer metodekapittelet. I dette kapittelet redegjøres det for den metodiske tilnærmingen, og gjennomføringen av datainnsamlingen. Her blir valget av metode begrunnet og intervjuformen beskrevet. Videre blir rekrutteringen og gjennomføringen av intervjuet beskrevet. I kapittel 4 blir resultatene presentert. Dette kapittelet tar for seg beskrivelse og tolkning av dataene fra de oppgavebaserte intervjuene. Her er oppgavene presentert hver for seg med observasjoner og tolkninger. Videre presenteres funn av mønstre. Deretter presenteres diskusjonen. I denne delen skal problemstillingen besvares, og teorien skal diskuteres opp mot resultatene. Deretter vil en oppsummering presenteres og refleksjoner og konklusjon bli tatt opp som avslutning.

2 Teori

I denne delen av oppgaven vil begreper som er relevante defineres og det teoretiske rammeverket beskrives.

2.1 Problemløsning

I problemstillingen brukes begrepet problem. Et problem defineres som *«et særlig type matematisk spørgsmål, nemlig ét hvor en matematisk undersøgelse er nødvendig for besvarelsen»* (s. 49) av Niss et al. (2002). Et spørsmål kan være mye i matematikken, og er relativt fordi det avhenger av personen som skal løse problemet. Forfatterne regner ikke et spørsmål som et problem når det kan løses med rutineferdigheter. Dette betyr at noe som er et problem for en person, kan løses med ferdigheter som er rutine for noen andre (Niss et al., 2002). I denne oppgaven vil definisjonen av Lesh og Zawojewski (2007) for et problem bli brukt: *«A task, or a goal-directed activity, becomes a problem (or problematic) when the problemsolver (which may be a collaborating group of specialists) needs to develop a more productive way of thinking about the given situation»* (s. 782). Et problem er altså avhengig av problemløseren, og hvordan han/hun løser problemet.

I problemstillingen fokuseres det på hvordan elever løser problemer, altså problemløsning. Stanic og Kilpatrick (1989) identifiserte tre tema som definerer bruken av problemløsning: problemløsning i en kontekst, problemløsning som en kunnskap og «problem solving as art» (ifølge Schoenfeld, 1992). De identifiserte fem roller for problemløsning i kontekst:

1. *Begrunne hvorfor man lærer matematikk.* Ved å sette problemet i en realistisk kontekst vil elevene se at man har behov for å lære matematikk.
2. *Motivasjon.* Man viser elevene et problem for å motivere dem til å lære et tema fordi da kan de løse problemet som er vist etterpå.
3. *Rekreasjon.* Som motivasjon for elevene for å vise at matematikk kan være gøy.
4. *Som et middel for å lære nye kunnskaper.* Ved å bruke et problem med kontekst kan man introdusere nye tema og dermed har en kontekst som man kan diskutere rundt.
5. *For øvelse*. Elevene lærer en ny teknikk eller prosedyre og bruker problemene for å øve på den nye teknikken. (Schoenfeld, 1992, s.338)

Lesh og Zawojewski (2007) definerer problemløsning som «the *process of interpreting a situation mathematically, which usually involve several iterative cycles of expressing, testing and revising mathematical interpretations and of sorting out, integrating, modifying, revising, or refining clusters of mathematical concepts from various topics within and beyond mathematics*." (Lesh & Zawojewski, 2007, s. 782). Problemløsning består altså av gjentakende sykler av matematiske strategier, og elevene må bruke matematiske begreper fra ulike temaer i matematikken. Dette gjør at når eleven har fått denne forståelsen vil det å gå fra problemet til målet, bli trivielt.

I «*Reflections on problem solving*» skriver Weinzweig om det å bruke problemløsning som et middel for å lære nye kunnskaper (Koichu, 2014). Dette ser jeg på som rolle nummer 4 ifølge listen til Stanic og Kilpatrick (1989). Weinzweig skriver om et problem som han har brukt i undervisningen med suksess (Koichu, 2014). Han mener at læreren skal utnytte situasjoner ved å skape problem der elevene har behov for å lære nye konsepter i matematikk. Elevene vil da se behovet og meningen med de nye konseptene og begrepene de lærer. Dette kan også kobles til det Lesh og Zawojewski (2007) skriver om modellering i matematikken. I artikkelen «Problem solving and modeling» viser forfatterne til en sammenligning av det tradisjonelle perspektivet på problemløsning med modelleringsperspektivet (Lesh & Zawojewski, 2007). De skriver at modellering er hvor elevene utvikler et begrepssystem for å forstå situasjoner i virkeligheten hvor det er nødvendig å tenke matematisk. Elevene lærer matematikken gjennom modellering. Dette skjer ved at elevene starter læreprosessen med å utvikle modeller for å forstå en situasjon fra virkeligheten. Dette skiller seg fra det forfatterne kaller tradisjonell problemløsning hvor realistiske problemer ofte blir jobbet med helt til sist i undervisningen av et tema, etter at elevene har lært algoritmer og prosedyrer (Lesh & Zawojewski, 2007). Weinzweig nevner at det er viktig å skape noe i undervisningen som blir meningsfullt og brukelig for elevene (Koichu, 2014).

I denne oppgaven vil det ses på problemløsning i kontekst hvor problemløsning brukes som et middel for å lære nye kunnskaper. Ut fra definisjonene som er gitt ovenfor vil problemløsning her være definert som prosessen der eleven går fra å få et problem, og gjennom å tolke oppgaven matematisk og bruke sine matematiske kunnskaper, komme frem til målet med problemløsningen.

2.2 Matematisk kompetanse

Det finnes mange rammeverk og definisjoner for matematisk kompetanse. «Mathematic literacy" er definert i PISAs rammeverk som:
«Mathematical literacy is an individual's capacity to formulate, employ and interpret mathematics in a variety of contexts. It includes reasoning mathematically and using mathematical concepts, procedures, facts and tools to describe, explain and predict phenomena. It assists individuals to recognize the role that mathematics plays in the world and to make the well-founded judgement and decisions needed by constructive, engaged and reflective citizens» (OECD, 2013, s.25)

Det internasjonale prosjektet PISA som skjer gjennom OECD (2013) måler 15-åringers kunnskap i blant annet matematikk. PISA fokuserer på at matematikken skal være relevant for elevene, og at oppgavene elevene skal løse skal være i en meningsfull og autentisk kontekst. Elevene møter matematikk i dagliglivet, og også i profesjonelle kontekster. Derfor er det viktig at elevene har en viss kompetanse og forståelse av matematikken. PISA fokuserer på matematikk som er viktig for elevene som deltagere i samfunnet. Begrepet «mathematical literacy» støtter opp om at elevene må få en forståelse av den abstrakte matematikken og fordelene med å ha et grunnlag i matematikken.

Niss et al. (2002) har en annen beskrivelse av hva matematisk kompetanse er. De skriver at «*en matematisk kompetence er indsigtsful parathed til at handle hensigtsmæssigt i situasjoner, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer*» (s. 43). De deler den matematiske kompetansen inn i de følgende 8 sentrale kompetanser:

- *Tankegangskompetanse*
- *Representasjonskompetanse*
- *Symbol- og formell kompetanse*
- *Kommunikasjonskompetanse*
- *Hjelpemiddelskompetanse*
- *Resonneringskompetanse*
- *Modelleringskompetanse*
- *Problembehandlingskompetanse*

Problembehandlingskompetanse består i å finne, formulere, avgrense og presisere problemer. Niss et al. (2002) definisjon på et problem og problemløsning ble nevnt i forrige delkapittel. De definerer modelleringskompetanse som å de å kunne analysere og bygge matematiske modeller. Det består altså i å kunne «avmatematisere» matematiske modeller, og også matematisere som her vil si å oversette objekter, relasjoner til en matematisk modell. Forfatterne skriver at grensen mellom matematisk problemløsning og matematisk modellering er flytende. Jo flere elementer av problemstillingen som må tas i betraktning, jo mere er det snakk om modellering. Behandling av problemstillinger som ikke krever arbeid med virkelighetselementer i stor grad kommer under problembehandlingskompetanse og ikke modelleringskompetanse. En annen kompetanse er resonneringskompetansen som består i å kunne resonnere matematisk. Resonneringskompetanse omhandler flere deler som å følge og bedømme et bevis, forstå et bevis, men også å gjennomføre resonnementer selv. De skriver at å kunne rettferdiggjøre sine svar og løsninger er tett forbundet med problembehandlingskompetanse og modelleringskompetanse. Det kreves at elevene skal forsvare og rettferdiggjøre når de løser problemer og modelleringsoppgaver (Niss et al., 2002).

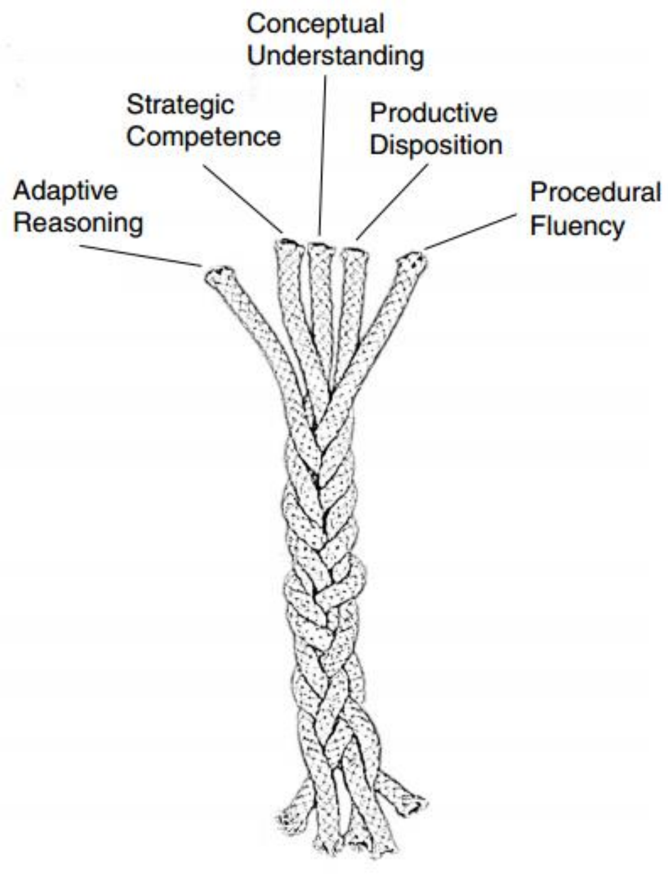
Brekke (1995) fokuserer på konstruktivisme når han skriver om kompetanse i matematikk. Elevenes handlinger og erfaringer gir refleksjon, og denne refleksjonen bidrar til elevenes læring (Brekke, 1995). Han skriver om fem komponenter som utgjør det en kan kalle matematisk kompetanse:

1. *Faktakunnskap*
2. *Ferdigheter*
3. *Begrepsstruktur*
4. *Generelle strategier*
5. *Holdninger* (Brekke, 1995)

Kilpatrick et al. (2001) har ganske like komponenter som Brekke (1995) som omhandler matematiske ferdigheter. De mener at matematisk kompetanse er et vidt begrep og velger derfor å se på de matematiske ferdighetene som er nødvendig for å kunne matematikk. De skriver om fem matematiske ferdigheter som de mener er nødvendig for å lære matematikk:

1. Konseptuell forståelse («*conceptual understanding*») er forståelse av matematiske begreper, operasjoner og sammenhenger.
2. Prosedyreferdigheter («*procedural fluency*») er evnen til å løse oppgaver med prosedyrer fleksibelt, presist, effektivt og hensiktsmessig.
3. Strategisk kompetanse («*strategic competence*») er å kunne formulere, representere og løse matematiske problemer
4. Adaptiv resonnering («*adaptive reasoning*») er å kunne tenke logisk, reflektere, forklare og forsvare.
5. Produktiv holdning («*productive disposition*») er å se matematikken som fornuftig, nyttig og samtidig har tro på sine egne ferdigheter.
   (Kilpatrick et al., 2001, s.116).

Disse fem kompetansene er avhengig av hverandre og representerer ulike aspekter av matematisk ferdighet (se figur 2.1).



Figur 2.1: De fem komponentene som utgjør matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001, s.117)

Det finnes altså flere rammeverk som beskriver matematisk kunnskap. Det er valgt å ha med flere av disse for å vise likhetene med modellene. Disse modellene er like med at de forklarer at matematisk kunnskap består av flere deler som er avhengig av hverandre. For at en elev skal ha ferdigheter i matematikk er det flere ulike sider med matematikken som er viktig. Mange av rammeverkene deler den matematiske kunnskapen opp i flere komponenter for å vise at matematisk kunnskap er et vidt begrep. I denne oppgaven vil de fem komponentene som Kilpatrick et al. (2001) beskriver være gjeldende. Denne er valgt siden en av de matematiske ferdighetene, adaptiv resonnering, kan beskrive hvilken rolle matematisk resonnement har for en fullstendig matematisk kompetanse. Siden adaptiv resonnering er en viktig komponent i denne oppgaven vil dette beskrives nærmere.

Kilpatrick et al. (2001) skriver at adaptiv resonnering brukes om evnen til å tenke logisk om sammenhenger mellom begreper og situasjoner. De mener at denne resonneringen skal være korrekt, valid og alle alternativer skal være nøye gjennomtenkt. Adaptiv resonnering er også evnen til å kunne argumentere og forsvare sine strategivalg og løsningene (Kilpatrick et al., 2001). Adaptiv resonnering er i stor grad det samme som det Lithner (2008) kaller kreativ resonnering som det forklares nærmere om i kapittel 2.4. Begge disse begrepene står i kontrast til imitativ resonnering hvor elevene bruker tidligere erfaringer, innlærte algoritmer og rutiner i resonneringen. Star og Seifert (2006) skriver at en elev som kan flere løsningsprosedyrer og kan skape flere nye prosedyrer er fleksibel. De skriver at en fleksibel elev har god forståelse av prosedyrene. Kilpatrick et al. (2001) skriver at når en elev får større konseptuell forståelse vil eleven være mer fleksibel når nye problemer skal løses. Men på den andre siden vil eleven bli mindre fleksibel hvis en prosedyre blir automatisk for eleven. Da vil det være vanskeligere for elevene å tenke på andre aspekter av problemet og løse nye problemer.

Kilpatrick et al. (2001) skriver at man kan måle kompetansen i matematikk hos en elev gjennom adaptiv resonnering på to ulike måter. Den første metoden er å få elevene til å resonnere om tall og deres egenskaper. Dette kan gjøres ved å for eksempel gi en multiple-choice oppgave der elevene skal estimere $\frac{12}{13}+\frac{7}{8}$, med valgmuligheter 1, 2, 19 og 21. Her burde elevene se at begge brøkene er mindre enn 1 og dermed kan ikke svaret være 19 og 21. Denne oppgaven krever bare at man kobler grunnleggende forståelse og resonnering. For mange elever blir ikke denne koblingen gjort. Den andre metoden er å få elevene til å begrunne og forklare sine løsninger.

2.3 Problemer med kontekst

I problemstillingen ses det på problemer med og uten kontekst. I denne delen blir det forklart hva som menes med kontekst i denne oppgaven.

Det internasjonale prosjektet PISA som skjer gjennom OECD måler 15-åringers kunnskap i blant annet matematikk (OECD, 2013). PISA fokuserer på at matematikken skal være relevant for elevene, og at oppgavene elevene skal løse skal være i en meningsfull og autentisk kontekst. Elevene møter matematikk i dagliglivet og også i profesjonelle kontekster. Derfor er det viktig at elevene har en viss kompetanse og forståelse av matematikken. PISA fokuserer på matematikk som er viktig for elevene som deltagere i samfunnet. Begrepet «mathematical literacy» (kapittel 2.2) støtter opp om at elevene må få en forståelse av den abstrakte matematikken og fordelene med å ha et grunnlag i matematikken. Problemer som viser elevens kunnskaper i mathematical literacy er ofte problemer med en realistisk kontekst. PISA deler opp konteksten i matematikkoppgaver i fire situasjoner: personlig, sosial, yrkesrelatert og vitenskap. (OECD, 2013)

Gravemeijer og Doorman (1999) skriver at i Nederland fokuseres det på en metode som kalles realistisk matematikkundervisning (RME). Kontekstproblemene som brukes er reelle for studenten, og som de kan erfare. Kontekstproblemer har her en sentral rolle, og er viktig i undervisningen helt fra starten (Gravemeijer & Doorman, 1999). De skriver at målet med undervisning er at den skal gi elevene innsikt i matematikken, og gi dem muligheten til å forstå matematikken ut fra deres egen forståelse og uformelle kunnskap. RME prøver å la elevene lære den formelle, abstrakte matematikken gjennom aktivitet og matematiske problemer fra virkeligheten (Gravemeijer & Doorman, 1999). Dette er likt rammeverket til PISA som bygger undersøkelsene på at elevene skal kunne mathematical literacy. Mange land har som mål at elevene skal ha kompetanse i mathematical literacy. Dette gjør at de er forberedt på problemer i dagliglivet der de må bruke matematikk, og kan dermed være aktive borgere i et moderne samfunn.

En studie av Blöte, Klein og Beishizen (2000) undersøkte elevenes fleksibilitet når det kom til strategi i matematikk. 60 elever som var med i et forsøksprogram om realistisk regning deltok i studien. Denne studien har funn som viser at elevenes vurdering av strategier var mer fleksibel ved kontekst problemer, enn i problemer med numeriske uttrykk.

En studie av De Bock, Verschaffel, Janssens, Van Dooren og Claes (2003) ser på problemer med og uten kontekst. Formålet med studien deres var å blant annet se på påvirkningen av autentisk kontekst på elevenes tendenser til å gjøre feil på oppgaver som omhandler proporsjonalitet. Gjennom tester av 13-16 åringer hvor halvparten av elevene fikk se en video som handlet om konteksten til de autentiske oppgavene de skulle testes i. De Bock et al. (2003) fant en negativ påvirkning på elevenes prestasjoner når de fikk oppgaver med en autentisk kontekst. Videoen hadde derimot en positiv på effekt på elevenes motivasjon, men de fleste elevene sa at videoen ikke ga dem noe hjelp til å løse testen. De skriver at en mulig grunn til at de fikk en negativ effekt på prestasjonene kunne komme av at oppgavene uten kontekst var mer likt problemer som er presentert i skolen. De mener at ved å legge til konteksten i oppgaven kan elevene få mindre forståelse for hva de ble testet for sammenlignet med oppgavene uten kontekst, og dermed ble resonneringen og reglene ukjente. En annen mulig grunn til den negative effekten forklarer de ut fra en studie av Boaler (1994). Boaler (1994) har sett på forskning som sier at jenter får dårligere resultater enn gutter på oppgaver med kontekst i matematikk. Boaler (1994) analyserte elevers prestasjon når de løste oppgaver med ulike kontekster med samme matematisk innhold. Jentene i denne studien fikk en karakter lavere på oppgaver som omhandlet mote enn oppgavene som var mindre interessante for jentene (for eksempel fotball). Boaler (1994) skriver at en femtedel av jentene og guttene som fikk dårligere resultater, fikk dette i hovedsak på grunn av at de tok hensyn til variabler fra virkeligheten når de løste oppgaven som ikke var relevante. At jentene fikk dårligere resultater på oppgavene om mote kan komme av at de hadde et større engasjement i oppgaven som gjorde at de tok hensyn til disse variablene (Boaler, 1994). De Bock et al. (2003) diskuterte at dette engasjementet elevene får av konteksten kunne være en av grunnene til at elevene i deres studie gjorde det dårligere på oppgavene med kontekst.

Nedenfor er et eksempel på et problem med og uten kontekst fra studien til De Bock et al. (2003).

Tabell 2.1: Eksempel på problem med og uten kontekst. (De Bock et al., 2003, s.448)

Problem med kontekst	Abstrakt problem
Gulliver's walking-stick is 96 cm high. What's the height of a similar Lilliputian walking-stick?	The length of a line segment A is 13 times as large as the length of a line segment B. If the line of line segment A is 78 cm, how long is line segment B?

Busse (2011) har denne definisjonen på kontekst*: «The real-world context of a realistic task comprises all aspects of the verbally or nonverbally, implicitly or explicitly offered extra-mathematical surrounding in which the task is embedded, as well as its individual interpretation by the person who works on the task»* (Busse, 2011, s.39). Han skriver også at reelle problemer kan tolkes veldig forskjellig siden tolkningen er avhengig av personlige erfaringer. OECD (2009) definerer oppgaver som «intra-mathematical» og «extra-mathematical» etter hvilken kontekst oppgaven har. De skriver følgende om oppgaver som er «intra mathematical»: *«If a task refers only to mathematical objects, symbols or structures, and makes no reference to matters outside the mathematical world, the context of the task is considered to be intramathematical, and will be classified as belonging to the scientific situation type»* (OECD, 2009, s.92). Videre definerer de *«extra-mathematical» som: «These task contexts are extra-mathematical and the student must translate these problem contexts into a mathematical form.»* (OECD, 2009, s.92). De skriver videre at så lenge oppgaven har noen form for virkelige elementer som ikke er langt unna en virkelig situasjon og det kreves en ekte bruk at matematikken for å løse problemet, er dette et «extra-mathematical» problem. Siden OECD er pålitelig og kjent, vil deres definisjon for oppgaver med og uten kontekst være definisjonen som brukes i denne oppgaven.

2.4 Matematisk resonnement

Kenneth A. Ross (1998) som er tidligere leder av Mathematical Association of America (MMA) skriver at en at de viktigste målene i matematikkundervisning er å lære elevene å resonnere. Dette er en grunnleggende ferdighet ikke bare i matematikken. Ross (1998) mener at hvis elevens evne til å resonnere ikke er utviklet, vil matematikken bare være memorering og følge eksempler uten noen forståelse. Hensikten med denne oppgaven er å undersøke hvordan elever resonnerer når de løser oppgaver med og uten kontekst. Det må da sees nærmere på elevenes matematiske resonnement. Rammeverket for studien som blir gjort kommer hovedsakelig til å bygge på Lithners forskning (2008). Lithners (2008) forskning er basert på veldefinerte beskrivelser av matematisk resonnement. Forskningen hans er empirisk basert og rammeverket hans er mye brukt i forskning. Rammeverket er hensiktsmessig for å klassifisere elevers måte å resonnere på.

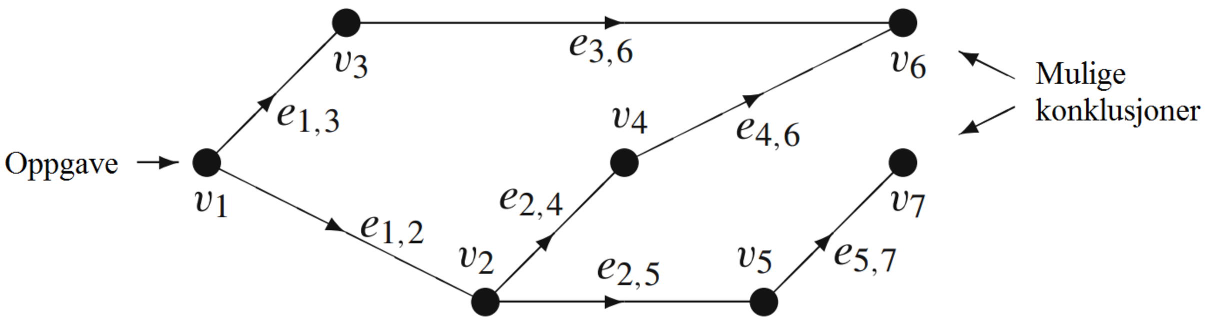
Lithner (2008) fokuserer på karakterisering av elevenes resonnering når de løser oppgaver. I denne oppgaven vil Lithners (2008) definisjon, som sier at resonnering er en rekke tanker som fører til antagelser og konklusjoner i oppgaveløsning hos elevene, bli brukt. Han skriver videre at resonneringen trenger ikke å være korrekt eller formelt logisk, så lenge det er (i elevens øyne) gode begrunnelser som støtter den. Hans ide er at pugging som resonnering er imitativ, og den motsatte resonneringen vil da være kreativt, som man kan se i figur 2.3.

Lithner (2008) sier at når vi skal karakterisere så må vi se resonneringen som et produkt. Resonneringen vil være en sekvens som starter i en oppgave og slutter i et svar. Han deler resonneringen i en struktur på fire steg:

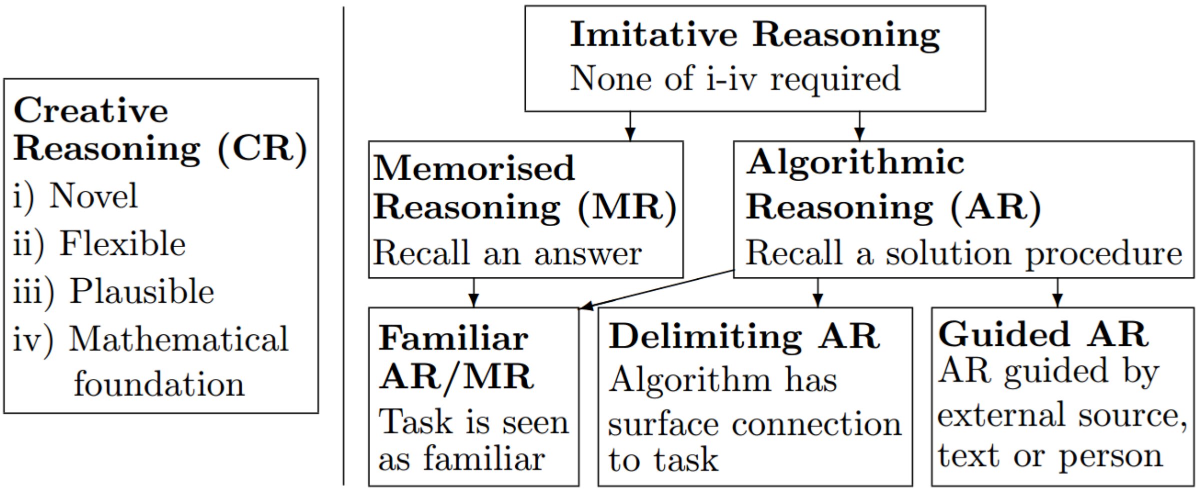
1. Problematisk situasjon: eleven møter en oppgave
2. Valg av strategi
3. Gjennomføring av strategien
4. Konklusjon

   (Lithner, 2008, s.257)

Lithner (2008) forklarer at resonneringsstrukturen kan representeres ved en sti i en rettet graf (figur 2.2). Et hjørne V_n i grafen representerer et tidspunkt i resonneringen og elevene velger strategi ut fra kantene som leder ut fra V_n. Gjennomføringen av strategien representeres ved kant $e_{m,n}$. Kunnskap som ikke var tilgjengelig i V_n blir brukt for å danne den nye kunnskapstilstand V_m der oppgaven er delvis løst. Det er en begrunnelse som ligger bak forflytningen mellom en kant til en annen. Det er alltid en slik begrunnelse, selv om den er vag eller overfladisk (Lithner, 2008).



Figur 2.2: Resonneringsstruktur representert i en graf (Lithner, 2008, s.258)



Figur 2.3: Oversikt over Lithners begrepsapparat (Lithner, 2006, s.5)

2.4.1 Kreativ resonnering

Lithner (2008) skriver at kreativ resonnering ikke trenger å være utfordrende for elevene. Betingelsene inkluderer også elementær resonnering. Lithner (2008) mener at en kreativ resonnering må oppfylle følgende kriterier: nyskapende, fleksibel, troverdig og ha et matematisk grunnlag (figur 2.3). For at resonneringen skal være nyskapende må den skapes av elevene, eller en glemt resonnering gjenskapes av eleven. Resonneringen skal være nyskapende for eleven selv. Resonneringen må være fleksibel, som vil si at eleven ikke må være bundet til en bestemt strategi, men kan benytte ulike tilnærminger og tilpasse til den aktuelle oppgaven. For at resonneringssekvensen skal være troverdig må eleven ha argumentasjon som støtter strategivalg og gjennomføringen av strategien. Argumentene må ha et matematisk grunnlag som har støtte i indre matematiske egenskaper.

2.4.2 Imitativ resonnering

Imitativ resonnering er i motsetning til kreativ resonnering basert på tidligere erfaringer. Resonneringen er altså ikke nyskapende. De empiriske studiene bak Lithners begrepsapparat har identifisert to typer imitativ resonnering, memorisert resonnering (MR) og algoritmisk resonnement(AR) (figur 2.3) (Lithner, 2006).

Memorisert resonnering er når elevens strategivalg går ut på å huske et fullstendig svar og utføringen av strategien består i å skrive ned svaret (Lithner, 2008). Lithner (2008) skriver at all oppgaveløsning krever i noen deler at man må huske, men som en strategi er det nyttig i bare noen tilfeller som for eksempel hvis man skal svare på faktaspørsmål. At man har memorisert en løsning betyr ikke at man har forstått den (Lithner, 2008).

Et algoritmisk resonnement er ifølge Lithner (2008) å huske en løsningsalgoritme. Han skriver at i mange av skoleoppgavene må elevene utføre utregninger hvor det er mer hensiktsmessig å huske en algoritme. I følge Brousseau (sitert i Lithner, 2008, s.259) er en algoritme en endelig sekvens av instruksjoner som lar en finne svaret for bestemte typer problemer. Gjennomføringen av strategien er triviell og det er bare slurvefeil som kan hindre eleven å komme frem til svaret (Lithner, 2008).

3 Metode

I dette kapittelet redegjøres det for den metodiske tilnærmingen og gjennomføringen av datainnsamlingen. Underveis drøftes valgene som er tatt.

3.1 Design og metodologi

Problemstillingen i denne oppgaven er: «Hvordan resonnerer faglig sterke elever når de løser problemer med og uten kontekst i matematikk?». Ved å ha denne problemstillingen vil man se på hvordan elevene resonnerer og tenker. Siden vi ikke kan observere dette direkte kommer denne forskningen under kognitiv psykologi. Cobb (2007) skriver at forskere som jobber ut fra en kognitiv tradisjon redegjør for variasjoner i elevenes resonneringer med å ta utgangspunkt i et rammeverk, for å utvikle en forklaring til den matematiske aktiviteten til hver elev.

Valgene som er tatt i forhold til problemstilling og metode er påvirket av forskerens kunnskapssyn. Forskeren har et pragmatisk syn på forskning. Dette gjør at man ser på forskningen som et håndverk der den produserte kunnskapen avgjør kvaliteten (Kvale & Brinkmann, 2009). Kvale og Brinkmann (2009) sier at ved å ha et pragmatisk syn vil man se på bruksverdien av forskerens tanker og teorier som blir produsert. Ved at forskeren i denne oppgaven har et pragmatisk syn vil dette påvirke til å ha en problemstilling som forskeren selv ser på som nyttig og som vil ha en verdi for andre lesere og forskere.

Denne studien er en generisk kvalitativ studie. Caelli, Ray og Mill (2003) skriver at en slik studie ikke blir gjennomført med fokus i én metodologi. En generisk kvalitativ studie prøver heller å kombinere flere metodologier, eller slik som i dette tilfellet hvor det ikke gjøres noe krav på et metodologisk synpunkt i det hele tatt. Fokuset på denne studien er å forstå en hendelse eller et resultat, som disse forskeren beskriver er fokuset i en generisk kvalitativ studie (Caelli et al., 2003).

Man skiller gjerne mellom kvalitative og kvantitative metoder. Bjørndal (2002) skriver at i kvantitative metoder ser man ofte på et stort utvalg på en mer strukturert og systematisk måte, enn ved kvalitative metoder. Videre skriver han at i kvalitative metoder er man ute etter å få en dypere forståelse og se på et lite utvalg. I denne studien er målet å få en dypere forståelse av hva elevene tenker og deres resonneringer. Det vil sees etter sammenhenger i mange opplysninger om få mennesker. Dette gir kvalitative data hvor man kan se på sammenhenger mellom intervjuobjektene.

Etter å ha sett på ulike kvalitative datainnsamlingsmetoder ble det kommet fram til at et kvalitativt intervju er best egnet til denne studien. Kvales (1997) definisjon av et kvalitativt forskningsintervju er*: «Det kvalitative forskningsintervjuet forsøker å forstå verden fra intervjupersonenes side, å få frem betydningen av folks erfaringer, og å avdekke deres opplevelse av verden, forut vitenskapelige forklaringer»* (Kvale, 1997, s.17). Intervjuet gir dybde i informasjonen vi får av en persons forståelse og dens erfaring. Dette gjør at et kvalitativt intervju er den metoden som gir egnet svar på problemstillingen. Detaljer kan fanges opp, og i tillegg gir intervjuet en fleksibilitet som er attraktiv i denne studien.

3.2 Intervjuform

I følge Bjørndal (2002) er en av de svake sidene med forskningsintervjuet at intervjuere lett kan påvirke svarene til dem som blir spurt. For å prøve å unngå dette er det valgt å ha en oppgavebasert form på intervjuet.

Siden det skal i denne oppgaven sees på hvordan elevene tenker og resonnerer vil det være hensiktsmessig å gjennomføre oppgavebaserte intervju. Goldin (1997) har skrevet en artikkel om å observere problemløsning i matematikk gjennom oppgavebaserte intervju. Denne typen intervju er ifølge Goldin (1997) en god kvalitativ metode for å se på problemløsning i matematikken. Her kan man studere problemløsning og læring, uten å bruke tester hvor man ser på antall rette svar eleven har fått. Forfatteren har formulert fem prinsipper som han mener er viktige i et oppgavebasert intervju:

1. Mottagelighet. Intervjueren må ha matematikkoppgaver som er passende med kunnskapen til intervjuobjektet.
2. Representert i en verdifull struktur. Oppgavene burde være i en meningsfull struktur for elevene.
3. Fri problemløsning. Elevene burde få jobbe fritt med oppgaver uten veiledning slik at man får frem spontane handlinger og valg.

4. Tydelige kriterier. Det er viktig at intervjudesignet er tydelig og klart, og at alle mulige løsninger er beskrevet.
5. Interaksjoner med læringsmiljøet. (Goldin, 1997, s.61-62)

Et oppgavebasert intervju gir innsikt i hvordan elevene løser oppgavene siden de forteller hva de gjør i løpet av intervjuet. I denne studien bestod første del av intervjuet av at eleven utførte fri problemløsning uten veiledning. Da var intervjuer så stille som mulig slik at eleven ikke skulle bli påvirket av intervjuer. Slik vil man få innsikt i elevens løsningsstrategier. Deretter ble det stilt oppfølgingsspørsmål til elevene om hva de tenkte og hvordan de løste oppgaven. Dette vil gi dybde i hva eleven tenkte og de valgene han gjorde da han løste oppgaven.

Etter de oppgavebaserte intervjuene, ble det gjennomført et intervju om oppgavene og elevens forhold til matematikk. Det siste intervjuet ble gjennomført med utgangspunkt i en intervjuguide. Ryen (2002) skriver at de halvstrukturert intervjuene ofte har spørsmål og tema satt opp på forhånd, men strukturen og spørsmålene er ikke fastlagt i detalj. Hun forklarer videre at dette gjør at intervjuet blir som en vanlig samtale, med noen spørsmål som styrer intervjuet. Dette gir samtalen en mening uten at den blir for standardisert. Siden forskeren er en uerfaren intervjuer ga en intervjuguide trygghet og støtte i intervjuet. I tillegg til disse spørsmålene ble det planlagt flere oppfølgingsspørsmål. Dette var fordi hver elev kunne komme til å gi forskjellige svar. Det ville da være behov for flere ulike oppfølgingsspørsmål til hvert svar eleven kunne gi. Det ble da mulighet for å gå enda mer i dybden i elevens erfaringer.

3.3 Presentasjon av utvalget

Det var ønskelig å ha mellom seks og tolv intervjuobjekter. En studie viser at tolv intervjuobjekter gir et ganske komplett og stabilt resultat, men et utvalg på seks kan være nok (Guest, Bunce, & Johnson, 2006). Dette avhenger av hvilken type studie man har, hvilke data man får og hvor homogent utvalget er. Tiden var også en faktor som spilte inn på antall objekter. Dermed var mellom seks og tolv intervjuobjekter gunstig med hensyn til tid.

Elevene hadde gått i samme klasse og hadde hatt samme lærer i ett semester. Siden elevene hadde hatt samme læringsmiljø kan det ses på likheter i materialet og drøfte dette.

3.3.1 Utvalgskriterier

Informantene skulle være fra en videregående skole i Nordland. Dette var av praktiske hensyn. De skulle gå VG1 Studiespesialisering. Dermed kunne man forvente at elevene hadde nok kompetanse og erfaring i matematikk til at eleven kunne resonnere og jobbe med problemer i matematikk. Siden det skal gis samtykke fra elever eller foresatte for deltagelse i studien var det mer praktisk at elevene gikk minst VG1, siden de da selv kan gi samtykke til å delta i studien.
Det ble bestemt på forhånd at utvalget skulle ha høy måloppnåelse i matematikkfaget. Dette vil si at elevene skal ha måloppnåelse som tilsvarer karakter 5 eller 6. Informantene ble rekruttert på høsten, og læreren hadde derfor ikke satt noen terminkarakterer enda. Dette gjorde at læreren som bestemte hvilke elever som hadde høy nok kompetanse til å være med på studien.

For å beholde anonymiteten til elevene fikk de et nummer. For å kunne sammenlikne mellom kjønn har elevene fått koder. Elevene fikk navnet gutt eller jente. Dette gir navnene jente 1, jente 2, jente 3, jente 4, gutt 1, gutt 2 osv.

Rekrutteringen omtales i 3.5.2

3.4 Presentasjon av oppgavene

Intervjuene er basert på fire oppgaver. To av oppgavene omhandler følger og to av oppgavene omhandler geometri og Pytagoras’ setning. Én oppgave fra hver av disse temaene har en kontekst, og de andre to oppgavene er abstrakte. De to oppgavene med kontekst er hentet fra to ulike steder. Kontekstoppgaven som omhandler følger er fra matematikksenteret (Matematikksenteret, u.d.), og oppgaven som omhandler Pytagoras’ setning er hentet fra en lærebok i matematikk (Sandvold et al., 2006). Disse oppgavene er utprøvd og kan bidra til å styrke datamaterialet.

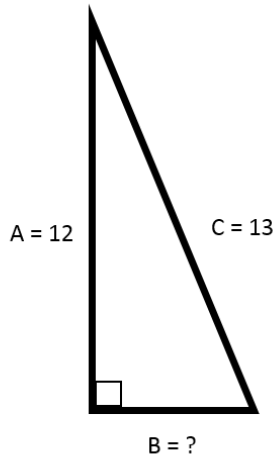
De resterende to oppgavene er laget selv. Dette ble gjort med utgangspunkt i de to oppgavene med kontekst. Oppgavene ble laget med utgangspunkt i de andre oppgavene slik at de skulle omhandle samme matematisk idé, og dermed kunne sammenlignes.
I dette avsnittet presenteres de ulike oppgavene.

3.4.1 Oppgave 1

Oppgave 1 er selvlagd. Liknende oppgaver er likevel ikke uvanlig å finne i lærebøkene i matematikk. For at elevene skal kunne løse denne oppgaven må de kunne Pytagoras' setning. I læreplanen i matematikk fellesfag etter 10.årstrinn er et kompetansemål at «*Mål for opplæringa er at eleven skal kunne bruke og grunngje bruken av formlikskap og Pytagoras' setning i berekning av ukjende storleikar*» (Udir A). Dette betyr at en elev på VG1 skal kunne løse denne oppgaven. Denne oppgaven er valgt å ha med for å kunne sammenlikne med hvordan elevene løser oppgave 3.

TREKANT

En trekant har to sider på 12 cm og 13 cm. Hvor lang er den siste siden?



Figur 3.1: Oppgave 1

3.4.2 Oppgave 2

Oppgave 2 er selvlagd. Denne oppgaven handler om å se mønstre i tallene. Oppgaven er om tall, uten en kontekst eller en figur. Denne oppgaven krever ingen formler som elevene skal kunne. Den første delen av oppgaven er å finne det 11. tallet i følgen. Denne delen er enklest og krever at eleven kan se systemet, og kan dermed telle seg frem til riktig svar. Den andre delen av oppgaven er vanskeligere for eleven. Eleven må her kunne se systemet, og finne en formel for et ukjent tall med gitt plassering. Denne oppgaven kan sammenlignes med oppgave 4, siden begge oppgavene handler om å se mønstre.

FØLGE

Følgen nedenfor består av tall. Det første tallet er 5, det andre tallet er 7, det tredje tallet er 9, og så videre.

5 7 9 11

Hva er det 11. tallet i følgen? Begrunn hvorfor.

Hva er formelen for å finne tallet med plassering n i følgen? Begrunn hvorfor.

Figur 3.2: Oppgave 2

3.4.3 Oppgave 3

Denne oppgave er hentet fra læreboka Sigma matematikk 1T (Sandvold et al, 2006). Tallene i oppgaven er endret slik at lengdene i trekanten gir en pytagoreisk trippel. Dette ble gjort fordi det ikke skal fokuseres på om elevene kan gjøre utregninger, men hvordan de løser oppgaven. Ved å bruke tall som gir et heltall vil det være enklere for elevene å ikke gjøre regnefeil. Elevene må her kunne tolke oppgaven for å finne ut at stokken som brekker og bakken, danner en trekant. Elevene kan deretter se at de kan bruke Pytagoras' setning for å løse oppgaven.

STOKK

En klassisk oppgave fra matematikkens historie i Kina lyder slik: En bambusstokk er 9 m høy. Stokken brekker, og toppen av stokken berører bakken 3 m fra foten av stammen. Hvor høyt oppe på stammen skjer bruddet?

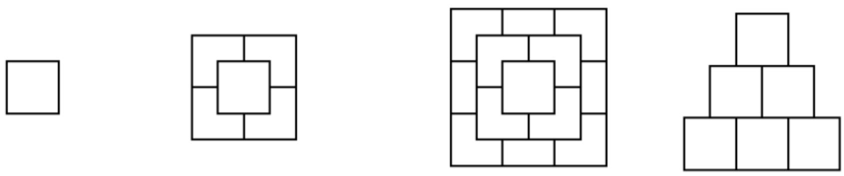
Figur 3.3: Oppgave 3

3.4.4 Oppgave 4

Oppgaven er hentet fra et hefte med problemløsningsoppgaver som er en oversettelse fra et australsk hefte skrevet av Neville deMestre (Matematikksenteret, u.d.). Matematikksenteret skriver at oppgavene passer fra 5. til 10.klassetrinn. Denne oppgaven skal derfor kunne løses av en elev på VG1. Forskjellen fra oppgave 2 er at denne oppgaven handler om en pyramide.

PYRAMIDE

Det bygges et tårn, som ser ut som en pyramide med kvadratisk grunnflate. De tre første figurene under viser tårn sett ovenfra, med henholdsvis 1, 2 og 3 etasjer. Figuren lengst til høyre viser et tårn med tre etasjer sett fra siden.



Du skal bygge en pyramide med 6 etasjer. Hvor mange klosser består den første etasjen av? Begrunn hvorfor.

Hvis du skal bygge en pyramide med n etasjer. Hva er formelen for å finne antall klosser på den første etasjen? Begrunn hvorfor.

Figur 3.4: Oppgave 4

Oppgave 1 og oppgave 3 krever mye av de samme kunnskapene hos elevene. I disse oppgavene må elevene kunne huske Pytagoras' setning og hvordan de løser ligninger. Denne typen kunnskap kaller Schoenfeld (1992) for «the knowledge inventory». Han skriver at denne typen kunnskap er relevant i ett matematisk tema, og inkluderer den uformelle og intuitive kunnskapen som blant annet fakta, definisjoner, rutine prosedyrer osv. I disse oppgavene må elevene kunne huske slik type kunnskap. Elevene må i begge oppgavene kunne Pytagoras' setning og hvordan man bruker denne formelen. I tillegg må de kunne de samme regneteknikkene når det gjelder å løse en likning. I oppgave 3 må elevene også kunne løse ut parenteser i utregningene sine hvis de velger denne løsningsmetoden. Dette kan gjøre oppgave 3 vanskeligere enn oppgave 1.

Oppgave 2 og oppgave 4 krever også samme kunnskapene. Her må elevene se et system eller mønster, i tallene og pyramiden. I oppgave a) kreves det i begge oppgaver at elevene skal se systemet, og videre kunne finne et ukjent tall som ikke er oppgitt. I den andre delen av oppgaven skal elevene klare å bruke systemet de har funnet, til å finne en formel for følgene. Oppgave 4 kan sees på som en følge slik som oppgave 2 handler om, siden vi har antall etasjer ut fra det antall klosser på de ulike etasjene. Nedenfor kan man se de kompetansemålene som omhandler følger som elever i VG1 skal ha vært igjennom:

Kompetansemål i matematikk fellesfag etter 4. årstrinn: *«Mål for opplæringa er at eleven skal kunne eksperimentere med, kjenne att, beskrive og vidareføre strukturar i enkle talmønster»* (Udir B, u.d.)

Kompetansemål i matematikk fellesfag etter 7. årstrinn: *«Mål for opplæringa er at eleven skal kunne utforske og beskrive strukturar og forandringar i enkle geometriske mønster og talmønster»* (Udir C, u.d.)

Oppgavene er valgt slik at to og to oppgaver krever det samme fra elevene. På denne måten kan man i stor grad sammenligne elevenes løsninger av disse oppgavene.

3.5 Gjennomføring og datainnsamling

3.5.1 Prøveintervju

Det ble gjort et prøveintervju før gjennomføringen av intervjuene. Dette ble gjort med hensikt i å velge ut hvilke oppgaver som skulle gis og hvilket nivå de skulle ha. Prøveintervjuet ble også gjennomført for å forberede forskeren på sin rolle som intervjuer og bli tryggere på sitasjonen. Prøveintervjuet gjorde forskeren mer bevisst og forberedt på intervjusituasjonen. Det deltok to elever på prøveintervjuet. Disse elevene var fra en annen skole enn der intervjuene skulle gjennomføres. Elevene hadde matematikkfaget T1 som er samme faget som elevene som ble intervjuet. En medstudent av forskeren jobbet som mentor for disse elevene, og ga uttrykk for at de to elevene var faglig sterke i matematikk. Dette gjorde at de hadde tilsvarende kompetanse som de elevene som skulle intervjues.

Elevene ble observert når de løste oppgavene, og det ble tatt notater underveis. Når elevene hadde fått tid på å løse oppgavene ble det gjennomført en felles gjennomgang av svarene og fremgangsmåten til elevene. Nivået på oppgavene og elevenes interesse for oppgaven ble diskutert. Elevene prøvde seg på ni oppgaver. Disse oppgavene var valgt ut på forhånd. Oppgavene var valgt ut fordi de virket interessante og relevante for videre intervju. På grunn av tiden fikk elevene bare prøvd seg på åtte av ni oppgaver. Elevene hadde ikke lært om trigonometri, og de hadde derfor ikke nok kunnskap til å løse én av oppgavene.

Ut fra observasjoner og samtale med elevene under oppgaveløsningen ble det kommet fram til at noen av oppgavene måtte forkastes og noen av oppgavene måtte endres. Noen av oppgavene trengte en mer utfyllende oppgavetekst. Gjennom å ha prøvd ut oppgavene på forhånd fikk man en bedre forståelse for hvilke oppgaver som kunne være passende. Det ble på grunnlag av dette prøveintervjuet valgt fire oppgaver som skulle brukes til intervjuene.

3.5.2 Rekruttering

Det ble tatt kontakt med en aktuell skole via mail. De henviste videre til en lærer av faget T1 ved skolen. Gjennom mail ble det avtalt at læreren skulle velge ut faglig sterke elever i matematikk i klassen. Siden læreren ikke hadde satt noen terminkarakter på elevene, ble det enighet om at utvalget skulle bestå av de elevene læreren mente var faglig sterke i matematikk.

Det ble deretter avtalt et møte mellom forskeren og disse elevene. Her ble det fortalt om hensikten ved intervjuet og hvordan det skulle gjennomføres. Alle de åtte elevene som deltok på dette møtet var interesserte i å delta videre i studien. Det ble så avtalt tidspunkt for intervjuene. Under møtet med elevene ble det forklart at deltagelse i studien var frivillig og at de kunne trekke seg når som helst. Det ble også forklart at elevene var anonyme og at de ikke ville bli gjenkjente i oppgaven.

3.5.3 Gjennomføring av intervju

Intervjuet foregikk på et grupperom på skolen til elevene som deltok i studien. Elevene kunne da avtale intervju i fritimene og rett etter skolen. Elevene avtalte tidene for intervju gjennom mail og SMS. Det ble dermed mer fleksibelt for elevene, og de gikk ikke glipp av noe undervisning. Elevene fikk en påminnelse på SMS i god tid før intervjuet, slik at de ble påminnet at de hadde en avtale. Ved å holde en skriftlig og kontinuerlig kontakt kan det ha vært enklere for eleven å ta kontakt ved spørsmål og endring av tidspunkt.

En omgang med intervju ble gjennomført rett før juleferie, og den neste omgangen ble gjennomført 7 uker etterpå. Det første intervjuet bestod av de to oppgavene uten kontekst, og det andre intervjuet bestod av oppgavene med kontekst. Etter det andre intervjuet ble det i tillegg gjennomført et intervju om elevenes forhold til matematikk og om oppgavene de hadde løst. Det ble valgt å ha tid mellom det første og andre oppgavebaserte intervjuet. Dette var slik at elevene ikke skulle sammenlikne oppgavene, og dermed se bort fra de første oppgavene når de løste oppgavene i det andre intervjuet.

Intervjuet startet med å repetere noe av det som ble sagt under rekrutteringsmøtet. Det ble blant annet repetert at intervjuene var frivillige og anonyme. Elevene fikk beskjed om at de ikke skulle gi oppgavene til de andre som skulle delta, da dette kunne påvirke studien negativt. Det ble gjennom denne samtalen prøvd å bygge en trygg atmosfære for elevene slik at de ikke skulle bli stresset av situasjonen. Det ble deretter gitt instruksjon om hva elevene skulle gjøre under intervjuet. Denne instruksen ble gitt med bakgrunn i det Ericsson og Simon (1993) anbefaler når man skal ha et oppgavebasert intervju. Ut fra deres instruks er det tatt ut enkelte deler som er blitt oversatt slik at det skulle passe til denne situasjonen:

«Fortell meg alt du tenker fra første gang du ser oppgaven til du gir svaret. Jeg vil at du skal tenke høyt hele tiden. Jeg vil ikke at du skal planlegge det du sier eller prøve å forklare meg hva du sier. Oppfør deg som om du var alene i rommet og snakket til deg selv. Det viktigste er at du fortsetter å snakke. Hvis du er stille for en lang tidsperiode kommer jeg til å be deg om å snakke mer.» (Ericsson & Simon, 1993, s.378)

Elevene fikk utdelt én oppgave om gangen, og det ble gjort lydopptak når elevene løste oppgavene. Elevene kunne bruke de hjelpemidlene de ønsket. Elevene fikk utdelt ark, og brukte sine egne skrivesaker og kalkulator, hvis det var behov for dette. Forskeren var stille så lenge som mulig under oppgaveløsningen. Hvis elevene løste oppgaven og snakket høyt, var forskeren stille og fulgte med. Noen av elevene hadde et større behov for bekreftelse under oppgaveløsningen, og på grunn av dette ble det gitt bekreftelse når elevene stilte spørsmål eller ga spørrende blikk. Bekreftelsen til elevene var i form av nikk, smil eller et svar. Denne bekreftelsen ble også brukt for å gi positiv tilbakemelding slik at elevene skulle fortsette med sin oppgaveløsning. Goldin (1997) skriver at rette og gale svar skal gi lik reaksjon av intervjuer.

Hvis det var usikkerhet om hvordan elevene løste oppgaven, ble det stilt spørsmål etter oppgaveløsningen. Det var stor variasjon i hvor lang tid intervjuene tok. Elevene brukte mellom 2-20 minutter på hver oppgave. Etter at oppgaveløsningen var slutt ble lydopptakeren stoppet.

Den siste delen av intervjuet med elevene bestod av et intervju om elevenes erfaringer med matematikk og om oppgavene eleven hadde løst. Det ble her brukt en intervjuguide (se vedlegg 1)

3.6 Prosedyre for analyse

…	Pause på ca. tre sekunder
(…)	Lengre pause
[…]	Samtidig tale
{}	Uklart
…	Handling

Figur 3.5: Transkripsjonsnøkkel

Lydopptakene var av god kvalitet som gjorde det mulig å få gode transkripsjoner av intervjuene. Det ble brukt en transkripsjonsnøkkel (Se figur 3.5) for å gjøre transkripsjonene bedre og få med flere detaljer som var viktige utenom det som ble sagt. Elevenes notater ble også inkludert i datamaterialet. Analysen av datamaterialet var en kvalitativ innholdsanalyse. Hsieh og Shannon (2005) definerer denne kvalitative analysen som en subjektiv tolkning av data i form av tekst. Denne tolkningen skjer gjennom en systematisk klassifisering hvor tema eller sammenhenger blir identifisert. I denne analysen ble det brukt en direkte innholdsanalyse som går ut på å validere eller utvide et rammeverk eller en teori (Hsieh & Shannon, 2005). I første del av analysen ble dataene kategorisert med

Lithners (2008) rammeverk om kreativ og imitativ resonnering. Først ble resonnementene identifisert ved å bruke Lithners (2008) resonneringsstruktur på fire steg. Deretter ble resonnementene klassifisert ut fra Lithners (2008) rammeverk om de var kreative eller imitative. Det ble da sett på om resonneringen var nyskapende, fleksibel og argumenterende hvis resonneringen var kreativ. Hvis resonneringen var imitativ var den basert på tidligere erfaringer og strategien til elevene var å huske en løsningsalgoritme. Dette er beskrevet i Lithners (2008) rammeverk i kapittel 2.4.

3.7 Validitet og reliabilitet

«Validitet i samfunnsvitenskapene dreier seg om hvorvidt en metode er egnet til å undersøke det den skal undersøke.» (Kvale & Brinkmann, 2009, s.250). Denne masteroppgaven har en problemstilling hvor det er fokus på hvordan elevene løser matematikkproblemer. For å få en innsikt i hvordan elevene løser oppgaver er det valgt en egnet datainnsamlingsmetode. Reliabilitet er hvor pålitelig forskningsresultatene er. Om de er pålitelige har med resultatenes konsistens og troverdighet å gjøre (Kvale & Brinkmann, 2009). Videre i dette delkapittelet blir det sett på ulike deler av studien som kan påvirke studiens reliabilitet og validitet. Her blir det sagt noe om hva som er gjort for å minske denne påvirkningen.

3.7.1 Reproduksjon av studien

Dersom resultatene er pålitelige og gyldige, gjenstår å spørre om det er generaliserbart (Kvale & Brinkmann, 2009). Utvalget i denne studien er lite og lar seg ikke generalisere for alle elever. Det vi kan si er at resultatene *kan* gjelde for flere elever. Som man kan se i kapittel 3.3 var det ønskelig med 6-12 elever for å få et komplett og stabilt resultat. At utvalget ikke er representativt kan være en trussel mot validiteten, men det trenger ikke nødvendigvis å være slik. Dette diskuteres det videre for.

Kvale og Brinkmann (2009) skriver at *«vi må imidlertid spørre, ikke om intervjuresultater kan generaliseres globalt, men om den kunnskapen som produseres i en spesifikk intervjusituasjon, kan overføres til andre relevante situasjoner.»* (Kvale og Brinkmann, 2009, s.265). Forfatterne skisserer en form for generaliserbarhet kalt «analytisk generalisering». Her legges det vekt på om funnene kan brukes for å si noe om hva som kommer til å skje i en annen situasjon. Forskeren må her gi rike og spesifikke beskrivelser, og også argumentere for resultatenes generaliserbarhet. Ved at forskeren har gitt rike beskrivelser og argumentert godt vil leseren på grunnlag av dette vurdere om resultatene kan generaliseres til en ny situasjon. På denne måten kan man sammenligne denne situasjonen med den nye, og deretter analysere likheter og forskjeller (Kvale & Brinkmann, 2009).

Goldin (1997) peker på at det viktigste er ikke de slutningene man gjør ut fra de oppgavebaserte intervjuene og om disse slutningene er pålitelige, men heller hva som gjør at man kommer frem til disse slutningene. Det vil si hvilke resultater man får fra intervjuene. Dette vil gjøre at forskere i større grad kan reprodusere intervjuet og sammenligne resultater. For at andre forskere skal kunne reprodusere intervjuet er det ønskelig med en detaljert beskrivelse av intervjuene. Å reprodusere intervjuene vil her si å utføre samme intervjuet på nytt med andre elever. Det er også et mål å ha stor fleksibilitet i oppgavebasert intervju slik at forskeren kan få frem den store variasjonen av resultater som er mulig. Dette er nødvendig for at oppgaveløsningen skal være spontan, og at eleven ikke skal ledes i én retning i oppgaveløsningen.

Ut fra Goldin (1997) og Kvale og Brinkmann (2009) kan man derfor si at det viktigste vil derfor ikke være om utvalget er representativ og om studien er generaliserbar, men heller om studien kan reproduseres. I denne studien er det lagt vekt på å beskrive metoden og valgene som er gjort i detalj slik at kravet om rike beskrivelser skal være oppfylt. Alle oppgavene som er brukt er vist i oppgaven, og kan derfor brukes til andre intervju. Det er også lagt vekt på å beskrive resultatene fra elevenes intervju i stor grad og ta med direkte sitat fra intervjuene, slik at man i ettertid kan sammenligne med denne studien. Intervjuene ble transkribert fullstendig, og det ble også notert om elevene gjorde en handling eller var stille under problemløsningen. På denne måten ble ikke noe materiale mistet fra tale til tekst. I tillegg er det valgt å knytte prosedyrene av analysen opp mot et teoretisk rammeverk slik at analysen i større grad kan reproduseres. At utvalget ikke er representativt vil derfor ikke være en trussel mot studiens pålitelighet og resultatenes gyldighet.

3.7.2 Forskerens rolle i intervjuet

En mulig trussel mot studiets pålitelighet er rollen som intervjuer og forsker. Cohen, Manion og Morrison (2007) skriver at man kan få bedre validitet ved å minimisere den subjektive påvirkningen fra forsker så mye som mulig. De skriver blant annet at bias kommer fra holdninger og forkunnskaper hos intervjuer, at intervjuer søker etter de svarene som ønskes og misforståelser mellom intervjuer og respondent.

For å minske at holdninger og forkunnskapene hos forsker påvirket intervjuet ble det utarbeidet en intervjuguide i samråd med veileder. Ved at veileder hjalp til med intervjuguiden ble sjansen for påvirkning fra forsker minsket. Kvale og Brinkmann (2009) skriver at ledende spørsmål kan påvirke svarene under intervjuet. Cohen et al. (2007) viser til Silverman (1993) som sier at et man kan kontrollere reliabiliteten ved å strukturere intervjuet i større grad. Man kan ha samme spørsmål til hver respondent. Kvale og Brinkmann (2009) mener derimot at det ikke må være et for sterkt fokus på at intervjuet skal være objektiv og ha høy reliabilitet, da dette kan virke negativt på kreativ tenkning og variasjon. Ved å la elevene ha fri problemløsning med minst mulig spørsmål eller kommentarer fra forsker vil resultatene være pålitelig. I det andre intervjuet ble det satt opp spørsmål med mulige oppfølgingsspørsmål etter hva elevene kom til å svare. På denne måten kunne forsker stille oppfølgingsspørsmål som var nøye gjennomtenkt.

Under intervjuene vil elevene ha ulik grad av åpenhet og hvor mye de snakker i den frie problemløsningen. For å unngå at data ble tapt ble det oppfordret til mer høyt tenking hvis eleven ble stille over lengre tid. Goldin (1997) skriver at under den frie problemløsningen skal man minne på elevene om å snakke høyt. Noen av elevene trengte denne oppfordringen oftere enn andre. For å styrke datamaterialet ytterligere ble det valgt å ta med notatene til elevene i resultatene.

3.8 Forskningsetikk

Som forsker må man ta hensyn til de ulike etiske sidene ved forskningen. Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH, 2006) skriver at *«begrepet «forskningsetikk» viser til et mangfoldig sett av verdier, normer og institusjonelle ordninger som bidrar til å konstituere og regulere vitenskapelig virksomhet.»* (NESH, 2006, s.5). Videre i dette delkapitlet redegjøres det for de etiske utfordringene ved denne oppgaven.

Når en forsker skal gjennomføre et prosjekt der man innhenter personlige opplysninger, må dette meldes. Studien ble meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk

samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS som godkjente studien (se vedlegg 2). Studien innhenter ingen sensitiv informasjon om elevene. Samtykke ble gitt muntlig av elevene.
Før intervjuet ble det gitt informasjon om at dataene fra intervjuet skulle bli brukt som grunnlag for masteroppgaven. Elevene fikk beskjed om at det skulle studeres hvordan elever løser oppgaver. Det ble ikke forklart at man skulle se på forskjellen i hvordan elevene resonnerer i ulike oppgaver. Det ble heller ikke gitt informasjon om hva som skilte de ulike oppgavene. Dette var for at elevene ikke skulle tenke igjennom hvordan de resonnerer. På denne måten ville ikke datamaterialet bli påvirket av elevene. Det ble heller ikke fortalt i detalj hva som skulle studeres til læreren. Læreren kunne da fortalt det til eleven, eller endre undervisningen før intervjuet. Det ble valgt å utelate detaljer i informasjonen som ble gitt på forhånd, slik at datamaterialet ikke skulle påvirkes. Samtykket ble fortsatt vurdert som gyldig siden elevene fikk sann informasjon om hensikten med studien.

Elevene visste at de var anonyme i studien. Det ble brukt koder for hver elev slik at studien skulle være konfidensiell. Elevene fikk tildelt et nummer 1-4 i tillegg til kjønn, som blir brukt videre i oppgaven. Forskeren var den eneste som hadde tilgang til kodenøkkelen. Alle lydopptakene ble merket med kode slik at det ikke skulle kunne spores tilbake til elevene. I oppgaven blir det ikke gitt navn på skole eller by, da dette kan gi informasjon om hvilke elever som deltok i studien. Lydopptakene var bare tilgjengelig for forskeren, og ble slettet etter sensur av oppgaven

Som nevnt under kapittel 3.5.3 ble det gitt bekreftelse av intervjuer til elevene under intervjuet. Dette ble gjort for å gjøre intervjusituasjonen mer behagelig for elevene. Det ble brukt ord som «ja» under den frie problemløsningen. Dette kan ha gitt elevene en oppfattelse av at oppgaveløsningen deres var rett underveis i oppgaven når det noen ganger var feil. Det ble også vist et positivt kroppsspråk under intervjuet for at elevene skulle oppfattet situasjonen som positiv. Denne bekreftelsen kan ha påvirket elevene under den frie problemløsningen. Som siste spørsmål i intervjuet (se vedlegg 1) ble elevene spurt følgende: «Synes du at du har løst de fire oppgavene som du ville gjort om du hadde sittet alene, eller ble du på noen måte påvirket av situasjonen?» Noen av elevene sa de ble påvirket av situasjonen. De ble mer stresset og tenkte mer igjennom det de sa. Flere av elevene mente på tross av dette at de ikke hadde løst oppgaven på en annen måte. Noen av elevene sa at de hadde brukt lengre tid på oppgavene og gjort mindre «slurvefeil» om de hadde sittet alene.

4 Resultater og funn

Dette kapittelet tar for seg beskrivelse og tolkning av dataene fra de oppgavebaserte intervjuene. Analysen er gjort på bakgrunn av elevenes resonnement og om elevene har resonnert kreativt eller imitativt ut fra Lithners (2008) rammeverk som er beskrevet i kapittel 2. Her er oppgavene presentert hver for seg med observasjoner og tolkninger. Videre presenteres funn av mønstre fra sammenligning av tolkningene.

4.1 Oppgave 1

4.1.1 Observasjoner

Alle elevene startet oppgaveløsningen med å lese oppgaven. Gutt 4 valgte også å tegne figuren og han brukte lengre tid på å forstå oppgaven. Deretter valgte elevene å bruke Pytagoras' setning for å finne den ukjente siden i trekanten. Tre av elevene sa at trekanten var rettvinklet. Elevene hadde uttalelser som:

> *«Da vil jeg bruke Pytagoras.»*
>
> (Jente 4)

> *«A i andre pluss b i andre er lik c i andre. Og da vet vi, skal vi se ... Hvordan var det jeg gjorde det her»*
>
> (Jente 2).

> «*Ifra det jeg lærte på ungdomsskolen da så kan man bruke Pytagoras*»
>
> (Gutt 3)

Alle elevene husket formelen raskt. Gutt 3 valgte derimot å finne formelen i læreboka. Eleven bladde i boka, og fant formelen for Pytagoras' setning og et eksempel. Dette viser et utdrag fra transkripsjonen:

> «**leser i boka* ja, det blir som dette.*»
>
> (Gutt 3)

Elevene brukte så formelen til å regne ut den siste lengde på trekanten. Når elevene hadde begynt å regne hadde de uttalelser som:

«Også tenker jeg slik at jeg må gjøre flytte-bytte regelen.»

(Jente 1)

«Så må jeg flytte over da»

(Gutt 1)

Når elevene var ferdig med utregningene hadde alle kommet frem til det samme svaret som også var rett. Gutt 3 valgte å sjekke at svaret var riktig ved å bruke Pytagoras' setning igjen. Elevenes notater var veldig like og ett av notatene er vist i figur 4.1 nedenfor.

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$12^2 + x^2 = 13^2$$
$$144 + x^2 = 169$$
$$x^2 = 169 - 144$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$
$$x = 5$$

Figur 4.1: Notater fra oppgave 1 av jente 2

Etter at elevene var ferdig med oppgaveløsningen ble jente 2 spurt om hvordan hun kunne formelen. Hun svarte:

«*Jeg lærte den for ganske lenge siden på barneskolen så den husker jeg veldig godt*.»

(Jente 2)

Gutt 3 hadde sjekket formelen i boka under oppgaveløsningen. Etter intervjuet ble han spurt om han husket formelen eller om han måtte sjekke den. Eleven svarte:

«*Den husket jeg*.»

(Gutt 3)

4.1.2 Tolkning

Ut fra resultatene fra intervjuet kan man se at elevene hadde samme resonneringsstruktur når de løste oppgavene. Elevene startet med å lese og forstå oppgaven som tilsvarte steg 1 i resonneringen. Deretter valgte elevene strategi hvor de husket Pytagoras' setning som er steg 2 i resonneringsstrukturen. I resonneringssteg 3 løste elevene ligningen de hadde satt opp. Elevene brukte regler som «flytte-bytte regelen» som kan tyde på at elevene har lært seg en algoritme for hvordan de skal løse slike oppgaver. Ut fra elevenes uttalelser kan man se at dette er en type oppgave som elevene har gjort tidligere. Elevene avgir så sin konklusjon som er resonneringssteg 4. I tabell 4.1 er det satt opp en tabell for elevens resonnering i oppgave 1.

Tabell 4.1: Resonneringssteg i oppgave 1

Steg	*Analyse*
1	Leser oppgaven
2	Velger å bruke Pytagoras' setning
3	Regner ut
4	Avgir svar

Siden elevene startet med å si at de hadde lært om Pytagoras' setning på ungdomsskolen og flere måtte huske tilbake, er det tydelig at valget av strategi var basert på tidligere erfaringer. Elevene skal ha jobbet med Pytagoras' setning tidligere på ungdomsskolen ifølge læreplanen, så det var forventet at elevene hadde jobbet med dette tidligere. Videre kan man se at elevene har gjort slike oppgaver før, siden de ikke har noen problemer med å huske formelen eller å løse likningen. Flere av elevene ga uttrykk for at de brukte «flytte-bytte regelen» som kan tyde på at elevene har memorisert hvordan de skal løse likninger. Som nevnt i Lithners (2008) begrepsapparat kan det være slik at uansett om elevene har memorisert en løsning, så er det ikke sikkert at de har forstått den. At elevene uttaler at de bruker «flytte-bytte regelen» kan tyde på at de ikke har skjønt betydningen av likhetstegnet. Gutt 3 fant formelen i boka, men siden eleven sa at han husket formelen tyder dette på at han ikke hadde hatt behov for å sjekke i boka. Dette kan tyde på at elevene hadde et algoritmisk resonnement ut fra Lithners (2008) begrepsapparat.

Elevenes resonnement baserer seg på å huske en algoritme for hvordan man finner en side i en trekant. Utregningene til elevene og deres uttalelser støtter dette. Ut fra resultatene kan man se at alle elevene har en imitativ resonnering i oppgave 1. Resultatene viser også at denne imitative resonneringen er en algoritmisk resonnering (AR)

4.2 Oppgave 2

4.2.1 Observasjon

Alle elevene startet med å lese oppgaven. Deretter valgte elevene å undersøke følgen og finne sammenhengen mellom tallene. Elevene så et mønster med at det økte med to mellom hvert tall. Elevene uttalte i denne delen følgende:

> *«Nei jeg får bare gjøre sånn som jeg gjorde på ungdomsskolen. Det var det. Se om det var noe system her.»*
>
> (Gutt 3)

> *«5, 7, 11. Det er jo kanskje ikke helt på jordet hvis jeg tenker at du plusser på to for hvert tall.»*
>
> (Gutt 2)

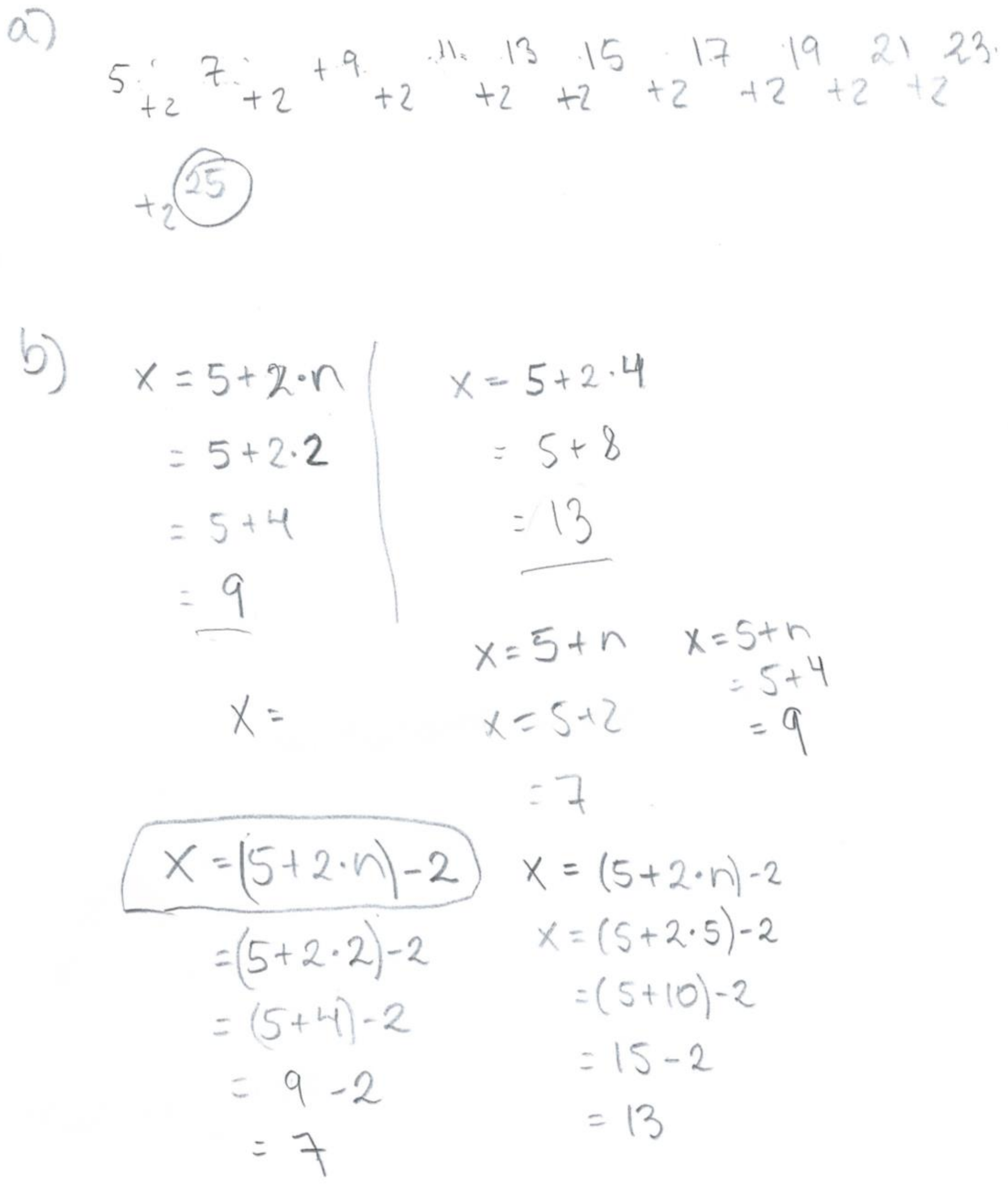
Jente 1, jente 3, jente 4, gutt 2 og gutt 4 valgte deretter å telle eller plusse på to for hvert ledd i følgen for å finne det 11.tallet i følgen. Jente 3 uttalte flere ganger at ligningen måtte starte med «fem +». Et eksempel på at hun hadde slike uttalelser er følgende:

> «Det blir … for her har vi jo det opprinnelige tallet fem pluss (…)»
>
> (Jente 3)

De kom så frem til et svar som var rett. Deretter gikk de over til å forstå hva det ble spurt om i siste del av oppgaven. Jente 1, jente 4, gutt 2 kom frem til flere formler som de prøvde ut og feilet. Jente 4 stilte flere spørsmål under intervjuet og trengte i større grad bekreftelse på oppgaveløsningen i forhold til de andre elevene. I oppgave 2 hadde jente 2 flere forslag til formler som hun spurte intervjuer om var riktig. Disse var ikke riktige, og intervjuer endte derfor opp med å guide eleven litt siden det ikke så ut til at hun kom frem til riktig svar etter lengre tid. Hun kom frem til riktig formel tilslutt, men tvilte på om det var riktig eller ikke. Jente 3 og gutt 4 kom frem til en formel som de testet ut og konkluderte at de hadde en riktig løsning. Jente 3 uttalte følgende når hun prøvde å finne en formel:

> *«Jeg vet jeg kan det her. Jeg har gjort det før, men jeg står litt fast»*
>
> (Jente 3)

Alle som valgte å finne formelen etter at de hadde funnet det 11.tallet kom frem til en rett eller en delvis rett løsning. Figur 4.2 viser notater fra jente 1.

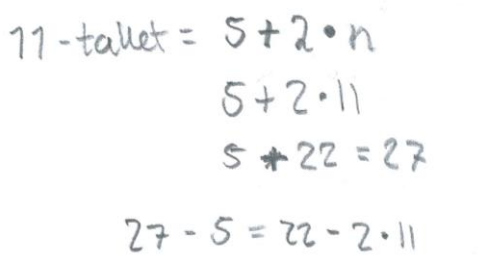


Figur 4.2: Notater fra oppgave 2 av jente 1

Jente 2, gutt 1 og gutt 3 talte seg ikke oppover slik de andre elevene, men valgte å finne formelen for følgen. Jente 2 kom frem til en formel og prøvde den ut med tall i følgen. Formelen var rett, men når hun skulle bruke formelen til å finne det 11.tallet i rekka så brukte hun formelen feil. På grunn av dette fikk hun derfor et feil svar. Hun sa følgende:

> *«Fordi hvis jeg da tar, skal vi se, 5 pluss 2 x. Så hvis jeg da tar for eksempel 3 og sjekker. *Skriver*. Så vil jeg da få 6, 7, 8, 9, 10, 11. Så det vil da være. Jeg tenker at fem er null. Så hvis jeg setter til 1 så vil jeg da få syv. Og setter to vil jeg få ni»*
>
> (Jente 2)

Gutt 1 og gutt 3 kom også frem til en formel, men de prøvde den ikke ut på noen av tallene i følgen slik de andre gjorde. Videre bruker de formelen de hadde kommet fram til for å regne ut det 11.tallet i følgen. Formelen deres var feil som ga feil svar på den første delen av oppgaven. Figur 4.3 viser utregningen gjort av gutt 3.



Figur 4.3: Notater fra oppgave 2 av gutt 3

4.2.2 Tolkning

Alle elevene starter med å lese oppgaven som tilsvarer resonneringssteg 1. I denne oppgaven er det ikke et klart skille mellom resonneringssteg 2 og 3 hos elevene. Resonneringssteg 3 består av at elevene valgte å finne en sammenheng mellom tallene i følgen. Elevens resonnering videre skjer i denne oppgaven på to ulike måter. Fem av elevene velger å først gjøre oppgave a) og deretter gå videre på å finne en formel (tabell 4.2). De andre tre elevene velger å først finne formelen og deretter bruke denne formelen til å regne ut svaret i a) (tabell 4.3). Dette gir ulike resonneringssteg. Som man kan se i tabell 4.2 velger disse elevene å telle seg oppover for å finne svaret på oppgave a). De avgir så svar, som tilsvarer steg 4, og går videre til å forstå neste deloppgave som tilsvarer steg 1. Elevene prøver deretter å finne en formel der noen av elevene kommer frem til flere formler som de prøver ut før de kommer frem til en riktig formel. Dette vil da tilsvare steg 3 i resonneringen. Alle elevene avgir så et svar og begrunnelse i steg 4.

Tabell 4.2: Resonneringssteg i oppgave 2 for jente 1, jente 3, jente 4, gutt 2 og gutt 4

Steg	*Analyse*
1a	Lese oppgaven
3a	Finner sammenhengen Teller seg opp
4a	Avgir svar Begrunner svaret
1b	Forstår spørsmålet
3b	Finner en formel Prøver formelen Ny formel Prøver formelen
4b	Avgir svar Begrunner svaret

Tabell 4.3: Resonneringssteg i oppgave 2 for jente 2, gutt 1 og gutt 3

Steg	*Analyse*
1a	Lese oppgaven
3a	Finner sammenhengen
1b	Forstår oppgaven
3b	Finner formel (Prøver formel – jente 2) Regner ut a) med formel
4a	Avgir svar Begrunner svar

Oppgave 2 var ny for jente 1, jente 2 og gutt 2. De måtte prøve flere formler før de kom frem til svaret, dette kan være en begrunnelse for hvorfor de ikke hadde en imitativ resonnering. Gutt 4 prøvde ikke ut flere formler, men utregningene tydet på at han hadde en kreativ resonnering. Jente 1, jente 2, gutt 2 og gutt 4 begrunnet hvorfor svaret var riktig og argumentene hadde støtte i matematikken. De brukte kunnskapen sin, men dette ga dem ikke et fullstendig svar eller algoritme som i MR og AR. Dette tyder derfor på at jente 1, jente 2, gutt 2 og gutt 4 hadde en kreativ resonnering

Ut fra uttalelsen til jente 3 som man kan se i resultatet har denne eleven gjort lignende oppgaver før, og prøver å bruke sine tidligere kunnskaper for å løse oppgaven. Gutt 3 uttalte også at han hadde gjort slike oppgaver tidligere, og velger strategien ut fra erfaring. Jente 3, gutt 1 og gutt 3 fokuserte på at det første tallet var fem, og mente derfor at ligningen må starte med «5 +». Dette kan gi inntrykk av at de har lært en algoritme for hvordan de skal løse slike problemer. Når de løser oppgaven gjør de dette ved hjelp av tidligere erfaringer og en algoritme for å løse slike oppgaver. Elevene har derfor et algoritmisk resonnement.

Jente 4 trengte i større grad bekreftelse, og dette kunne vært på grunn av at hun var usikker eller nervøs. Siden eleven stilte spørsmål og ikke kom frem til et svar endte det med at intervjuer guidet eleven i noe grad. Dette viser at eleven ikke hadde en kreativ resonnering, men heller en imitativ resonnering. Eleven kunne ikke løse oppgaven, og ville derfor støtte seg på hjelp med løse oppgaven fra intervjuer. De strategivalgene som var veldig utfordrende for eleven ble dermed gjort av intervjuer. Det at eleven tvilte på om svaret sitt var rett i slutten av oppgaven kan bekrefte at eleven ikke verifiserte sitt svar siden hun ikke visste om det var riktig eller ikke.

Ut fra klassifiseringen av oppgave 1 kan man se at fire av elevene hadde et imitativt resonnement og fire av elevene hadde et kreativt resonnement.

4.3 Oppgave 3

4.3.1 Observasjoner

Elevene startet med å lese oppgaven. Elevene brukte tid på å forstå oppgaven og tegne i notatene sine. Gutt 3 uttalte i starten av oppgaveløsningen:

*«Yes (…) det her er jo Pytagoras de er ute etter. Ja jeg må kladde. Da tegner jeg det først for det er jo greit å se da. *skriver mens han snakker* For det {} 9 meter høy. Også knakk. Nå tegner jeg det litt stort. Det knakk da. Sånn. Også er bakken sånn. Også er det … 3 meter … også va, det var ni meter. Ja. (…) det her va faktisk helt lik en oppgave som var på en sånn øvingstentamen, men det er en stund siden da. Jeg vet omkretsen for det blir jo 9 pluss tre som er 12. men om det hjelper … skal være 9 meter (…)»*

(Gutt 3)

Når de hadde forstått problemet kom de frem til at de måtte bruke Pytagoras' setning. Jente 3 vurderte en annen strategi før hun kom frem til at hun skulle matematisere teksten. Hun løste oppgaven som et likningssett ved å ha to ukjente sider x og y. Dette viser utdraget fra intervjuet hennes nedenfor:

*«Jeg har gjort dette før. (…) da må vi kalle det x og y så to ukjente sider. Så vet vi at x pluss y er lik 9. *skriver mens hun snakker* skriver at x pluss y er lik 9 … ja … også er 3 i andre pluss x i andre er lik y i andre. Mhm. Også må vi gjøre litt om på denne her. *skriver* {} så må vi gjøre om så vi får y er lik så blir det litt mer oversiktlig. Så kan vi ta. *skriver mens hun snakker* Y er lik 9 minus x. da må vi putte det inn i denne her formelen. Så vi får tre i andre som er 9. pluss … x i andre er lik 9 minus x i andre … ja da tror jeg at jeg må bare regne det ut.»*

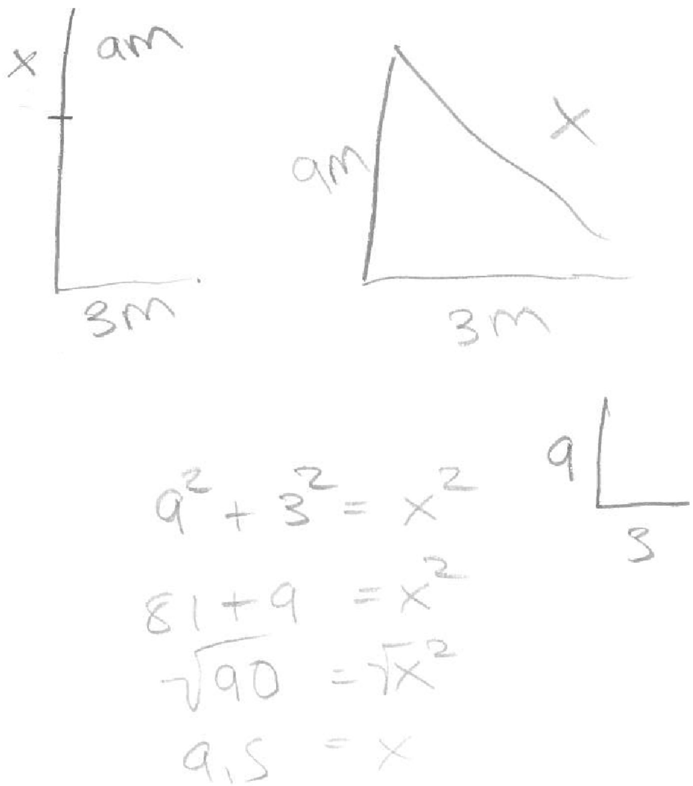
(Jente 3)

Elevene matematiserte så teksten og fikk en ligning de skulle løse. Denne resonneringen ble gjort av alle utenom gutt 2 som vi kommer tilbake til. Jente 1 utalte følgende når hun matematiserte oppgaven:

*«Jeg husker at vi har gjort en liknende oppgave før på ungdomsskolen. Men jeg kan ikke huske hvordan vi finner det ut. Eh … *skriver* (…) skal vi se (…) *skriver* ja sånn gjorde vi det ja.»*

(Jente 1)

Elevene matematiserte problemet forskjellig. Jente 2 og gutt 1 matematiserte oppgaven feil. Dette kan man se i figur 4.4.

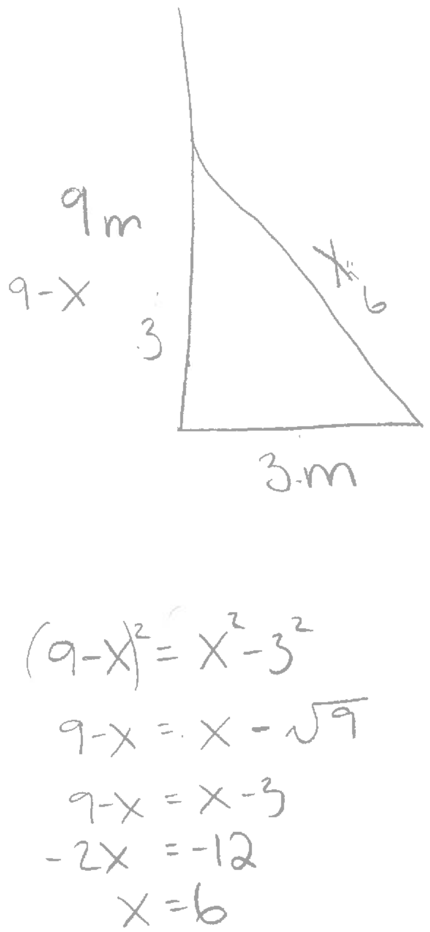


Figur 4.4: Notater fra oppgave 3 av jente 2

Gutt 3 forklarte hva han tenkte som man kan se i utdraget nedenfor:

> *«Hvis jeg finner ut hvor lang en av de sidene er så kan jeg jo. Eller hvis jeg finner ut hvor lang siden den er for eksempel så tar jeg jo 9 meter minus den siden. Så har jeg lengden av den siden hvor bruddet skjedde her. Og for å regne ut den siden, det er jo hypotenusen. Da må jeg noe sånn, den er jo tre meter og den her å jo være noe, den er jo ni meter. Minus x ja (...)»*
>
> (Gutt 3)

Elevene løste så likningen. Jente 4 hadde rett likning, men feil i sine utregninger. Hun løste opp parentesen feil. I figur 4.5 nedenfor kan man se dette.



Figur 4.5: Notater fra oppgave 3 av jente 4

Utdraget fra transkripsjonen nedenfor viser hva jente 4 sier når hun regner ut likningen hun har satt opp.

> *«Jente 4: (…) *skriver**
> *Intervjuer: hva tenker du at du må gjøre nå?*
> *Jente 4: hvis jeg skal bruke den Pytagoras læresetning så blir det vel den siden er lik den minus den. Men jeg vet ikke helt om det er den jeg skal bruke eller ikke. (…) skriver skal bare prøve å regne det ut å se hva jeg finner ut. *skriver* det kan ikke bli rett. Nå står jeg igjen med 0 x.*
> *Intervjuer: tok du kvadratrota av begge sider her?*
> *Jente 4: ja, men da hvis jeg flytter den over dit så sitter jeg igjen med. Nei det gjør jeg ikke. {}»*
>
> (Jente 4)

Jente 1 brukte kort tid på utregningene og uttalte følgende da hun regnet ut likningen hun hadde satt opp:

> *«At den hær den minste, den er *skriver mens hun snakker*. Den her den blir 9 meter minus x tror jeg (…) *skriver* pluss *skriver* da blir det 181. Minus x blir x og minus. *Skriver* hm. Jo også flytter man x-en på en side. *Skriver* så skal jeg regne det ut. At den brekker 4 meter opp.»*
>
> (Jente 1)

Elevene kom så frem til et svar. Jente 3 ga følgende svar:

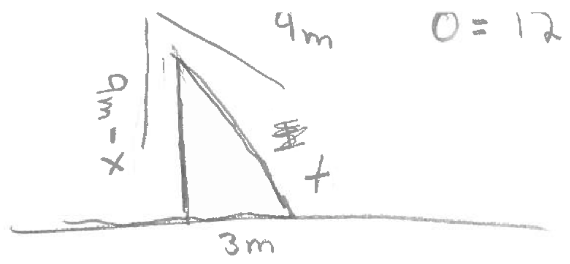
> *«X er lik fem. Altså blir da den ene hypotenusen. X blir da fem også. Altså den knekker fem meter opp på stokken.»*
>
> (Jente 3)

Dette betyr at jente 3 glemte at hun regnet ut hypotenusen og ikke den ene kateten. Gutt 1 konkluderte med at hans svar var feil, og begynte sin resonnering på nytt. Han brukte lang tid på å forstå oppgaven og matematisere på nytt. Deretter regnet han ut og fikk et nytt svar. Han konkluderte med at også dette var feil, og kom ikke videre i oppgaveløsningen. Jente 2 kom også frem til et svar som hun konkluderte var feil. Gutt 3 og gutt 4 sjekket at svaret de hadde fått var riktig. Gutt 4 valgte å sjekke at svaret riktig med å bruke Pytagoras' setning:

> *«Hvis vi sjekker med Pytagoras setning. Så må det være fem i andre er lik tre i andre pluss 4 i andre. Som er 25 er lik 9 pluss 16. og da er 25 er lik 25.»*
>
> (Gutt 4)

Gutt 3 kom tidlig i resonneringen frem til at omkretsen av trekanten måtte være 12 meter. Dette brukte han for å sjekke at svaret hans var riktig. Uttalelsen nedenfor og figur 4.6 viser dette:

> *«Da er den fem meter og den er 4 meter og den er tre meter. Og da er det 7 pluss 5 som er 12 så det kan jo stemme.»*
>
> (Gutt 3)



$$\text{Katet}_1^2 + \text{katet}_2^2 = \text{Hypotenus}^2$$

$$3m^2 + (9m - x)^2 = x^2$$

$$9 + 81 - 18x + x^2 = x^2$$

$$-18x = -90$$

$$18x = 90$$

$$x = 5$$

$$9 - 5 = 4$$

Figur 4.6: Notater fra oppgave 3 av gutt 3

Gutt 2 løste oppgaven forskjellig fra de andre eleven. Han startet også i likhet med de andre å forstå og tegne problemet. Han sa videre at:

> *«Da tipper jeg at vi har en pytagoreisk trekant. Og (…) hvis jeg vet at det er en pytagoreisk trippel som er 3 meter, 4 meter og 5 meter. Så hvis vi sier at den brekker av på fire meter. Så vil jeg si at det er fem meter igjen. Og den er fem meter. Vi kan teste det med å sette inn i formelen med a i andre pluss b i andre er lik c i andre. *skriver mens han snakker* Og a er 3 i andre, b er fire i andre og c er da 5 i andre. Da får du ni pluss 16 er lik 25. og ni pluss 16 er da 25. 25 er lik 25. så da vil det da si at den knakk 4 meter opp i lufta.»*
>
> (Gutt 2)

Han så hvilke lengder som var mulige og sjekket om det var rett ved å bruke Pytagoras' setning.

4.3.2 Tolkning

I oppgave 3 starter elevene med å lese og forstå oppgaven. De velger deretter å tegne problemet i notatene sine. Dette tilsvarer steg 1 i resonneringen da de leser, analyserer og utforsker problemet. Deretter velger alle elevene utenom gutt 2 strategi i form av å bruke Pytagoras' setning. Dette valget av strategi tilsvarer resonneringssteg 2. Elevene går så over til å matematiserer problemet ved hjelp av tegningen sin som også tilsvarer steg 2 da elevene planlegger hvordan de skal løse oppgaven. Elevene løser så likningen og regner ut svaret sitt som er steg 3 i resonneringen. Deretter avgir de et svar i steg 4. Gutt 3 og gutt 4 valgte å kontrollere svaret i steg 4. Resonneringsstegene til elevene er vist i tabell 4.4.

Tabell 4.4: Resonneringssteg i oppgave 3 av alle elevene utenom gutt 2

Steg	*Analyse*
1	Lese oppgaven Forstår oppgaven Tegner
2	Velger å bruke Pytagoras' setning Matematiserer
3	Regner ut
4	Avgir svar (Kontrollerte svar – gutt 3 og gutt 4)

Gutt 2 hadde en ulik resonnering enn de andre elevene. Han hadde lik resonneringssteg 1. Deretter kom han frem til et svar ved å huske at det finnes en pytagoreisk trippel som passet til trekanten. Han bruker dette i steg 3. Deretter avgir han svar og kontrollerer svaret i steg 4. Tabell 4.5 viser resonneringsstegene hos gutt 2.

Tabell 4.5: Resonneringssteg i oppgave 3 av gutt 2

Steg	*Analyse*
1	Leser oppgaven Forstår oppgaven Tegner
3	Husker Pytagoreisk trippel
4	Avgir svar Kontrollerer svaret

Jente 1 uttalte tydelig at hun hadde gjort en lignende oppgave før og at hun husket hvordan hun hadde gjort det. Regningen videre var enkel for eleven og hun kom frem til riktig svar. Det er tydelig at dette kan være et AR.

Jente 2 og gutt 1 matematiserer begge oppgaven feil. I figur 4.4 kan man se at jente 2 ikke tar hensyn til at stokken brekker. Det kan være slik at elevene går ut ifra algoritmen de har brukt tidligere der de setter tall rett inn i formelen som oppgave 1. Hvis elevene bruker denne algoritmen og ikke ser at dette ikke passer til denne oppgaven får de feil svar. Elevene prøver å huske tilbake til tidligere algoritmer og bruke dette. Dette resonnementet fører da til feil matematisering siden hun ikke har noen algoritme for denne oppgaven. Gutt 1 prøver på nytt etter at han har løst oppgaven på samme måte som jente 2, men han kom ikke videre. Ut fra tolkingene kan man si at elevene bruker et AR.

Som vi kan se fra sitatene fra jente 3 velger hun å løse oppgaven ved å sette opp to likninger, og dermed løse disse som et likningssett med innsettingsmetoden. Før hun velger å bruke denne metoden vurderer hun en annen strategi som hun forkaster, siden den ikke kan brukes på denne oppgaven. Hun uttaler at hun har gjort slike oppgaver før, men siden hun ikke er helt usikker, bruker lengre tid og har pauser når hun gjennomfører oppgaven kan dette tyde på at hun må gjenskape en glemt resonnering. Utregningene viser at eleven har en regnefeil i slutten av resonneringen som fører til at hun får ta x er lik 5, men den skal være lik 4. Dette er en slurvefeil som eleven gjør. Denne strategien for å løse oppgaven er uvanlig blant de åtte elevene og ikke nødvendigvis enklere. Eleven velger en strategi på bakgrunn av argumenter og det er støtte i matematikken. Dette kan tolkes som at eleven har en kreativ resonnering.

Jente 4 matematiserer riktig. Når hun skal løse oppgaven derimot gjør hun feil. Når eleven kommer frem til at x er lik 6 konkluderer hun at dette er rett. Elevens gjennomføring av strategien som i utgangspunktet var rett feiler. Hun argumenterer ikke hvorfor hennes svar er rett, og hennes utregninger har ikke støtte i indre matematiske egenskaper. Dette er derfor ikke en kreativ resonnering. Hennes oppgaveløsning er mer et algoritmisk resonnement. Dette er fordi eleven tydelig har gjort slike oppgaver før, og hun regner uten å tenke igjennom om det er riktig. Det vil derfor være et imitativt resonnement.

Gutt 2 velger en annen strategi enn de andre elevene. Han husker at en av de pytagoreiske triplene er 3, 4 og 5. Han sjekker at dette stemmer med å bruke Pytagoras' setning. Siden han husker denne tripletten og sjekker at det stemmer, kan man se at han argumenterer for strategien og gjennomføringen for den. Han har tydeligvis vært borti denne pytagoreiske tripletten før, men gjenskaper den i denne oppgaven. Dette tyder på at han har en kreativ resonnering.

Gutt 3 og gutt 4 matematiserer begge rett og kommer frem til en ligning de løser som gjør at de kommer frem til rett svar. Hos begge elevene tyder det på at de oppfyller punkt en om kreativ resonnering. Gutt 3 sier at han har vært borti en tidligere oppgave før, men at det var en stund siden. Ut fra hans resonnering videre kan det tolkes som han må gjenskape strategien og ikke husker hva han har gjort tidligere. Gutt 4 viser ingenting som tyder på at han prøver å huske en tidligere algoritme. Begge elevene argumenterer for hvordan de løser oppgaven, og de verifiserer at svaret er riktig i steg 4 i resonneringen. Gutt 3 sjekker at omkretsen som skal være 12 stemmer med de tallene han har regnet ut. Gutt 4 setter tallene inn i Pytagoras' setning for å sjekke at de stemmer. Begge elevenes resonnering kan tolkes som en kreativ resonnering.

Resultatene viser at fire av elevene hadde en kreativ resonnering og fire av elevene hadde en imitativ resonnering.

4.4 Oppgave 4

4.4.1 Observasjoner

Elevene startet med å lese oppgaven og forstå. Deretter prøvde de å se et system i etasjene i pyramiden. Ved å se systemet kom de fram til hvor mange klosser den sjette etasjen hadde. Elevene begrunnet svaret. Jente 2 og gutt 2 forklarte på følgende måte:

> *«Først øker den med 1 så er det to klosser nede så er det tre så er det fire. Også blir det 5 og 6. så den nederste vil da være. Skal vi se … jeg gjette 36. fordi. Ja fordi at det blir da skal vi se. 9 på tre etasjer også på fire blir det 1, 2, 3, 4, gangen 4 som blir 16. så blir det 25 også 36 egentlig ja»*
>
> (Jente 2)

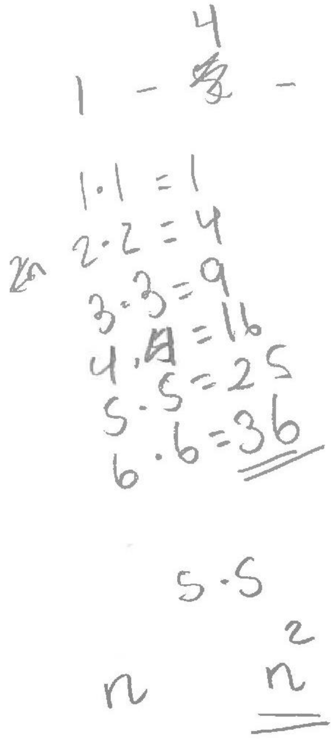
> *«Da ser det ut som at for hver etasje så blir det en mer blokke på sidene. På hver av sidene. At det er en hvis det er en etasje pyramide og det er to ganger to på en toetasjes og tre ganger tre på en treetasjes pyramide. Og en med 6 etasjer vil da ha 6 ganger 6 blokker i grunnflaten som vil si at det er 36 blokker og den første etasjen der er den nederste etasjen tenker jeg.»*
>
> (Gutt 2)

Elevene gikk så over til å forstå andre del av oppgaven. Elevene hadde allerede da sett systemet og prøvde å finne en formel. Elevene ga svar som dette:

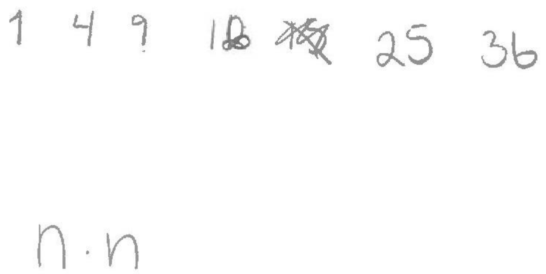
> *«Jente 2: Hva er formelen for å finne antall klosser i den første etasjen. Altså den nederste etasjen?*
> *Intervjuer: ja*
> *Jente 2: ok skal vi se. Det vil vel være arealet, side ganger side.»*
>
> (Jente 2)

> *«Ok hvis vi skal bygge en pyramide med n etasjer hva er formelen for å finne antall klosser på den første etasjen. Begrunn hvorfor. Ja det blir n i andre.»*
>
> (Jente 3)

Figur 4.7 og figur 4.8 nedenfor viser notatene til to av elevene.



Figur 4.7: Notater fra oppgave 4 av jente 1



Figur 4.8: Notater fra oppgave 4 av jente 4

Gutt 4 brukte lengre tid enn de andre på å forstå oppgaven. Han stilte flere spørsmål til intervjuer for å forstå oppgaven. Stegene i hans resonnering var lik de andre elevene, men han kommer frem til et ulikt svar på den første delen av oppgaven. Dette kan vi se i utdraget nedenfor. Han kom frem til systemet og ga et delvis riktig svar på andre del av oppgaven.

> *«Eksempel hvis denne er har det samme etasje 3. ok og her hvis antallet skal bli 9 {} og antall etasjer er tre. Så da har vi kvadratrota for ni. Så tre. Tre det antall etasjer {}. *skriver mens han snakker*. (…) antall klosser. Antall etasjer … antall etasjer {} … ok så svaret er hvis antall etasjer er n. n er lik antall etasjer (…) formelen er antall klosser er lik kvadratrota av n»*
>
> (Gutt 4)

4.4.2 Tolkning

Elevene startet med å lese og forstå oppgaven som tilsvarer resonneringssteg 1. Deretter prøvde de å finne sammenhengen og brukte denne sammenhengen til å finne antall klosser i den sjette etasjen. Dette tilsvarer steg 3 i resonneringen. Deretter gikk de over på andre del av oppgaven. De går da tilbake til å forstå hva de skal svar på denne delen og dermed resonneringssteg 1. De ga deretter svar på denne delen av oppgaven og begrunnet svaret som tilsvarer steg 4.

Tabell 4.6: Resonneringssteg i oppgave 4

Steg	*Analyse*
1	Leser oppgaven Forstår oppgaven
3	Finner sammenhengen
4	Avgir svar Begrunner svaret
1	Forstår oppgaven
4	Avgir svar Begrunner svar

Alle elevene utenom gutt 4 løser denne oppgaven tilnærmet likt. Som sett ovenfor har alle elevene lik resonneringsstruktur. Ut fra elevenes uttalelser kan man tolke det som at akkurat denne oppgaven er ny for elevene. Dette gjør at de oppfyller den første av betingelsene for at det skal være kreativ resonnering. Elevenes argumenter er også riktige i forhold til svaret de gir. Elevenes svar er riktig og de begrunner matematisk hvorfor der er slik. Ut fra elevenes uttalelser tolkes deres resonnement som et kreativt resonnement. Gutt 4 gir feil svar i første del av oppgaven

4.5 Kreative og imitative resonnement

I tabell 4.7 nedenfor kan man se hvilke elever som hadde en kreativ eller imitativ resonnering i de ulike oppgavene.

Tabell 4.7: Oversikt over de elevenes ulike resonneringene i oppgavene.

	Jente 1	**Jente 2**	**Jente 3**	**Jente 4**	**Gutt 1**	**Gutt 2**	**Gutt 3**	**Gutt 4**
Oppgave 1	Imitativ	Imitativ	Imitativ	Imitativ	Imitativ	Imitativ	Imitativ	Imitativ
Oppgave 2	Kreativ	Kreativ	Imitativ	Imitativ	Imitativ	Kreativ	Imitativ	Kreativ
Oppgave 3	Imitativ	Imitativ	Kreativ	Imitativ	Imitativ	Kreativ	Kreativ	Kreativ
Oppgave 4	Kreativ	Kreativ	Kreativ	Kreativ	Kreativ	Kreativ	Kreativ	Kreativ

Hvis vi ser på antall elever som resonnerer kreativt og imitativt i de ulike oppgavene kan vi se at flere resonnerte kreativ på oppgaver med kontekst. Ingen av elevene resonnerte kreativt på oppgave 1, mens 4 av elevene resonnerte kreativt på oppgave 3. Begge disse oppgavene omhandlet Pytagoras’ setning. Forskjellen i disse oppgavene var at oppgave 1 var uten kontekst og oppgave 3 var med kontekst. I oppgave 2 kan vi se at halvparten av elevene resonnerte kreativt, og alle elevene resonnerte kreativt i oppgave 4. Så vi ser at det er flere av elevene som resonnerer kreativt i oppgave 1 i motsetning til oppgave 3, og det er flere som resonnerer kreativt i oppgave 2 sammenlignet med oppgave 4.

4.5.1 Resonnement i oppgavene

Oppgave 1 er utelukkende imitativ for elevene. Dette kan komme av at elevene har løst slike oppgaver før. Denne oppgaven er vanlig i lærebøkene for matematikk på ungdomstrinnet. Som nevnt i kapittel 3.4 krever denne oppgaven en del kunnskap som definisjoner og rutineprosedyrer. Dette kan være noe som bidrar til at elevene løser oppgaven ut fra en algoritme de har lært tidligere. Siden oppgaven og kunnskapene som kreves for å løse oppgaven er kjent vil det være naturlig at løsningene til elevene bygger på tidligere erfaringer. Ut fra sammendraget fra intervjuet av elevene kan man se at oppgave 1 var den enkleste oppgaven. Lithner (2008) skriver at i mange av skoleoppgavene der elevene må utføre utregninger er det mer hensiktsmessig å følge en algoritme. Alle elevene kommer frem til riktig svar som tyder på at dette er den mest hensiktsmessige måten å løse denne oppgaven på.

I intervjuet etter at elevene hadde løst oppgaver ble de spurt om hvor vanskelig de ulike oppgavene var. Alle elevenes svarte at oppgave 1 var den enkleste oppgaven slik som sitatene nedenfor viser. Jente 3 uttaler at Pytagoras' setning var kjent.

> *Det gikk greit, det va gjerne det med Pytagoras det har jeg jobbet med mye før det var kjent. Den her var jo litt. *peker på oppgave 3* Men det er jo fordi jeg ikke har jobbet med sånne oppgaver før. Ja det var en ukjent formel da så da blir det litt vanskeligere. Men det gikk jo greit. Det tok jo litt tid da […]*
>
> (Jente 3)

> *«Den er kanskje den letteste *peker på oppgave 1*. De to det er nesten det samme metode. Samme metode men her med bare tall men her med virkelighet. Så hvordan du kan bygge opp. Så da blir det vanskeligere»*
>
> (Gutt 4)

Siden oppgaven var enkel for elevene og de har jobbet med slike oppgaver før, er det mest hensiktsmessig for elevene å løse oppgaven med et algoritmisk resonnement. Det vil imidlertid ikke si at elevene ikke har en forståelse av hvordan de løser oppgaven.

I oppgave 2 resonnerte halvparten av elevene kreativt og halvparten resonnerte imitativt. I denne oppgaven hadde elevene ulik resonneringssteg. De som valgte å finne formelen først og deretter bruke denne direkte for å finne svaret på første del av oppgavene var ikke de elevene som enten var imitative eller kreative. Det at elevene hadde to ulike resonneringsstrukturer har derfor ingen sammenheng med om de resonnerte kreativt eller imitativt. Tre av elevene som resonnerte imitativt i denne oppgaven hadde en resonnering som tydet på at de hadde lært en algoritme for hvordan løse slike problemer. Det kan tenkes at de har lært en algoritme hvor de først skal finne hvilket tall oppgaven starter med, og deretter se på mønsteret videre og hvor mye hvert steg i følgen øker i verdi. Dette er en algoritme forskeren selv har lært på ungdomsskolen som ble tydelig kjent igjen. Det kan være slik at noen av de som resonnerte kreativt også hadde vært borti denne fremgangsmåten eller algoritmen for å løse slike oppgaver, men de ga ingen uttalelser som tydet på dette, og det kan derfor tenkes at de måtte gjenskape denne. Denne oppgaven krever at elevene må kunne sette opp en formel for følgen, men dette er noe som elever på dette nivået ikke skal ha store problemer med ut fra hva de skal ha lært tidligere i forhold til at de går på VG1.

Det var like mange kreative og imitative resonneringer i oppgave 3 som oppgave 2. Det var imidlertid ikke de samme elevene som resonnerte kreativt og imitativt. Elevene sa i intervjuet at de syntes denne oppgaven var vanskeligst som sitatet nedenfor illustrerer:

> *«Dem va jo og litt sånn der at man måtte tenke litt. Jeg vil si at den var vanskelig *peker på oppgave 3*. Stokken var vanskeligst og trekanten og pyramiden var ok og følgen var litt vanskelig.»*
>
> (Gutt 1)

Forskjellen på oppgave 3 og oppgave 1 er at elevene må matematisere teksten slik at de kunne løse oppgaven. Denne oppgaven krevde at elevene hadde bedre kompetanse i å matematisere, men også å løse likninger. Dette kan være en av grunnene til at elevene gjorde feil i sine utregninger, og fikk feil svar. Det kan tenkes at det er resonneringssteg 1 og 2 som bidrar til at elevene får en kreativ resonnering. Dette er siden steg 3 i resonneringen i oppgave 1 og 3 er likt. I begge oppgavene må elevene regne ut en likning, men av mulig vanskelighetsgrad. De elevene som matematiserer feil ser ut til å ikke forstå oppgaven, og prøver å løse oppgaven ved å bruke tidligere erfaringer med liknende oppgaver som ikke fungerer på denne oppgaven. Jente 1 hadde vært borti oppgaven før, og det så ut til at hun løste den på bakgrunn av at hun husket hvordan hun gjorde det sist gang. Gutt 2 hadde ikke nødvendigvis løst samme oppgave før, men han husket de pytagoreiske triplene, og valgte å bruke dette for å løse oppgaven.

I oppgave 4 løser alle elevene oppgaven med kreativ resonnering. Sitatet nedenfor viser at elevene syntes oppgave 4 var enklere enn oppgave 2

> *«Intervjuer: ja hva med den pyramiden i forhold til den følgen?*
> *Jente 3: ja ikke sant her var det jo liksom fordi det er en tekstoppgave *peker på oppgave 4* så må man tenk mer.*
> *Intervjuer: men synes du den var vanskeligere enn den?*
> *Jente 3: eh når jeg skjønte når du spurte om så syns jeg nesten den *peker på oppgave 4* var lettere.»*
>
> (Jente 3)

En betingelsene for kreativ resonnering gjelder for oppgaver som ikke nødvendigvis er utfordrende for elevene (Lithner, 2008). Tolkningene av oppgaven viser at denne oppgaven var ny for elevene. Elevenes resonneringer hadde utgangspunkt i konteksten, og deres uttalelser handlet om etasjer, pyramider og klosser. Dette tyder på at de tok utgangspunkt i konteksten og matematiserte ikke oppgaven før de løste den slik som i oppgave 3 som vi skal komme tilbake til. Denne oppgaven krever ikke mye av den kunnskapen Schoenfeld (1992) definerer som «the knowledge inventory». Det kan tenkes at dette kan være noe som bidrar til at elevene ser på denne oppgaven som mer «hverdagslig» og lite skolematematisk.

4.5.2 Oppgavene med kontekst sammenlignet med oppgavene uten kontekst

Det som skiller oppgave 1 og 3 fra hverandre er at elevene må bruke mer tid på å forstå oppgaven, tegne og senere matematiserer teksten siden det er en oppgave med kontekst hvor det ikke er en figur. Man kan se forskjellen på resonneringsstegene i tabell 4.1 og tabell 4.4. Her ser vi at steg 1 og 3 er de stegene som i størst grad er forskjellige. Det kan tenkes at det som skiller disse oppgavene er også det som bidrar til at noen av elevene tenker kreativt. Det er flere elever som har en kreativ resonnering i oppgave 3 i forhold til oppgave 1.

Oppgave 1 var kjent for elevene og de sa i intervjuet at de syntes oppgave 1 var enklere enn oppgave 3 som vist tidligere. Siden de syntes oppgave 1 var enklere kan dette tyde på at de hadde jobbet med denne tidligere. Dette sier de også under oppgaveløsningen som sitatene viser. Som nevnt tidligere kan det være slik at det er mest hensiktsmessig for elevene å løse oppgaven med en kjent algoritme i oppgave 1. Noen av elevene hadde vært borti oppgave 3 tidligere, men ikke i like stor grad som i oppgave 1. Det vil si at siden elevene er kjent med oppgave 1 vil ikke elevene vært kreative i sin resonnering. I oppgave 3 kan man se at det er noen av elevene som har jobbet med denne oppgaven før, og at de prøver å huske algoritmen. Noen av elevene må gjenskape den siden de ikke husker hvordan. Som nevnt tidligere gjør elevene her feil i sine utregninger sammenlignet med oppgave 1 hvor alle har rett svar. Dette kan tyde på at denne krever mer matematisk kompetanse. Figur 4.5 viser at jente 4 mangler forståelse av hvordan man regner med potenser og parenteser i likninger. Dette er en forståelse som kreves i større grad i oppgave 3, enn i oppgave 1 siden det i oppgaven ikke er nødvendig å løse opp parenteser.

Hvis man ser på matematisk kompetanse definert av Kilpatrick et al. (2001) er denne kunnskapen en forståelse av operasjoner og sammenhenger som kalles konseptuell forståelse (conceptual understanding). Jente 2 og gutt 2 matematiserer oppgaven feil. Dette kan tyde på at de i denne oppgaven ikke kan representere og løse problemet som defineres som den strategiske kompetansen (strategic competence). For å kunne komme frem til representasjonen av dette problemet må elevene kunne tenke logisk og reflektere slik at de kan komme frem til en matematisering. Denne kunnskapen hvor elevene må tenke logisk og reflektere er Kilpatrick et al. (2001) sitt begrep adaptiv resonnering (adaptive reasoning).

Oppgave 2 var kjent for noen av elevene. Dette kan ha påvirket hvordan elevene løste oppgavene som man kan se på tolkningene av oppgavene som nevnt tidligere hvor flere av elevene prøvde å løse oppgavene på samme måte ved at det første tallet i følgen også skulle være det første tallet i formelen. Dette kan tyde på at de har lært samme algoritme for hvordan man løser slike oppgaver tidligere. Oppgave 4 var derimot ny for elevene og alle elevene løste oppgaven kreativt. Siden det er flere som resonnerer kreativt i oppgave 4 sammenlignet med oppgave 2 kan det tyde på at når oppgaven var ny for elevene bidrar dette til at flere løser oppgaven kreativt.

Når elevene løser oppgave 4 ser det ut til at deres resonnering handler om konteksten som kan tyde på at de ser på oppgaven som mer realistisk enn oppgave 2. Dette siden de ikke har en kontekst og da bare snakker om tall. Det kan være slik at konteksten her bidrar til at elevene ikke ser på oppgaven som skolematematikk. Forskerens egne erfaringer i skolen er at slike oppgaver noen ganger blir brukt som «mattenøtter». Dette skjer når lærerne skal gjøre matematikk mer gøy, eller rett før ferie når man er ferdig med å gå gjennom kompetansemålene og er ferdige med tentamen og eksamen. Hvis det er slik at disse elevene også har slik erfaring med denne typen oppgaver med kontekst som ikke krever «the knowledge inventory» kan det være slik at elevene ikke ser på dette som ren matematikk, men heller som en oppgaver der de må tenke logisk. Siden elevene ikke ser på oppgaven som skolematematikk kan det gjøre at elevene løser oppgaven mer kreativt.

I intervjuet ble elevene spurt om de så noen sammenheng mellom de ulike oppgavene. Jente 3 så sammenhengen mellom kontekst/ikke-kontekst. Alle elevene utenom jente 3 svarte at de så at oppgavene omhandlet samme matematisk ide. Disse elevene klarte å se sammenhengen om kontekst/ikke-kontekst når intervjuer påpekte det.

> *«Jente 3: sånn her at de går på det samme bare at denne er tekstoppgave og den er ikke det.*
> *Intervjuer: ser du at disse også er med og uten tekst?*
> *Jente 3: ja»*
>
> (Jente 3)

Hvis man sammenligner forskjellen i oppgavene med kontekst og oppgavene uten kontekst kan man se at det som er likhetene er om elevene har jobbet med oppgavene tidligere og er kjent for elevene. Hvis elevene ikke har jobbet med en slik oppgave tidligere er har de en mer kreativ resonnering. Det vi også kan se at når elevene løser oppgavene med kontekst bruker de i starten av oppgave 3 og i hele oppgave 4 resonnering som omhandler konteksten. De løser oppgaven ut fra konteksten som er gitt. Siden det er flere som resonnerer kreativt på oppgavene med kontekst enn de uten, kan det at de ser oppgaven ut fra konteksten være noe som bidrar til at elevene løser oppgaven kreativt forutsatt at oppgaven er ny for elevene.

4.5.3 Oppgavene om Pytagoras' setning sammenlignet med oppgavene om følger

Når man sammenligner oppgave 3 og 4 kan man se at det ikke kreves noen matematisering av konteksten i oppgave 4, mens i oppgave 3 må elevene matematisere. Flere av elevene hadde en kreativ resonnering i oppgave 4 sammenlignet med oppgave 3. Det kan være slik siden elevene i oppgave 3 matematiserer og deretter løser oppgaven videre som om det var en oppgave uten kontekst. Da kan det være slik at når elevene må matematiserer og deretter løser oppgaven som om det var en oppgave uten kontekst videre, vil dette gjøre at flere elever løser oppgaven imitativt.

Oppgave 1 og 3 krever at elevene har kunnskap som går under «the inventory knowledge», mens i oppgave 4 kreves det ingen slik kunnskap. Elevene må i oppgave 1 og 3 ha kunnskap om Pytagoras' setning og hvordan de løser likning som går under inventory knowledge. Å løse oppgaver med Pytagoras' setning skal være kjent fra ungdomsskole og kan gjøre at elevene bruker kjente algoritmer for å løse oppgavene. Oppgave 2 og 4 kan i større grad være ukjent for elevene da det ikke er sikkert de har løst slike oppgaver på ungdomsskolen som man kan se fra kompetansemålene som er fra barneskolen. Det er ingen kompetansemål som omhandler følger på ungdomsskolen som kan være en av grunnene til at følger er i større grad ukjent for elevene i forhold til Pytagoras' setning som de har jobbet med mer nylig. Det kan være at elevene har jobbet med følger på ungdomsskolen, men da kanskje som «mattenøtt».

4.5.4 Imitative og kreative elever

Tabell 4.7 viser at det er variasjon i hvem som resonnerer imitativt og kreativt. Vi kan se at gutt 2 og gutt 4 er de som har flest kreative resonneringer. Når elevene ble spurt om de foretrakk å jobbe med problemer med eller uten kontekst svarte disse to elevene i likhet med jente 2 at de foretrakk å jobbe med kontekstoppgaver som sitatet nedenfor illustrerer:

> *«Gutt 4: jeg liker best de to i virkeligheten.*
> *Intervjuer: hvorfor?*
> *Gutt 4: fordi du skal bruke matematikk i virkeligheten ikke bare med tall. Du skal også vite hva som er konsekvenser hvis du bruker feil tall eller hvis du ikke løser eksakt»*
>
> (Gutt 4)

> *«Nei kanskje helst sånn konkret ting, om praktiske ting. Det er sånn p-matte og finne sånne ting. Men t-matte er sånn teoretisk hvor du skal løse ting som du egentlig aldri for bruk til i et praktisk liv. Du får sikkert bruk for det som ingeniør og noe sånt men hvis du tenker en praktisk jobb så trenger du ikke finne nullpunktet.»*
>
> (Gutt 2)

Uttalelse fra gutt 2 ovenfor viser at han helst liker å jobbe med praktiske konkrete ting og gutt 4 foretrekker virkelighetsproblemer fordi matematikk er ikke bare tall. Dette kan tolkes som at eleven liker oppgaver som gir en mening for dem. Når et problem har en kontekst vil de foretrekke disse oppgavene siden de gir mer mening for elevene.

Ut fra tabell 4.7 kan vi se at jente 4 og gutt 1 var i stor grad imitative i sine resonneringer med unntak av oppgave 4. Uttalelsene nedenfor viser at når eleven fikk spørsmål om hvilke oppgaver de foretrakk så valgte de oppgavene uten kontekst:

«Jente 4: de her to med Pytagoras. De synes jeg er veldig grei. Fordi du har en formel å forholde deg til og du må bare plassere tallene rett. Mens på den andre må du komme fram til en formel.
Intervjuer: så det er vanskeligere når du må komme fram til noe nytt.
Jente 4: ja jeg synes i hvert fall det. Hvis det er tekstoppgaver så må du sette opp en formel selv. I en tekst oppgave må du sette opp en ligning. Da må du tenke mer og prøve deg mer frem.
Intervjuer: Hvilke typer matematikkoppgaver foretrekker du å arbeide med?
Jente 4: jeg liker egentlig matte generelt. Sånn de fleste oppgavene. Jeg synes ligninger er veldig greit, men ikke når det er sånn tekstoppgave. Fordi da må man vite hva som skal stå på hver side av likhetstegnet. Det blir vanskeligere og flere ukjente.»

(Jente 4)

«Intervjuer: hva foretrekker du av oppgaver som er uten og med tekst?
Jente 4: de her, fordi jeg synes det er lettere. Her står spørsmålet veldig enkelt. Det er lettere å komme fram til synes jeg»

(Jente 4)

«Gutt 1: jeg foretrekker den. Den var grei å løse også fikk jeg liksom rimelig med informasjon.
Intervjuer: den var også enklest?
Gutt 1: ja
Intervjuer: hvorfor foretrekker du ikke for eksempel stokken?
Gutt 1: Den tok lang tid. Den var litt vanskelig. Så klart foretrekker jeg de letteste oppgavene
Intervjuer: hva med den i forhold til denne?
Gutt 1: Pyramiden. Den var litt lettere å forstå siden du kan se den for deg liksom.
Intervjuer: Hvilke typer matematikkoppgaver foretrekker du å arbeide med?
Gutt 1: egentlig sånn liksom regnestykke der man bare har x i andre også pluss fire så skal man komme fram til. Jeg er ikke så glad i grafer eller når man bruker passer og tegner trekanter. Jeg liker likninger for da er det sånne oppgaver som. Jeg er ikke så glad i tekst oppgaver. Jeg liker der regnestykker der man bare husker regler å gjøre ut.

Intervjuer: hvorfor liker du de oppgavene og ikke tekstoppgavene?
Gutt 1: fordi at det er litt lettere å vite at du har rett. På tekstoppgavene må du finne på regnestykket selv også plutselig gjør noe feil også blir den helt. Ja ødelagt.»

(Gutt 1)

Utdragene fra intervjuene viser at disse to elevene foretrekker enkle oppgaver som er uten kontekst. Dette kan tyde på at dette er elever som ofte resonnerer imitativt.

Elevene ble spurt om når de syntes de lykkes med matematikken. Jente 2, jente 3, jente 4, gutt 1 og gutt 3 svarte alle at de føler at de har lyktes med matematikken når de klarer å løse en utfordrende oppgave som de har brukt lang tid på. Eksempel på at elevene mente dette kan man se i sitatene nedenfor:

«Jente 2: Når jeg lykkes? Det er sikkert når jeg får til ting om jeg vanligvis ikke får til. Når jeg løser oppgaven og ser på fasiten og ser at det er rett liksom at man har skjønt det
Intervjuer: gjelder det alle oppgavene?
Jente 2: mer litt sånn vanskelige store oppgaver sannsynligvis ja»

(Jente 2)

«Hvis man får noe til som er vanskelig. Ja da er kanskje de tekstoppgavene da jeg virkelig føler at jeg får mestringsfølelse da. Hvis det er lange store tekstoppgaver og man klarer å sette alt i sammenheng og skjønne hva som er svaret.»

(Jente 3)

«Når jeg får til vanskelige oppgaver. Når jeg har sittet lenge. Og hvis jeg sitter en god stund med en oppgave og får den til også er det rett. Da føler jeg at jeg har lyktes.»

(Gutt 1)

Gutt 2 sa som sitatet nedenfor viser at han lyktes i matematikk hele tiden noe som kan tyde på at han jobber på et noe lavere nivå enn det som er hensiktsmessig for han.

«Jeg får til matte som regel hele tiden. Jeg tar det ganske kjapt når jeg lærer nye ting. Hvis jeg skulle fått nytt på prøve sånn her er formel og bruk den. Det hjelper jo å ha mengde trening så du får formelen i fingertuppene og vet hvordan du skal bruk den og når du får minus under rottegnet så er den ikke løselig hvis du driver med andregradsligninger og sånt»

(Gutt 2)

Dette viser at de fleste av elevene trenger en utfordring for å føle at de har lyktes. Elevene har derfor behov for vanskelige og utfordrende oppgaver når de skal arbeide med matematikken.

5 Diskusjon

I denne delen skal funnene og teorien skal diskuteres.

Ut fra resultatene kan man se at alle elevene hadde en imitativ resonnering når de løste oppgave 1 som omhandlet en trekant, hvor de skulle finne lengden på en ukjent side ved å bruke Pytagoras' setning. I oppgave 2 resonnerte fire av åtte elever kreativt. Oppgaven var en følge hvor elevene måtte se sammenhengen og finne en formel for følgen. Halvparten av elevene resonnerte kreativt når de løste oppgave 3. Oppgave 3 omhandlet samme matematisk ide som oppgave 1, men hadde en kontekst. Alle elevene løste oppgave 4 med en kreativ resonnering. Denne oppgaven hadde en kontekst om en pyramide og hadde samme matematisk ide som oppgave 2.

Når oppgaven var kjent for elevene resonnerte de i større grad imitativt. En av Lithners (2008) betingelser for kreativ resonnering er at resonneringen må være nyskapende eller at en glemt resonnering gjenskapes. Oppgave 1 var kjent av elevene og de syntes den var den enkleste av de fire oppgavene. Dette gjør at elevenes resonnering er imitativt siden den bygger på tidligere erfaringer. Oppgave 4 var ny for elevene og resonneringene deres var kreative. Kompetansemålene som tilsvarer de ulike oppgavene viser at elevene nylig skal ha jobbet med oppgaver som omhandler Pytagoras' setning. Følger derimot er ikke inkludert i kompetansemålene i ungdomsskolen, men er noe inkludert i barneskolen. Man kan se at flest elever var kreative i oppgavene som omhandlet følger sammenlignet med oppgaver som omhandlet Pytagoras' setning. Dette kan tyde på at når oppgaven er ukjent for eleven vil det bidra til at elevene resonnerer kreativt.

Resonneringssteg 1 og 2 er forskjellig i oppgave 1 og oppgave 3. Det resultatene viser er at resonneringssteg 1 og 2 består i større grad av at elevene forstår, tegner og matematiserer i oppgave 3. Det kan tenkes at det er disse resonneringene som bidrar til at elevene har et kreativt resonnement. Blöte et al. (2000) kom frem til at elevenes vurdering av strategier var mer fleksible når de løste problemer med kontekst, sammenlignet med problemer uten kontekst. Et av kriteriene for kreativt resonnement er at elevene skal ha en fleksibel resonnering (Lithner, 2008). Dette vil si at det å løse en oppgave med kontekst vil gjøre eleven mer fleksibel, og dermed kan kontekst på oppgavene bidra til at elevenes resonnement er kreativt. De elevene som argumenterte for at deres matematisering var korrekt, var også de som hadde en korrekt matematisering og løste oppgaven riktig. Flere av de elevene som ikke kom frem til riktig løsning matematiserte feil, og det kan da tenkes at de ikke var like fleksible i sine strategier i forhold til de som matematiserte korrekt. Som nevnt i resultatene ser det ut til at disse elevene prøvde å løse oppgave 3 på samme måte som de har gjort tidligere i oppgave 1. For å løse oppgave 3 kreves en annen strategi enn i oppgave 1. Derfor kan dette ha vært grunnen til at elevene ikke klarte å løse oppgaven. Siden elevene prøver å løse oppgavene ut fra tidligere erfaringer i stedet for å prøve en ny strategi, er elevene mindre fleksible og har et imitativt resonnement når de løser oppgave 3.

De Bock et al. (2003) og Boaler (1994) viser til dårligere resultater på oppgaver med kontekst, sammenlignet med oppgaver uten kontekst. Boaler (1994) argumenterer for at jentene blir for engasjert i oppgavene om mote, i forhold til oppgaver om for eksempel fotball, og får derfor dårligere prestasjoner. Jentene tar hensyn til variabler som ikke er viktige for oppgaven, men som kunne hatt en rolle i virkeligheten. De Bock et al. (2003) begrunner også at elevene kan ha fått dårligere resultater på grunn av elevenes engasjement i konteksten. I denne oppgaven er det ikke valgt å gå inn på elevenes prestasjoner, men i større grad hvordan de resonnerer. Dermed kan det tenkes at til tross for de dårlige prestasjonene så kan elevene ha vært mer kreative når de løste oppgavene som de ble testet i av De Bock et al. (2003) og Boaler (1994).

I resultatdelen vises det til sitater hvor noen av elevene sa at oppgaver med kontekst var vanskeligere enn oppgaver uten kontekst. To av elevene som resonnerte i hovedsak imitativt uttalte også at de foretrakk oppgaver uten kontekst. Eleven sa at de foretrekker disse fordi de er lettere å løse. Som nevnt tidligere måtte elevene i større grad lese, forstå og tolke oppgave 3 som er med kontekst. Det kan tenkes at en av grunnene til at elevene syntes oppgaver uten kontekst er enklere siden de her ikke trenger å forstå, tolke og så videre som i oppgaver uten kontekst. Flere av elevene uttalte i tillegg at for at de skal ha en følelse av at de lykkes med matematikken må de arbeide med utfordrende oppgaver som de klarer å løse tilslutt. Så det kan tenkes at hvis konteksten gjør at oppgaven blir vanskeligere for elevene så er dette også noe av det elevene ønsker å jobbe med. Det er derimot viktig å skille på hvilke oppgaver elever ønsker å jobbe med i timen for å lære nytt stoff og hvilke oppgaver de ønsker å få på prøver og så videre. Det kan tenkes at elevene ikke ønsker vanskelige og utfordrende oppgaver på prøver siden de da skal prestere bra.

De Bock et al. (2003) skriver at en av grunnene til at elevene presterer dårligere på oppgavene med kontekst er at elevene mister forståelse for hva de ble testet for, og de matematiske reglene og resonneringer som vanligvis er kjent for eleven da glemmes. Dette kan ha gjort at elevene presterte dårligere på oppgaver med kontekst sammenligner med oppgaver uten kontekst. I oppgave 3 var det noen av elevene som ikke klarte å løse likninger og parenteser med potenser på en korrekt måte. Dette kan komme av samme grunn til at elevene i studien til De Bock et al. (2003) får dårligere prestasjoner. Elevene kan her også «miste forståelse», altså prosedyreferdighetene (prosedural fluency) og den konseptuelle forståelsen (conceptual understanding) som vanligvis er kjent for dem. Hvis det er slik at elevene blir for engasjert i oppgavene og derfor glemmer sine ferdigheter i matematikk, så kan dette komme av at elevene ikke ser på oppgaven som skolematematikk og ikke kobler oppgaven til lignende oppgaver de har jobbet med tidligere i matematikktimene. Så kan tenkes at elevene resonnerer mer kreativt i oppgave 4 siden de ikke ser på oppgaven som skolematematikk.

6 Oppsummering

I dette kapittelet vil det bli gitt en oppsummering av oppgaven. Videre vil noen refleksjoner bli tatt opp og deretter vil en konklusjon presenteres.

6.1 Oppsummering

Det ble valgt å ha følgende problemstilling i denne oppgaven: «Hvordan resonnerer faglig sterke elever når de løser problemer med og uten kontekst i matematikk?». Det ble gjennomført en kvalitativ studie for å undersøke elevenes resonnement. Den kvalitative studien var oppgavebaserte intervjuer med åtte elever ved VG1 Studiespesialiserende. Elevene løste til sammen fire oppgaver i to intervju.

Det ble gjort en analyse av resultatene fra intervjuene. Resultatene ble analysert med utgangspunkt i Lithners (2008) rammeverk for kreativ og imitativ resonnering. Videre ble funnene fra analysen av de ulike oppgavene sammenlignet for å se på hvordan elevene løste oppgaver med og uten kontekst.

Resultatene viser at det var flere elever som resonnerte kreativt på oppgaver med kontekst sammenlignet med oppgaver uten kontekst. I diskusjonen ble det sett på at oppgaver som er kjent for elevene kan bidra til at elevene i større grad resonnerer imitativt. Det var flere som resonnerte kreativt i oppgave 3 (kontekst) sammenlignet med oppgave 1 (ikke kontekst). Forskjellen i resonneringen var at de i stor grad måtte tegne, forstå og matematiserte i resonneringssteg 1 og 2. Dette kan tyde på at dette bidrar til at flere elever resonnerer kreativt. Tidligere forskning (De Bock et al, 2003) diskuterer at elevene glemmer sine kunnskaper når de får oppgaver med kontekst. Dette kan komme av at elevene ser på oppgaven som noe annet enn skolematematikk. Når elevene gjør oppgaver som ikke kobles til klasserommet kan dette være noe som bidrar til at elevene i større grad resonnerer kreativt. Dette fordi de ikke klarer å koble oppgavene til det de tidligere har jobbet med i undervisning. Blöte et al. (2000) kom frem til at elevene var mer fleksible i deres vurdering av strategier når de løste oppgaver med kontekst. Et av kriteriene for kreativ resonnering er at elevene skal ha et fleksibelt resonnement (Lithner, 2008). Dette kan tyde oppgaver med kontekst vil bidra til elevene i større grad har en kreativ resonnering.

6.2 Veien videre og refleksjoner

I denne masteroppgaven har jeg gjennomført en kvalitativ metode for å undersøke hvordan elevene resonnerer når de løser oppgaver med og uten kontekst. Denne masteroppgaven gir ikke grunnlag for å si noe generelt om hvordan faglig sterke elever på VG1 resonnerer, da utvalget ikke er representativt. Som nevnt i kapittel 3.7 er det viktigste her at leseren kan sammenligne med nye situasjoner og se på forskjeller og likheter.

Tiden har vært en begrensende faktor for denne studien, og hvis det hadde vært bedre tid ville det blitt sett grundigere på de kreative og imitative resonnementene til elevene. Det ville blitt gjort en dypere analyse og gjerne hatt et større antall oppgaver i de oppgavebaserte intervjuene. Slik kunne man ha undersøkt nærmere hvilke typer kreative og imitative resonnement elevene har og i større grad hvorfor, enn det er gjort i denne oppgaven.

I innledningen ble det skrevet om det tradisjonelle perspektivet på problemløsning, og at problemer fra virkeligheten nedprioriteres i skolen. Ut fra funnene og teorien i denne studien kan det tenkes at slike problemer med kontekst og også modellering er noe som ikke burde nedprioriteres, men at det kan sees på som blant annet et middel for å lære nye kunnskaper. For at elevene ikke bare skal følge prosedyrer og herme etter eksempler, men også forstå matematikken, så mener jeg det er viktig med en variasjon av oppgaver hvor oppgaver med kontekst burde ha en minst like viktig rolle som å lære prosedyreferdigheter. Jeg mener at kontekstproblemer og modelleringsperspektivet burde få en større rolle i matematikkundervisningen.

6.1 Konklusjon

Når en oppgave er kjent for eleven vil dette være en faktor som vil bidra til at elevens resonnement er kreativt. Når elevene løser en oppgave med kontekst vil de i større grad forstå, tegne og matematisere som en del av deres resonnement. Denne delen av resonnementet kan bidra til at elevene i større grad har et kreativt resonnement. Når elevene løser oppgaver med kontekst kan dette gjøre at de ikke ser sammenhengen til skolematematikk, og dette er noe som kan gjøre at elevene i større grad resonnerer kreativt. Oppgaver med kontekst gjør at elevene er mer fleksible i deres vurdering av strategier (Blöte et al., 2000), og hvis da oppgaven er ny for elevene og elevene har argumenter med matematisk grunnlag (Lithner, 2008), vil dette bidra til at elevene resonnerer kreativt.

Referanser

Bjørndal, C. (2002). *Det vurderende øyet.* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Blöte, A., Klein, A., & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and instruction, 10*(3), ss. 221-247.

Boaler, J. (1994). When do girls prefer football to fashion? An analysis of female underachievement in relation to 'realistic' mathematic contexts. *British educational journal, 20*(5), ss. 551-564.

Brekke, G. (1995). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.* Nasjonalt læremiddelsenter.

Busse, A. (2011). Upper secondary students' handling of real-world contexts. *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, ss. 37-46.

Caelli, K., Ray, L., & Mill, J. (2003). 'Clear as Mud': Toward Greater Clarity in Generic Qualitative Research. *International journal of qualitative methods, 2*(2), ss. 1-13.

Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work. I F. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematic* (Vol. 1, ss. 3-38).

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6. utg.).

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W., & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and instruction, 13*(4), ss. 441-463.

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH). (2006). Hentet april 05, 2015 fra Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi: https://www.etikkom.no/forskningsetiske-retningslinjer/Samfunnsvitenskap-jus-og-humaniora/

Ericsson, K., & Simon, H. (1993). *Protocol Analysis: Verbal Reports as Data.* Massachusetts Institute of Technology.

Goldin, G. (1997). Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 9*, ss. 40-62.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational studies in mathematics, 39*(1), ss. 111-129.

Guest, G., Bunce, A., & Johnson, L. (2006). How many interviews are enough? An experiment with data saturation and variability. *Field Methods, 18*(1), ss. 59-82.

Hsieh, H.-F., & Shannon, S. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative health research, 15*(9), ss. 1277-1288.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.* National Academies Press.

Koichu, B. (2014). Reflections on problem solving in mathematics and mathematics education. *Mathematics and mathematics education: searching for common ground*, ss. 113-135.

Kvale, S. (1997). *Det kvalitative forskningsintervju.* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2*, ss. 763-804.

Lithner, J. (2006). *A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning.* Department of Mathematics and Mathemical Statistics, Umeå universitet.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), ss. 255-276.

Matematikksenteret. (u.d.). Hentet 01 26, 2015 fra Problemløsningsoppgaver: http://www.matematikksenteret.no/content/264/Problemlosningsoppgaver

Niss, M., Jensen, T., Andersen, T., Andersen, R., Christoffersen, T., Damgaard, S., . . . Nissen, K. (2002). *Kompetencer og matematiklæring - Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark.* Undervisningsministeriet.

OECD. (2009). *PISA 2009. Assessment Framework. Key competencies in reading, mathematics and science.*

OECD. (2013). PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science. ss. 23-58.

Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American Mathematical Monthly*, ss. 252-255.

Ryen, A. (2002). *Det kvalitative intervjuet.* Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad og Bjørke AS.

Sandvold, K., Øgrim, S., Flakstad, H., Bakken, T., Pettersen, B., & Skrindo, K. (2006). *Sigma matematikk 1T studieforberedende.* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, ss. 334-370.

Star, J., & Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology, 31*(3), ss. 280-300.

Udir A. (u.d.). *Læreplan i matematikk fellesfag, etter 10.årssteg.* Hentet 04 16, 2015 fra Utdanningsdirektoratet: http://www.udir.no/kl06/MAT1-03/Kompetansemaal/?arst=98844765&kmsn=334280449

Udir B. (u.d.). *Læreplan i matematikk fellesfag, etter 4.årssteg*. Hentet 04 16, 2015 fra Utdanningsdirektoratet: http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Kompetansemaal/?arst=372029322&kmsn=1184103369

Udir C. (u.d.). *Læreplan i matematikk fellesfag, etter 7. årssteg*. Hentet 04 16, 2015 fra Utdanningsdirektoratet: http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Kompetansemaal/?arst=372029323&kmsn=-632498266

Vedlegg 1: Intervjuguide

1. Hvor vanskelig synes du de ulike oppgavene var? (Lett, middels eller vanskelig)
    - Hvor vanskelig var de i forhold til hverandre?

2. Ser du noen sammenheng mellom de ulike oppgavene?
    - Hvilken?

3. Hvilke typer matematikkoppgaver foretrekker du å arbeide med?
    - Foretrekker du oppgaver som ligner på tidligere oppgaver du har jobbet med eller nye oppgaver? Hvorfor?
    - Foretrekker du oppgaver med eller uten kontekst?
    - Løser du slike oppgaver likt eller forskjellig? På hvilken måte?

4. Når synes du at du lykkes med matematikk?
    - Hvorfor?
    - Når du jobber med oppgaver, hvilke oppgaver gjør at du lærer mest?

5. Hva synes du om dine egne matematikkferdigheter?
    - Påvirker det hvordan du løser matematikk oppgaver?

6. Synes du at du har løst de fire oppgavene som du ville gjort om du hadde sittet alene, eller ble du på noen måte påvirket av situasjonen?
    - På hvilken måte?

Vedlegg 2: Tilbakemelding fra NSD

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

NSD

Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel: +47-55 58 21 17
Fax: +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Per Øystein Haavold
Institutt for matematikk og statistikk UiT Norges arktiske universitet

9019 TROMSØ

Vår dato: 16.12.2014 Vår ref: 40688 / 3 / AGL Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 11.11.2014. Meldingen gjelder prosjektet:

40688	*Matematikkdidaktikk*
Behandlingsansvarlig	*UiT Norges arktiske universitet, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Per Øystein Haavold*
Student	*Iselin Sørensen Johansen*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 01.06.2015, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Katrine Utaaker Segadal

Audun Løvlie

Kontaktperson: Audun Løvlie tlf: 55 58 23 07
Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Iselin Sørensen Johansen iseliin91@gmail.com

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

Avdelingskontorer / District Offices:
OSLO: NSD. Universitetet i Oslo, Postboks 1055 Blindern, 0316 Oslo. Tel: +47-22 85 52 11. nsd@uio.no
TRONDHEIM: NSD. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim. Tel: +47-73 59 19 07. kyrre.svarva@svt.ntnu.no
TROMSØ: NSD. SVF, Universitetet i Tromsø, 9037 Tromsø. Tel: +47-77 64 43 36. nsdmaa@sv.uit.no