Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Brøkundervisning i forskning og praksis

En kvalitativ studie om hva forskning sier er god brøkundervisning og på hvilke måter dette kommer til syne i praksis

---

Therese Andreassen og Andreas Markus Johansen

Masteroppgave i Lærerutdanning 5.-10. trinn, mai 2016

LRU-3903 Matematikkdidaktikk

Forord

Denne masteroppgaven markerer avslutningen på vår utdanning ved lærerutdanningen på Universitet i Tromsø. Det har vært fem innholdsrike og lærerike år som vi vil minnes med glede. Det kan vi takke fantastiske medstudenter og lærere for, ingen nevnt, ingen glemt.

Arbeidet med denne masteroppgaven har til tider vært krevende, men for det meste en positiv opplevelse. Vi ønsker å rette en spesiell takk til skolene som tok oss imot og de to dyktige lærerne som åpnet klasserommet for oss. Vi har lært mye av dere som vi ønsker å bringe med oss i eget arbeidsliv som lærere.

Vi vil rette en takk til vår veileder Ove Gunnar Drageset for gode tilbakemeldinger og støtte gjennom hele prosessen. I tillegg rettes en takk til fagmiljøet på instituttet for nyttige innspill.

En stor takk til kjærester og familie for moralsk støtte, korrekturlesning og ferdig dekket middagsbord etter lange og slitsomme dager. I tillegg har vi satt stor pris på kaffepausene og samtalene med medstudenter på pauserommet under masterskrivingen.

Da gjenstår det bare å takke hverandre for samarbeidet, det har vært fint å være to.

Tromsø, mai 2016

Sammendrag

I denne masteroppgaven har vi sett på hvordan forskning beskriver god brøkundervisning og på hvilke måter dette kommer til syne i praksis. Hensikten er å danne eksempler på god brøkundervisning.

Studien har et kvalitativt forskningsdesign hvor datainnsamlingen baserte seg på observasjoner i to klasser på 6. trinn. Det ble i tillegg benyttet intervju for å underbygge observasjonene. I observasjonen støttet vi oss på Schoenfeld og Floden (2014a) sitt rammeverk, Teaching for Robust Understanding in Mathematics (TRU Math). Dette er et rammeverk bestående av fem dimensjoner som er sentrale innenfor matematikkundervisning, og tar for seg det som allerede er kjent som god undervisningspraksis. Vi har også sett på hvordan undervisningen har støttet opp under det komplekse brøkbegrepet bestående av fem aspekter. Aspektene må beherskes for å få en fullverdig forståelse for brøk.

Vi kommer frem til at undervisning som bidrar til at elever utvikler matematisk kyndighet og ivaretar alle aspektene innenfor brøk, kvalifiserer til god brøkundervisning. I oppgaven trekker vi frem utvalgte undervisningssituasjoner som skåret høyt på de fem dimensjonene i TRU Math, og drøfter hvorfor de skåret høyt. Vi diskuterer deretter om undervisningen som har skåret høyt bidrar til å utvikle matematisk kyndighet og om det komplekse brøkbegrepet ble ivaretatt. Vi kom frem til at undervisningssituasjonene som la opp til diskusjon og samtale skåret høyt på TRU Math. Undervisningssituasjonene som er presentert kvalifiserer til god brøkundervisning blant annet på grunn av lærernes ordlegging og organisering av undervisningen, at elevene ble aktivert til deltakelse og at undervisningen ble styrt etter elevenes utsagn, behov og misoppfatninger i brøk.

Innholdsfortegnelse

Figuroversikt

Tabelloversikt

1 Innledning

I denne masteroppgaven har vi sett på hvordan forskning beskriver god brøkundervisning og på hvilke måter dette kommer til syne i praksis. Datainnsamlingen er gjennomført på 6. trinn på to ulike skoler. Hensikten er å danne eksempler på undervisning som skårer høyt på TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a) og drøfte hvorfor dette er god brøkundervisning. I dette kapittelet beskrives bakgrunn for valg av tema, forskningsspørsmål og masteroppgavens oppbygging.

1.1 Bakgrunn

Da vi skulle bestemme oss for et masterprosjekt var begge forfatterne enig om å forske på noe som kunne brukes i egen praksis. Gjennom vårt studieløp har vi fått en oppfatning av at norske elever presterer dårlig i brøk. Etter å ha lest resultatene fra en kartlegging av norske elevers forståelse for brøk på 6. og 7. trinn (Bjerke, Eriksen, Rodal, & Ånestad, 2012), ble denne oppfatningen bekreftet. Det var spesielt én oppgave som vakte oppsikt i kartlegging. Elevene skulle skrive en brøk mellom $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{3}$, hvor bare 18 prosent fikk riktig svar. PISA måler ikke brøkforståelse isolert, men målingene fra 2012 indikerer at nesten halvparten av norske elever har problemer med brøk og prosent (Kjærnsli & Olsen, 2013). Vi ble nysgjerrig på hvorfor norske elever har så store vanskeligheter med brøk, og ville finne ut hvordan man kan undervise for å skape forståelse for brøk.

Vi vet at det finnes dyktige lærere i skolen som besitter mye kompetanse i matematikk. Vi ønsket å oppleve hvordan brøkundervisning foregår i skolen, og ville derfor ut å observere lærere. For å kunne bedømme god brøkundervisning måtte vi støtte oss på forskning og hva som tidligere er funnet ut innenfor dette fagfeltet. Dette tok vi med oss da vi skulle undersøke gjeldene undervisningspraksis. Undervisning består av mer enn bare faginnhold, og vi var interessert i alle faktorene som påvirker elevers læring, som for eksempel valg av oppgaver, vurdering og hvordan læreren inkluderer alle elevene til deltakelse.

I den norske skolen introduseres elevene for enkle brøker på småtrinnet. På mellomtrinnet skal elevene ifølge kunnskapsløftet kunne regne med brøk og finne fellesnevner (Kunnskapsdepartementet, 2013), og det er nå elevene begynner å fordype seg i brøkbegrepet. På grunn av dette ønsket vi observere brøkundervisning på mellomtrinnet. Da kompetansemålene for 5., 6. og 7. trinn er felles, og vi ikke ønsket å begrense utvalget av informanter, spilte det ingen rolle på hvilket trinn vi skulle observere.

1.2 Forskningsspørsmål

Målet med vårt studie var å finne eksempler på brøkundervisning som skårer høyt på TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a) og kan gjennomføres i praksis. Forskning på brøkundervisning er omfattende, med mange forslag og ideer, og man kan noen ganger sitte med spørsmålet om det virkelig lar seg gjennomføre i dagens skole. Våre informanter underviste på 6. trinn, og med dette til grunn satt vi igjen med to forskningsspørsmål:

- *Hvordan beskriver forskning god brøkundervisning?*
- *På hvilke måter kommer dette til syne i praksis i to 6. klasser?*

For å kunne svare på det første spørsmålet valgte vi å undersøke hva forskning sier er god undervisning i matematikk, deretter hva undervisningen må bygge opp under for at elevene skal forstå brøk. Det andre spørsmålet besvarer vi gjennom observasjon på 6. trinn der vi ser etter eksempler på undervisning som skårer høyt på TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a), for så å diskutere om undervisning som skårer høyt kvalifiserer til god brøkundervisning.

1.3 Masteroppgavens struktur

I teorikapittelet tar vi for oss teori som kan hjelpe oss å besvare forskningsspørsmålene. Vi vil redegjøre for forskning som omhandler matematikkundervisning og hva som kjennetegner god undervisning. Deretter vil vi forklare hva det vil si å kunne brøk, og til slutt presentere det teoretiske rammeverket som ligger til grunn for vår analyse. Metodekapittelet redegjør for metodene som er benyttet for å svare på forskningsspørsmålene. Her presenteres blant annet utvalg, verktøy for datainnsamling og hvordan forskningen og analysen ble gjennomført. I kapittel 4, Analyse og drøfting av funn, presenterer vi funnene våre og drøfter de opp mot det teoretiske rammeverket. I diskusjonskapittelet sammenfatter vi funnene våre og diskuterer om brøkundervisningen vi har observert er god brøkundervisning. I kapittel 6 avslutter vi oppgaven og foreslår videre forskning.

2 Teori

I dette kapittelet vil vi redegjøre for forskning som omhandler matematikkundervisning og hva som kjennetegner god undervisning. Dette er et stort forskningsfelt med mange teorier. Vi har valgt ut forskning som dekker bredden av undervisningen og hva det vil si å kunne matematikk. I vårt prosjekt fokuserer vi på undervisning i brøk, derfor ser vi også på forskning som omhandler brøkundervisning, og hva som er nødvendig for å få forståelse for brøk. Dette er et mindre forskningsområde, men de siste årene har flere forskere omfavnet temaet. Teori om hva som kjennetegner god matematikkundervisning og hva som er nødvendig for å forstå brøk vil hjelpe oss å svare på første del av forskningsspørsmålet, hvordan beskriver forskning god brøkundervisning? Dette vil igjen sammenfattes i et teoretisk rammeverk som vil ligge til grunn for å se hvordan god brøkundervisning kommer til syne på 6. trinn.

2.1 Hva vil det si å kunne matematikk?

Når vi skal finne ut hva god undervisningspraksis er, må vi se på hva undervisningen skal bygge opp under. Hvis målet med undervisningen er at elevene skal kunne matematikk, må vi ha klart for oss hva dette betyr. National Council of Teachers of Mathematics[1] (heretter NCTM) har gitt ut "Principles and Standards for School Mathematics" (2000). Dette er en ressurs og guide til alle som underviser i matematikk fra barnehage til 12. trinn. NCTM har kommet frem til seks prinsipper for matematikk i skolen som skal ligge til grunn i undervisningen; *equity; curriculum; teaching; learning, assessment;* og *technology*. Vi har oversatt fem av de til; *rettferdig tilgang; undervisning; læring; vurdering;* og *teknologi*. Prinsippet om *curriculum* var vanskelig å oversette. I følge Sherin og Drake (2009) har curriculum tre ulike betydninger. Den ene betydningen er alt skriftlige materiale som er tilgjengelig for lærerne, for eksempel lærebok, lærerveiledning eller kartleggingsmateriell. Den andre er hvordan undervisningen blir utført i klasserommet, og den siste er læringsmålene som er på et statlig eller lokalt nivå. Johnsen og Storaas (2015) har oversatt curriculum til læreplan, men vi velger å beholde det engelske ordet curriculum, fordi det ligger mer i dette, enn i oversettelsen "læreplan".

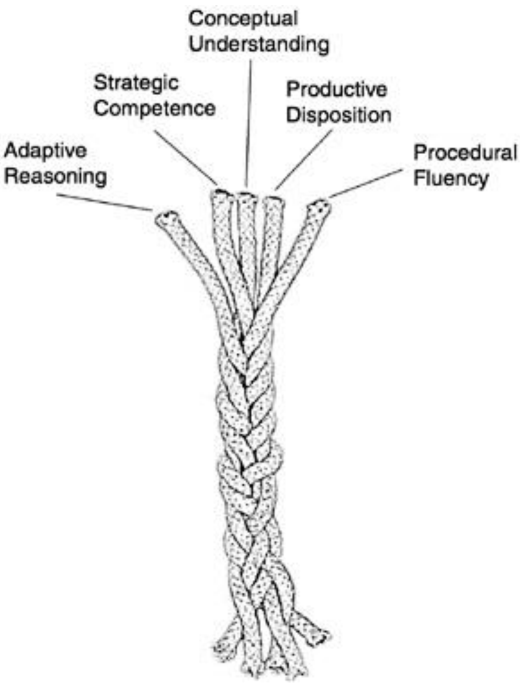
Alle seks av NCTM (2000) sine prinsipper må være tilstede for at elever skal ha mulighet til å lære matematikk på best mulig måte, og vi vil redegjøre for disse underveis i dette kapittelet.

---

[1] NCTM er den største organisasjonen innenfor matematikkutdanning og deres mål er å hjelpe lærere å oppnå den beste matematikkundervisningen. De er en internasjonal profesjonell organisasjon med base i USA og Canada, men med medlemmer fra hele verden. URL: www.ntcm.org/about

Kilpatrick, Swafford, og Findell (2001) har en modell kalt *matematisk kyndighet* (Mathematical Proficiency) som belyser hva det vil si å kunne matematikk. Vi skal nå redegjøre for modellen, samtidig som annen teori om hva det vil si å kunne matematikk belyses.

Modellen til Kilpatrick et al. (2001) består av fem sammenflettede tråder som representerer det som er nødvendig for å lære seg matematikk (Figur 2.1). Det understrekes at hver tråd ikke må ses på isolert, men at alle trådene må fokuseres på som én helhet. De fem trådene er; *conceptual understanding; procedural fluency; strategic competence; adaptive reasoning;* og *productive disposition.* Trådene er avhengig av hverandre og støtter hverandre, derfor må alle trådene utvikles samtidig for å oppnå matematisk kyndighet. Ludvigsenutvalget sier at når elever utvikler alle fem trådene parallelt, utvikles en matematisk kompetanse som går i dybden av faget, og man kan lettere overføre kunnskapen fra et emne til et annet (NOU, 2015:8). Kilpatrick, et al. (2001) sier også at "How learners represent and connect pieces of knowledge is a key factor in whether they will understand it deeply and can use it in problem solving"(s.117). På grunn av dette må altså undervisningen bygge opp under alle trådene for at elevene skal bli matematisk kyndig (Kilpatrick, et al., 2001).



Figur 2.1 Intertwined Strands of Proficiency (Kilpatrick et al., 2001:117)

Matematikksenteret (u.å.) har valgt å oversette Kilpatrick, et al. (2001) sine tråder til forståelse; beregning; anvendelse; resonnering; og engasjement. Vi har valgt å beholde de engelske uttrykkene fordi vi mener de omfatter mer enn det matematikksenteret sine oversettelser gir uttrykk for. For eksempel har matematikksenteret oversatt *conceptual understanding* til forståelse, men vi mener at *conceptual understanding* handler om en mer omfattende forståelse enn det ordet "forståelse" legger opp til. Dette forklarer vi nærmere under.

Tråden om *conceptual understanding* (Kilpatrick, et al., 2001) handler om å forstå matematikken som noe mer enn isolert faktakunnskap og metoder. Skemp (1976) mener at forståelse innenfor matematikk kan tradisjonelt deles opp i *relasjonell* og *instrumentell* forståelse. Relasjonell forståelse innebærer å skjønne *hva* og *hvorfor* man gjør det man gjør når man løser en oppgave, mens instrumentell forståelse er å kunne utføre prosedyrer og følge regler uten å nødvendigvis vite hvorfor man kan gjøre det. Elever som besitter *conceptual understanding* har organisert kunnskapen slik at de kan skape sammenhenger og lære seg nye idéer ved å koble allerede kjente idéer i nye sammenhenger (Kilpatrick, et al., 2001). Dette samsvarer med *relasjonell forståelse* (Skemp, 1976) fordi begge vektlegger sammenhenger mellom ulike deler i matematikken. *Conceptual understanding* og *relasjonell forståelse* er i tråd med tre av NCTM (2000) sine prinsipper; *curriculum* der det sies at pensum må være sammenhengende, fokusere på viktig matematikk og være godt formulert på forskjellige klassetrinn; *undervisning* der effektiv matematikkundervisning krever forståelse av hva elever kan og hva de trenger å lære, samt at de får utfordringer og støtte til å lære godt, slik at man kan få forståelse; og *læring* der elever må lære matematikk med forståelse og aktivt bygge kunnskap fra erfaringer og tidligere kunnskap**.** En sterk indikator på *conceptual understanding* er å være i stand til å representere matematiske situasjoner på forskjellige måter, og vite hvilke representasjoner som kan være nyttige i forskjellige situasjoner (Kilpatrick, et al., 2001). Det samme beskrives i Niss og Jensen (2002) sin *representasjonskompetanse*, som er en av åtte kompetanser, og innebærer å kunne forstå og benytte seg av forskjellige representasjoner av matematiske objekter, problemer og situasjoner.

Den andre tråden i Kilpatrick, et al. (2001) sin modell, *procedural fluency* er å kjenne til prosedyrer, vite når og hvordan man skal bruke de, og å ha ferdigheter i å gjennomføre de fleksibelt, nøyaktig og effektivt. Denne tråden kan virke å ligge nært opp mot instrumentell forståelse, hvor man gjennomfører algoritmer uten å riktig forstå hvorfor (Skemp, 1976). Det finnes gode argumenter for at undervisningen også kan basere seg på instrumentell forståelse. Noen fordeler er at elevene raskt kommer frem til svaret, det er lettere å forstå og få til, samt at det å kunne løse oppgaver uten å måtte forstå alt vil telle positivt for elevenes mestringsfølelse. Dette kan være viktig med tanke på motivasjon for læring (Skemp, 1989). Kilpatrick, et al. (2001) mener at det er nødvendig å ha noen ferdigheter for å lære seg matematikk med forståelse og *procedural fluency* handler om mer enn bare å lære seg prosedyrene, slik som instrumentell forståelse tilsier. Elevene skal også kunne se sammenhenger mellom prosedyrer, noe som igjen forutsetter en dypere forståelse. Det betyr at læreren må ha klart for seg hva elever kan og hva de trenger å lære, slik som prinsippet *undervisning* (NCTM, 2000) sier, samt må man vite hvilket mål undervisningen skal ha. Noen ganger er målet å gjennomføre prosedyrer fleksibelt, nøyaktig og effektiv, rett og slett fordi dette er noe en elev må beherske for å kunne matematikk, og dermed arbeide mer *instrumentelt* (Skemp, 1976). Andre ganger kan målet være å se sammenhenger mellom de ulike prosedyrene og øve på når de skal brukes, noe som tilsier en *relasjonell* (Skemp, 1976) måte å arbeide på.

Strategic competence er den tredje tråden i Kilpatrick, et al. (2001) sin modell og omhandler evnen til å formulere, representere og løse matematiske problemer. Elevene må være i stand til å velge riktige strategier for å løse bestemte oppgaver og samtidig være i stand til å tolke resultatet. Denne tråden har mye til felles med Niss og Jensen (2002) sin *problembehandlingskompetanse* som også innebærer å kunne formulere og løse matematiske problemer. *Strategic competence* henger tett sammen med *conceptual understanding* og *procedural fluency* hvor man må forstå innholdet i problemet, i tillegg til å være i stand til å gjennomføre beregningene som kreves.

Den fjerde tråden, *adaptive reasoning* (Kilpatrick, et al. (2001), går ut på å binde sammen faktakunnskap, prosedyrer, konsepter og løsningsmetoder og se at det hele henger sammen på en logisk måte. Dette samsvarer med Skemp (1976) sin relasjonelle forståelse, fordi elevene må både forstå og kunne ulike prosedyrer, samt se sammenhenger for å resonnere over svarene de har fått. Med *adaptive reasoning* (Kilpatrick, et al., 2001) er elevene i stand til å begrunne arbeidet sitt, og gjennom resonnering velge ut riktige prosedyrer og løsningsmetoder. Når det gjelder å begrunne arbeidet må man kunne kommunisere. Kommunikasjon er en egen kompetanse hos Niss og Jensen (2002), der det består i å kunne kommunisere i, med og om matematikk. Det betyr også at man skal kunne forstå og tolke andres matematiske utsagn, både skriftlig og muntlig. Kilpatrick, et al. (2001) har ikke dette som en egen kategori, men vektlegger at når man har utviklet *adaptive reasoning* så skal man være i stand til å begrunne og forklare resonnementene sine slik at de blir forståelig for andre.

Denne siste tråden, *productive disposition* (Kilpatrick, et al., 2001), handler om elevenes oppfatning av matematikken. Det handler om å se på matematikk som noe nyttig og viktig, og at det å lære seg matematikk har en verdi. Alan Schoenfeld (1992) sier at å lære seg å tenke matematisk blant annet innebærer å verdsette matematisering og abstraksjonsprosesser, samt ha interesse for å anvende de. Når elevene innehar *productive disposition* (Kilpatrick, et al.,

2001) ser de på seg selv som "gjørere" av matematikk og engasjerer seg i matematikken. Engasjement og motivasjon spiller en stor rolle for å utvikle seg innenfor de andre trådene. Læreren har en avgjørende rolle når det gjelder å engasjere elevene, fordi det må skapes et læringsmiljø hvor læreren skaper et positivt forhold til elevene sine hvor alle elevene får utfordrende arbeid. NCTM (2000) sitt prinsipp om *rettferdig tilgang* handler om at alle elever, uansett bakgrunn, personlige karakteristikker eller psykiske utfordringer, må ha muligheten til å lære, og støtte til å lære, matematikk. *Rettferdig tilgang* til alle elever krever rimelige og nødvendige tilpasninger som gjøres etter behov for å fremme tilgang og oppnåelse hos alle elever**.** I tillegg sier opplæringsloven: "Opplæringa skal tilpassast evnene og føresetnadene hjå den enkelte eleven, lærlingen og lærekandidaten"(Opplæringslova). Alle elever har krav på at undervisningen tilpasses slik at alle kan oppnå matematisk kyndighet, og alle skal ha mulighet til å engasjere seg i matematikken slik *productive disposition* vektlegger.

I følge Kilpatrick, et al. (2001) må elever utvikle *conceptual understanding, procedural fluency, strategic competence* og *adaptive reasoning* og gjennom dette vil elevene tro på at matematikk er forståelig, og med flittig innsats kan de både se nytten, samt lære seg matematikk og dermed utvikle *productive disposition* (Kilpatrick, et al., 2001). Lærere må arbeide med alle trådene og "flette" undervisningen sammen slik at elevene blir kyndige i matematikk.

Det å kunne matematikk og bli matematisk kyndig er noe som opparbeides over tid og påvirkes av hva som skjer i klasserommet, hva læreren gjør og hvordan undervisningen er lagt opp. Derfor vil oppgavene elevene jobber med i undervisningen påvirke hva de lærer, og vi vil nå ta for oss hvor forskjellig matematikkoppgaver kan fremstå.

2.2 Matematikkoppgaver

Matematikkoppgaver stiller ulike krav til kognitiv tenkning og det er viktig å være bevisst på hvilke matematikkoppgaver eller aktiviteter man velger å benytte i undervisningen. Forskning viser at når lærere skal velge oppgaver og aktiviteter fra lærebøkene, vil man bevisst eller ubevisst modifisere oppgavene på den måten at de gir forskjellig læringsmuligheter enn det som var tiltenkt av lærebokforfatterne (Son & Kim, 2015)**.** Valgene lærerne tar har mye å si for hva elever lærer. Stein og Smith (1998) viser til *The Mathematical Task Framework* der de fremstiller hvilke tre faser en utvalgt oppgave går gjennom, og som er avgjørende for læringsmulighetene til elevene. Den første fasen er hvordan oppgaver fremstilles i lærebøker; den andre fasen består av hvordan læreren setter opp og introduserer oppgaver; den siste fasen er implementeringsfasen, der elevene arbeider med oppgaver**.** Dette viser at det kan være mange forskjellige matematikkoppgaver basert på samme oppgave.

Kognitive krav er ifølge Stein, Smith, Henningsen, og Silver (2000) hvilken type nivå av tenkning som kreves av elevene for å kunne løse oppgaven. De har definert fire forskjellige kognitive nivå på matematiske oppgaver, der det skilles mellom høyere og lavere nivå av kognitive krav. På de lavt presterende oppgavene finner vi to nivå der det første er memorering og det andre er prosedyrer uten sammenheng. På de høyt presterende oppgavene er det også to nivåer der det ene er prosedyrer med sammenheng og det andre er å gjøre matematikk. Smith og Stein (2011) sier at ulike oppgaver gir ulike muligheter for læring hos elevene. Det er sammenheng mellom hvilke mål læreren har for undervisningen og hvilke kognitive krav man har til oppgavene. Hvis læreren ønsker at elevene skal øke presisjonen på rutineoppgaver kan man være på det lavt presterende nivået, prosedyrer uten sammenheng, noe som likner på instrumentell forståelse (Skemp, 1976)**,** fordi det handler om å utføre prosedyrer og følge regler. For å utvikle *procedural fluency* (Kilpatrick, et al., 2001) må man se sammenhengen mellom prosedyrene og da arbeider man med oppgaver på et høyt kognitivt nivå som prosedyrer med sammenheng. Er lærerens mål at elevene skal kunne bevise og forklare, må oppgavene også være i det høyere kognitive nivåkravet (Stein, et al., 2000). Kilpatrick, et al. (2001) mener at elevene skal arbeide mot å bli matematiske "gjørere", som ligger i de høyt presterende oppgavene. NCTM (1980) kom i "An agenda for action" med anbefaling om at man burde fokusere på problemløsing i matematikken på skolen, og Schoenfeld (1992) mener at for å lære å tenke matematisk burde man fokusere på problemløsning og jobbe med å forstå matematikken.

Læreren må reflektere over at oppgavene som blir valgt ut stimulerer elevene til ulik kognitiv tenkning. Elever har ulike forkunnskaper og erfaringer til å løse oppgavene (Smith & Stein, 2011) og læreren må tenke over spørsmålene som stilles, for spørsmålene stiller ulike krav til kognitiv tenking (Son & Kim, 2015). For å oppnå rettferdig og god undervisning må læreren i tillegg tenke på hvordan oppgavene kan nå ut til *alle* elevene, slik at alle blir invitert og støttet til engasjere seg i matematikken (NCTM, 2000). For å legge til rette for at dette skal skje, er det viktig med et godt klasseromsmiljø. Vi vil nå gå inn på hva det vil si å ha et effektivt klasserom.

2.3 Effektive klasserom

Alle elevene må inviteres og støttes til å engasjere seg i matematikken (NCTM, 2000). Elevene skal ha mulighet til å forklare egne og hverandres matematiske argumenter (Kilpatrick, et al., 2001). I tillegg må læreren velge ut oppgaver som når ut til alle, som både stiller kognitive krav, men også gir alle en mulighet til å nå målet. I følge prinsippet *undervisning* (NCTM, 2000) krever effektiv matematikkundervisning forståelse av hva elever kan og hva de trenger å lære, samt utfordringer og støtte til å lære.

I vår oppgave er vi ute etter hvordan vi kan observere hvilke grep læreren gjør med elevene og hva som blir gjort for å skape effektive klasserom. Dylan Wiliam (2007) presenterer et rammeverk som består av fem hovedstrategier for vurdering for læring, samt en hovedidé som ligger til grunn i alle strategiene. Hovedideen er at bevisene læreren får etter å ha observert eller vurdert elevenes læring, blir brukt til å justere undervisningen etter elevenes læringsbehov. Dette samsvarer med NCTM (2000) sitt prinsipp *rettferdig tilgang* og tilpasset opplæring i opplæringsloven. Den første hovedstrategien til Wiliam (2007) er å skape effektive klasseromsdiskusjoner, spørsmål og oppgaver som fremprovoserer læring. Den andre hovedstrategien er å gi tilbakemeldinger som hjelper elever fremover i læringssituasjoner. Dette vil si at læreren må gi tilbakemeldinger som fokuserer på hva elever må forbedre og gi spesifikke måter på hvordan de kan forbedre seg. Den tredje hovedstrategien er å klargjøre og dele læringsintensjonene, samt kriteriene for høy måloppnåelse. Dette for at elevene skal få være med å vurdere seg selv. Denne strategien henger sammen med den fjerde hovedstrategien som er å aktivere elevene slik at de får eierskap til egen læring. Når de er med på å vurdere seg selv blir de klar over egne styrker og svakheter, og gjennom dette vil de lære å kjenne seg selv og få eierskap til egen læring. Den femte og siste hovedstrategien er å aktivere elever til å være en ressurs for hverandre. Dette kan de gjøre gjennom samarbeid i varierte former og grupper.

Den første hovedstrategien til Wiliam (2007) handler om å skape effektive klasseromsdiskusjoner som fremprovoserer læring. Kilpatrick, et al. (2001) sine tråder vektlegger blant annet at man skal formulere, representere, begrunne og argumentere matematikk for å bli matematisk kyndig. Den femte tråden, *productive disposition*, legger til grunn at matematikken skal engasjere, og at engasjement er viktig med tanke på utvikling av de resterende trådene. Vi skal nå se hvordan man i effektive klasserom kan få elever til å engasjere seg i matematikken.

2.3.1 Engasjement i matematikken

Når lærere blir spurt om hvordan de vurderer elevene er svaret ofte ved hjelp av tester, quizer, fremlegg og liknende (Wiliam, 2007). I kapittelet "Keep learning on track" sier Wiliam (2007) at man må fokusere på hvordan lærerens vurdering kan forbedre matematisk læring og engasjere til deltakelse. Hvordan kan vurdering være engasjerende, i stedet for å bare måle læring summativt? Læreren må finne ut hva som har blitt lært, eller ikke lært, for så å gjøre noe med det (Wiliam, 2007), altså en formativ vurdering.

Den tradisjonelle modellen for klasseromsdiskusjon er *Initiating-Response-Evaluation* (heretter IRE) (Mehan, 1979), som betyr at læreren stiller et spørsmål, velger en elev til å svare og deretter gir respons på elevens svar. På denne måten vil bare en elev bli vurdert og læreren vet bare hva denne eleven har tenkt. Hvilke grep kan man gjøre for få med alle elevene i en klasseromsdiskusjon og hvordan man kan fremprovosere bevis for læring? For å få elever til å delta i klasserommet kan man ifølge Wiliam (2007) benytte seg av flere strategier. Hvis elever svarer "jeg vet ikke", kan læreren si "ok, men hvis du visste, hva ville du sagt?" Man kan også få andre elever til å svare på spørsmålet og be eleven velge mellom svarene man har fått høre, eller man kan innføre hjelpemidler som "ring en venn", "spør publikum" eller "50-50". Poenget er at deltakelse i klasserommet ikke er valgfritt, selv om elevene ikke vet svaret vil læreren finne muligheter til å engasjere eleven til deltakelse (Wiliam, 2007).

Dillon (1982) har sett på kognitive sammenhenger mellom spørsmål og svar og påstand og svar i klasseromsdiskusjoner. Han fant ut at omtrent halvparten av alle svar var på det samme kognitive nivået som på spørsmålet som ble stilt, mens omtrent halvparten av svarene på påstander var på et høyere kognitivt nivå. I tillegg fant han ut at selv om påstanden var på et lavere kognitivt nivå, var svarene ofte på et høyt kognitivt nivå. Påstander kan fremprovosere lengre og mer komplekse svar enn det spørsmål kan. Svaret på et spørsmål er å svare på informasjonen som er forespurt og deretter stoppe. På en påstand må man akseptere eller avvise informasjonen som fremkom. Ved å akseptere eller avvise kan respondenten hente frem tidligere kunnskap og erfaring til å formulere begrunnelser og forklaringer slik at man kan legge frem hvorfor man aksepterer eller avviser påstanden (Dillon 1982). En påstand krever at elevene diskuterer, gjerne i grupper, for å begrunne sitt svar til påstanden. Her er det viktig at læreren ikke bare er ute etter rett svar, men også hvordan elevene har tenkt, noe som er viktig for å kunne legge til rette for elevers læring (Skott, Jess, & Hansen, 2008).

Selv om Dillon (1982) har funnet ut at en påstand ofte gir høyere kognitive svar, viste det seg at hvis spørsmålet var på et høyt nivå, var svaret også det. Det gjelder altså å stille gode spørsmål. Spørsmål er ifølge Baltzersen (2014) et av de mest kraftfulle samtaleredskapene vi har til å effektivt styre og kontrollere en samtale på. Han sier at ved å stille lukkede spørsmål begrenser man svarene og det er den som spør som definerer samtaletema og samtaleform. Ved å stille åpne spørsmål inviterer man til å utdype og fortelle mer (Baltzersen, 2014). Et åpent spørsmål kan for eksempel være "hvordan kom du deg hit?", mens et lukket spørsmål kan være "kom du hit med bussen?". Det er ikke alltid at åpne spørsmål er bedre enn lukkede spørsmål, men spørsmålene må tilpasses samtalesituasjonen. Spørsmål som er nøye tenkt igjennom og planlagt på forhånd, gir læreren mulighet til å avsløre elevens tenkingen og på denne måten avdekke om feilsvar er en misoppfatning eller bare en utregningsfeil (Wiliam, 2007). For å illustrere dette er det plukket ut en oppgave fra TIMMS (Figur 2.2) der spørsmålene er ganske lik, men resultatet er forskjellig. Wiliam (2007) viser til Vinner (1997) som foreslår at grunnen til at det er så stor forskjell på hvor mange som har klart oppgaven, er fordi mange elever har misoppfatningen at den største brøken er den med minst nevner og den minste brøken er den med størst nevner. Med denne misoppfatningen får man rett på den første oppgaven, men feil på den neste.

Item 1 (success rate 88%)

Which fraction is the smallest?

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$

Item 2 (success rate 46%)

Which fraction is the largest?

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{5}{8}$ (d) $\frac{7}{10}$

Figur 2.2 To oppgaver fra TIMMS (Wiliam, 2007)

Eksempelet viser at ved den første oppgaven kan man tro at de aller fleste elevene har forstått oppgaven, mens på den andre kan man få frem at halvparten muligens har en misoppfatning. Ved hjelp av effektive spørsmål kan læreren avdekke misoppfatninger. Læreren må også vite hvilke konseptualiseringer elever kan ha på ulike områder, slik at læreren kan skaffe seg verktøy til å identifisere de (Wiliam, 2007), og Gay og Thomas (1993) sier "Just because they got it right, does that mean they know it?" (s. 130).

Spørsmål kan være med å engasjere elever til deltakelse og de har stor innvirkning i klasserommet. Spørsmål er også et av lærerens verktøy til å vurdere og fremprovosere svar, begrunnelser, resonnement og argumentasjon. Det å stille gode spørsmål er utfordrende, men viktig for å utvikle effektive klasserom. Vi skal nå presentere noen samtaletrekk som kan brukes som verktøy til klasseromsdiskusjon, slik at spørsmålene støtter opp under matematisk tenkning og læring.

Chapin, O´Connor og Anderson (2009) forteller om fem produktive samtaletrekk (talk-moves); *revoicing; repeating; reasoning; adding on;* og *waiting*, som skal støtte opp under matematisk tenkning og læring. Vi har valgt å oversette de til *omformulering; gjentakelse; resonering; legge til; og venting*. Noen ganger er det vanskelig å skjønne hva elever sier når de snakker matematikk og da kan man benytte seg av samtaletrekket *omformulering*. Som lærer må du hjelpe slik at resten av klassen også forstår hva en elev sier og kan da gjenta deler av eller alt det eleven har sagt, og spørre eleven om man har forstått eleven rett. Et eksempel på dette kan være "har jeg forstått deg riktig, når du sier at…". Det andre samtaletrekket er *gjentakelse*. Her er det ikke læreren som skal gjenta, men læreren kan spørre andre elever om å gjenta med egne ord slik at flere blir med i samtalen og enklere følger med. Dette skaffer også bevis på om andre elever hørte eller forsto hva som ble sagt. Det tredje samtaletrekket, *resonnering*, handler om å kunne svare på andres og egnes resonnementer. Når en elev har kommet med en påstand eller forklaring, kan læreren spørre andre studenter om de er enig eller uenig i det som ble sagt. Dette samtaletrekket gir elevene mulighet til å forsvare utsagnene sine. Det er viktig at hvis ikke elevene selv forklarer *hvorfor*, må læreren be de forklare hvorfor. Dette er i tråd med *adaptive reasoning* (Kilpatrick, et al., 2001) og *kommunikasjonskompetanse* (Niss & Jensen, 2002), fordi man skal være i stand til å begrunne og resonnere slik at andre skal forstå. Det fjerde samtaletrekket *legge til* handler om å tilføye diskusjonen noe nytt. Her starter man med å gjenta hva som hittil har kommet frem i diskusjonen, for så å spørre om noen andre har noe å legge til. Det siste samtaletrekket *venting* handler om viktigheten av stillhet etter et spørsmål eller en påstand. Hvis man er tålmodig vil alle få tid til å samle tankene sine, samt tenke på hvordan de vil formulere seg, for noen trenger lengre tid enn andre. Når læreren spør et spørsmål til hele klassen, men ingen er villig til å si noe, kan det være lurt å be elevene snakke med sidekameraten, for så å komme tilbake til hele klassen (Chapin, et al., 2009). Da får elevene hørt hva sidemannen tenker og de kan sammen formulere seg.

Resnick, Michaels, og O'Connor (2007) nevner seks samtaletrekk som en lærer kan benytte. De nevner Chapin, et al. (2009) sine allerede nevnte samtaletrekk; *omformulering, gjentakelse,* *resonnering* og *legge til.* I tillegg har Resnick, et al. (2007) to samtaletrekk og det første er at elever skal forklare resonneringen sin, for eksempel: "Hvorfor tror du det?", "fortell mer?" og "hvordan kom du frem til det svaret?". Det andre samtaletrekket ønsker man at læreren skal utfordre eller komme med et moteksempel til elevenes svar "er det alltid sånn?" eller "kan du komme på andre eksempler som ikke vil gå?".

Hvis lærere benytter seg av både Chapin, et al. (2009) og Resnick, et al. (2007) sine samtaletrekk vil elevenes ideer blir delt og anerkjent, og de legger opp til at flere elever skal delta. Det er da opp til læreren å passe på at alle får delta, slik at de får *rettferdig tilgang* til matematikken (NCTM, 2000). Når vi skal observere læreren i klasserommet, vil disse samtaletrekkene hjelpe oss til å se hvordan det blir lagt opp til klasseromsdiskusjon. For at dette skal fungere optimalt må elevene lære seg å kunne hjelpe hverandre, samt benytte seg av hverandres ideer. Det er dette den femte hovedstrategien til Wiliam (2007) handler om, at elevene skal være ressurser for hverandre. Dette blir beskrevet grundigere i neste delkapittel.

2.3.2 Være ressurser for hverandre

Slavin, Hurley, og Chamberlain (2003) sier at "forskning på *cooperative learning* er en av de største suksessene i historien av forskning på utdanning"(s.1085). *Cooperative learning* er en overordnet betegnelse for undervisning der elevene samarbeider etter bestemte prinsipper for læring (Kagan & Stenlev, 2006). Kagan har sammen med forskjellige kollegaer arbeidet lenge med *cooperative learning*, og de mener at den tradisjonelle skolen tvinger elevene til å begrense sin energi og entusiasme ved at de store deler av tiden må sitte stille og lytte (Kagan & Stenlev, 2006).

Cooperative learning er basert på det sosialkonstruktivistiske synet som Lev Vygotsky har om at læring er en sosial prosess som finner sted i interaksjon med andre (Kagan & Stenlev, 2006). Språket har en sentral rolle, fordi det er gjennom språklige formuleringer og dialog med andre at eleven erkjenner eller konstruerer seg selv og omverdenen (Skott, et al., 2008). Vygotsky snakker om den proksimale utviklingssonen, der interaksjonen med andre skal hjelpe deg videre. I *cooperative learning* er det viktig at elevene ikke bare spør læreren om hjelp, men at elevene lærer å bruke hverandre som ressurs (Kagan & Stenlev, 2006).

Til forskjell fra vanlig gruppearbeid er *cooperative learning* (Kagan & Stenlev, 2006) basert på strukturer man skal følge for at elevene skal få best mulig læring. Man velger den strukturen som passer for sin undervisning og følger dette trinn for trinn slik at det er lett for læreren å sikre de ønskede lærings- og medlæringsprosessene. Strukturenes oppgave er å organisere interaksjonen mellom elevene, og ikke undervisningens innhold. En struktur blir først til en undervisningsaktivitet når læreren har lagt innhold til den. Kagan og Stenlev (2006) mener at det faglige innholdet gjøres samtidig som det er et sterkt fokus på elevenes sosiale ferdigheter og samspill med hverandre.

Cooperative learning (Kagan & Stenlev, 2006) har fire prinsipper (SPIL); *samtidig interaksjon; positiv innbyrdes avhengighet; individuell ansvarlighet;* og *lik deltakelse*, som er med å gi de rette betingelsene for læringsprosessene. Alle fire prinsippene må oppfylles i strukturen man har valgt for at det skal være *cooperative learning*. *Samtidig interaksjon* går ut på at elevene snakker samtidig i par eller grupper og får mye taletid i løpet av en undervisningsøkt. *Positiv innbyrdes avhengighet* er at det legges opp til samarbeid og i tillegg har bruk for en partner for å løse oppgavene. Dette fører til at hverandres suksess bidrar til at sin egen og andres læringsprosess blir en morsom og stimulerende opplevelse. *Individuell ansvarlighet* inntrer når hver elev med jevne mellomrom møtes med et krav om å redegjøre for egen læring ovenfor andre. Elevene blir ut i fra de forskjellige strukturene bedt om oppsummere, presentere, problematisere eller evaluere deres forståelse av og tenkingen omkring stoffet. De tre første prinsippene kan ses i sammenheng med samtaletrekkene (Chapin, et al., 2009; Resnick, et al., 2007) nevnt i forrige delkapittel. Samtaletrekkene kan være med på å hjelpe elevene med å oppnå disse tre prinsippene. Det siste prinsippet, *lik deltakelse,* handler om at det er lik tilgang hvis alle elevene bidrar like mye og er like mye involvert i arbeidsprosessene. Dette kan ses opp mot NCTM (2000) sitt prinsipp *rettferdig tilgang* der alle skal ha muligheten til å lære seg matematikk, og undervisningen skal tilpasses slik at dette kan oppnås. Det legges til rette for SPIL-prinsippene i *cooperative learning*-strukturene, ved at de er bevisst på at elevene skal bidra på forskjellige måter (Kagan & Stenlev, 2006).

Lærerens rolle når man holder på med *cooperative learning* er å igangsette og guide elevene gjennom strukturene, samt ha en tilbaketrukken rolle som konsulent. Læreren skal også passe på at reglene for læringsarbeidet og tiden overholdes. Det er viktig å definere tiden på hvert trinn, slik at læreren kan påse at alle har kommet like langt og elevene kan få en motiverende effekt som skaper fokus i arbeidet. Til slutt er det lærerens oppgave å avslutte strukturen ved å samle opp og oppsummere det de har arbeidet med, gjerne på forskjellige måter (Kagan & Stenlev, 2006).

For å få et effektivt klasserom må man bygge opp et godt klasseromsmiljø. Dette kan man gjøre ved å skape engasjement for matematikk, legge opp til kommunikasjon og diskusjon, der elevene føler seg som matematiske "gjørere" og der alle får mestringsfølelse. Ved hjelp av samtaletrekkene og *cooperative learning*, kan man bygge opp et effektivt klasserom.

2.4 Brøk

Vi har nå presentert generelt hva god matematikkundervisning er, og skal nå gå inn på hva god brøkundervisning er. Dette for å kunne si noe om innholdet i matematikkundervisningen vi skulle observere, samt hvilke kognitive krav undervisningen og oppgavene stilte. Lamon (2007) mener at brøk er komplekst og utfordrende og sier:

> Of all the topics in the school curriculum, fractions, ratios, and proportions arguably hold the distinction of being the most protracted in terms of development, the most difficult to teach, the most mathematically complex, the most cognitively challenging, the most essential to success in higher mathematics and science, and one of the most compelling research sites (s.629).

Lamon (2007) mener at for å forstå brøk må man ta utgangspunkt i rasjonale tall. Behr, Lesh, Post, og Silver (1983) sier: "Rational-number concepts are among the most complex and important mathematical ideas children encounter during their presecondary school years." (s.91). Van de Walle, Karp, og Bay-Williams (2014) viser til NAEP[2] sine testresultater som sier at elever har svak forståelse av brøkkonseptet, og dette fører til vanskeligheter ved beregning av brøk, desimaltall og prosent, samt bruk av brøk i for eksempel algebra. For å forstå rasjonale tall presenterer Behr, et al. (1983) fire aspekter ved rasjonale tall; *part-whole; quotient; operator;* og *ratio*. Van de Walle, et al. (2014) mener man må forstå alle mulige aspekter som brøk kan representere og presenterer fem aspekter; *part-whole; measurement; divisjon; operator;* og *ratio*. Lamon (2007) har i kapittelet "Rational numbers and proportional reasoning" sammenfattet teori om rasjonale tall og mener at tidligere forskning ikke er tilstrekkelig fordi det har vært fokusert på for små områder innenfor rasjonale tall. Lamon (2007) tar utgangspunkt i Behr, et al. (1983) sine aspekter, men legger til *measure* som et eget aspekt. Dette mente Behr, et al. (1983) var en del av aspektet *part-whole*. Uansett hvor mange aspekter man opererer med er alle enige om at å bare tilnærme seg rasjonale tall med ett aspekt er utilstrekkelig. Dette var ett av funnene i et større forskningsprosjekt Lamon (2007) gjennomførte på seks klasser med hovedfokus på de forskjellige aspektene. Behr, et al. (1983)

[2] NAEP står for National Assessment of Education Progress og er den største amerikanske vurderingsinnsatsen. De vurderer kontinuerlig hva elever kan i matematikk, lesing, skriving og flere andre felt. URL: http://nces.ed.gov/nationsreportcard/

påpeker også at for å få full forståelse av rasjonale tall, kan man ikke bare forstå hver og en av aspektene, men også hvordan de henger sammen.

Bjerke, et al. (2012) har skrevet en forskningsrapport, "Når brøk ikke er et tall", der de har sett på brøkforståelsen hos elever på 6. og 7.trinn. De sier det er godt dokumentert at elever har store problemer med å beherske begrepet brøk. Van de Walle et. al. (2014) nevner spesielt fire årsaker til at elever sliter med brøk; brøk har flere betydninger; brøk er skrevet på en uvanlig måte; undervisningen fokuserer ikke på begrepsforståelse; og elevene overgeneraliserer kunnskapen de har om heltall. Bjerke, et al. (2012) nevner tre årsaker til at elever har problemer med brøkbegrepet. Den første er at det er et stort kognitivt sprang fra heltall til brøk. Den andre årsaken legger undervisningen man har hatt til grunn, der det kan ha vært innført algoritmer uten forståelse eller lite variasjon av representasjonsformer. En tredje årsak er kompleksiteten i brøkbegrepet, der de nevner fem aspekter; *del av enhet; forhold; kvotient; operator;* og *tallstørrelse*. Det blir også her poengtert at ett ensidig fokus på kun ett av aspektene ved brøk vil gi mangelfull forståelse. Bjerke, et al. (2012) sine resultater viser at brøkforståelsen hos elevene på 6. og 7.trinn er mangelfull. De konkluderer med at elevene er "representasjonsfattige", siden besvarelsene dokumenterer ensidig bruk av arealmodellen som representasjonsform. Når det kommer til arealmodellens anvendelsesområde mangler elevene dybde i forståelsen ved at de bruker den ukritisk og lite hensiktsmessig. Karlsen (2014) sier at det kan være lett å lære regnereglene for brøk, men hvis man ikke knytter forståelse til ferdighetene, går reglene fort i surr og mange elever sliter med å vurdere holdbarheten til et svar. Kilpatrick, et al. (2001) sin tråd *procedural fluency* legger vekt på nettopp dette, at man må se sammenhengen mellom ferdighetene og prosedyrene for å få en dypere forståelse. Karlsen (2014) sier også at for å øke forståelsen, bør man kunne representere et brøkuttrykk på flere måter. Både i Kilpatrick, et al. (2001) sin *conceptual understanding* og Niss og Jensen (2002) sin *representasjonskompetanse* må man beherske forskjellige måter å representere matematiske situasjoner, problemer og objekter på.

2.4.1 Hva vil det si å kunne brøk?

Brøk blir omtalt som vanskelig og komplekst. Mange elever sliter med forståelse av brøkbegrepet og for å få en god forståelse for brøk, må man kunne bruke og representere brøk på flere måter (Bjerke, et al., 2012; Karlsen, 2014; Lamon, 2007, 2012; Van de Walle, et al., 2014). Lamon (2007) mener at for å forstå brøk må man forstå rasjonale tall. Behr, et al. (1983) valgte å presentere fire aspekter, Lamon (2007), Van de Walle, et al. (2014) og Bjerke, et al. (2012) presenterte fem. Vi har valgt å se på brøk innenfor fem aspekter, der vi skiller mellom *part-whole* og *measure,* og benytter i hovedsak Lamon (2012) sin "Teaching fractions and ratios for understanding" til å beskrive de fem aspektene som er nødvendig for å forstå brøk. Vi har oversatt de fem aspektene til; *del av helhet*; *måling*; *kvotient*; *operator;* og *forhold.*

Del av helhet

Aspektet *del av helhet* handler om både del av hel og del av mengde. Behr, et al. (1983) sier at dette aspektet er fundamentalt for senere tolkninger av rasjonale tall og Van de Walle, et al. (2014) sier at aspektet er et effektivt utgangspunkt for å bygge videre forståelse av brøk. Ofte blir dette aspektet introdusert tidlig i skolen (Behr, et al., 1983) og lærebøker har stort fokus på at brøk er en del av helhet (Van de Walle, et al., 2014). Når man ser på *del av helhet* må det ifølge Susan Lamon (2012) være to grunnprinsipper på plass; man må kunne se hvor mange deler helheten er delt inn i, og delene må være like store og brøksymbolet $\frac{a}{b}$ betyr *a* deler av *b* like deler. Eksempelvis vil brøken $\frac{3}{4}$ bety at man har 3 deler av 4 like store deler og når brøken utvides så har man delt mengden opp i mindre deler (Lamon, 2007). *Del av helhet* kan være en del av et område, en del av en gruppe mennesker eller en del av en lengde (Van de Walle, et al., 2014). "Å gå via én" er når man deler noe opp i kjente enheter og er et naturlig element i *del av hel.* Dette betyr at man kan se på $\frac{3}{4}$ som tre separate $\frac{1}{4}$, og ved "å gå via én" kan man lage likeverdige brøker og sammenligne brøker (Lamon, 2007). Lamon (2012) presenterer *del av helhet* ved forskjellige modeller ut i fra om det er del av hel eller del av mengde. Arealmodellen, brøkstriper og sirkler, gjerne i form av kake eller pizza, er vanlige når vi skal presentere brøk som del av hel. Brikker benyttes vanligvis når det handler om del av mengde. Lamon (2012) mener at modellene egner seg forskjellig om man skal lære seg likeverdig brøk, addisjon, subtraksjon, multiplikasjon eller divisjon.

Måling

Når det snakkes om måling er det typisk at man bruker en tallinje, og brøken $\frac{3}{4}$ vil være avstanden som tilsvarer tre ganger $\frac{1}{4}$ av linja 0 til 1, eller $\frac{3}{4}$ av et bestemt område (Lamon 2007). Van de Walle, et al. (2014) mener at måling involverer å identifisere en lengde, for så bruke den lengden som en måling til å avgjøre lengden av et objekt. For eksempel ved brøken $\frac{5}{8}$, kan man bruke brøken $\frac{1}{8}$ som den valgte lengden, for å vise at det trengs 5 for å nå $\frac{5}{8}$. Lamon (2012) sier at en enhet med måling alltid kan deles opp i mindre og mindre enheter, og i brøk som måling er målet å dele opp enheter med suksess. Med dette menes at selv om det vi skal måle ikke treffer på centimeteren på en linjal, kan vi dele opp i millimeter. Hvis millimeter ikke treffer kan vi dele opp i enda mindre deler, men det viktigste er at de deles opp likt; Alt kan måles, det kommer bare an på hvor mange ganger man må dele opp. Elever forstår brøk som måling når de er komfortable med å dele opp med suksess, kan finne hvilken som helst brøk mellom to gitte brøker og kan sammenlikne to brøker med hverandre (Lamon, 2012). Aspektet fokuserer altså på at elevene skal kunne se brøk som en tallstørrelse som kan plasseres på tallinja.

Kvotient

Brøk som kvotient er ifølge Lamon (2012) resultatet av en divisjon, og på barneskolenivå kan man se på det som rettferdig deling. For å dele likt må delene være lik og ha samme størrelse. Brøken $\frac{3}{4}$ representer 3 dividert på 4. Typisk tilnærming er hvor mye får hver person når 4 personer deler noe det finnes 3 av (Lamon, 2007). Lamon (2012) mener oppdeling introduseres best visuelt, for eksempel med et bilde av 3 pizza og 6 personer, der man *ser* at de får en halv pizza hver. Det kan ta tid før elevene ser brøken i dette, de tenker riktig, men ser ikke brøksvaret. Lamon (2012) sier at oppdeling og bruk av bilder ofte blir introdusert tidlig i del av helhet-undervisningen, men så slutter man med dette. Barn ser fortere at noe er større eller mindre, men det tar tid før de ser *hvor mye mer*, og dette kan brøk som kvotient hjelpe elevene med å se.

Operator

I operatoraspektet tenker Lamon (2012) på funksjoner. Det handler om forminskning og forstørring, forkorting og utviding, øking og redusering eller multiplikasjon og divisjon. En operatør er instruksjoner man får for å fullføre en prosess. For eksempel "$\frac{2}{3}$ av" er en operator som sier at man skal multiplisere med 2, deretter dele resultatet på 3. Hvis elever har forståelse for aspektet operator vet de at $\frac{3}{4}$ kan betyr $3 \cdot \frac{1}{4}$, eller $\frac{1}{4} \cdot 3$. Lamon (2007) mener at aspektet operator kan kjennetegnes som del *av* noe, og det knyttes lett til regning hvor fokuset er hvordan vi skal operere på en enhet. I dette aspektet vil $\frac{3}{4}$ være en regel som forteller hva man skal gjøre med enheten man jobber med. Det kan være $\frac{3}{4}$ av 12 brikker, hvor man enten deler på 4 og ganger med 3, eller ganger med 3 og deler på 4.

Forhold

Aspektet om forhold skiller seg betydelig ut fra de andre. Her er det snakk om at man sammenligner to grupper eller mengder av enheter, for eksempel 3 bananer mot 4 epler.

Forholdet mellom bananer og epler er 3 *til* 4, 3:4 eller 3 bananer per 4 epler, men det blir vanskeligere når 3 bananer ikke er $\frac{3}{4}$ av alle fruktene. Aspektet *forhold* kan enten være del-til-del eller del-til-hel (Van de Walle, et al., 2014). For eksempel kan forholdet 3:4 være forholdet mellom de som spiller fotball til de som ikke spiller fotball, eller så kan det være forholdet mellom de som spiller fotball til hele klassen. Derfor må elever som arbeider med aspektet *forhold* være oppmerksomme på konteksten. Behr, et al. (1983) mener at forhold er mer en sammenligningsindeks enn ett tall. Når to forhold er lik, sier man at de er proporsjonal.

2.5 Teoretisk rammeverk: Hva kjennetegner god undervisningspraksis?

Hittil har vi beskrevet hvordan forskning beskriver god matematikkundervisning og hva som er nødvendig for å få forståelse for brøk. Vi vil nå presentere det teoretiske rammeverket som sammenfatter god undervisningspraksis, og som er grunnlaget for vår analyse.

Alan Scohenfeld (2015) og hans kolleger har utarbeidet et rammeverk kalt *Teaching for robust understanding* (TRU)[3] for å beskrive produktive læringsmiljø. Rammeverket fremmer ikke nye, radikale ideer eller løsninger, men er utviklet for å samsvare med det som fra før av er kjent som god praksis (Schoenfeld, 2015). Rammeverket beskriver fem sentrale dimensjoner innenfor klasseromsaktivitet. Klasserom som gjør det bra innenfor alle dimensjonene vil ifølge Schoenfeld skape det som betegnes som *powerful thinkers* og problemløsere. Dette ser vi i sammenheng med Kilpatrick, et al. (2001) sine tråder ved at når man skårer høyt i dimensjonene, utvikles man til å bli matematisk kyndig.

Teaching for robust understanding in mathematics (TRU Math) er TRU-rammeverket spesielt laget for matematikk og karakteriserer viktige dimensjoner innenfor klasseromsaktivitet i matematikk (Schoenfeld & Floden, 2014a). Rammeverket består av en generell del som gjelder alle klasserom i matematikk, og en del som kun er gjeldende for løsning av kontekstuelle algebraiske problemer. Den generelle delen av TRU Math korrelerer godt med litteraturen vi hittil har belyst og blir sammenfattet innenfor fem lett forståelige dimensjoner.

Dimensjonene innenfor *TRU Math* er beskrevet i Figur 2.3; *The Mathematics; Cognitive Demand; Access to Mathematical Content; Agency, Authority and Identity;* og *Uses of Assessment.*

---

[3] Alle dokumenter tilknyttet TRU-rammeverket finnes her: http://map.mathshell.org/trumath.php

The Five Dimensions of Mathematically Powerful Classrooms:				
The Mathematics	**Cognitive Demand**	**Access to Mathematical Content**	**Agency, Authority, and Identity**	**Uses of Assessment**
The extent to which the mathematics discussed is focused and coherent, and to which connections between procedures, concepts and contexts (where appropriate) are addressed and explained. Students should have opportunities to learn important mathematical content and practices, and to develop productive mathematical habits of mind.	*The extent to which classroom interactions create and maintain an environment of productive intellectual challenge that is conducive to students' mathematical development. There is a happy medium between spoon-feeding mathematics in bite-sized pieces and having the challenges so large that students are lost at sea.*	*The extent to which classroom activity structures invite and support the active engagement of all of the students in the classroom with the core mathematics being addressed by the class. No matter how rich the mathematics being discussed, a classroom in which a small number of students get most of the "air time" is not equitable.*	*The extent to which students have opportunities to conjecture, explain, make mathematical arguments, and build on one another's ideas, in ways that contribute to their development of agency (the capacity and willingness to engage mathematically) and authority (recognition for being mathematically solid), resulting in positive identities as doers of mathematics.*	*The extent to which the teacher solicits student thinking and subsequent instruction responds to those ideas, by building on productive beginnings or addressing emerging misunderstandings. Powerful instruction "meets students where they are" and gives them opportunities to move forward.*

Figur 2.3 The five dimensions of Mathematically Powerful Classrooms (Schoenfeld og Floden, 2014a)

Når vi videre skal beskrive de fem dimensjonene vil vi benytte oss av Kristine Bjerkmo (2015) sin oversettelse av dimensjonene: *matematikken*; *krav til kognitiv tenking*; *tilgang til matematikken*; *dele og anerkjenne ideer*; og *tilbakemeldinger og vurdering*.

Den første dimensjonen av TRU Math, *matematikken* (Schoenfeld & Floden, 2014a), fokuserer på om elevene oppfatter matematikken som isolert faktakunnskap og prosedyrer som må pugges på, eller om de ser på matematikken som en sammenhengende disiplin der man klarer å skape en forståelse og bygge nettverk mellom forskjellige områder innenfor matematikken. Det vektlegges også at matematikken må være på riktig nivå (Schoenfeld & Floden, 2014a). Dimensjonen tar for seg innholdet i matematikkundervisningen, og her handler det om å bygge opp under Kilpatrick, et al. (2001) sine fem tråder i matematisk kyndighet. Når Schoenfeld og Floden (2014a) utdyper dimensjonen kjenner vi igjen disse trådene. Det sies blant annet at undervisningen må støtte en sammenhengende forståelse av matematikken (*conceptual understanding*), at prosedyrene som skal læres kan tilpasses til forskjellige situasjoner (*procedural fluency*), at elevene skal få mulighet til å løse problemer (*strategic competence*) og at det må være en kobling mellom prosedyrer, konsepter og kontekster (*adaptive reasoning*).

Dimensjonen tar også hensyn til NCTM (2000) sine prinsipper *curriculum* og *læring*. *Curriculum* handler om at pensum må være sammenhengende, fokusere på viktig matematikk og være godt formulert på forskjellige klassetrinn. Prinsippet om *læring* handler om læring med forståelse og bygge på allerede ervervet kunnskap. Kortfattet kan man si at dimensjonen *matematikken* (Schoenfeld & Floden, 2014a) baserer seg på om undervisningen gir elevene mulighet til å tilegne seg *relasjonell forståelse*, eller om undervisningen kun baserer seg på *instrumentell forståelse* (Skemp, 1976).

Lamon (2007) sier at aspektene til brøk er uløselig forbundet, og innenfor dimensjon 1 (Schoenfeld & Floden, 2014a) vil det være et poeng at flere aspekter av brøk kommer til syne i undervisningen, og at koblingene mellom disse fremheves. Bjerke, et al. (2012) sier at en mulig årsak til at elevene sliter med brøk er innføring av algoritmer uten forståelse og at elevene er representasjonsfattige. Dimensjon 1 legger opp til *relasjonell forståelse* (Skemp, 1976), derfor vil det å benytte seg av flere representasjoner og aspekter, samt se sammenhengen mellom representasjonene og aspektene være viktig innenfor denne dimensjonen.

Dimensjon 2, *krav til kognitiv tenkning* (Schoenfeld & Floden, 2014a), handler om å skape og opprettholde et miljø med produktive og intellektuelle utfordringer som bidrar til elevenes matematiske utvikling. Her handler det om å treffe riktig på utfordringene som gis, at man ikke mater matematikken med teskje, men heller ikke gir så store utfordringer at elevene blir helt fortapt. En riktig måte å bygge stillaser på er å hjelpe elevene til å forstå utfordringene de møter, men fortsatt gi de rom til å oppnå fremgang selv (Schoenfeld & Floden, 2014a). For at elevene skal kunne oppnå fremgang selv må de få tid til å tenke, slik Chapin, et al. (2009) påpekte viktigheten av i samtaletrekket *venting*.

Schoenfeld og Floden (2014a) sier at en sterk kontrast til kognitive krav er når innholdet i matematikken baserer seg på prosedyrer, og interaksjonen mellom lærer og elevene hovedsakelig baserer seg på IRE-metoden, hvor læreren spør, får svar, og så evaluerer svaret (Mehan, 1979). Denne form for undervisning baserer seg på å memorere, slik som Stein, et al. (2000) sier er lavt presterende og stiller lite krav til tenkning. Innenfor denne dimensjonen vil derfor samtaletrekkene til Chapin, et al. (2009) være av betydning, hvor læreren ikke bare bekrefter riktig svar, eller sier hva elevene skal gjøre, men hjelper og utfordrer akkurat nok til at elevene kan lære og forstå selv. Oppgavene læreren gir elevene, stiller som Stein, et al. (2000)

forklarer, ulike krav til kognitiv tenkning. Hvis man ønsker å oppnå kognitiv tenking, må man velge oppgaver med høyt presterende nivå, som *prosedyrer med sammenheng* og *å gjøre matematikk* (Stein, et al., 2000)**.** Dersom man arbeider med oppgaver med lavt presterende nivå vil ikke oppgavene være kognitivt krevende. Son og Kim (2015) påpeker at spørsmålene også stiller ulike krav til kognitiv tenkning. Derfor vil valgene lærere gjør når det gjelder oppgaver og spørsmål havne innenfor denne dimensjonen.

Dimensjon 3, *tilgang til matematikken* (Schoenfeld & Floden, 2014a), handler om i hvor stor grad det som gjøres i klasserommet inviterer og støtter alle elevene til å engasjere seg i matematikken. Det matematiske innholdet kan være godt, men hvis bare noen få elever får delta, blir det ikke en rettferdig og god undervisning (Schoenfeld & Floden, 2014a). Undervisningen må altså tilpasses slik at alle elevene har mulighet til å tilegne seg matematikken, slik NCTM (2000) sitt prinsipp om *rettferdig tilgang* understreker. Dimensjonen fokuserer ikke på at aktivitetene og oppgavene som gis skal tilpasses nivået til elevene, da dette blir behandlet i dimensjon 1 og 2, selv om dette også vil være med å påvirke tilgangen (Schoenfeld & Floden, 2014a). Eksempelvis så tenker elever forskjellig, derfor må det åpnes for oppgaver som kan løses på forskjellige måter. Hvis oppgaver er formulert vanskelig kan læreren forenkle oppgaveteksten slik at flere forstår og dermed får mulighet til å utføre oppgaven. Oppgavene skal altså nå ut til *alle* elevene, slik NCTM (2000) sitt prinsipp om *rettferdig tilgang* påpeker.

Matematiske diskusjoner må ikke foregå mellom lærer og bare noen få elever, men alle må inviteres inn i diskusjonen (Schoenfeld & Floden, 2014a). Samtaletrekkene til Chapin, et al. (2009) kan bidra til dette, ved at man aktivt drar flere inn i diskusjonen. Schoenfeld og Floden (2014a) sier også at flere elever får mulighet til å engasjere seg i matematikken hvis de får diskutert matematikken i grupper eller par. SPIL-prinsippene om *samtidig interaksjon*, *positiv innbyrdes avhengighet*, *individuell ansvarlighet* og *lik deltakelse* (Kagan & Stenlev, 2006) vil støtte opp under dimensjon 3 fordi de legger til rette for at flere elever får taletid, man har bruk for en samarbeidspartner, elever må redegjøre for egen læring og alle skal ha lik tilgang til matematikken.

Dimensjon 4, *dele og anerkjenne ideer* (Schoenfeld & Floden, 2014a), stiller krav til om elevene har mulighet til å forklare og fremme matematiske argumenter, samt bygge på andres ideer. Dette skal bidra til å utvikle deres kapasitet og vilje til å engasjere seg matematisk og samtidig få anerkjennelse for å være solid i matematikk. Som et resultat av dette skal elevene kunne skape positive identiteter som matematiske "gjørere" (Schoenfeld & Floden, 2014a).

Kilpatrick, et al. (2001) bruker også uttrykket matematiske "gjørere" når det redegjøres for tråden *productive disposition*. Elevene skal få muligheten til å generere og dele matematiske ideer, enten offentlig eller i mindre grupper. Dette kan virke likt dimensjon 3, men dimensjon 4 fokuserer ikke på hvem som har mulighet til å dele sine ideer, men i hvilken grad det støttes opp under å skape og dele ideer, forklare tankegang og føre resonnement, samtidig få tildelt eierskap til matematikken som deles (Schoenfeld & Floden, 2014a).

For å skape et miljø hvor elevene kan få delt sine ideer og få anerkjennelse fra andre kan læreren gjøre noen grep. Schoenfeld og Floden (2014a) nevner for eksempel at samtaletrekket *omformulering* (Chapin, et al., 2009) vil få frem at enkelte elever har viktige ideer, og på den måten gi anerkjennelse til disse elevene. *Cooperative learning* (Kagan & Stenlev, 2006) legger til rette for å lykkes i dimensjon 4, da elevene får mer taletid, og igjennom samarbeid gis det muligheter til å bygge på hverandres ideer. Den første, fjerde og den femte hovedstrategien til Wiliam (2007) vil også være gjeldene i dimensjon 4 ved at den første handler om å engasjere til klasseromsdiskusjon, den andre handler om å aktivere elevene slik at de får eierskap til egen læring og den femte handler om å aktivere elever til å være ressurser for hverandre.

Dimensjon 5, *tilbakemeldinger og vurdering* (Schoenfeld & Floden, 2014a), handler om i hvilken grad læreren innhenter elevenes tenkning og senere instruerer basert på disse ideene. Den fokuserer også på om det bygges opp under elevenes produktive begynnelser og misoppfatninger, samt om elevene møtes der de er for å gi dem mulighet til å bevege seg fremover. Dette samsvarer med Wiliam (2007) sin hovedide, som handler om at bevisene læreren får etter å ha observert eller vurdert elevens læring, blir brukt til å justere undervisningen etter elevenes læringsbehov. Når det skal innhentes informasjon må læreren formulere hensiktsmessige spørsmål, og oppgavene må gi elevene mulighet til å forklare, ikke bare finne svar (Schoenfeld & Floden, 2014a). Hvis læreren gjør som Dillon (1982) anbefaler, og kommer med påstander eller spørsmål på høyt kognitivt nivå i stedet for et lite gjennomtenkt spørsmål, kan læreren få ut mye informasjon. Som Wiliam (2007) sier kan et godt formulert spørsmål bidra til å avdekke begynnende misoppfatninger elevene besitter, og dermed får læreren mulighet til å styre undervisningen sin basert på disse.

2.5.1 Begrunnelse for vårt teoretiske rammeverk

Rammeverket TRU Math er nytt og aktuelt, og har sammenfattet tidligere forskning på hva som er kjent som god matematikkundervisning. Rammeverket er lett å forholde seg til med tydelige dimensjoner, samt en skåringsguide (Schoenfeld & Floden, 2014b), slik at man på en systematisk måte kan observere klasserom. Vi mener at TRU Math gir en beskrivelse av god matematikkundervisning, mens teori på de forskjellige brøkaspektene vil støtte opp under hva som er godt innhold i brøkundervisningen. Dette vil ligge til grunn i observasjonene for å skape konkrete eksempler på god undervisning i brøk. Vi vil i neste kapittel, *Metode*, mer nøyaktig beskrive hvordan vi har benyttet dette rammeverket for observasjon og analyse, og hvordan vi ut fra dette kan hente ut konkrete og realistiske eksempler på god brøkundervisning.

3 Metode

Vi skal nå forklare hvilke metodiske valg som er gjort for å svare på hvordan god brøkundervisning kan gjennomføres i skolen. I dette kapittelet vil vi presentere vårt verdenssyn, de metodiske valgene og vi forklarer og begrunner gjennomføringen av prosjektet. Til slutt argumenteres det for prosjektets reliabilitet og validitet, hvor det stilles noen kritiske spørsmål til datainnsamlingen, samt forskningsetiske hensyn vi har tatt.

3.1 Pragmatisk verdenssyn

Cresswell (2009) sier at verdenssyn er et grunnleggende sett av forestillinger som styrer handlingene dine innenfor forskning. Han presenterer fire forskjellige verdenssyn**;** postpositivisme**;** konstruktivisme; advocacy/participatory; og pragmatisme. Vi ønsket å finne gode undervisningssituasjoner hvor vi rett og slett ville se hva som fungerte i klasserommet. Dette plasserer oss under det pragmatiske verdenssynet, som sier at sannhet er det som virker for øyeblikket (Cresswell, 2009). Vi har et problem, som går ut på hvordan god brøkundervisning kan se ut på sjette trinn, og valgte ut de metodene vi mener kan gi oss svar på dette. Mens andre verdenssyn gjerne begrenser valg av metode, sier Cresswell (2009) at forskere innenfor en pragmatisk tilnærming har frihet til å velge de metodene, datainnsamlingsmetodene, teknikkene og prosedyrene som passer best til det de skal finne ut, og åpner opp for forskjellige verdenssyn. For eksempel med et konstruktivistisk verdenssyn vil kunnskap konstrueres av menneskers tolkning av virkeligheten (Cresswell, 2009), ville man kanskje vært mer interessert i læreres oppfatning av god brøkundervisning. Innenfor dette verdenssynet er en typisk metode intervju med åpne spørsmål, slik at deltakerne får delt sine synspunkt (Cresswell, 2009). Det pragmatiske verdenssynet tar utgangspunkt i handlinger, situasjoner og konsekvenser. I stedet for å fokusere på metoder, legger forskere vekt på å bruke alle metoder tilgjengelig for å forstå problemet (Cresswell, 2009). I vårt tilfelle ønsket vi å observere undervisning for å svare på vårt forskningsspørsmål. For å få en bedre forståelse av situasjonene vi undersøkte valgte vi også å benytte oss av intervju.

3.2 Valg av metode

Den viktigste faktoren for valg av metode var at den skulle hjelpe oss å svare på forskningsspørsmålet vårt. Med vårt forskningsspørsmål vil vi finne eksempler på god brøkundervisning i to 6. klasser. For å finne ut av dette måtte vi gjøre en grundig og detaljert undersøkelse. Av erfaring går et undervisningsopplegg aldri helt som planlagt, og det er mange uforutsette hendelser og ukontrollerbare faktorer som påvirker undervisningen. Dette ønsket vi å se og valgte å fokusere på to klasser på to forskjellige skoler, for å få et variert datamateriale. Ved en kvalitativ tilnærming kan man gå i dybden av undervisningen og ifølge Cohen, Morrison, og Manion (2007) vil dette kunne gi en detaljert og grundig forståelse av observerbare handlinger, fenomener og holdninger. En kvalitativ tilnærming ga oss mulighet til å oppleve hva og hvordan det ble undervist, på en detaljert og grundig måte. Ved en kvantitativ tilnærming kunne vi ha undersøkt mange lærere og spurt hvordan de underviste, men det er ikke alltid samsvar mellom det man sier og det man gjør (Lev-Zamir & Leikin, 2013). Derfor ville vi se og oppleve undervisningen selv.

Vi ønsket å se på kvalitet i undervisningen og måtte finne et rammeverk som kunne hjelpe oss å observere dette. Schoenfeld og kollegaene har arbeidet lenge med rammeverket TRU for å beskrive produktive læringsmiljø. Rammeverket fremmer ikke nye, radikale ideer eller løsninger, men er utviklet for å samsvare med det som fra før av er kjent som god praksis (Schoenfeld, 2015). Vårt teoretiske rammeverk, TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a), er spesielt laget for matematikk, er grundig og detaljert og er delt inn i fem sentrale dimensjoner for klasseromsaktivitet. I tillegg har rammeverket en skåringsguide for å klassifisere undervisning. I vårt prosjekt kunne vi for eksempel gjennomført et aksjonsforskningsprosjekt, der vi gikk inn i én eller flere klasser for *selv* å gjennomføre undervisningsopplegg forskning mener er gode, men TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a) sine fem dimensjoner krever kjennskap til elevene. Dette er noe vi ikke kan opparbeide oss uten å ha vært en stund i skolen. Derfor mente vi det var best å oppsøke dyktige lærere som allerede hadde kjennskap til elevene og klassen, for så å se hva som var bra og hva som fungerte.

3.2.1 En casestuide

I vårt masterprosjekt gikk vi i dybden av undervisningen for å gi en grundig og detaljert fremstilling av hvordan god undervisning kommer til syne i to 6. klasser. Innenfor kvalitativ tilnærming finnes det ulike retninger, og Cresswell (2009) trekker frem fem hovedretninger innenfor kvalitativ forskning; ethnography; grounded theory; case studies; phenomenological research; og narrative research. Forskjellen mellom disse er blant annet hvordan man stiller forskningsspørsmål, og de har ulike metoder for datainnsamling og analyse. I vårt prosjekt hentet vi ut mye informasjon fra to lærere i forskjellige matematikklasser i løpet av to uker. Et casestudie ble et naturlig valg for oss, da et casestudie samler inn informasjon fra noen få enheter eller caser over en bestemt tidsperiode, og datainnsamlingen skal være detaljert og omfattende (Cresswell, 2009). Casestudier skaper unike eksempler fra ekte personer, i ekte situasjoner, hvor det skapes teori som kan bidra til å forstå andre liknende situasjoner (Cohen, et al., 2007). For å kunne svare på vårt forskningsspørsmål ønsket vi å oppleve hvordan ekte undervisningssituasjoner fra dyktige lærere ser ut. Da vi ønsket å gå inn i en hverdagslig situasjon i et vanlig klasserom for å finne eksempler på god brøkundervisning, havner vårt prosjekt under det Bryman (2012) omtaler som en eksemplifiserende case. I denne type case trenger ikke eksemplene være ekstreme eller unike, men sammenfatter en bredere kategori av det som studeres (Bryman, 2012). Vi var ikke avhengig av at læreren er ekspert på brøk, men vi ønsket å hente ut eksempler på autentiske undervisningsopplegg fra skolen.

3.3 Valg av metode for datainnsamling

Innenfor pedagogikk er det vanlig å se eller spørre (Kleven, Tveit, & Hjardemaal, 2011). For å svare på forskningsspørsmålet ønsket vi å *se* hvordan undervisningen var, for så å *spørre* hvorfor undervisningen ble slik og hvilke tanker lærerne hadde om undervisningen. Observasjon og intervju ble derfor valgt for å få mest mulig informasjon fra klasserommet. Ved et casestudie benytter man seg av datainnsamlingsmetoder som for eksempel intervju, observasjon, dokumenter eller eksperimenter (Cohen, et al., 2007).

Den viktigste metoden i vår forskningen var observasjon, fordi det er selve undervisningssituasjonene som svarer på vårt forskningsspørsmål. Intervju ble benyttet som en metode for å utdype og forklare undervisningen. Vi kunne valgt å bare observere, men siden det er mye i en undervisningssituasjon som ikke er observerbart, og for at vi skulle slippe å feiltolke situasjonene, valgt vi å intervjue lærerne basert på vår observasjon.

3.3.1 Utvalg

Da vi skulle rekruttere våre informanter ønsket vi dyktige matematikklærere på mellomtrinnet. I kvalitativ forskning velges informantene ut ved strategisk utvelgelse (Christoffersen & Johannessen, 2012). Bryman (2012) sier at ved kvalitative studier kan snøballmetoden benyttes for å rekruttere informanter. Ved snøballmetoden rekrutteres informanter ved at forskeren først tar kontakt med små grupper eller personer som er relevant for forskningstemaet, og de igjen kan vise til andre informanter eller personer som er villige til å delta, samt relevant for forskningstemaet (Bryman, 2012). Tilslutt sitter man igjen med hensiktsmessige informanter som er villig til å delta på prosjektet. Vi ønsket dyktige lærere for å ha en bedre mulighet til å se god undervisning. Ved å se på mer enn en lærer ville man kunne få se flere måter å introdusere brøk på, fra forskjellige synspunkt. Vi begynte vår utvelgelse med å forhøre oss med veileder, som viste oss til en informant som var villig til å delta. Den andre informanten ble anbefalt av rektor på skolen, der vi spurte etter en dyktig matematikklærer med minimum 60 studiepoeng. Antall studiepoeng er ikke nødvendigvis et mål på om læreren er dyktig, men hvis læreren har utdannet seg innen matematikk, mente vi sjansen var større for å se god matematikkundervisning. Når man benytter snøballmetoden må man stole på anbefalingene man får (Christoffersen & Johannessen, 2012). Vi kunne økt sjansene våre for å se god brøkundervisning ved å ha flere informanter, men på grunn av oppgavens omfang og tiden vi har til rådighet, har vi valgt to stykker for å kunne se på opplegg fra forskjellige skoler, der lærere har forskjellig tanker om undervisning.

Vi ønsket lærere som underviste på mellomtrinnet, siden det er da elevene starter med mer omfattende brøk, som å finne fellesnevner og kunne regne med brøk. Ved å komme tidlig inn i introduksjonen av brøk ville vi kunne se hvilke aspekter undervisningen to utgangspunkt i, og hvordan lærerne bygget opp brøkundervisning. Dette mente vi var viktig for å se hva elevene synes var vanskelig, og oppdage de undervisningssituasjonene som kunne hjelpe å oppklare de vanligste misoppfatningene i brøk. Begge lærerne som er valgt ut underviser på 6.trinn og bruker læreverket Multi. På skole A var det 25 elever og på skole B var det 17 elever.

3.3.2 Observasjon

I vår forskning ønsket vi å finne ut hvordan god brøkundervisning kommer til syne på 6. trinn, derfor mente vi at gjennom observasjon vil vi kunne se hva og hvordan lærerne underviser, samt vi vil kunne hente ut autentiske og gode undervisningsopplegg i brøk. På denne måten vil man få et reelt blikk på hva som fungerer i klasserommet, og man slipper ifølge Cohen, et al. (2007) å måtte stole på andres forskning. Observasjon gir en mulighet til å selv å oppleve en bestemt situasjon og tolke den, og observasjonsdataen skal gjøre det mulig for forskeren å gå inn og forstå situasjonen som er beskrevet (Cohen, et al., 2007). I pedagogisk sammenheng kan man forstå observasjon som oppmerksom iaktakelse (Bjørndal, 2002). Ved tradisjonell observasjon ønsker man ikke å skape noe nytt eller manipulere situasjoner, bare observere akkurat som det er (Cohen, et al., 2007). Hva man observerer kommer an på sted, tid, antall observatører og hva man fokuserer på (Cohen, et al., 2007).

Siden man bruker alle sansene når man observerer, vil observasjonene alltid oppleves annerledes og påvirkes av den som observerer (Bjørndal, 2002). Vi ønsket å påvirke undervisningen minst mulig og ønsket ikke å delta på noen som helst måte. Ved deltakende observasjon observerer man samtidig som man deltar i situasjonen, og ved ikke-deltakende observasjon er oppgaven å bare observere (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Vi ønsket som nevnt å observere undervisningssituasjoner i brøk og hvordan de utspilte seg i klasserommet og målet var å finne gode undervisningsopplegg som hjelper elever med å forstå brøk. Observasjon kan i hovedsak foregå enten strukturert eller ustrukturert. Ved strukturert observasjon vet man på forhånd hva man vil observere, og har fastsatt kategorier, mens i en ustrukturert observasjon er man åpen for hva man ser etter og starter observasjonen uten fastsatte kategorier (Christoffersen & Johannessen, 2012). Da vi på forhånd visste hva vi ønsket å observere er det mer effektivt ifølge Cohen, et al. (2007) å gå inn i situasjoner med et forberedt observasjonsskjema, og Bjørndal (2012) mener undersøkelsen blir mer presis med en strukturert observasjon. Vi var ikke-deltakende observatører og valgte å ha en strukturert observasjon med et forberedt observasjonsskjema.

Utforming av observasjonsskjemaet

Siden observasjonen var strukturert, måtte vi utarbeide et observasjonsskjema. Vi skulle se på undervisningssituasjoner og trengte et rammeverk som dekket ulike situasjoner i klasserommet på en oversiktlig og overkommelig måte. Her valgt vi å benytte oss av Schoenfeld og Floden (2014a) sitt rammeverk, TRU Math, som beskriver produktive læringsmiljø. Rammeverket ble valgt fordi det er spesielt laget for matematikk og karakteriserer viktige dimensjoner innenfor klasseromsaktivitet i matematikk, samt at det blir beskrevet forskjellige nivåer dimensjonene kan være på**.** Rammeverket har en veiledning til observasjon med forholdsvis få, men presise kategorier, som beskriver hva man skal se etter for å gjenkjenne god undervisning (Schoenfeld & Floden, 2014b). Dette gjorde det oversiktlig og overkommelig når vi skulle observere, samt svare på hvilket nivå undervisningen var på.

TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014b) har en skåringsguide som skal være et verktøy for å måle klasseromsaktiviteter innenfor de fem dimensjonene; *matematikken; krav til kognitiv tenking; tilgang til matematikken; dele og anerkjenne ideer;* og *tilbakemelding og vurdering*. Skåringsguiden hjelper å observere nivåer innenfor dimensjonene og det er tre nivåer, hvor 1 er det laveste og 3 er det høyeste. Vi ønsket å se hvordan undervisning på nivå 3 ser ut. Det er i tillegg laget forskjellige guider alt etter hva som foregår i klasserommet. Det er laget en generell guide, men også egne guider for individuelt arbeid, gruppearbeid eller undervisning i hel klasse. Vi valgte å lage en oppsummering av skåringsguiden (vedlegg 1), der vi valgt å sammenfatte den generelle guiden med guiden til undervisning i hel klasse. Dette gjorde vi fordi de var veldig like og det skulle være oversiktlig når vi brukte den i observasjonen av undervisningen. Vi hadde også oppsummering av guidene for individuelt arbeid og gruppearbeid i vår oppsummering.

For å forklare hvordan vi kan plassere undervisningen på de forskjellige nivåene tar vi for oss den generelle skåringsguiden (Figur 3.1).

Summary Rubric

	The Mathematics	Cognitive Demand	Access to Mathematical Content	Agency, Authority, and Identity	Uses of Assessment
	How accurate, coherent, and well justified is the mathematical content?	*To what extent are students supported in grappling with and making sense of mathematical concepts?*	*To what extent does the teacher support access to the content of the lesson for all students?*	*To what extent are students the source of ideas and discussion of them? How are student contributions framed?*	*To what extent is students' mathematical thinking surfaced; to what extent does instruction build on student ideas when potentially valuable or address misunderstandings when they arise?*
1	Classroom activities are unfocused or skills-oriented, lacking opportunities for engagement with key grade level content (as specified in the Common Core Standards)	Classroom activities are structured so that students mostly apply memorized procedures and/or work routine exercises.	There is differential access to or participation in the mathematical content, and no apparent efforts to address this issue.	The teacher initiates conversations. Students' speech turns are short (one sentence or less), and constrained by what the teacher says or does.	Student reasoning is not actively surfaced or pursued. Teacher actions are limited to corrective feedback or encouragement.
2	Activities are at grade level but are primarily skills-oriented, with few opportunities for making connections (e.g., between procedures and concepts) or for mathematical coherence (see glossary).	Classroom activities offer possibilities of conceptual richness or problem solving challenge, but teaching interactions tend to "scaffold away" the challenges, removing opportunities for productive struggle.	There is uneven access or participation but the teacher makes some efforts to provide mathematical access to a wide range of students.	Students have a chance to explain some of their thinking, but the teacher is the primary driver of conversations and arbiter of correctness. In class discussions, student ideas are not explored or built upon.	The teacher refers to student thinking, perhaps even to common mistakes, but specific students' ideas are not built on (when potentially valuable) or used to address challenges (when problematic).
3	Classroom activities support meaningful connections between procedures, concepts and contexts (where appropriate) and provide opportunities for building a coherent view of mathematics.	The teacher's hints or scaffolds support students in productive struggle in building understandings and engaging in mathematical practices.	The teacher actively supports and to some degree achieves broad and meaningful mathematical participation; **OR** what appear to be established participation structures result in such engagement.	Students explain their ideas and reasoning. The teacher may ascribe ownership for students' ideas in exposition, **AND/OR** students respond to and build on each other's ideas.	The teacher solicits student thinking and subsequent instruction responds to those ideas, by building on productive beginnings or addressing emerging misunderstandings.

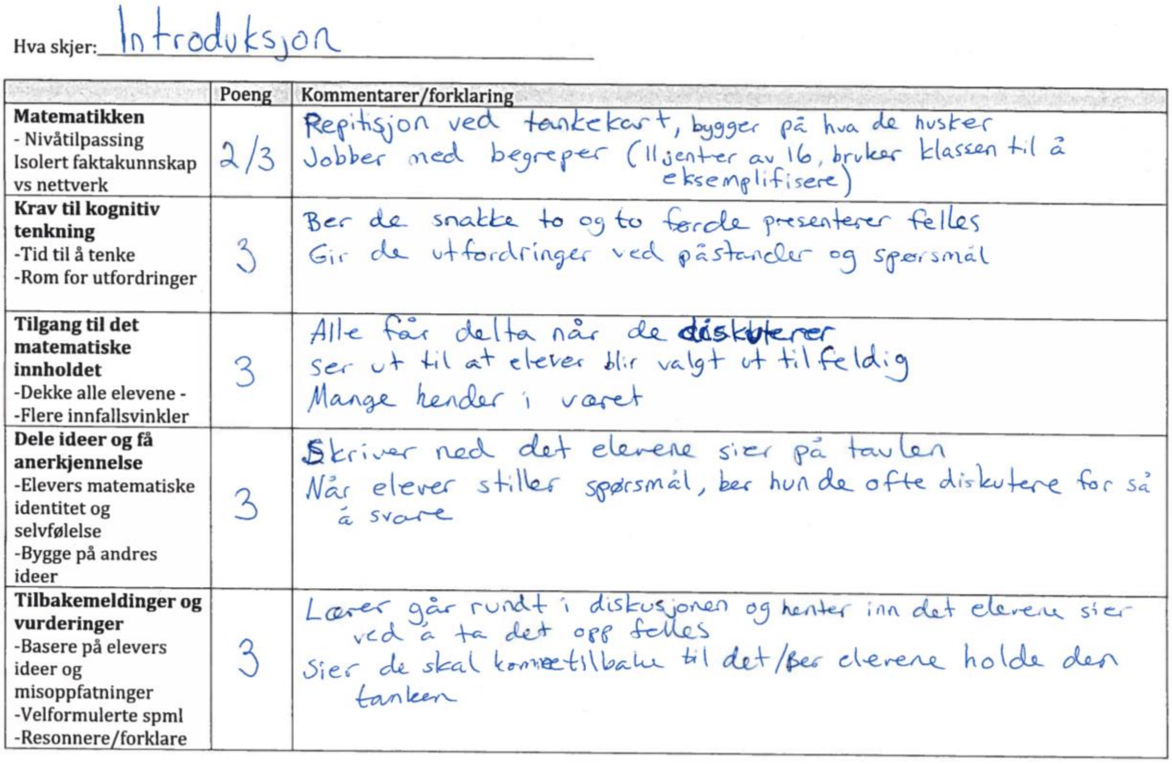
Figur 3.1 Generell skåringsguide (Schoenfeld og Floden, 2014b)

Eksempelvis er det overordnede spørsmålet innenfor *matematikken* hvor nøyaktig, sammenhengende og godt begrunnet det matematiske innholdet er. Med dette kan vi si i hvilken grad klasseromsmiljøet gir elever mulighet til å forstå matematikken og utvikle den sammenhengende forståelsen matematikken legger opp til. Hvis matematikken er på nivå 1, er aktivitetene ufokusert og treffer ikke på rett nivå. Elevene har ikke mulighet til utvikle matematiske fremgangsmåter og undervisningen er ferdighetsbasert. Undervisning på nivå 1 baserer seg altså hovedsakelig på en *instrumentell forståelse* (Skemp, 1976). På nivå 3 fokuseres det på meningsfulle sammenhenger og at matematikken skal gi mening. På dette nivået er det *relasjonell forståelse* (Skemp, 1976) og Kilpatrick et al. (2001) sine tråder utvikles, og på nivå 3 kan man observerer om matematikken legger opp til dette. Nivå 2 vil alltid være en mellomting mellom nivå 1 og 3, der aktivitetene for det meste er ferdighetsbasert og det er overflatiske sammenhenger i matematikken.

Hvert nivå til hver dimensjon er godt beskrevet i skåringsguiden (Schoenfeld & Floden, 2014b), og det var tydelig hva man skulle se etter for å klassifisere nivåene. For eksempel i dimensjon

2, *krav til kognitiv tenking*, står det blant annet at for å oppnå nivå 3 må elevene få streve litt og bli gitt tid til å tenke. Innenfor dimensjon 3, *tilgang til matematikken*, er forskjellen på nivå 2 og 3, at på nivå 3 er det bevis for suksess av undervisningsstrukturer man har skapt, som for eksempel mange hender i været eller at læreren aktivt oppfordrer alle elever til deltakelse. I dimensjon 4, *dele og anerkjenne ideer*, står det blant annet at for å oppnå nivå 3 må minst en av elevene stikke seg ut og forsvare sine ideer, eller at læreren gir eierskap til elevene etter uttalelser. Det kan være vanskelig å observere nivå 3 innenfor dimensjon 5, *tilbakemeldinger og vurdering*. Her skal læreren ha hentet inn elevenes sine tanker og basert undervisningen på dette. Schoenfeld og Floden (2014a) sier at responsen til elevers ideer kan ofte være ikke-observerbar, fordi en observatør har ikke tilgang til alle avgjørelser læreren tar. TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a) fokuserer på hvordan læreren eksplisitt bruker elevers resonnering til å guide undervisningen. Skåringsguiden (Schoenfeld & Floden, 2014b) sier man kan se etter om elevenes tenkning blir referert til og om det påvirker undervisningen. Ved bruk av intervju kunne vi spørre om de ikke-observerbare faktorene i undervisningen.

Når vi skulle utforme vårt observasjonsskjema hadde vi lest om Kristine Bjerkmo (2015) sine erfaringer ved bruk av TRU Math, der hun erfarte at hun trengte god plass til notater. Dataene våre ble kvantifisert ved hjelp av å tallfeste undervisningen. Kvantifiseringen ga oss en oversikt over de kvalitative observasjonene. Tallene alene forteller oss om undervisningen var på et høyt eller lavt nivå, men ikke *hva* som var det, og vi var avhengig av gode kvalitative notater. Derfor tok vi Bjerkmo sin erfaring til følge, og hadde god plass til utfyllende notater innenfor hver dimensjon. Vi ønsket også en egen kolonne til å plassere nivået av undervisningen, slik at vi etter endt observasjon lett kunne se hvilke situasjoner som var på et høyt nivå. For at vi lettere kunne se hva vi skulle være oppmerksomme på under hver dimensjon i observasjonen, plasserte vi noen stikkord under dimensjonene. I tillegg hadde vi oppsummeringen av de forskjellige skåringsguidene lett tilgjengelig. I Figur 3.2 vises et eksempel på et utfylt observasjonsskjema.



Hva skjer: Introduksjon

	Poeng	Kommentarer/forklaring
Matematikken - Nivåtilpassing Isolert faktakunnskap vs nettverk	2/3	Repitisjon ved tankekart, bygger på hva de husker Jobber med begreper (11 jenter av 16, bruker klassen til å eksemplifisere)
Krav til kognitiv tenkning -Tid til å tenke -Rom for utfordringer	3	Ber de snakke to og to førde presenterer felles Gir de utfordringer ved påstander og spørsmål
Tilgang til det matematiske innholdet -Dekke alle elevene - -Flere innfallsvinkler	3	Alle får delta når de diskuterer Ser ut til at elever blir valgt ut tilfeldig Mange hender i været
Dele ideer og få anerkjennelse -Elevers matematiske identitet og selvfølelse -Bygge på andres ideer	3	Skriver ned det elevene sier på tavlen Når elever stiller spørsmål, ber hun de ofte diskutere for så å svare
Tilbakemeldinger og vurderinger -Basere på elevers ideer og misoppfatninger -Velformulerte spml -Resonnere/forklare	3	Lærer går rundt i diskusjonen og henter inn det elevene sier ved å ta det opp felles Sier de skal ~~komme~~ tilbake til det/ber elevene holde den tanken

Figur 3.2 Eksempel på dimensjonene og nivåene i observasjonsskjemaet (Egen figur).

Forberedelser og gjennomføring av observasjon

Før datainnsamlingen testet vi observasjonsskjemaene på ulike videoer på internett, for å øve oss på å ta gode notater og sette riktig nivå. I tillegg til observasjonsskjemaene ble det brukt lydopptaker på læreren. Vi testet lydopptakeren i matpausen til den ene klassen, for å forsikre oss om at læreren sin stemme ville bli hørt gjennom støy fra elevene og klasserommet. Mikrofonen var trådløs og vi hadde på forhånd testet at rekkevidden var tilstrekkelig for å observere i klasserom.

Datainnsamlingen ble gjennomført i seks klokketimer gjennom to uker i hver klasse. I den ene klassen var det to ganger 90 minutter, i den andre tre ganger 60 minutter i hver uke, totalt 180 minutter i hver klasse. For hver time hadde vi flere observasjonsskjemaer klare og vi byttet skjema hver gang det oppsto en ny aktivitet eller situasjon i klasserommet. Underveis i observasjonen vurderte vi hvilket nivå situasjonen befant seg på innenfor hver dimensjon. Vi brukte oppsummeringen av skåringsguiden(vedlegg 1**)** aktivt for å hjelpe å klassifisere nivåene. Under observasjonen satt vi stort sett bakerst i klasserommet, for å påvirke elevene og det som skjedde i undervisningen minst mulig. Ved noen anledninger beveget vi oss rundt i klasserommet, for eksempel når læreren hjalp elevene med oppgavejobbing der vi ville se hvilke oppgaver elevene trengte hjelp med og hva læreren gjorde for å hjelpe. Siden vi var to observatører ønsket vi ikke å påvirke hverandre, derfor holdt vi oss adskilt. Etter endt observasjon sammenliknet vi observasjonsskjemaene våre og diskuterte nivået vi hadde satt for å bekrefte at vi hadde samme oppfatning av undervisningen. Vi diskuterte også hvilke situasjoner som fikk høy skår, slik at vi kunne transkribere disse og dermed få et helhetlig bilde av dataene og hva som faktisk gjorde at situasjonene var på et høyt nivå.

Bjørndal (2002) sier at ved bruk av lyd- eller videoopptak kan man fastholde informasjon fra de pedagogiske øyeblikkene som ellers ville bli glemt eller til og med aldri registrert. Hver gang man hører opptaket kan man registrere noe nytt og interessant, og på denne måten kan man bygge en dypere forståelse av en undervisningssituasjon. Cohen, et al., (2007) sier et videoopptak kan gi rikere data og få med seg ikke-verbal kommunikasjon, derimot er det tidkrevende å analysere dataen. Samtidig vil alle elever, lærere og uforutsette hendelser havne på film og det er vanskeligere å få tillatelse av NSD[4] til å gjennomføre prosjektet. Med størrelsen på vår master mente vi det var tilstrekkelig med lydopptak kombinert med foto av tavle, oppgaver og annet vi fant relevant. Ved bruk av lydopptaker kunne vi i ettertid gjennomgå undervisningen og høre hva som ble sagt i klasserommet. For vårt prosjekt var det viktig å få med seg all kommunikasjon i klasserommet, for dimensjonene krever for eksempel resonnement, begrunnelser og tilbakemeldinger. For å finne ut om lærerne for eksempel brukte samtaletrekk i undervisningen, var det fordelaktig å høre gjennom undervisningen ord for ord og få det bekreftet.

3.3.3 Intervju

Gjennom observasjon kunne vi finne eksempler på hvordan god brøkundervisning kan se ut på 6. trinn, og dermed svare på vårt forskningsspørsmål. Likevel var det viktig å få frem lærernes tanker rundt det vi hadde observert slik at vi unngikk feiltolkninger. Noen valg lærerne gjorde kan ha vært en del av en langsiktig plan som skulle følges opp ved et senere tidspunkt, da vi som forskere ikke var tilstede. Andre valg kan ha vært basert på lærerens kjennskap til elevgruppen, og det vi observerte ble gjort fordi læreren mente at disse valgene var best med tanke på utvalgte elevers behov, eller hva klassen hadde gjort tidligere. Dette er faktorer som ikke kunne observeres, derfor ønsket vi også å intervjue. Et forskningsintervju er en profesjonell samtale mellom en intervjuer og et intervjuobjekt (Kvale, Brinkmann, Anderssen, & Rygge,

[4] Norsk senter for forskningsdata. NSD er personvernombud for forskning og gir råd om personvern til studenter og forskere.

2009), hvor man får diskutere og høre tolkninger av bestemte tema eller situasjoner (Cohen, et al., 2007). Intervju er et fleksibelt verktøy som kan brukes nesten overalt og gjør det mulig å få fyldige og detaljerte beskrivelser (Christoffersen & Johannessen, 2012). Intervjuet har fordelen med å legge merke til detaljer som ellers kunne blitt oversett og til å forstå den intervjuedes perspektiv på en bedre måte enn ved bare observasjon (Bjørndal, 2002).

I intervjuet ønsket vi å ta utgangspunkt i det vi hadde observert og vi måtte derfor ha oversikt over temaer og spørsmål som skulle tas opp i løpet av intervjuet. Vi ønsket utdypende svar fra lærerne innenfor de fastsatte temaene. Patton (1980) presenterer fire typer intervju med ulik grad av struktur; samtaleintervju; standardisert intervju med åpne spørsmål og svar; bruk av intervjuguide; og standardisert intervju med faste svaralternativ. Det mest ustrukturerte er samtaleintervju, der begge partene har stor frihet til å vinkle samtalen, og spørsmålene blir formet mer eller mindre underveis. Motsatt har vi det mest strukturerte intervjuet, standardisert intervju med faste svaralternativ. Alle spørsmål og rekkefølgen på de er fastsatt, samt at det er svaralternativer intervjuobjektet kan velge mellom (Patton, 1980). Fordi vi ønsket utfyllende svar innenfor de fastsatte temaene valgte vi å gjennomføre et intervju med *bruk av intervjuguide.* Dette er et semistrukturert intervju da vi forholdt oss til de fastsatte temaene, men lærerne kunne svare utfyllende, samt at vi kunne stille oppfølgingsspørsmål.

Utforming av intervjuguide

Vår intervjuguide tok utgangspunkt i observasjoner og transkripsjoner av utvalgte situasjoner. Etter å ha analysert observasjonsskjemaene for å finne ut hva vi trengte mer informasjon om, skrev vi ned alle spørsmål vi hadde rundt observasjonen. Vi valgte deretter å fordele spørsmålene innenfor dimensjonene i TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a), slik at vi var sikker på at vi kunne svare på forskningsspørsmålet med dataen vi fikk inn. I Tabell 3.1 vises et utdrag av sorteringen av spørsmålene etter endt observasjon hos skole A. Ved hjelp fra veileder formulerte vi spørsmålene slik at vi fikk svar på det vi ønsket. Det ble utformet to forskjellige intervjuguider til hver av lærerne (vedlegg 5 og 6), men fremgangsmåten var den samme.

Tabell 3.1 Sortering og identifisering av spørsmål etter observasjon hos skole A

Matematikken	**Krav til kognitiv tenkning**	**Tilgang til matematikken**	**Dele og anerkjenne ideer**	**Tilbakemeldinger og vurdering**
Hvorfor intro-oppgavene? Hvorfor tankekart? Hva brukte du det til senere? Hvorfor 6.22? Hvorfor denne i lyttekrok? Hvorfor starter du/fokuserer du på del av helhet?	Hvorfor 6.22? Hvorfor denne i lyttekrok? Vi ser at du kan sitte lenge hos enkelte elever, når bestemmer du deg for å gå videre/ønsker å sitte igjen med før du går? Hva anser du som gode oppgaver i brøk?	Hvorfor lyttekrok? Refleksjoner rundt dette. Dere jobber mye to og to/samarbeid, hvorfor? Hvordan setter du sammen gruppene? Hvilke grep gjør du for å få en god/strukturert klasseromsdiskusjon? Hva er viktig?	Hvorfor lyttekrok? Refleksjoner rundt dette. Hvordan bevarer du elevers selvfølelse? Er du bevisst på hvordan du formulerer deg i klasserommet/ stiller spørsmål?	Hvorfor lyttekrok? Refleksjoner rundt dett. Hvordan gir du vurdering for læring? Underveisvurdering? Du ber elevene holde tankene, hvorfor det? Lar du elevene styre retningen til undervisningen?

Forberedelser og gjennomføring av intervjuet

Siden vårt intervju var basert på observasjonen kunne vi ikke gjennomføre et testintervju, derfor ble temaene og spørsmålene i intervjuguiden nøye gjennomgått sammen med veileder. Når man er to som intervjuer kan man utfylle hverandre, noe som ifølge Cohen, et al., (2007) fører til et mer komplett og pålitelig intervju. På den andre siden kan intervjuobjektet føle det skremmende å ha to stykker som intervjuer, samtidig kan det være uklart hvilke roller intervjuerne har og hvem man skal forholde seg til (Cohen, et al., 2007). For å unngå dette avklarte vi på forhånd rollefordelingen til intervjuerne med lærerne. Den ene tok rollen som hovedintervjuer og ledet intervjuet, mens den andre skulle følge med og bryte inn med oppfølgingsspørsmål om nødvendig. Siden vi har liten erfaring med å intervjue og ikke fikk tatt et testintervju, valgte vi å ha tydelige og enkle roller i intervjuet. Hovedintervjuer hadde i oppgave å holde seg til intervjuguiden og stille spørsmålene. Den andre skulle være et sikkerhetsnett og fokusere mer på svarene læreren ga, og om nødvendig stille oppfølgingsspørsmål som hovedintervjueren ikke fikk med seg.

Intervjuene ble gjennomført i etterkant av observasjonene. Vi ønsket å gjøre det så tidlig som mulig etter observasjonene slik at læreren husket hvordan undervisningen hadde vært og hva de hadde tenkt. Vi planla spørsmålene i intervjuguiden grundig, og i forkant av spørsmålene sammenfattet vi situasjonene vi hadde observert, slik at læreren kunne huske bedre hva som hadde skjedd. Vi hadde blant annet med transkripsjoner, bilder og figurer fra undervisningen.

Begge intervjuene ble gjennomført i egne uforstyrrede rom, med bare intervjuere og intervjuobjekt tilstede. Det ene intervjuet varte i 60minutter, mens det andre varte i 35minutter.

Under intervjuet ble det benyttet lydopptak for å ta opp det som ble sagt, for ved et lengre intervju er det ikke tilstrekkelig å stole på egen hukommelse. Ved bruk av lydopptak sikrer man mer nøyaktig og fullstendig informasjon og man har mulighet til å skrive hele intervjuet i tekst(transkribere) (Bjørndal, 2002). I tillegg kan intervjueren konsentrere seg om intervjuets emne og dynamikk (Kvale, et al., 2009).

Transkribering

Transkribering dreier seg om å overføre verbale utsagn til tekst (Bjørndal, 2002) og ved å transkribere kan man finne mønster, tema og utsagn som kan brukes i analysen (Cohen, et al., 2007). Vi valgte å transkribere intervjuene og observasjonene rett etter gjennomføringen. Dette for at vi fortsatt skulle huske informasjon som kunne legges til transkripsjonene, da man i transkripsjonen mister den ikke-verbale kommunikasjonen (Cohen, et al., 2007). På forhånd hadde vi blitt enige om symbolbruk i transkriberingen, som for eksempel å bruke ".." ved en lengre pause i setningen. Vi fordelte lydopptakene mellom oss og transkriberte delene hver for oss. Siden vi var to som transkriberte sikret vi oss riktig transkripsjon ved å høre og lese gjennom hverandres transkripsjoner. I tillegg ble transkripsjonene sendt til lærerne for å sikre oss at noe ikke var oppfattet ukorrekt. I denne oppgaven er bruk av transkripsjoner finskrevet ved å ta bort ordlyder og der det var nødvendig tilføyd parenteser med informasjon som hjelper å forstå sammenhengen. Ved et langt sitat fra lærerne, der vi bare bruker deler av sitatet, har vi benyttet "(…)" som erstatning for utsagn som ikke er relevant for resultatet. Alle navn i transkripsjonen er anonymisert ved å bruke fiktive navn.

3.4 Analyse av data

Vi var ute etter undervisningssituasjoner som skårte høyt på TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a). På hvilken skole eller hvilken lærer som gjennomførte undervisningssituasjonen har liten betydning for vårt forskningsspørsmål. Vi ønsket oss to lærere slik at vi fikk et bredere datamateriale der vi fikk oppleve forskjellige klasserom, situasjoner og lærere. For oversikten sin del snakker vi om skole A og lærer A, og skole B og lærer B, slik at man kan skille mellom forskjellige undervisningssituasjoner. Cohen, et al., (2007) legger frem fem måter å organisere å presentere data på, der to er personbasert, to er temabasert og den siste er instrumentbasert. Siden vårt prosjekt ikke fokuserer på person, havner vi på en temabasert analyse. Braun og Clarke (2006) sier at tematisk analysemetode er en måte å identifisere, analysere og rapportere mønster(tema) innenfor datamaterialet, og man organiserer og beskriver datamaterialet i detalj. Når vi skulle analysere dataene våre valgte vi å presentere situasjoner eller tema innenfor undervisningen som har fått høy skår i TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a) og diskuterte hva som ble gjort for å legge til rette for et produktivt læringsmiljø. Ifølge Braun og Clarke (2006) er tematisk analyse fleksibel og det er mange måter å gjøre dette på. Ingen fremgangsmåte er bedre enn den andre og det er forskerne som må bestemme hvordan man skal presentere dataene best mulig i forhold til forskningsspørsmålet (Cohen, et al., 2007). Taylor-Powell og Renner (2003) mener at kvalitative data består av ord og observasjoner og er enig med Cohen, et al., (2007) i at analyseprosessen kan være forskjellig, for det finnes ikke *en* måte eller den *beste* måten å gjøre dette på. Tematisk analyse involverer mange valg som ofte ikke er valgt eksplisitt (Braun & Clarke, 2006), derfor har vi i hovedsak valgt å følge Taylor-Powell og Renner (2003) sine fem steg for dataanalyse, der prosessen er flytende og kan bevege seg frem og tilbake mellom stegene.

Steg én er å bli kjent med datamaterialet (Taylor-Powell & Renner, 2003). Etter å ha observert undervisningen til skole A og B valgte vi ut situasjoner som i hovedsak hadde fått skåren 3 på alle dimensjonene. Vi gikk dypere inn i disse ved å transkribere situasjonene, slik at vi fikk det i tekstformat og ble lettere å analysere. Når man analyserer dataen vil man komme på ideer, kommentarer og refleksjoner underveis og man kan da notere seg memos i teksten (Cohen, et al., 2007). Vi fordypet oss i dataen ved å lese gjennom transkripsjonen, markere og skrive memos i teksten basert på TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a) og annen relevant teori.

Steg to i datanalysen er å fokusere analysen, der man identifiserer noen nøkkelspørsmål som man ønsker at dataen skal svare på (Taylor-Powell & Renner, 2003). Etter å ha transkribert observasjonene ønsket vi også å høre lærerens perspektiv på dette. Vi valgte da å intervjue læreren for å forstå den intervjuedes perspektiv på en bedre måte (Bjørndal, 2002). Da vi skulle lage intervjuguiden til læreren, hadde vi en idemyldring der valgte vi å skrive ned alt vi lurte på etter observasjonen. Deretter prøvde vi å sortere og identifisere spørsmålene etter de fem dimensjonene i TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a)**,** som vist tidligere i Figur 3.1. Etter sorteringen, måtte vi strukturere spørsmålene. Mange av spørsmålene omhandlet mye av det samme og vi måtte spesifisere spørsmålene opp mot det vi hadde observert. I den ferdigstilte intervjuguiden satt vi opp spørsmålene i en naturlig rekkefølge uavhengig av dimensjonene, og intervjuguiden var utarbeidet basert på observasjonen med spørsmål som kunne hjelpe oss å svare på forskningsspørsmålet vårt.

Etter intervjuet transkriberte vi, og er da tilbake på steg én i analyseprosessen (Taylor-Powell & Renner, 2003), for vi måtte bli kjent med datamaterialet på nytt. Vi gjentok prosessen vi gjorde etter observasjonene ved å fordype oss i datamaterialet ved å lese gjennom, markere og skrive memos. Denne gangen så vi etter noe som skilte seg ut, likheter mellom situasjoner og spesielle grep lærerne hadde gjort. Vi valgte å legge alt som omhandlet det samme fra observasjonene og intervjuene i samme dokument, slik at alt var samlet på et sted. Datamaterialet var nå sammenfattet etter interessante situasjoner. Vi var nå kommet til steg tre i analyseprosessen, der vi skulle kategorisere informasjonen ved å identifisere og organisere kategorier og underkategorier (Taylor-Powell & Renner, 2003). For å få en oversikt valgte vi å lage at skjema som vist i Tabell 3.2, der vi så etter situasjoner som liknet og sammenfattet dokumentene vi hadde kategorisert.

Tabell 3.2 Utkast av et påbegynt analyseark

Data	**Observasjon**	**Tolkning**	**Referanser**
Observasjonsskjema nivå 3: Hva skal ut? (B) – Lærer utfordrer og får elever til å forklare Påstand (A) – elever tenker, lærer forsvarer feilsvar. Begge – Samtale rundt at deler i brøk må være like store	Begge aktivitetene i introduksjonsøkt. Skapte diskusjon, elever stilte spørsmål Elevene var engasjert. Diskuterte med hverandre Alle deltok	Utfordring – "tvinges" til å tenke – hvis oppgavene er nøye valgt ut kan man oppklare misoppfatninger Får frem diskusjon – Må bruke språket – både alene, i par og hele klassen – Får elevene til å få en mestringsfølelse	Dillon om påstander Kilpatrick, et al. sine kompetanser Wiliam sine strategier Benytter seg av samtaletrekk

Steg fire i analyseprosessen er å identifisere mønster og sammenhenger innenfor og mellom kategoriene (Taylor-Powell & Renner, 2003**.** Var det sammenheng mellom observasjonen og intervjuet? Sa lærerne det samme som de gjorde? Hadde undervisningen gått som planlagt? Var det likheter mellom de gjennomførte aktivitetene? Når vi sammenfattet dokumentene i skjemaet over kunne vi få svar på de nevnte spørsmålene, vi oppdaget likheter og så tydelige grep læreren gjorde for å oppnå høy skår i skåringsguiden (Schoenfeld og Floden, 2014b). Siden vi var ute etter eksemplifisering av brøkundervisning på et høyt nivå i TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a), ble kategoriene våre situasjonsbasert der vi drøftet hvordan undervisningssituasjoner på et høyt nivå kan se ut. Vi har nå kommet til det femte og siste steget i analyseprosessen (Taylor-Powell & Renner, 2003), som er tolkning og samling av alle tråder. Her presenteres og forklares funnene.

3.5 Reliabilitet og validitet

Reliabilitet og validitet er begreper som brukes når kvalitet innenfor både kvalitativ og kvantitativ forskning skal vurderes, men de tilnærmes noe forskjellig innenfor de to områdene (Cohen, et al., 2007). Reliabilitet handler om forskningen er pålitelig, og stiller derfor krav til nøyaktighet (Christoffersen og Johannessen, 2012). Ved høy reliabilitet i forskning skal man kunne gjenskape undersøkelsene med et lignende utvalg med tilnærmet likt resultat (Cohen, et al., 2007). Denne tilnærmingen til reliabilitet er vanskelig å forholde seg til innenfor kvalitativ forskning, da man gjerne undersøker unike situasjoner hvor gjenskaping av resultatene ikke lar seg gjennomføre (Cohen, et al., 2007). Validitet handler om hvor godt datamaterialet i forskningen representerer virkeligheten (Christoffersen og Johannessen, 2012). Tradisjonelt når man snakker om validitet så ser man i hvilken grad verktøyene som blir brukt faktisk måler det de er ment til å måle. Med tiden har begrepet validitet blitt veldig omfattende og finnes i mange former (Cohen, et al., 2007). Det er gjort flere forsøk på å tilpasse begrepene reliabilitet og validitet til kvalitativ forskning. LeCompte og Goetz (1982) har delt både reliabilitet og validitet inn i ytre og indre. Disse har vi valgt å benytte og skal redegjøre for nå.

Det er to begreper for reliabilitet, ytre reliabilitet og indre reliabilitet. Ytre reliabilitet handler om i hvilken grad studien kan bli gjentatt. Dette mener LeCompte og Goetz (1982) er et vanskelig kriteria å møte slik som det vanligvis tolkes, dette fordi det er umulig å gjenskape et intervju eller observasjon. De mener det er mer passende å si at man må kunne erstatte den opprinnelige forsker, hvor forskningen ble gjennomført konsekvent og stabilt over tid. Ved indre reliabilitet handler det om man er flere enn en observatør og om medlemmene fra forskningsteamet er enige om hva de ser og hører (Bryman, 2012).

Innenfor validitet benytter LeCompte og Goetz (1982) seg av begrepene indre og ytre validitet. Indre validitet handler om det er sammenheng mellom forskernes observasjoner og de teoretiske ideene som utvikles. LeCompte og Goetz (1982) argumenterer for at indre validitet er en styrke i kvalitativ forskning fordi man fordyper seg i den sosiale settingen av en gruppe over en lang periode. Dette gjør at forskeren kan sikre et høyt nivå av kongruens mellom konsepter og observasjoner. Ytre validitet handler om i hvilken grad resultatene kan generaliseres til andre settinger. Her mener LeCompte og Goetz (1982) at ytre validitet er en svakhet innenfor kvalitativ forskning, fordi det gjerne tar for seg caser eller har et lite utvalg (Bryman, 2012). Schofield (1990) sier det er viktig i kvalitative studier å gi en klar, detaljert og i-dybden beskrivelse, slik at andre kan bestemme om funnene er generaliserbare fra en situasjon til en annen. I kvalitativ forskning kan validiteten fremmes gjennom ærlighet, rikhet og omfang av data, dybde, deltakerne, graden av triangulering og forskerens objektivitet (Winter, 2000).

3.6 Kvalitet i vår forskning

I vår forskning brukte vi observasjon over lengre tid og observerte det samme fenomenet flere ganger. Dette vil styrke den ytre reliabiliteten vår siden observasjonen var konsekvent og stabil over tid (LeCompte & Goetz, 1982). Ved at vi var ikke-deltakende observatører, vil det være enklere for andre personer å gjøre samme forskning, da observatøren ikke skal påvirke situasjonene (Cohen, et al., 2007). Vi hadde i tillegg strukturert observasjon med tydelige kriterier på hva vi så etter, noe som igjen vil gjøre det lettere for andre forskere å gjøre det samme. Selv om man er ikke-deltakende observatør er det mulig å påvirke situasjoner med sin tilstedeværelse, spesielt når man er flere. Cohen, et al. (2007) nevner *observers effects* som betyr at hvis observatøren samler inn data vidt og over lang tid, kan tilstedeværelsen bli tatt for gitt. Den første gangen vi observerte i begge klassene var det en del spørsmål og elevene ønsket å snakke med oss. Etter å ha fått beskjed om å ikke bry seg om oss, ga de oss heller ikke oppmerksomhet. Det kan også tenkes at læreren ble påvirket av vår tilstedeværelse. Lærerne kunne bli skjerpet og kunne planlagt undervisningsopplegg nøyere på grunn av at de skulle bli iakttatt. Dette ville i så fall ikke gjort noe for vårt prosjekt siden vi er ute etter gode undervisningsopplegg. Noe som styrket vår indre reliabilitet var at vi var to observatører. I tillegg diskuterte vi etter hver observasjonsøkt, der vi ble enige om vi hadde observert det samme.

Vi skal beskrive gode undervisningsopplegg som kommer til syne i observasjonen og resultatene våre vil da samsvare med observasjonen. Dette styrker den indre validiteten. På en annen side når vi er ute etter undervisningsopplegg vil dette bare forekomme den ene gangen vi observerte, dermed vil vi ikke nødvendigvis se etter gjentatte undervisningsopplegg og vi kan ikke sikre oss kongruens mellom konsepter og observasjoner. Vi har et casestudie, noe som ikke kan generaliseres og den ytre validiteten eksisterer ikke. Generalisering innenfor kvalitativ forskning kan på mange måter være irrelevant, da fokuset ligger på å representere det fenomenet som forskes på, ikke generalisere (Cohen, et al., 2007). Vi ønsker å beskrive våre funn så detaljert og i dybden at leseren forstår undervisningsoppleggene, hvorfor de er gode og at de kan gjennomføres. Vi ønsker at lærere skal lese om funnene våre og få ideer på hvordan de kan bruke dette i egen undervisning. Undervisningsoppleggene vi fant, vet vi fungerte i disse klasserommene, men vi kan ikke si med sikkerhet at de vil fungere i andre klasserom. Likevel mener vi at funnene våre har en overføringsverdi og nytteverdi for liknende klasserom, fordi vi kommer med konkrete eksempler på hva som kan gjøres i et klasserom.

Siden vi samlet inn data i to uker i hver klasse, har vi fått mye data. Ved at vi både brukte observasjonsskjemaer og transkripsjon av utvalgte situasjoner gjorde at vi fikk et stort omfang av data, og at vi i tillegg intervjuet lærerne om undervisningssituasjonene gikk vi i dybden. Dette styrker vår validitet. Noe som kan svekke vår validitet er at vi bare undersøkte to lærere på to forskjellige skoler, for det kan være store forskjeller mellom lærere og skoler. I tillegg ble våre informanter valgt ut ved bruk av snøballmetoden, som gjorde at vi måtte stole på at anbefalingene våre var pålitelige. Den interne validiteten styrkes ved at vi har benyttet oss av metodisk triangulering, hvor vi brukte observasjon og intervju for å samle inn data. Ved hjelp av triangulering kan man i større grad sikre seg at man har forstått situasjonen riktig (Bryman, 2012). Triangulering innebærer å benytte seg av flere metoder eller datakilder innenfor feltet man undersøker, men begrepet brukes også i utvidet forstand, som for eksempel at flere forskere undersøker samme situasjon (Cohen, et al., 2007).

3.7 Etiske betraktninger

Som forskere har vi flere etiske retningslinjer som må følges. Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) har utarbeidet etiske retningslinjer som kan sammenfattes i tre typer hensyn forskere må ta (Christoffersen og Johannessen, 2012). Disse hensynene innebærer rett til selvbestemmelse, privatliv og forskerens ansvar for å unngå skade (Christoffersen og Johannessen, 2012). I vårt prosjekt hadde vi et etisk ansvar ovenfor informantene, altså lærerne vi observerte og intervjuet.

Informantene deltok frivillig og kunne på hvilket som helst tidspunkt trekke seg uten å måtte oppgi grunn. Dette ble det informert om i et eget infoskriv (vedlegg 2) som ble gitt til informantene på forhånd. I dette skrivet hadde vi også skrevet formålet med studien, og hva det innebar for informantene å delta. Lærerne skrev under på at de var villige til å delta i studien. Informantenes privatliv ble ivaretatt ved at personlige opplysninger ble behandlet konfidensielt. Både navn på skole og lærer ble anonymisert både i datamaterialet og i resultatene. Da læreres sivilstand, alder, kjønn eller andre personlige opplysninger ikke var av betydning for vår undersøkelse ble ikke dette registrert i datamaterialet. Ved bruk av lydopptak kan stemmer identifiseres. Dette ga oss som forskere et ekstra ansvar for at lydopptak ikke skulle havne på avveie. Når læreren gikk med mikrofon var det heller ikke til å unngå at elever også kunne havne på opptaket. Vi sendte derfor et infoskriv til foreldrene på skolen (vedlegg 3) hvor vi forklarte hensikten med vår undersøkelse. Bryman (2012) beskriver skade som blant annet fysisk skade, hindring av utvikling og tap av selvtillit. Ingen av dataen vi samlet inn i løpet av prosjektet kunne føre til noen skade for informantene. Av data vi samlet inn som potensielt kunne være til skade for informantene ble ikke benyttet, i tillegg var hele datamaterialet anonymisert. For at informantene ikke skulle føle ubehag ved å være med i prosjektet var det viktig at vi hadde en positiv fremtoning, og vi ønsket ikke å fremstå som anklagende eller uhensiktsmessig kritisk. Dette var spesielt gjeldene for intervjuet. At noen kommer inn i klasserommet for å vurdere kvaliteten i undervisningen kan for enkelte være følsomt, men våre informanter utrykket at det var positivt å bli vurdert som et ledd i egen utvikling

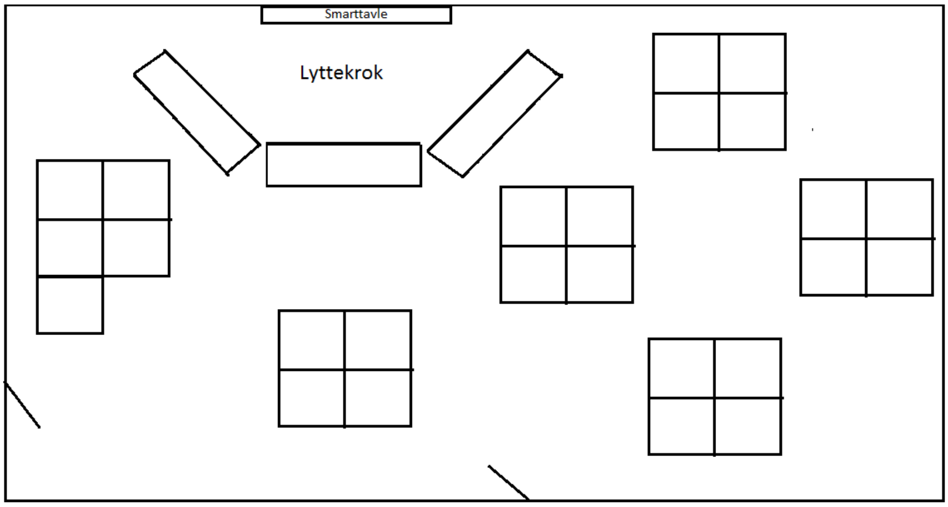
4 Analyse og drøfting av funn

Etter å ha observert lærerne gjennom to uker kom vi over flere interessante undervisningssituasjoner og måter å organisere undervisningen på. De to klasserommene var forskjellig organisert, der skole B hadde et mer tradisjonelt klasserom med pulter på rad og rekke, mens skole A benyttet seg av gruppebord og lyttekrok. Vi vil i dette kapittelet først presentere en måte å organisere undervisningen på som viste seg å være gunstig for å skåre høyt på TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a). Deretter vil vi presentere tre undervisningssituasjoner i brøk og som skåret høyt på TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a). Lyttekrok som er en måte å organisere undervisningen på og er ikke et spesifikt undervisningsopplegg. Undervisningssituasjonene, "Gi en påstand", "Hva skal ut?" og "Hvilken brøk er størst?", er spesifikke undervisningsopplegg i brøk. Vi presenterer og drøfter lyttekrok og undervisningssituasjonene hver for seg, hvor vi begrunner hvorfor disse skårer høyt på TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a).

4.1 Organisering av undervisning

4.1.1 Lyttekrok

På skole A benyttet de seg av lyttekrok. Dette var noe som gikk igjen i alle øktene vi observerte på denne skolen. I lyttekroken flyttet elevene seg bort fra egne plasser ved pultene og satt seg i en halvsirkel rundt smarttavla. Noen elever satt på benker, noen på gulvet og andre på pulter. Under har vi tegnet en skisse for å gi et bedre bilde av hvordan klasserommet var møblert (Figur 4.1).



Figur 4.1 Skisse av møblering hos skole A (Egen figur)

Læreren sa i intervjuet at hun var veldig opptatt av møblering, og at hun hadde øvd mye på møblering for å få til lyttekrok. Læreren benyttet seg av lyttekroken når noe skulle gjennomgås eller gjøres i fellesskap. I matematikktimene observerte vi at de faste plassene ved pultene hovedsakelig ble benyttet når de skulle jobbe individuelt eller i mindre grupper.

Lyttekrok er ikke noe nytt, det er stor sannsynlighet å komme over fenomenet, men gjerne på lavere klassetrinn der det brukes som en sosial krok ved oppstart eller avslutning av en dag. For oss var det interessant å se lyttekrok bli benyttet i matematikkundervisning på 6. trinn. Vi registrerte etter observasjonen hos skole A at undervisning i lyttekrok som regel skåret høyt innenfor TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a). Siden dette er en måte å organisere undervisningen på kan innholdet variere, og vi vil ikke i dette delkapittelet ta for oss det matematiske innholdet som fant sted i lyttekroken. Vi observerte mange undervisningssituasjoner som skåret høyt på alle dimensjonene i lyttekroken, men også når innholdet var av lavere kvalitet, skåret lyttekroken alltid høyt på disse tre siste dimensjonene; *tilgang til matematikken, dele ideer å få anerkjennelse* og *tilbakemeldinger og vurdering* (Schoenfeld & Floden, 2014a). Derfor vil vi beskrive og analysere lyttekrok knyttet til de tre siste dimensjonene for å finne årsaken til høy skår, og senere analysere mer spesifikke undervisningssituasjoner relatert til de to første dimensjonene. Det er selvfølgelig viktig å skåre høyt på dimensjon 1, *matematikken*, og dimensjon 2, *krav til kognitiv tenkning,* men denne delen vil se på hvordan lyttekrok legger til rette for å skåre høyt på de tre siste dimensjonene. Vi vil videre i dette kapittelet presentere forskjellige observasjoner vi gjorde i forbindelse med lyttekrok, hva læreren gjorde og hvorfor det kan være fordelaktig å benytte seg av lyttekrok.

En typisk undervisningsøkt på skole A vil ifølge våre observasjoner kunne bestå i at elevene i lyttekroken startet med parsamtaler rundt et begrep eller et problem presentert av læreren. Deretter fikk hvert par presentere det de hadde diskutert. Noen ganger foregikk dette strukturert, hvor alle parene i tur og orden fikk presentert sine tanker. Andre ganger ble samtalen mer uformell, hvor elevene fikk presentert sine tanker der det var naturlig. Etter fellessamtalen i lyttekroken ga læreren elevene oppgaver som de skulle jobbe med på sin egen plass ved pulten. Oppgavene la ofte opp til samarbeid, og møbleringen i klasserommet var nøye gjennomtenkt, derfor var pultene sammensatt som små gruppebord slik at elevene kunne samarbeide med de som satt på samme bord (se Figur 4.1). Etter en stund samlet de seg i lyttekroken igjen hvor de diskuterte det de hadde jobbet med, oppsummerte og oppklarte det elevene hadde vanskeligheter med å forstå.

I intervjuet begrunnet læreren bruk av lyttekrok med at både lærer og elever får snakke sammen, alle ser og hører hverandre og alle er fokusert på det samme. Hun poengterte at fellessamtalen er viktig i matematikk og at lyttekroken er godt egnet til å prate i par og grupper, og understreket at alle har noe å lære av hverandre. Dette samsvarer med SPIL-prinsippene i *cooperative learning* (Kagan & Stenlev, 2006). S*amtidig interaksjon* går ut på at elevene får mye taletid gjennom å snakke samtidig i par, *positiv innbyrdes avhengighet* kommer til syne når det legges opp til samarbeid og *individuell ansvarlighet* er når elevene blir bedt om å redegjøre for sin egen læring ovenfor andre. Det siste prinsippet, *lik deltakelse* er også en del av intensjonen ved bruk av lyttekrok. Læreren sa at undervisningen i lyttekroken skal få med alle, og at alle må være aktive selv om de ikke tør å snakke høyt for andre. Kilpatrick, et al. (2001) sine tråder vektlegger blant annet at man skal formulere, representere, begrunne og argumentere matematikk for å bli matematisk kyndig. Niss og Jensen (2002) sin kommunikasjonskompetanse sier at man skal kunne forstå og tolke andres matematiske utsagn, både skriftlig og muntlig. Elevene skal derfor ha mulighet til å forklare og fremme egne og hverandres matematiske argumenter og i lyttekroken fikk elevene mulighet til dette, enten i par, grupper, eller mellom lærer og elev.

Funn

Hovedsakelig er det fem funn vi ønsker å trekke frem og gå dypere inn i fra lyttekrok. Første funn var at samtale og diskusjon var i fokus i lyttekroken. Andre funn var at det virket som at alle elevene var fokusert på matematikken. Tredje funn at elevene ofte kom frem til tavla for å vise og forklare. Fjerde funn var at vi observerte at det var enkelt for læreren å innhente elevens tanker og det femte funnet var at undervisningen i lyttekroken tok mye tid.

Samtale og diskusjon var i fokus i lyttekroken, der man sitter tett og alle ser inn og frem mot tavla. Dermed virket det som om samtalene gikk bedre og innbydde til deltakelse. Vi observerte at elevene kunne ta ordet, uten at læreren nødvendigvis måtte tildele det. I et vanlig klasserom, hvor man sitter på sine faste plasser blir det ofte at læreren må gi én og én elev ordet. I lyttekroken endret dynamikken i samtalen seg, og alle kunne se hverandre. Elevene kunne selv oppdage når de hadde anledning til å komme med innspill. En annen faktor som spilte inn på samtalen var forventningene som fulgte med lyttekroken. Det var innarbeidet at når elevene skulle samles i lyttekroken var de klar over at her var det forventet samtale, og alle visste at det var mulig å få sagt noe i lyttekroken.

Det virket som alle elevene var fokusert på matematikken i lyttekroken. Vi observerte samtaler og diskusjoner som skåret høyt også hos skole B, der de hadde et mer tradisjonelt klasserom. Lyttekrok er derfor ikke nødvendig for at man skal kunne ha fellessamtaler i matematikk, men på noen områder viste den seg å ha noen klare fordeler. I lyttekroken var alle fokusert på det samme, noe lærer A også trakk frem i intervjuet. Hos skole B kunne vi ved flere anledninger observere at enkelte elever som ikke var direkte deltakende i samtalen kunne fikle med ting som lå på pulten, se ut av vinduet eller generelt virke ufokusert. Ofte har elever skrive- og tegnesaker, bøker og andre ting liggende på pulten, og disse kan fort dra oppmerksomheten bort fra undervisningen. I lyttekroken der de ikke hadde disse distraksjonsmomentene, observerte vi at elevene tilsynelatende var mer fokusert på det som foregikk. Som Wiliam (2007) sier, er deltakelse i klasserommet ikke valgfritt og lærerne må finne muligheter til å engasjere elevene til deltakelse. I lyttekrok har læreren i større grad mulighet til å engasjere elevene til deltakelse fordi alle er mer fokusert.

Hos skole A observerte vi at elevene ofte ville gå frem for å skrive eller tegne på tavla. Læreren oppfordret elevene til å komme frem på tavla for å vise hvordan de hadde tenkt, men elevene gikk også frem uoppfordret. For eksempel var det situasjoner hvor elever forsøkte å forklare muntlig, men fikk vansker med å gjøre seg forstått. I slike tilfeller kunne de spørre om de fikk vise på tavla. I lyttekroken var tavla lett tilgjengelig, derfor var det lett for elevene å gå frem. Det er også mulig for elever i tradisjonelle klasserom å komme frem på tavla, men det kan ta tid å manøvrere seg mellom pulter og ryggsekker. Fordelen i lyttekroken var at alle elevene allerede befant seg ved tavla, for eksempel kunne elevene komme frem bare for å legge til en strek eller peke på en figur.

Når elevene snakket med hverandre i lyttekroken var det enkelt for læreren å innhente elevenes tanker. Læreren fikk raskt overblikk over hvem som diskuterte og hva som ble sagt. Vi observerte at læreren kunne gå sakte fra par til par for å lytte til de forskjellige diskusjonene, samt hjelpe de i gang eller stille spørsmål. Når elevene satt i en halvsirkel kunne læreren bevege seg systematisk mellom elevene slik at hun fikk hørt alle. Når elevene var ferdig å diskutere, hadde hun mulighet til å ta opp i fellesskap det hun hadde hørt, noe hun selv sa hun var bevisst på. Sett opp mot Wiliam (2007) sin hovedidé om at bevisene læreren får etter å ha observert eller vurdert elevenes læring blir brukt til å justere undervisningen, er denne bruken av lyttekrok hensiktsmessig og fungerer dermed formativt. Læreren forklarte i intervjuet at temaene som ble tatt opp i lyttekroken ofte var basert på gjennomgående problemer ut ifra hva hun hadde observert i undervisningen. I lyttekroken kan det komme opp flere temaer samtidig, og man kan ikke ta for seg alt med en gang. Vi observerte at læreren ofte sa "det skal vi komme tilbake til" eller "hold den tanken". I intervjuet sa læreren at dette var et grep for å hjelpe henne å huske at hun skulle komme tilbake til elevenes utsagn om nødvendig.

Undervisning i lyttekrok tar mye tid og i løpet av perioden vi observerte skole A, tilbrakte de mye tid i lyttekroken. Når undervisningen i stor grad baserer seg på samtale og klasseromsdiskusjon kan man fort jobbe lenge med hvert tema. Vi observerte at det ble lagt lite fokus på regning og prosedyrer når de arbeidet i lyttekroken. Læreren sa i intervjuet at de måtte hente opp forståelsen av brøk og bruke det de hadde lagret fra før av. Læreren ønsket altså å skape en *relasjonell forståelse* (Skemp, 1976) som går ut på begrepsforståelse og sammenkobling av det elevene allerede kan. Læreren sa videre at når én elev sier noe, så kommer andre på noe annet, og at de kan snakke seg ut i det uendelige. Lyttekrok kan derfor ta mye tid og læreren sa for eksempel at tidsplanen for undervisningen ble forskjøvet. Læreren forutså dette, men hun ønsket ikke at elevene skulle sitte med mangelfull forståelse før de gikk videre på nytt tema.

Våre funn fra skole A viser at lyttekroken bærer med seg flere fordeler. Den fremmet samtale, diskusjon, samarbeid og deltakelse. Elevene hadde mange muligheter til å dele og forklare, og alle var fokusert på det samme. Læreren hadde i lyttekroken god oversikt over elevene og fikk et grunnlag til å vurdere elevenes forståelse av den aktuelle matematikken. Derimot tar denne form for undervisning tid. I den neste delen vil vi drøfte hvorfor disse funnene i lyttekroken bidrar til høy skår innenfor de tre siste dimensjonene i TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a)**.**

Hvorfor bidrar lyttekrok til høy skår?

Rettferdig tilgang for alle elever krever ifølge NCTM (2000) at det gjøres tiltak for å fremme tilgang og oppnåelse hos alle elevene. I dimensjon 3, *tilgang til matematikken* (Schoenfeld & Floden, 2014a), er hovedpoenget at alle skal inviteres og støttes til å engasjere seg i matematikken. Vi mener lyttekrok er et tiltak som fremmer tilgang, da møbleringen i lyttekroken er slik at alle elevene ser og hører både lærer og medelever. Hvor man sitter i lyttekroken har liten innvirkning på om man får med seg innholdet som diskuteres. Læreren har også et godt overblikk over alle elevene, noe som er viktig for å hente inn elever som eventuelt mister fokus. I tradisjonelle klasserom må læreren anstrenge seg mer for å få det samme overblikket. Derfor er organiseringen i lyttekroken mer inviterende til at alle får delta i undervisningen. Dimensjon 3 påpeker at hvis bare noen få elever får delta, er det ikke god og rettferdig undervisning (Schoenfeld & Floden, 2014a). Vi observerte at alle elevene var deltakende i lyttekroken, enten gjennom samtale i par eller felles diskusjon. Innenfor dimensjon 3 sier Schoenfeld og Floden (2014a), at flere elever får mulighet til å engasjere seg i matematikken når de diskuter i par. Dette samsvarer med prinsippet om *samtidig interaksjon* (Kagan & Stenlev, 2006) der elever får mer taletid gjennom parsamtaler. Måten lyttekroken er organisert gjør det mer naturlig å komme med innspill, selv om man ikke blir spurt om å si noe. Dimensjon 3 legger til grunn at alle må inviteres inn i de matematiske diskusjonene, og at samtalen ikke kun foregår mellom lærer og utvalgte elever (Schoenfeld & Floden, 2014a).

Lyttekroken har noen egenskaper som er inviterende til både samarbeid og klasseromsdiskusjoner. Elevene ble gitt muligheter til å fremme egne matematiske argumenter og resonnementer, og som lærer A sa så har alle noe å lære av hverandre. Dette samsvarer med dimensjon 4, *dele og anerkjenne ideer* (Schoenfeld & Floden, 2014a), som stiller krav til at elevene har mulighet til å forklare og fremme matematiske argumenter, samt bygge på andres ideer. Elevene fikk gjort rede for egen læring når de fikk presentere foran klassen etter parsamtalen, slik prinsippet *individuell ansvarlighet* i *cooperative learning* (Kagan & Stenlev, 2006) beskriver. I tillegg hadde elevene frihet til å snakke når det passet seg, og dette førte til at klasseromsdiskusjon oppsto mer naturlig. Å skape effektive klasseromsdiskusjoner er den første hovedstrategien til Wiliam (2007), og gjennom klasseromsdiskusjoner får elevene delt og bygget videre på hverandres ideer. Det at elevene hadde tavla så lett tilgjengelig, og fikk mulighet til å vise på tavla når de skulle forklare, bidro også til at undervisningen skåret høyt i dimensjon 4. Elevene får vist resten av klassen og læreren sine ideer, og blir i større grad matematiske "gjørere". At elevene skal bli matematiske "gjørere" påpekes både av Kilpatrick, et al., (2001) i tråden *productive disposition*, og av Schoenfeld og Floden, (2014a), i dimensjon 4. Vi mener derfor at lyttekroken er med på å skape et miljø hvor elevene har gode muligheter til å dele sine ideer.

All undervisning krever forståelse av hva elever kan og hva de trenger å lære (NCTM 2000). Derfor må undervisningen basere seg på lærerens observasjoner og vurderinger. I lyttekroken så vi at læreren valgte å ta opp problemer etter hva hun hadde hørt elevene diskutere i par. Når hun strategisk flyttet seg mellom parene i lyttekroken for å høre og spørre, innhentet hun elevenes tanker. Dimensjon 5, *tilbakemeldinger og vurdering* (Schoenfeld & Floden, 2014a) sier at læreren skal innhente elevenes tenkning hvor senere instrueringer skal følge opp disse. Når elevene skulle få presentere hva de hadde snakket om i par, sa læreren at hun ikke var interessert i å få de med riktig svar til å svare først. Dette er i tråd med det Schoenfeld og Floden

(2014a) sier i dimensjon 5, om at det skal bygges opp under produktive begynnelser og misoppfatninger. Læreren kunne altså innhente elevenes tanker når hun hørte hva elevene diskuterte i par. I tillegg fikk læreren et verdifullt vurderingsgrunnlag og nye utgangspunkter å basere undervisningen på når elevene delte sine ideer i en klasseromsdiskusjon. Ifølge dimensjon 5 (Schoenfeld & Floden, 2014a) må elevene ha mulighet til å forklare slik at læreren kan innhente informasjon. Lyttekroken sine egenskaper inviterer til klasseromsdiskusjon, noe som gir positiv uttelling innenfor dimensjon 4, men på samme måte løfter også dette kvaliteten på undervisningen innenfor dimensjon 5. For eksempel så vi dette når læreren ba elevene "holde tanken", hvor eleven fikk anerkjennelse for det som var sagt, samtidig som læreren skårte høyt innenfor dimensjon 5 ved å senere basere instrueringer på elevenes utsagn.

Vi har drøftet hvorfor undervisning i lyttekroken har skåret høyt innenfor Schoenfeld og Floden (2014a) sine tre siste dimensjoner. Det er likevel noen viktige poeng som må nevnes. Det første poenget er at det som er blitt gjort i lyttekroken, også kan gjøres i tradisjonelle klasserom. Elevene kan snakke i par, skrive på tavla, delta i klasseromsdiskusjoner og få mye taletid, men vi mener at lyttekrok i større grad legger til rette for dette.

Det andre poenget er at bruk av lyttekrok ikke automatisk medfører god undervisning. Lærer A sa i intervjuet at de har øvd lenge på bruk av lyttekrok og det er noe som må innarbeides over tid. For at det skal være lik og rettferdig tilgang må læreren sørge for at alle, og ikke bare noen få elever får snakke (NCTM, 2000; Schoenfeld & Floden, 2014a; Kagan & Stenlev, 2006). Læreren må gi anerkjennelse til elevene og tilskrive eierskap for at undervisningen skal skåre høyt på dimensjon 4, samtidig som hun må være i stand til å benytte elevenes tanker og ideer for senere undervisning. Dermed kreves det mye planlegging for at det skal være en god struktur på undervisningen, derfor må læreren på forhånd ha planlagt hva som skal gjøres i lyttekroken. På denne måten unngår man å flytte seg unødvendig mye mellom pultene og lyttekroken i løpet av en undervisningsøkt.

Det tredje poenget er at lyttekrok tar tid. Når lyttekroken legger opp til mye diskusjon hvor man bruker elevene som utgangspunkt tar det lenger tid å komme seg gjennom pensum og planlagt innhold. Denne form for undervisning legger vekt på å utvikle *relasjonell forståelse* (Skemp, 1976) og bli matematisk kyndig (Kilpatrick, et al., 2001) ved at det fokuseres på å formulere og løse problemer, skape begrepsforståelse og se sammenhenger. Ludvigsenutvalget sier at elevers utvikling tar tid, og at dette må tas hensyn til (NOU, 2015:8). Derfor er det ikke nødvendigvis negativt at lyttekrok tar mye tid, men av læreren kreves det at man har en langsiktig plan for undervisningen der det fokuseres på elevenes forståelse og utvikling.

En høy skår avhenger av hvordan læreren benytter seg av lyttekrok, men også at det er innarbeidet en kultur for klasseromsdiskusjon. Vi mener at lyttekrok bidrar til høy skår innenfor TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a), i forhold til et tradisjonelt klasserom**,** er at den legger mer til rette for lik tilgang. Den inviterer i større grad til samtale og klasseromsdiskusjon og gir læreren bedre mulighet til å innhente elevenes tanker, for deretter å styre undervisning sin etter disse. Læreren må likevel sørge for at det matematiske innholdet er meningsfullt, slik dimensjon 1, *matematikken*, og dimensjon 2, *krav til kognitiv tenkning* vektlegger, samt gjøre grep for å skape klasseromsdiskusjon.

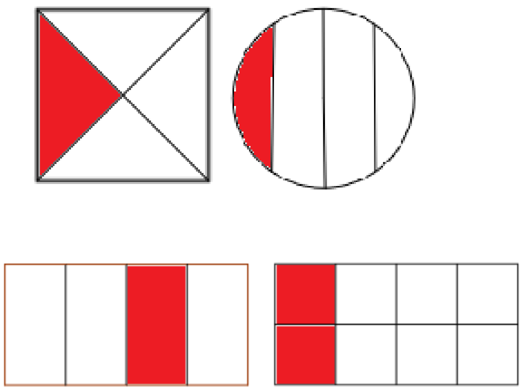
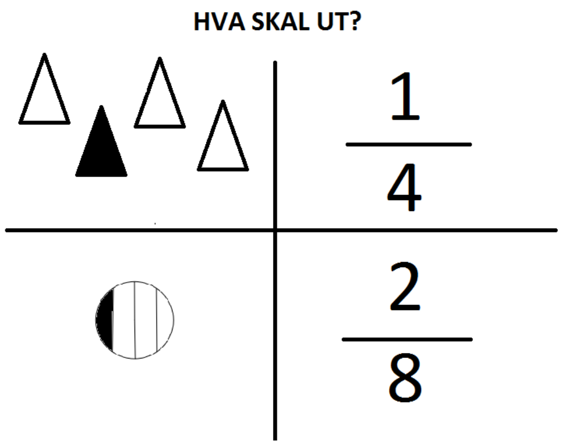
4.2 Undervisningssituasjoner

I dette delkapittelet har vi valgt å først presentere "Gi en påstand" og "Hva skal ut?". Dette er to undervisningssituasjoner som har flere likhetstrekk og begge skaper klasseromsdiskusjon. Deretter presenterer vi "Hvilken brøk er størst?", som er en oppgave tatt fra læreboka.

4.2.1 Gi en påstand og Hva skal ut?

"Gi en påstand" og "Hva skal ut?" fant sted på hver sin skole hvor de ble gjennomført i første økt som en introduksjon til brøk, der vi observerte høyt engasjement hos elevene. Selv om dette er to forskjellige aktiviteter hadde lærerne samme intensjon bak undervisningen. De valgte å tilnærme seg brøk som *del av helhet* (Lamon, 2012) med fokus på poenget at alle delene må være like store. Vi presenterer aktivitetene i Tabell 4.1 og deretter drøfte grepene lærerne gjorde og hvorfor de skårer høyt på TRU Math (Schoenfeld og Floden, 2014a).

Tabell 4.1 Aktiviteter for å skape klasseromsdiskusjon

Gi en påstand *(Skole A)*	**Hva skal ut?** *(Skole B)*
Aktiviteten "Gi en påstand" går ut på at læreren viser fire forskjellige figurer, hvor deler av figurene var fargelagt. Læreren kommer med en påstand hvor hun sier: "Jeg mener nå at jeg har fargelagt en fjerdedel i hver. Har jeg det?" Læreren ønsker med dette å skape diskusjon rundt figurene. I figur 4.2 ser vi figurene elevene på skole A fikk prøve seg på.  *Figur 4.2 Figurene som læreren på skole A brukte. (Egen figur)*	Aktiviteten "Hva skal ut?" går ut på at man viser fire bilder som omhandler samme tema. Det er en av fire som skal ut, enten fordi den er feil i forhold til de andre eller fordi en skiller seg ut. Elevenes oppgave er å argumentere for hvorfor den ene ikke passer med de andre, eller hvorfor tre av bildene passer sammen. I figur 4.1 ser vi oppgaven elevene fikk prøve seg på i skole B. Oppgavene ble presentert med beskjed om at en skal ut.  *Figur 4.3 Oppgaven som ble gitt til elevene på skole B. (Egen figur)*

På spørsmål i intervjuet om hvorfor de hadde valgt disse representasjonene svarte lærerne:

> **Lærer A:** Poenget med disse er å ruske opp i misoppfatninger i forhold til når du deler noe. (…) Sirkelen for å vise at de må være like store (…) Først og fremst så handler dette om at det må være like store deler i brøk.
>
> **Lærer B:** For der (i sirkelen) får du så godt frem at når man skal snakke om brøk, så må man ha like store deler, bare for å poengtere det.

Begge lærerne hadde valgt sirkelen for å poengtere at delene måtte være like store, slik det ene grunnprinsippet til Lamon (2012) understreker. Ved å gi elevene sirkelrepresentasjonen vil det gi et godt grunnlag for diskusjon. Gjennom diskusjon får elevene kommunisert ved å forklare sine begrunnelser for de forskjellige representasjonene i aktivitetene, noe *adaptive reasoning* (Kilpatrick, et al., 2001) og dimensjonen *dele og anerkjenne ideer* (Schoenfeld & Floden, 2014a) legger vekt på. I aktiveten hvor læreren kommer med en påstand, er det sirkelen som gjør at påstanden ikke stemmer, mens i "Hva skal ut" er det sirkelen som skal ut. Ut fra svarene elevene kommer med kan læreren styre undervisningen og vurdere om elevene har misoppfatninger som må diskuteres der og da, eller jobbes med senere.

I følge Smith og Stein (2011) stiller matematikkoppgaver ulike krav til kognitiv tenking og derfor må lærere tenke over hvilke oppgaver man gir til elevene og hvorfor. Lærerne på skole A og B hadde valgt ut aktivitetene for at elevene skulle bruke språket og ha en samtale rundt at i brøk må det være like store deler. Som Lærer B sier: "Det er rett og slett for å få en samtale rundt, og at man skal stille seg noen spørsmål". Lærer A ønsker seg også en samtale der de må snakke, og ved å gi de en påstand mener hun at elevene blir ivrige fordi de må fortelle henne hvorfor hun tar feil. Det er kommunikasjonen og diskusjonen, der elevene argumenterer og begrunner, som er med på at aktivitetene skårer høyt. Aktivitetene legger opp til samarbeid, der man bruker hverandre som ressurser, noe som samsvarer med *cooperative learning* sitt prinsipp *positiv innbyrdes avhengighet* (Kagan & Stenlev, 2006) og Wiliam (2007) sin strategi der man må aktivere elevene til å være en ressurs for hverandre. I en diskusjon vil elevene utvikle Niss og Jensen (2002) sin kommunikasjonskompetanse der man må forstå og tolke andre elevers utsagn for så å komme med et resonnement selv.

Funn

På skole A samlet læreren alle elevene i lyttekroken når de skulle introdusere brøk. Læreren ga elevene aktiviteten "Gi en påstand" fremstilt i og læreren fremmet påstanden: "Jeg mener nå at jeg har fargelagt en fjerdedel i hver, har jeg det?". Denne type grep hvor man stiller spørsmål som en påstand, vil ifølge Dillon (1982) føre til at elevene må diskutere og finne begrunnelser, i motsetning til lukket spørsmål som kan begrense diskusjonen. Etter at lærer A hadde fremmet sin påstand om at figurene var en fjerdedel, fikk hun umiddelbart både ja og nei til svar. Hun ba derfor elevene snakke 30 sekunder i par. Chapin, et al. (2009), gjennom samtaletrekket *venting*, mener at alle elever må få tid til å formulere seg, og ved å be elever snakke sammen først, får de samlet sine og den andres tanker før en felles diskusjon. Et sentralt element i dette er prinsippet s*amtidig interaksjon* (Kagan & Stenlev, 2006), der hver enkelt elev får mye taletid. I den etterkommende diskusjonen vil ikke alle få mulighet til å få delt sine ideer, men alle får mulighet til det når de snakker med sidemannen. Ved å diskutere to og to kan den ene komme med et resonnement, der den andre bygger videre på partneren sine tanker. På denne måten vil man bygge på hverandres ideer, noe Schoenfeld og Floden (2014a) i dimensjon 4, *dele og anerkjenne ideer,* legger vekt på. Når elevene blir utfordret på en representasjon de ikke har sett tidligere, kan det være skummelt å snakke høyt i klassen. Vi observerte på skole A en forandring hos elevene før og etter parsamtalen. Før var det flere som var usikker på om figurene var fargelagt en fjerdedel, mens etterpå var klassen tydelig engasjert og klar på at læreren tok feil. Selv om elevene på dette tidspunktet virket enige ga ikke læreren seg, og sto fast på at hun ikke tok feil. Læreren henvendte seg til Ida og spurte om hun var enig i at en fjerdedel var fargelagt, noe hun ikke var.

> **Lærer A:** Hvorfor det?
> **Ida:** Fordi bitene ikke er like store *(Mye støy, ikke ordrett)*
> **Lærer A:** Men den er jo like stor som den! *(Peker på de to ytterste delene i sirkelen)*
> **Ida:** Ja, men de er ikke like store som de to andre.
> **Lærer A:** Hans, har hun rett i det her?
> **Hans:** De to ytterste bitene er rundt skjært, mens det er ikke de i midten. *(Mye støy, ikke ordrett)*
>
> *Videre i diskusjonen spør læreren noen flere om Ida har rett og en elev foreslår at hun kunne delt sirkelen inn med et kryss. Læreren tegner det som er foreslått og fargelegger en fjerdedel. Hun spør nå om påstanden om at alle figurene er en fjerdedel stemmer og får flere ja. Videre utfordrer hun elevene på de andre figurene og spør om hvorfor de er en fjerdedel. På figuren som er fargelagt to åttendedeler kommer de inn på likeverdige brøker.*

Læreren signaliserer at hun er ute etter hvordan eleven har tenkt, og ikke bare rett svar, når hun ber eleven om å begrunne. Ifølge Scott, et al., (2008) er dette viktig for å legge til rette for elevers læring**.** Det at læreren fortsetter å forsvare sin feilaktige påstand er i stor grad med å påvirke diskusjonen. I intervjuet har læreren sagt at hun er bevisst på hvilke spørsmål hun stiller, og som Wiliam (2007) sin første hovedstrategi handler det om å være forberedt på hvilke spørsmål og svar elevene kommer med for å kunne få en produktiv klasseromsdiskusjon. Når læreren er forberedt på hva som kan komme opp i diskusjonen, er hun i stand til å drive den videre. Lærer A har hele tiden et moteksempel til elevenes argumentasjon, som da Ida sier at delene ikke er like store og læreren motsier henne ved å peke på to deler som er like store. Dette samsvarer med Resnick, et al., (2007) sitt samtaletrekk der læreren skal utfordre eleven eller komme med et moteksempel for å føre diskusjonen videre. Så lenge læreren står på sitt blir elevene tvunget til å tenke ut argumenter for å "overbevise" læreren om at det hun sier er feil. Dette er et grep for å engasjere elevene og stimulerer til en god klasseromsdiskusjon. Når lærer A drar Hans inn i diskusjonen, bruker hun samtaletrekket *resonnering* (Chapin, et al., 2009) ved å spørre om Hans er enig med Ida. Hans kommer med et eget argument nå han begrunner at de ytterste delene i sirkelen har buer, noe de i midten ikke har. Læreren fortsetter diskusjonen med et nytt motsvar til Hans der hun sier at delene i midten også har buer oppe og nede. Diskusjonen fortsetter en liten stund, hvor elevene er engasjerte. Læreren avrunder nå diskusjonen hvor hun samtidig gir Ida eierskap til sine uttalelser, ved å referere tilbake til henne i oppsummeringen: "Ida har rett, altså at de (delene på sirkelen) må være like stor?"

Som på skole A ber læreren på skole B elevene snakke sammen i par etter at aktiviteten var presentert, og elevene får delt sine ideer før en felles diskusjon. Etter at elevene på skole B hadde diskutert i par spør læreren hele klassen om hva som skal ut. Det var mange hender i været, som ifølge Schoenfeld og Floden (2014b) sin skåringsguide er et bevis på lik tilgang i klasserommet, og læreren utfordrer Truls til å svare:

> **Lærer B:** Skal du prøve den Truls?
> **Truls:** Jeg må nok si det er den kula, fordi at..*(avbrutt)*
> **Lærer B:** Den? *(peker på sirkelen)*
> **Truls:** Ja
> **Lærer B:** Den skal bort? Den passer ikke med de? Hvorfor?
> **Truls:** Fordi at, den første står det en firedel, *(uklart hva eleven sier, mumler)*… Så står det to åttendedeler, og det er bare EN, nei vent litt..
> **Lærer B:** Ja bare prat!
>
> *Videre i diskusjonen bekrefter læreren at Truls er på riktig vei, men inviterer andre inn i diskusjonen. Flere sier at det er sirkelen, og de kommer frem til at det er fordi delene ikke er like store. Læreren oppsummerer ved å dra inn de andre figurene og spør hvorfor to åttendedeler er en fjerdedel og får til svar at man kan forkorte den. Tilslutt spør læreren om det er en måte å dele opp sirkelen slik at det blir en fjerdedel og en elev tegner et kryss i lufta.*

Truls foreslår sirkelen, og læreren peker på sirkelen for å bekrefte det han sier. Dette er en form for *omformulering* (Chapin, et al., 2009) som bidrar til at hele klassen kan henge med i diskusjonen. Læreren er interessert i mer enn bare riktig svar og bruker samtaletrekket *resonnering* (Chapin, et al., 2009) når hun ber Truls forklare hvorfor. Her ser vi at Truls har litt problemer med å forklare, men læreren gir Truls god tid til å tenke, og oppfordrer han til å snakke, noe dimensjon 2 vektlegger (Schoenfeld & Floden, 2014a). I denne situasjonen klarer ikke Truls å komme med en tydelig begrunnelse, men får likevel en bekreftelse på at han er på riktig vei. Truls svarte riktig, men hadde problemer med å forklare. Dette viser hvor viktig det er å hente ut elevers tenkning og underbygger det Gay og Thomas (1993) mener at selv om man har fått rett svar, betyr det ikke at de har forstått det. Videre i diskusjonene inviterer læreren andre elever inn ved å bruke samtaletrekket *legge til* (Chapin, et al., 2009) der hun spør om det er flere som vil prøve seg. Flere elever får prøve seg, men får ikke tydelig frem at delene må være like store. Tilslutt sier en elev at delene må være like store. Her velger læreren å avslutte diskusjonen ved å oppsummere viktigheten av like store deler. Her kunne man brukt samtaletrekket *gjentakelse* (Chapin, et al., 2009), hvor læreren kunne be Truls eller noen andre elever å gjenta det som har blitt sagt. Dette vil gi anerkjennelse til elever som har fått taletid, samtidig som hun skaffer seg bevis på om elever har hørt og forstått det som ble sagt.

Begge lærerne var bevisste på valget av de fire representasjonene og de brukte forskjellige samtaletrekk i løpet av aktiviteten for å skape klasseromsdiskusjon. Dette er gode grep for å fremprovosere diskusjon hos elever, og spørsmålene læreren benyttet seg av gjorde at samtalen fortsatte, samtidig som elevene måtte resonnere for å kunne svare. Lærerne benyttet seg også av samtalepartner, som er et nyttig grep for at alle skal få taletid og tid til å formulere seg. I tillegg var lærerne bevisste på elevenes ideer og ønsket at de skulle dele tankene sine med klassen. I det neste delkapittelet skal vi se på hvorfor grepene med valg av representasjoner, bruk av samtaletrekk, spørsmål læreren stiller, bruken av samtalepartner og bevisstheten på elevenes ideer gjør dette til gode undervisningssituasjoner og se det opp mot vårt teoretiske rammeverk, TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a).

Hvorfor skårer disse undervisningssituasjonene høyt?

Valg av representasjoner er viktig med tanke på utgangspunktet aktivitetene får og lærerne har valgt fire representasjoner til å få frem at delene i brøk må være like store. Bjerke, et al. (2012) mener at norske elever er representasjonsfattige og trenger å øve på å representere brøk på flere måter. Både "Gi en påstand" og "Hva skal ut" har potensiale til å inkludere flere representasjoner og i følge Kilpatrick, et al. (2001) er det en sterk indikator på *conceptual understanding*, hvis elevene er i stand til å representere matematiske situasjoner på forskjellige måter. Ved "Hva skal ut" ligger det til rette for å velge akkurat de figurene man ønsker, og man kan, som lærer B sa i intervjuet, dra inn både desimaltall, prosent og tallinje. Det samme kan man gjøre med "Gi en påstand", alt kommer an på hva læreren har som mål med aktiviteten eller undervisningen. I disse aktivitetene var fokuset på fire representasjoner innenfor aspektet *del av helhet* (Lamon, 2012), men det er muligheter for å inkludere andre representasjoner både nå og senere. Det å bruke forskjellige representasjoner kan hjelpe elevene å bygge nettverk og få en sammenhengende forståelse i brøk og matematikken, noe som er viktig innenfor dimensjon 1 (Schoenfeld & Floden, 2014a)**.**

Lærerne benytter seg av samtaletrekk gjennom hele diskusjonen. Lærerne benytter *omformulering* (Chapin, et al., 2009) for å holde flyten i samtalen ved å hjelpe klassen til å følge med. Ved å gjenta og omformulere det elevene sier, kan alle elevene få mulighet til å forstå det som blir sagt. *Resonnering* (Chapin, et al., 2009) blir benyttet, ikke bare for å få riktig svar, men hvorfor det er riktig svar. I tillegg til å få med andre elever ved å spørre om de er enig eller uenig. Dette er viktig hvis andre elever og læreren skal kunne ha en diskusjon å bygge videre på, samt at læreren får vite om elevene har tenkt riktig. Samtaletrekket *legge til* (Chapin, et al., 2009) blir benyttet for å hente inn flere elever i diskusjonen, noe som er viktig for at flere skal få delt sine ideer og få sjansen til å tilføye noe i diskusjonen. Begge lærerne var flinke til å benytte seg av samtaletrekket *venting* (Chapin, et al., 2009), der elevene fikk tid til å tenke og formulere seg. I tillegg benyttet de Resnick, et al., (2007) sine samtaletrekk der elevene skal forklare resonneringen sin og der læreren skal utfordre eller komme med moteksempel til elevenes svar. Alle samtaletrekkene fremprovoserer læring og hvis læreren bruker de bevisst, så er de et verktøy som hjelper med å skåre høyt på dimensjonene i TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a)

Spørsmålene lærerne stiller gjør at undervisningssituasjonene stiller krav til kognitiv tenking. Spørsmålene utfordrer elevenes påstander og forklaringer, samt at elevene hele tiden må forsøke å komme med nye begrunnelser. Dette samsvarer med dimensjon 2, *krav til kognitiv tenking* (Schoenfeld & Floden, 2014a) fordi utfordringene bidrar til elevenes matematiske utvikling. For å skåre høyt innenfor dimensjon 2 (Schoenfeld & Floden, 2014b) kreves det blant annet at elevene får tid til å tenke. Vi observerte at dette var tilfelle i begge klasserommene og på grunn av dette blir elevene i stand til å formulere seg og det skapes muligheter til god klasseromsdiskusjon. Aktivitetene utvikler *adaptive reasoning* (Kilpatrick, et al., 2001) hos elevene, fordi de må være i stand til å begrunne svaret til spørsmålene som stilles, samtidig benytter man *kommunikasjonskompetanse* (Niss & Jensen, 2002) til å formidle matematikken muntlig.

Det å ha en samtalepartner bidrar til at alle elevene får tilgang til matematikken som diskuteres, slik dimensjon 3, *tilgang til matematikken* (Schoenfeld & Floden, 2014a), vektlegger. På denne måten unngår man at det bare er noen få utvalgte som får diskutere matematikken, slik det ofte blir hvis man kun benytter seg av IRE-metoden. Som nevnt hadde begge aktivitetene potensiale til å dra inn flere representasjoner og aspekter av brøk. Ved å gjøre dette kunne man økt tilgangen, da elever tenker forskjellig, og for noen elever finnes det kanskje representasjoner de forstår bedre enn andre. For eksempel i aktiviteten "Gi en påstand" ble bare arealmodellen benyttet, så her kunne andre representasjoner vært fordelaktige. På den måten får matematikken det arbeides med flere inngangsvinkler, slik Schoenfeld og Floden (2014a) anbefaler innenfor dimensjon 3, og som Lamon (2007) sier er nødvendig for å få en fullverdig forståelse av brøk.

Bevisstheten på elevenes ideer er viktig med tanke på at elevene skal få eierskap til klasseromsdiskusjonen. Strukturen i undervisningen, ved at elevene snakker i par før en etterfølgende klasseromsdiskusjon, sørger for at elevene har gode muligheter til å dele og bygge videre på hverandres ideer. Når elevene har mulighet til å dele, diskutere og begrunne, skårer undervisningen høyt innenfor dimensjon 4, *dele og anerkjenne ideer* (Schoenfeld & Floden, 2014a). Lærerne gjorde aktive grep for å skape klasseromsdiskusjon og støttet opp med spørsmål, samtidig som elevene fikk anerkjennelse og tildelt eierskap til det som ble sagt. Dimensjon 4 sier også at elevene skal ha mulighet til å genere og dele matematiske ideer (Schoenfeld & Floden, 2014a)¸ og på begge skolene foreslo en elev etter diskusjonen at man kan tegne et kryss i sirkelen slik at det blir like store deler. Elevene har sett sammenhengen mellom de andre figurene og sirkelen, slik at de har fått forståelse for like store deler i brøk. Her har elevene utviklet *conceptual understanding* (Kilpatrick, et al., 2001) som handler om å lære seg nye idéer ved å koble allerede kjente idéer i nye sammenhenger. I klasseromsdiskusjonen er det læreren som har kontroll på hva som blir sagt. Lærer A sa i intervjuet at hun bevisst valgte ut elever som får snakke ut fra hva hun hørte i samtalene mellom elevene. Dette for å få frem misoppfatninger og andre interessante tanker som lærer A synes er viktige. Schoenfeld og Floden (2014a) sin dimensjon 5, *tilbakemeldinger og vurdering,* legger vekt på om elevers ideer innhentes og i hvilken grad dette påvirker undervisningen. Vi observerte at begge lærerne styrte diskusjonen basert på elevenes utsagn, samt at undervisningen ble påvirket av disse. Lærerne fulgte opp viktige poenger, men klasseromsdiskusjoner kan fort eskalere og derfor er det viktig at læreren bedømmer hva som er hensiktsmessig å diskutere og hva som eventuelt kan spares til senere.

Aktivitetene vi nå har sett på skårer høyt, fordi de skapte engasjement hos elevene. Kilpatrick, et al. (2001) sin tråd om *productive disposition* handler blant annet om at engasjement og motivasjon spiller en stor rolle for å utvikle seg innenfor de andre trådene. Brøk er et komplekst og vanskelig tema og disse aktivitetene kan være med på å bygge forståelse på en engasjerende måte. Gjennom klasseromsdiskusjon ønsker lærerne å skape forståelse av brøk som *del av helhet* (Lamon, 2012) og grunnprinsippet om at delene i brøk må være like store. Dette samsvarer med dimensjon 1, *matematikken* (Schoenfeld & Floden, 2014a) som vektlegger det å skape forståelse, fremfor å jobbe med isolerte faktakunnskaper og prosedyrer som skal pugges på. Aktivitetene i seg selv var ikke nok for å skape klasseromsdiskusjoner, de var avhengig av de grepene lærerne benyttet seg av. Matematikken som ble diskutert var sammenhengende, og elevene ble utfordret på riktig nivå. Det ble gjort aktive grep for at alle elevene skulle få tilgang til matematikken, hvor det ble gitt mange muligheter for at elevene skulle få delt sine tanker og ideer. Begge lærerne tok også tak i det elevene sa, og bygget videre undervisning basert på dette, altså en formativ vurderingsform. Som all annen undervisning er det rom for endringer, men totalt sett mener vi dette er gode eksempler på hvordan man kan undervise i brøk. Dette på grunn av bruken av samtalepartner, spørsmålene lærerne stiller, bruk av samtaletrekk, valg av representasjoner og bevisstheten på elevenes ideer. Disse grepene gjør at undervisningssituasjonene skårer høyt innenfor Schoenfeld & Floden (2014a) sine dimensjoner.

4.2.2 Hvilken brøk er størst?

Den neste undervisningssituasjonen vi skal presentere fant sted på skole A i lyttekroken. I læreboka Multi 6B (Alseth, Nordberg, & Røsseland, 2015) presenteres oppgave 6.22 som i Figur 4.4. Vi vil beskrive hvordan oppgaven ble gjennomført og presentert på skole A og til slutt drøfte hvorfor dette skårer høyt på TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a)**.**

Figur 4.4 Oppgave 6.22 i Mutli 6b (Alseth et al., 2015:44)

Lærere, enten bevisst eller ubevisst, modifiserer oppgavene på den måten at de gir forskjellige læringsmuligheter til elevene (Son & Kim, 2015). I følge Stein og Smith (1998) går en utvalgt oppgave gjennom tre faser som er avgjørende for elevenes læring. Den første fasen er hvordan oppgaven fremstilles i lærebøker. Den andre fasen er hvordan læreren fremstiller oppgaven og den tredje fasen er hvordan elevene arbeider med oppgaven. Oppgave 6.22 ble gjennomført på begge skolene, men på forskjellige måter. Utgangspunktet før fase 2 og 3 var det samme, da de brukte samme lærebok. På skole B hadde elevene gjort oppgaven i lekse, og oppsummerte oppgaven i mindre grupper sammen med læreren. Skole A gjennomførte oppgaven i lyttekrok der de diskuterte og gikk lenger enn det oppgaven la opp til. Vi nevner dette for å påpeke hvor forskjellig matematikkoppgaver kan utarte seg, selv om man har samme utgangspunkt, og vi ønsker å beskrive hvorfor Skole A skåret høyt med sitt opplegg.

Funn

Lærer A sa i intervjuet at hun alltid valgte å gjøre denne typen oppgaver i lyttekroken fordi elevene aldri jobber alene i lyttekroken. Hun sa også at man slipper mye vandring frem og tilbake mellom pultene. Oppgaven ble presentert av læreren på smarttavla, deretter snakket elevene to minutter i par.

> **Lærer:** STOPP! Da lurer jeg på, Per og Pål, hva tenkte dere?
> **Pål:** B og C

Lærer: Dere tenkte både B og C var størst! Betyr det at dere mener B og C er like stor?
Begge: Ja!
Lærer: Okei! Kan dere vise oss hvordan dere finner det ut?
Pål: De er jo bare det. Fordi det fem sjettedeler, da er det bare en opp til seks sjettedeler.
Lærer: Ja! Mhm! Kan vi tegne og vise? Hvis jeg tegner sånn her *(tegner rektangel delt opp i 6 deler)* Hva du sa? Seksdeler? Kan du vise meg? Sånn at jeg skjønner.
(Pål fargelegger 5 av 6 deler i rektangelet)
Lærer: Mhm, okei! Da har vi fem sjettedeler av den figuren.. Kan du vise meg to tredjedeler av den figuren?
(Eleven prøver, men får ikke til)
Lærer: Kan noen hjelpe han?

I intervjuet trakk vi frem denne situasjonen for læreren. Guttene har en kjent misoppfatning når det kommer til å sammenlikne brøker, noe som Pearn og Stephens (2004) omtaler som *gap thinking*. *Gap thinking* illustreres ved å si at brøken $\frac{3}{5}$ er større enn $\frac{5}{8}$ fordi differansen mellom tre og fem er mindre enn differansen mellom fem og åtte. Dette havner under en av Van de Walle, et al., (2014) sine fire årsaker til at elevene sliter med brøk; problemet med at elevene overgeneraliserer kunnskapen de har om heltall. Etter at læreren fikk se transkripsjonen sa hun: "Hvem som kommer frem handler litt om hva jeg hører de sier når de snakker i grupper. Også, jeg er ikke interessert i å få det riktige svaret frem først." På grunn av guttene sin misoppfatning ble de bedt om å komme frem til tavla først. Dette samsvarer med hovedideen til Wiliam (2007) som handler om at læreren får bevis på elevens læring gjennom observasjon og vurdering, og deretter justerer undervisningen etter elevenes læringsbehov. Vi ser i transkripsjonen at læreren ikke sier noe om svaret er rett eller galt, og Skott et al., (2008) og Gay og Thomas (1993) mener det er viktig å være interessert i å ikke bare få rett svar, men hvordan elevene tenker. Læreren ønsker at elevene skal forklare hvorfor de mener $\frac{2}{3}$ og $\frac{5}{6}$ er like store. Vi kan se dette opp mot *cooperative learning* (Kagan & Stenlev, 2006), der læring skjer i interaksjon med andre og at man lærer av andres misoppfatninger. *Gap thinking* er en veldig vanlig misoppfatning, og Per og Pål var nok ikke alene om denne. Det er læreren som tegner rektangelet og ber Per og Pål vise brøkene med denne representasjonen. Da Pål ikke får til å tegne $\frac{2}{3}$ av figuren bruker læreren samtaletrekket *legge til* (Chapin, et al., 2009) ved å invitere noen til å hjelpe han.

Videre i diskusjonen kommer en elev frem, og ved litt hjelp av lærer fargelegger hun $\frac{2}{3}$ av rektangelet. Læreren spør om $\frac{2}{3}$ og $\frac{5}{6}$ er like store. Elevene ser at det er litt mer fargelagt i figuren ved $\frac{5}{6}$ og svarer i kor nei.

Lærer: Så hva er den største brøken her *(peker på oppgaven).*
Anette: Fem sjettedeler!

Lærer: Du tenker at fem sjettedeler er størst. Men hva med seks femtendeler da? Det er jo 15 deler!

Anette prøver å forklare, der læreren oppfordrer henne til å fortsette. Læreren ber henne komme å vise, hvor Anette tegnet et rektangel som hun delte i femten deler. Etter hvert kommer de frem til at $\frac{6}{15}$ *er mindre enn* $\frac{5}{6}$ *fordi det var fargelagt mindre enn en halv. Læreren spør igjen hvilken brøk som er størst, og flere svarer* $\frac{5}{6}$*. Læreren ber alle som er enige reise seg. Ganske mange var enige, men ikke alle.*

Lærer: Dere reiste dere fordi dere mente at den var størst *(peker på* $\frac{5}{6}$*)*
Elisabeth: Ja! Fordi at hvis du utvider to tredeler med 2, så får du, da får du fire sjettedeler. Og det er mindre enn fem sjettedeler, og to tredeler og fire sjettedeler var det samme.
Lærer: Ja! Så fem sjettedeler er vertfall større enn to tredeler, det er vi enige om da? Men hva med disse her? *(peker på* $\frac{7}{10}$ *og*$\frac{6}{15}$*)*

I denne situasjonen ser vi at elevene tidlig kommer frem til riktig svar, men læreren ønsker ikke å avslutte diskusjonen og trekker inn brøkene som elevene ikke har nevnt. Prinsippet *undervisning* (NCTM, 2000) sier at læreren må ha klart for seg hva elever kan og hva de trenger å lære, og Wiliam (2007) sier at læreren må vite hvilke konseptualiseringer elever kan ha på ulike områder. Læreren trekker frem $\frac{6}{15}$ og får frem at den brøken har hele 15 deler, for å se om elevene har misoppfatningen om at jo større nevneren er, dess større er brøken. Pearn og Stephens (2004) kaller dette *larger-is-bigger thinking* og med dette kan hun finne ut hva elevene trenger å lære. Læreren bruker arealmodellen til å sammenlikne brøkene. På nytt spør læreren hvilken brøk som er størst og ber alle elevene som er enige i at $\frac{5}{6}$ er størst om reise seg. Her observerte vi at noen var sikre og reiste seg med en gang, mens andre var mer nølende og reiste seg kanskje fordi naboen gjorde det. Ved å be de reise seg, inviterer hun alle elevene med og hun tvinger elevene til å ta et standpunkt om de er enige i påstanden eller ikke. Læreren ber elevene forklare hvorfor, noe som ifølge Chapin, et al. (2009) er sentralt i samtaletrekket *reasoning*. Vi ser at Elisabeth begrunner hvorfor hun reiste seg uten at læreren har spurt. Elisabeth har en god forklaring, men hun begrunner valget sitt ved å bare bruke to av brøkene. Læreren ønsker at $\frac{6}{15}$ og $\frac{7}{10}$ også skal bli tatt med i begrunnelsen, men elevene virket litt usikre på hvordan de skulle trekke inn de andre brøkene.

Videre i diskusjonen ber læreren de tenke på hva det hele er og hva som er delen. Hun prøver å få de til å bruke sunn fornuft ved å sammenlikne brøkene og hvor nært man er det hele.

Lærer: Vi kan også gjøre en nøyaktighetstest på dette her. Og da kan vi bruke sånn forkorting og utviding vet dere. (…) Kan vi på noen måte gange disse her slik at vi får en nevner som er lik?

En elev sier litt usikkert "trettideler", og læreren spør om hva hver enkelt brøk må utvides med for å få 30 i nevneren. Når alle er utvidet spør læreren: "Er vi nå helt sikre på hvilken brøk som er den største?" Læreren får til svar $\frac{5}{6}$ *og C. For å oppsummere diskusjonen sier læreren: "Nå hentet vi inn dette med forkorting og utviding igjen, fordi hvis vi skal sammenlikne brøker kan vi noen ganger tenke hva ser fornuftig ut, mens andre ganger kan det være greit å utvide og forkorte. Hvis vi lager en helhet som er delt inn i like mange biter, så kan vi sammenlikne."*

Læreren hadde i tidligere undervisning arbeidet med forkorting og utviding av brøk, og i lekse til dagen etter skulle de arbeide med å finne fellesnevner. Læreren sa i en uformell samtale at planen ikke var å komme inn på fellesnevner i denne diskusjonen, siden det var fire brøker og i tillegg at fellesnevneren var et stort tall. I løpet av undervisningsøkten hadde enkelte elever spurt om hvorfor de egentlig måtte forkorte og utvide brøkene. Læreren benyttet derfor muligheten til å trekke inn fellesnevner som en forklaring på dette. Læreren kalte det en nøyaktighetstest og elevene fikk se hvordan man kan benytte utviding til å sammenlikne brøkene. Elevene klarte selv å sammenlikne $\frac{2}{3}$ og $\frac{5}{6}$ ved å utvide $\frac{2}{3}$ til $\frac{4}{6}$, men det ble vanskeligere å finne fellesnevner når man inkluderte alle fire brøkene. Elevene hadde klart å se sammenhengen om hvorfor det er lurt å utvide brøkene når man skal sammenlikne de, og har dermed utviklet *conceptual understanding* (Kilpatrick, et al., 2001). Elevene må jobbe mer med prosedyren i utviding av brøker, slik at de kan finne felles nevner for flere brøker. Læreren trekker selv oppsummeringen av diskusjonen mot *del av helhet* (Lamon, 2012) ved at hun spør hva er delen og hva er det hele. Hun sier at hvis helheten er delt i like mange deler, kan vi sammenlikne. Dette samsvarer med det Lamon (2012) beskriver i aspektet *del av helhet*, at brøksymbolet betyr a deler av b like deler, som vil si at når brøken utvides deles brøken opp i mindre biter. Lamon (2012) sier at et av kriteriene for å forstå brøk som *måling* er å kunne sammenlikne brøker, og denne oppgaven sammenlikner flere brøker. Likevel valgte læreren å fokusere på aspektet *del av helhet* når de jobber med denne oppgaven.

Læreren trekker frem flere misoppfatninger av brøk i løpet av diskusjonen og hun ønsket forklaringer på hvilken brøk som var størst. I tillegg ber hun elevene selv vise, tegne og forklare klassen, noe de klarte med litt veiledning og oppmuntring fra lærer. Læreren er bevisst på begrepene utviding og forkorting, som de har jobbet en del med i tidligere økter, og trekker det videre mot fellesnevner. I det neste delkapittelet skal vi forklare hvorfor å ta frem misoppfatninger, ønske om forklaringer, at elevene selv viser for klassen og bevissthet på brøkbegreper gjør at denne undervisningssituasjonen skårer høyt på TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a).

Hvorfor skårer denne undervisningssituasjonen høyt?

Å ta opp vanlige misoppfatninger felles i klassen gjør at man kan få frem en diskusjon der man oppklarer misoppfatningene sammen. Dimensjon 5, *tilbakemelding og vurdering*, fokuserer blant annet på om læreren tar tak i elevenes misoppfatninger og gir de mulighet til å bevege seg fremover. Per og Pål sitter med misoppfatningen *gap thinking* (Pearn & Stephens, 2004). Læreren ber de komme frem for å tegne og vise, slik at de selv og klassen kan oppdage at brøkene ikke er like store. På denne måten hjelper læreren elevene slik at de kan oppklare misoppfatningen og bevege seg fremover. Når læreren brakte frem misoppfatningen til Per og Pål ble elevene utfordret til å tenke over om de var enig eller uenig, for så å forklare hvilken brøk de trodde var størst. Dillon (1982) mener at ved å avvise eller akseptere noe, henter man frem tidligere kunnskap og erfaringer for å formulere forklaringer til hvorfor man avviser eller aksepterer noe. Når læreren hele tiden spurte "hva med den brøken da?", måtte elevene på nytt prøve å forklare hvorfor én brøk var større enn den andre. Derfor skårer undervisningssituasjonen høyt på dimensjon 2, *krav til kognitiv tenking*, siden den handler om å gi elevene intellektuelle utfordringer som bidrar til matematisk utvikling. Oppgaven er innenfor Stein og Smith (1998) sitt høye nivå av krav til kognitiv tenking, der misoppfatningene kan bli oppklart ved at man ser på tidligere lærdom om brøk.

Læreren har et ønske om forklaringer, og er ikke fornøyd selv om de kommer frem til rett svar. Når hun ber om forklaring er hun ute etter forståelsen til elevene og hvorfor de mener $\frac{5}{6}$ er rett svar. Elevene må prøve å forstå, samtidig som de ser sammenhenger, noe som vektlegges i *relasjonell forståelse* (Skemp, 1976). Elevene vil utvikle *adaptive reasoning* (Kilpatrick, et al., 2001) når de må begrunne tenkingen, og ved hjelp av resonnering velge ut riktig løsningsmetode. Når læreren stiller et spørsmål eller gir en påstand om hvilken brøk som er størst, må elevene ufrivillig løse den. Med ufrivillig mener vi at de først bestemmer seg for en brøk som er størst, men når læreren krever en forklaring på hvorfor, blir de nødt til å løse oppgaven. Dimensjon 4, *dele og anerkjenne ideer* (Schoenfeld og Floden, 2014a), stiller krav om at elevene har mulighet til å forklare og fremme matematiske argumenter, samt bygge videre på andres ideer. Ved at elevene ufrivillig løser oppgaven tvinges forklaringer frem. Dillon (1982) fant ut at hvis spørsmålene er på et høyt kognitivt nivå, vil også svarene være det. Læreren stilte spørsmål om begrunnelse, som er et spørsmål på et høyt kognitivt nivå og fikk derfor gode forklaringer og svar hos elevene. Samtidig ble det bygget videre på Per og Pål sine ideer. Derfor skårer undervisningssituasjonen høyt innenfor dimensjon 4.

Ved å vise, tegne eller forklare egne resonnementer må man kunne formulere seg matematisk, som *strategic competence* (Kilpatrick, et al., 2001) omhandler. Når man får vist ideene sine foran hele klassen, vil man få anerkjennelse hos læreren og medelevene, bare ved å komme frem på tavla. For å oppnå nivå 3 på dimensjon 4 (Schoenfeld og Floden, 2014a), må elever få forklart sine ideer og resonnementer, og i dette undervisningsopplegget kommer dette godt frem. Det er elevene som er på tavla og tegner, læreren bekrefter hovedsakelig bare om de er på riktig vei eller ikke. Hun bruker samtaletrekket *reasoning* (Chapin, et al., 2009) til å trekke flere inn i samtalen, og sammenfatter det de har kommet frem til underveis ved å gjenta utsagn. Som et resultat av dimensjon 4 (Schoenfeld og Floden, 2014a) vil elevene kunne skape positive identiteter som matematiske "gjørere", og elevene kan få mer selvtillit i matematikk. Læring er en sosial prosess som skjer i interaksjon med andre (Kagan & Stenlev, 2006), og den fjerde hovedstrategien til Wiliam (2007) handler om å aktivere elevene slik at de får eierskap til egen læring. For å oppnå *productive disposition* (Kilpatrick, et al., 2001) spiller motivasjon og engasjement en stor rolle for å utvikle seg matematisk, og ved å få eierskap til egen læring kan elevene bli motivert og engasjert til å utvikle seg innenfor matematikk og brøkbegrepet. Ved at elevene får vise, tegne og forklare egne ideer skårer denne situasjonen høyt på dimensjon 4 i TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a).

Læreren var bevisst på brøkbegreper de tidligere hadde jobbet med, og når elevene trakk inn utviding, valgte hun å bygge videre opp mot fellesnevner. Ved å koble utviding og forkorting opp mot sammenlikning av brøk og fellesnevner, skapes det sammenhenger mellom prosedyrer og konsepter. Derfor skårer undervisningssituasjonen høyt på dimensjon 1, *matematikken* (Schoenfeld & Floden, 2014a). I følge *productive disposition* (Kilpatrick, et al., 2001) bør elevene oppfatte matematikk som noe nyttig og i skåringsguiden til TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014b) kreves det blant annet at matematikken skal gi mening for å oppnå nivå 3 i dimensjon 1. Læreren har observert at begrepene om forkorting og utviding er vanskelig, og ikke alle elevene ser nytten av dette. Det er da viktig å finne måter der elevene kan *se* hvorfor det er nyttig å kunne prosedyrene til forkorting og utviding. Ved å begrunne det med at man kan bruke prosedyrene til å finne fellesnevner, for så å lettere kunne sammenlikne brøkene, kan matematikken gi mening.

Selv om undervisningen skåret høyt på TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a), er det et poeng vi vil trekke frem. I situasjonen der Per og Pål skal frem på tavla og vise hvorfor de mener $\frac{2}{3}$ og $\frac{5}{6}$ er like store, fikk de ikke selv bestemme hvordan de skulle tegne og vise, men ble låst til arealmodellen av læreren. For å utvikle *strategic competence* (Kilpatrick, et al., 2001) må elever være i stand til å velge riktige strategier for å løse bestemte oppgaver. I dette tilfellet har læreren bestemt strategien for elevene, og de blir fratatt muligheten til å velge den representasjonen som de selv måtte ønske. Likevel er arealmodellen i dette tilfellet en god representasjon for å vise at $\frac{2}{3}$ er mindre enn $\frac{5}{6}$, men dette burde eleven selv kunne komme frem til. I situasjonen der Pål ikke får til å forklare med arealmodellen, kunne man vinklet det mot andre representasjonsformer. En mulighet ville vært å vinklet det mot tallinje og aspektet *måling* (Lamon, 2012). En tallinje kan brukes til å få forståelse for tallstørrelser, og kanskje kunne Pål klart å plassere brøkene på en tallinje.

Undervisningssituasjonen vi nå har sett på tar utgangspunkt i elevenes misoppfatninger og utsagn, slik at elevene kan utvikle seg innenfor brøkbegrepet. Læreren skaper sammenheng mellom utviding, forkorting, fellesnevner og sammenlikning av brøk, og gir dermed matematikken mening. I tillegg jobber læreren aktivt for å få begrunnelser, og utfordrer elevene gjennom påstander og spørsmål. Elevene må enten akseptere eller avvise medelevers påstander, etter at elevene selv har fått vise klassen hvordan de har tenkt. På grunn av bruken av misoppfatninger i diskusjonen, ønsket om forklaringer fra elever, at elevene selv får vise og begrunne, samt bevissthet rundt brøkbegreper, skårer denne undervisningssituasjonen høyt innenfor Schoenfeld og Floden (2014a) sine dimensjoner.

5 Diskusjon

Vi har nå presentert lyttekrok, som er en måte å organisere undervisningen på, og "Gi en påstand", "Hva skal ut?" og "Hvilken brøk er størst?", som er tre undervisningssituasjoner. Vi har også drøftet hvorfor disse har skåret høyt på TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a). For å svare på forskningsspørsmålene våre, "Hvordan beskriver forskning god brøkundervisning og på hvilke måter dette kommer til syne i praksis i to 6. klasser?", vil vi i dette kapittelet diskutere om undervisningen som har fått høy skår kvalifiserer til god brøkundervisning.

Kilpatrick, et al. (2001) sin modell for matematisk kyndighet består av fem tråder; *conceptual understanding; procedural fluency; strategic competence; adaptive reasoning;* og *productive disposition.* I teorikapittelet har vi forklart at for å kunne matematikk må elevene utvikle seg til å bli matematisk kyndig (Kilpatrick, et al., 2001). Vi presenterte forskning om kvaliteten på matematikkoppgaver, og hvordan disse stiller forskjellige kognitive krav. For at elevene skal ha mulighet til å bli matematisk kyndig, må oppgavene ligge på et høyt kognitivt nivå. For å bli matematisk kyndig stilles det blant annet krav om at elevene skal kunne argumentere, resonnere, formulere, se sammenhenger og bli matematiske "gjørere". Oppgaver på et høyt nivå legger opp til dette. Vi har også sett på forskning om effektive klasserom, hvor det legges opp til deltakelse, engasjement og at elever skal være ressurser for hverandre. Når elever deltar og engasjerer seg i matematikken vil de utvikle *productive disposition* (Kilpatrick, et al., 2001), som er av stor betydning for å utvikle seg innenfor de andre trådene. I vår forskning fokuserte vi på brøkundervisning, og har i teorikapittelet sett at det er enighet blant flere forskere at brøkbegrepet er komplekst og består av flere aspekter (Behr, et al., 1983; Bjerke, et al., 2012; Lamon, 2007, 2012; Van de Walle, et al., 2014). Forskningen vi har tatt for oss poengterer at for å forstå brøk må man beherske de fem aspektene; *del av helhet, måling, kvotient, operator* og *forhold* (Lamon, 2012). Brøkundervisning som bidrar til at elevene utvikler matematisk kyndighet og ivaretar alle aspektene innenfor brøk, vil derfor være god brøkundervisning, som vi spør etter i det første forskningsspørsmålet.

Vi har observert brøkundervisning på 6. trinn som skårer høyt på TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a). Vi må derfor se på om undervisningen vi har presentert bidrar til at elevene utvikler matematisk kyndighet, og om undervisningen ivaretar det komplekse brøkbegrepet med flere aspekter. Hvis undervisningen bidrar til at elevene utvikler matematisk kyndighet og ivaretar det komplekse brøkbegrepet med flere aspekter, mener vi den kvalifiserer til god brøkundervisning. Vi vil derfor diskutere følgende spørsmål: "Utvikler elevene matematisk kyndighet med undervisningen som skåret høyt?" og "Ivaretas det komplekse brøkbegrepet med flere aspekter i undervisningen som skåret høyt?". Spørsmålene vil bli diskutert hver for seg. Til slutt vil vi svare på spørsmålet "Hvorfor kvalifiserer undervisningen som skåret høyt til god brøkundervisning?". Hvis den undervisningen vi har sett kvalifiserer til god brøkundervisning, besvarer vi det andre forskningsspørsmålet, "Hvordan kommer god brøkundervisning til syne i praksis i to 6. klasser?".

5.1 Utvikler elever matematisk kyndighet med undervisningen som skåret høyt?

I lyttekrok og de tre undervisningssituasjonene observerte vi at diskusjon og samtale rundt sentrale brøkbegrep var avgjørende for at undervisningen skåret høyt. Vi observerte blant annet spørsmål på et høyt kognitivt nivå som krever forklaringer, at lærerne benyttet seg av samtaletrekk og gikk i dybden av matematikken. Gjennom samtale og diskusjon, både i klasse og i par, fikk elevene formulere, representere, begrunne og argumentere matematikk slik Kilpatrick, et al. (2001) sine tråder blant annet vektlegger. På denne måten gikk de i dybden av matematikken. Det at elevene i så stor grad skulle diskutere og snakke matematikk, observerte vi tok tid. I skolen blir det ofte snakket om å komme seg gjennom pensum, og man kan stille spørsmål ved hvor mye tid som skal legges av til diskusjon og samtale. Er det det slik at man må velge mellom å gå i dybden av matematikken eller å komme seg gjennom pensum?

Ludvigsenutvalget (NOU, 2015:8) kom i 2015 med en rapport om fremtidens skole. De ønsket en fagfornyelse som skal legge til rette for dybdelæring og ta hensyn til at elevers utvikling tar tid. Bjerkmo (2015) konkluderer i sin master at klasser med færre elever har mer tid til å gå dypere inn i matematikken, samt fokusere på *relasjonell forståelse* (Skemp, 1976) og matematisk kyndighet (Kilpatrick, et al., 2001). Dette vil si at dagens skole ikke legger til rette for dybdelæring, men at klasser med få elever har mer tid til å gå i dybden. Vi mener derimot at undervisningssituasjonene vi har presentert er eksempler på hvordan man kan gå i dybden av matematikken, også i større klasser, og at man bør ta seg tid til det. Gjennom parsamtaler og klasseromsdiskusjon kan man gå dypere i matematikken slik Ludvigsenutvalget (NOU, 2015:8) ønsker. Ved å snakke matematikk kan elevene få øve seg på evnen til å formulere, representere og løse matematiske problemer, slik *strategic competence* (Kilpatrick, et al., 2001) beskriver. Lærernes fokus på å få begrunnelser gjør elevene bevisst på hva løsningene betyr, og dermed blir de i bedre stand til å tolke resultater, noe som også er viktig for å utvikle *strategic competence* (Kilpatrick, et al., 2001). Det å snakke matematikk i fellesskap bidrar til at elevene utvikler *adaptive reasoning* (Kilpatrick, et al., 2001) ved å begrunne og forklare resonnementene sine slik at de er forståelig for andre. C*onceptual understanding* (Kilpatrick, et al., 2001) handler om å forstå matematikken som noe mer enn isolert faktakunnskap og metoder, og diskusjonene vi observerte fokuserte for det meste på begreper og sammenhenger.

Vi observerte også engasjementet hos elevene i lyttekroken og de utvalgte undervisningssituasjonene. Når elevene fikk diskutere, vise på tavla, forklare for hverandre og når læreren tok tak i deres ideer og baserte undervisningen sin på disse, fikk elevene eierskap til undervisningen. *Productive disposition* (Kilpatrick, et al., 2001) sier at engasjement og motivasjon spiller en stor rolle for å utvikle seg innenfor de andre trådene innenfor matematisk kyndighet. Ludvigsenutvalget mener at når elever utvikler alle fem trådene parallelt, utvikles en matematisk kompetanse som går i dybden av faget, og man kan lettere overføre kunnskapen fra et emne til et annet (NOU, 2015:8). Ved å få eierskap til egen læring kan elevene bli motivert og engasjert, som bidrar til at elevene utvikler seg innenfor alle trådene, og dermed får en matematisk kompetanse som går i dybden av faget. Vi mener lyttekrok, "Gi en påstand", "Hva skal ut?" og "Hvilken brøk er størst?" støtter opp under en kompetanse som går i dybden av matematikken.

Det må påpekes at undervisningen ikke alltid kan bestå av samtale og diskusjon, da elevene også må lære seg å utføre prosedyrer fleksibelt, nøyaktig og effektivt, slik *procedural fluency* (Kilpatrick, et al., 2001) legger opp til. Undervisningen vi har trukket frem fokuserte i liten grad på prosedyrer. Dette betyr ikke at skole A og B ikke jobbet med prosedyrer, men akkurat de utvalgte undervisningssituasjonene fokuserte ikke på dette. Trådene til Kilpatrick, et al. (2001) skal utvikles parallelt, men det er urealistisk å ta for seg alle samtidig.

I dette delkapittelet har vi tatt for oss spørsmålet om elever utvikler matematisk kyndighet med undervisningen som skåret høyt. Vi har argumentert for at lyttekrok og undervisningssituasjonene vi har presentert, bidrar til å utvikle matematisk kyndighet. Det var blant annet diskusjon, samtale, krav om begrunnelser, at elevene fikk eierskap til egen læring og det at læreren tok utgangspunkt i elevenes ideer som bidro til at undervisningen skåret høyt på TRU Math. Gjennom samtale og diskusjon, både i klasse og i par, får elevene som nevnt formulere, representere, begrunne og argumentere matematikk som Kilpatrick, et al. (2001) sine tråder blant annet vektlegger. Bruk av lyttekrok legger naturlig opp til samtale og deltakelse. "Gi en påstand", "Hva skal ut?" og "Hvilken brøk er størst?" er undervisningssituasjoner som baserer seg på diskusjon og samtale, der elevene tvinges til å ta et standpunkt ved en påstand, for så å forsvare standpunktet. Elevenes egne, og andre kjente misoppfatninger om brøk dannet grunnlaget for klasseromsdiskusjon, hvor lærerne ønsket å fremprovosere læring. På grunn av dette mener vi lyttekrok, "Gi en påstand", "Hva skal ut?" og "Hvilken brøk er størst?" bidrar til at elevene utvikler matematisk kyndighet (Kilpatrick, et al., 2001).

5.2 Ivaretas det komplekse brøkbegrepet med flere aspekter i undervisningen som skåret høyt?

Vi observerte brøkundervisningen til to 6. klasser de to første ukene i oppstarten av brøk. Til sammen observerte vi seks klokketimer med brøkundervisning på begge skolene. Forskning vi har tatt for oss mener det ikke er tilstrekkelig å undervise i brøk innenfor et aspekt, men man må forstå hver og en av aspektene, samt hvordan de henger sammen (Behr, et al., 1983; Bjerke, et al., 2012; Lamon, 2007, 2012; Van de Walle, et al., 2014). Begge lærerne vi observerte valgte å introdusere brøk som *del av helhet* (Lamon, 2012), noe Van de Walle, et al., (2014) sier er et effektivt utgangspunkt til introduksjon av brøk. De sier også at det ofte er stort fokus på dette aspektet i lærebøker. I lærerveiledningen til Multi 6B (Alseth, et al., 2015) står det at det matematiske innholdet i kapittelet består av brøk som *del av en mengde* og *del av en hel*.

Undervisningssituasjonene "Gi en påstand", "Hva skal ut?" og "Hvilken brøk er størst?" mener vi er eksempler på god brøkundervisning innenfor aspektet *del av helhet*. Dette fordi de tok for seg sammenlikning av brøker, likeverdige brøker og at delene i brøk må være like store. Dette sier Lamon (2007) er ideer elever trenger å utvikle for å forstå brøk, uavhengig av hvilket aspekt man arbeider innenfor. Undervisningssituasjonene vi har presentert tok utgangspunkt i utfordringer og misoppfatninger i brøk for å fremme poenger som er viktige innenfor *del av helhet*. Situasjonene la opp til diskusjon, slik at elevene kunne diskutere og argumentere for å selv prøve og skape forståelse av brøkbegrepet, uten å innføre algoritmer. Som nevnt i drøftingen av undervisningssituasjonene kunne det likevel vært benyttet flere representasjoner innenfor *del av helhet* og eventuelt representasjoner fra andre aspekter.

Vi var tilstede i bare to uker av undervisningen og observerte stort sett bare aspektet *del av helhet*. Lamon (2007) sier at man trenger tilstrekkelig tid med å jobbe innenfor ett aspekt. Dette kan være en grunn til at vi ikke fikk observert flere aspekter. Vi vet blant annet at det er et eget delkapittel i Multi som tar for seg *forhold* (Alseth, et al., 2015). I intervjuet sa begge lærerne at de ønsket å bruke andre representasjoner senere i undervisningen, og nevnte blant annet tallinje, desimaltall og prosent. I teoridelen sa vi at for å få en fullverdig forståelse av brøk, må alle aspektene beherskes (Behr, et al., 1983; Bjerke, et al., 2012; Lamon, 2007, 2012; Van de Walle, et al., 2014). Med tanke på at man trenger tilstrekkelig tid for å utvikle ett aspekt, kan det være utfordrende å få tid til alle aspektene, men som Lamon (2007) sin forskning konkluderer med; ved å inkludere flere aspekter i brøkundervisningen, vil man få meningsfull læring. Skole A og skole B introdusere brøk som *del av helhet*, noe som er et godt utgangspunkt, men et ensidig fokus på brøk som *del av helhet* kan medføre en svekket forståelse for brøk (Bjerke, et al., 2012). Vi mener det er mulig å gå i dybden av et aspekt, og samtidig inkludere andre aspekter parallelt. Dette mener vi at begge skolene kunne ha gjort for mulighetene var der. For eksempel kunne læreren trekke inn *måling* (Lamon, 2012) i "Hvilken brøk er størst?". Sammenlikning av brøker er sentralt innenfor *måling,* men læreren la opp til *del av helhet* når hun ba elevene bruke arealmodellen.

I dette delkapittelet tok vi for oss spørsmålet om hvordan det komplekse brøkbegrepet med flere aspekter ivaretas. I de to ukene vi observerte, ble aspektet *del av helhet* (Lamon, 2012) mest vektlagt. Ut ifra dette ble ikke det komplekse brøkbegrepet ivaretatt slik forskning anbefaler. De fordypet seg innenfor et aspekt, men vi skulle gjerne observert flere koblinger til andre aspekter, da dette kreves for å få en fullverdig forståelse for brøk. Vi har bare observert en liten del av brøkundervisningen og det er mulig lærerne tok for seg flere aspekter etter vi dro. Bjerke, et al. (2012) sin forskningsrapport oppfordrer skoler til å endre praksis slik at elevene får tilgang til alle aspektene og varierte representasjonsformer. De mener at endringen starter med læreren og vi er enig med prinsippet *undervisning* (NCTM, 2000) om at det er læreren sin oppgave å planlegge effektiv matematikkundervisning. Det komplekse brøkbegrepet ble ikke ivaretatt i løpet av vår observasjon, likevel mener vi undervisningsoppleggene er eksempler på god undervisning innenfor aspektet *del av helhet* (Lamon, 2012).

5.3 Hvorfor kvalifiserer undervisningen som skåret høyt til god brøkundervisning?

I kapittelet "Analyse og drøfting av funn" har vi beskrevet undervisning som har skåret høyt på TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a), og drøftet hvorfor de skåret høyt. Det som ligger til grunn i TRU Math er ikke noe nytt og revolusjonerende. Rammeverket har sammenfattet teori og forskning på hva som er kjent som god praksis og satt det i et system. Vårt forskningsprosjekt tok utgangspunkt i at undervisning som skårer høyt på TRU Math er god undervisning. Vi benyttet rammeverket fordi det var aktuelt og nytt, i tillegg til at det var oversiktlig og enkelt å forholde seg til.

Lyttekrok, "Gi en påstand", "Hva skal ut?" og "Hvilken brøk er størst?" skåret høyt på TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a) av flere grunner. Organiseringen i lyttekroken la til rette for lik tilgang, inviterte til samtale og diskusjon og ga læreren mulighet til å innhente elevenes tanker. I "Gi en påstand" og "Hva skal ut?" bidro bruk av samtalepartner, spørsmålstillingen til læreren, bruk av samtaletrekk, valg av representasjoner, og bevisstheten på elevenes ideer til å skape klasseromsdiskusjoner. I "Hvilken brøk er størst?" ble misoppfatninger benyttet som utgangspunkt for diskusjon, læreren ønsket begrunnelser, elevene fikk selv vise og begrunne samt læreren var bevisst på sammenhengen mellom utviding, forkorting, fellesnevner og sammenlikning av brøk. Dette er brøkundervisning som har kommet til syne på 6. trinn og har skåret høyt på TRU Math.

Vi har argumentert for at lyttekrok og undervisningssituasjonene bidrar til å utvikle matematisk kyndighet. I tillegg har vi argumentert for at selv om ikke alle aspektene kom til syne i de spesifikke undervisningssituasjonene, var undervisningen god innenfor aspektet *del av hel* (Lamon, 2012). Tidligere har vi sagt at undervisningen må støtte opp under alle brøkaspektene for å være god brøkundervisning. På grunn av tidsomfanget på vår observasjon var det naturlig at ikke alle aspektene kom til syne, da man også må ha god tid innenfor hvert aspekt. Vi har derfor kommet frem til at undervisningen som skåret høyt på TRU Math bidrar til at elevene utvikler matematisk kyndighet, og at undervisningen ivaretar aspektet *del av hel.* Vi kan derfor si at undervisningen kvalifiserer til god brøkundervisning.

6 Avslutning

Vårt forskningsspørsmål er todelt. Det første forskningsspørsmålet er "Hvordan beskriver forskning god brøkundervisning?". Her har vi kommet frem til at brøkundervisning som bidrar til at elevene utvikler matematisk kyndighet (Kilpatrick, et al., 2001) og ivaretar alle aspektene i brøk (Lamon, 2012) kvalifiserer til god brøkundervisning.

Det andre forskningsspørsmålet er "På hvilke måter kommer dette (det forskning beskriver som god brøkundervisning) til syne i praksis i to 6. klasser?". For å se hvordan brøkundervisning kom til syne brukte vi TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a) til å sette nivå på undervisningen. Deretter har vi argumentert for at undervisningen som skåret på et høyt nivå, kvalifiserer til god brøkundervisning.

Etter vårt masterprosjekt sitter vi igjen med lyttekrok, som en måte å organisere undervisning på, og undervisningssituasjonene "Gi en påstand", "Hva skal ut?" og "Hvilken brøk er størst?". Dette er eksempler på hvordan man kan legge til rette for, og gjennomføre, god brøkundervisning. Lyttekrok, "Gi en påstand", "Hva skal ut?" og "Hvilken brøk er størst?" legger alle opp til diskusjon og samtale. Vi har sett at diskusjon og samtale bidro sterkt til at undervisningssituasjonene skåret høyt på TRU Math (Schoenfeld & Floden, 2014a). Lærerne var sentrale på grunn av måten de ordla seg og organiserte undervisningen, de aktiverte elevene til deltakelse og de styrte undervisningen etter elevenes utsagn, behov og misoppfatninger i brøk.

Med lyttekrok, "Gi en påstand", "Hva skal ut?" og "Hvilken brøk er størst?" har vi eksemplifisert hvordan god brøkundervisning kommer til syne i to 6. klasser. Å gjennomføre disse undervisningssituasjonene tar tid, men vi mener i likhet med Ludvigsenutvalget (NOU, 2015:8) at undervisning må legge til rette for dybdelæring og ta hensyn til at elevers utvikling tar tid.

6.1 Veien videre

I denne studien har vi fått eksempler på god undervisning innenfor aspektet *del av helhet* (Lamon, 2012). For å få en helhetlig forståelse for brøk er det nødvendig å jobbe innenfor flere aspekter, og det kunne vært interessant å se eksempler på undervisning innenfor de andre aspektene. På forhånd ønsket vi å se undervisningssituasjoner innenfor flere aspekter, fordi vi tror at ved å implementere flere aspekter i undervisningen vil elevene få en bedre forståelse for brøk. Det kunne vært spennende å selv lage undervisningsopplegg innenfor *måling, kvotient,* *operator* og *forhold*, men også observere dette, for å se hvilken effekt dette har på elevenes læring.

I dette prosjektet har vi ikke målt elevenes læringsutbytte av undervisningen. Vi sier at undervisningssituasjonene som er presentert er i tråd med forskning, men det kan være interessant å finne ut hva elevene sitter igjen med etter gjennomføring etter endt undervisning. Her kan man for eksempel se på hvilken forskjell lyttekrok kan utgjøre i forhold til tradisjonelle klasserom, og om elevene har et større læringsutbytte i lyttekroken.

Litteraturliste

Alseth, B., Nordberg, G. & Røsseland, M. (2015). *Multi : matematikk for barnetrinnet : Grunnbok 6b Lærerens bok* (Bokmål utg.). Oslo: Gyldendal undervisning.

Baltzersen, R. K. (2014). *Praksisveilederen i skolen* (Versjon 1.1 - januar 2014 utg.). Oslo: R.K. Baltzersen.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational number concepts. I R. Lesh & M. Landau (Red.), *Acquistion of Mathematics Concepts and Processes* (s. 91-125). New York: Academic Press.

Bjerke, A. H., Eriksen, E., Rodal, C. & Ånestad, G. (2012). Når brøk ikke er tall – Eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse. I I. Pareliussen, B. B. Moen, R. A. & T. Solhaug (Red.), *FoU i praksis 2012 conference proceedings* (s. 28-36). Trondheim: Akademika forlag.

Bjerkmo, K. (2015). *Hvordan påvirkes matematikkundervisningen av antall elever i klassen?* Master. UiT Norges arktiske universitet, Tromsø.

Bjørndal, C. R. P. (2002). *Det vurderende øyet : observasjon, vurdering og utvikling i undervisning og veiledning*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101.

Bryman, A. (2012). *Social research methods* (4th utg.). Oxford: Oxford University Press.

Chapin, S. H., O'Connor, C. & Anderson, N. C. (2009). *Classroom discussions in math : a teacher's guide for using talk moves to support the common core and more, grades K-6* (3rd utg.). Sausalito, Calif.: Math Solutions.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forl.

Cohen, L., Morrison, K. & Manion, L. (2007). *Research methods in education* (6th utg.). London: Routledge.

Cresswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. THousand Islands, CA: SAGE Publications Inc.

Dillon, J. (1982). Cognitive Correspondence Between Question/ Statement and Response. *American Educational Research Journal, 19*(4), 540-551.

Gay, S. & Thomas, M. (1993). Just because they got it right, does it mean they know it? I N. Webb & A. Coxford (Red.), *Assessment in the mathematics classroom: 1993 yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 130-134). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Johnsen, M. & Storaas, A. (2015). *En komparativ studie av matematikkoppgaver i net norsk og et finsk læreverk.* Master. UiT Norges arktiske universitet, Tromsø.

Kagan, S. & Stenlev, J. (2006). *Cooperative learning : undervisning med samarbejdsstrukturer*. Albertslund: Forlag Malling Beck.

Karlsen, L. (2014). *Tenk det! : utforsking, forståelse og samarbeid - elever som tenker sjæl i matematikk : ungdomstrinnet*. [Oslo]: Cappelen Damm akademisk.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up : helping children learn mathematics*. Washington, DC.: National Academy Press.

Kjærnsli, M. & Olsen, R. V. (2013). *Fortsatt en vei å gå : norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Oslo: Universitetsforl.

Kleven, T. A., Tveit, K. & Hjardemaal, F. (2011). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode : en hjelp til kritisk tolking og vurdering*. Oslo Unipub.

Kunnskapsdepartementet. (2013). *Læreplan i matematikk: MAT1-04*. Lokalisert 13.05. 2016, på http://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M. & Rygge, J. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2. utg. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. I F. Lester (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3rd ed utg.). New York: Routledge.

LeCompte, M. D. & Goetz, J. P. (1982). Problems of Reliability and Validity in Ethnographic Research. *Review of Educational Research, 52*(1), 31-60.

Lev-Zamir, H. & Leikin, R. (2013). Saying versus doing: teachers' conceptions of creativity in elementary mathematics teaching. *ZDM : the international journal on mathematics education, 45*(2), 295-308.

Matematikksenteret. (u.å.). *Hva betyr det å være god i matematikk?* Lokalisert 14.04.16 2016, på http://www.matematikksenteret.no/content/4526/Hva-betyr-det-a-vare-god-i-matematikk

Mehan, H. (1979). *Learning lessons : social organization in the classroom*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring : ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriet.

NOU. (2015:8). *Fremtidens skole — Fornyelse av fag og kompetanser* Lokalisert på https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/?q=&ch=1.

Opplæringslova. (1998). *Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa (opplæringslova)*. Lokalisert 05.05. 2015, på http://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61

Patton, M. Q. (1980). *Qualitative evaluation methods*. Beverly Hills, CA: Sage.

Pearn, C. & Stephens, M. (2004). Why You Have to Probe to Discover What Year 8 Students Really Think About Fractions. I I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Red.), *Mathematics Education for the Third Millenium: Towards 2010 Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (s. 430-437). Sydney, Australia: Merga.

Resnick, L., Michaels, S. & O'Connor, C. (2007). *Classroom Discourse, Mathematical Rigor, and Student Reasoning: Analyzing the Dimensions of Powerful Mathematics Instruction and Learning*. Lokalisert 15.04. 2016, på http://www.learnlab.org/research/wiki/images/f/ff/Accountable_Talk_Lit_Review.pdf

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. I D. Grouws (Red.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 334-370). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. (2015). *The Teaching for Robus Understanding (TRU) Framework*. Lokalisert 25.02. 2016, på http://map.mathshell.org/trumath/TRU_framework_overview.pdf

Schoenfeld, A. & Floden, R. (2014a). *And Introduction to the TRU Math Dimensions*. Lokalisert 25.02 2016, på http://map.mathshell.org/trumath/trumath_dimensions_alpha.pdf

Schoenfeld, A. & Floden, R. (2014b). *The TRU Math Scoring Rubric*. Lokalisert 25.02. 2016, på http://map.mathshell.org/trumath/trumath_rubric_alpha.pdf

Schofield, J. W. (1990). Generalizability in qualitative research. I E. Eisner & A. Peshkin (Red.), *Qualitative Inquiry in Education* (s. 201-232). New York: Teachers College Press.

Sherin, M. & Drake, C. (2009). Curriculum strategy framework: investigating patterns in teachers' use of a reform-based elementary mathematics curriculum. *Journal of Curriculum Studies, 41*(4), 467-500.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(2), 88-95.

Skemp, R. (1989). *Mathematics in the primary school*. London: Routledge.

Skott, J., Jess, K. & Hansen, H. C. (2008). *Delta : fagdidaktik*.

Slavin, R. E., Hurley, E. A. & Chamberlain, A. M. (2003). Cooperative learning and achievement. I W. M. Reynolds & G. J. Miller (Red.), *Handbook of psychology: Vol. 7. Educational psychology* (s. 177-198). Hoboken, NJ: Wiley.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Son, J. & Kim, O. (2015). Teachers' selection and enactment of mathematical problems from textbooks. *Mathematics Education Research Journal, 27*(4), 491-518.

Stein, M. & Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Stein, M., Smith, M., Henningsen, M. & Silver, E. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York: Teachers College Press.

Taylor-Powell, E. & Renner, M. (2003). Analyzing qualitative data. Lokalisert på http://learningstore.uwex.edu/assets/pdfs/g3658-12.pdf

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2014). *Elementary and middle school mathematics : teaching developmentally* (8th utg.). Essex: Pearson Education Limited.

Vinner, S. (1997). From intution to inhibition - mathematics, education and other endangered species. *Proceedings of the 21st conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 63-78.

Wiliam, D. (2007). Keeping learning on track. I F. Lester (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 1053-1098). Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

Winter, G. (2000). A Comparative Discussion of the Notion of 'Validity' in Qualitative and Quantitative Research. *The Qualitative Report, 4*(3 & 4).

VEDLEGG

VEDLEGG 1: Skåringsguide:

(Originalen finnes på http://map.mathshell.org/trumath.php)

Generell undervisning

Dimensjon 1

1. Klasseromsaktivitetene er **ufokusert** (ikke nivåtilpasset), fokuserer veldig på ferdigheter (**instrumentelt**) og det legges ikke opp til viktige arbeidsmåter som for eksempel resonnering og problemløsning. Det legges ikke fokus på de underliggende ideene til matematikken, og elevene får ikke mulighet til å utvikle matematiske fremgangsmåter.
2. Klasseromsaktivitetene er **for det meste ferdighetsbasert**, med noe **overfladisk sammenheng** mellom prosedyrer, konsepter og kontekster der det passer seg. Det legges minimalt opp til viktige arbeidsmåter som for eksempel resonnering og problemløsning. **Undervisningen er nivåtilpasset**.
3. Klasseromsaktivitetene støtter opp under meningsfulle sammenhenger mellom prosedyrer, konsepter og kontekster der det passer seg og gir muligheter til elevene å jobbe med viktige arbeidsmåter. Det gis mye oppmerksomhet mot at matematikken skal gi mening, og **elevene blir bedt om å resonnere** og skape sammenhenger.

Dimensjon 2

1. Klasseromsaktiviteten er strukturert slik at elevene **for det meste benytter seg av memorerte prosedyrer** eller bare jobber med **rutineøvelser**.
2. Klasseromsaktiviteten gir elevene mulighet til å utfordre seg selv og **problemløsning**, men læreren har en tendens til **å ta bort utfordringene** ved å hjelpe for mye, slik at elevene ikke får streve litt med oppgavene.
3. Læreren **gir hint og bygger stillaser** når elevene strever. Jobber for å skape forståelse og **engasjerer** elevene til å jobbe med matematikken.

Dimensjon 3

1. Det er **ikke lik tilgang** til matematikken, og det **gis ingen åpenbare forsøk på å påpeke** dette problemet. Diskusjoner foregår bare mellom læreren og **noen få utvalgte elever**. Det som diskuteres er på så **høyt nivå** at bare noen få har mulighet til å delta.
2. Det er **ujevn tilgang** til deltakelse, men **læreren gjør noen forsøk** for å nå ut til en bred gruppe elever. I diskusjoner fremmer læreren **flere inngangspunkt** til matematikken, **velger ut elever tilfeldig**, og **bygger videre** på det som blir sagt.
3. Læreren **prøver aktivt å støtte** og til en viss grad oppnår en **bred** og meningsfull matematisk deltakelse**, ELLER** at det som **virker å være en etablert struktur** ser ut til å oppnå engasjement hos et bredt spekter av elever. Det som skiller nivå 3 fra nivå 2 er at det er **bevis for suksess** av tiltakene som er gjort. Slike bevis kan være **mange hender i været** tvers over klasserommet, elevene **får delt ideene sine**, og **alle får være med** å snakke om matematikken. Et annet bevis er **at læreren aktivt oppfordrer alle til deltakelse**, og oppnår dette.

Dimensjon 4

1. **Læreren setter i gang samtaler**. **Elevenes tur å snakke går veldig fort** (en setning eller mindre), og er begrenset til hva læreren sier eller gjør. Diskusjonen er lærerorientert og fokusert. **Bortsett fra når spørsmål kommer fra elevene kommer matematikken fra læreren.**
2. Elevene har **mulighet til å forklare** noe av tenkningen deres, eleven foreslår, mens **læreren gjør ikke noe mer med det**.
3. **Elevene får forklart sine ideer** og resonnementer. Læreren kan **gi elevene eierskap** til det de har sagt når det bygges videre på det som ble sagt, **OG/ELLER** elever **får svare og bygge videre på andres ideer**. De matematiske ideene blir **bygget videre** på gjennom spørsmål, kritikk, sammenligning og/eller utvidelser.

Dimensjon 5

1. Elevenes resonnement er **ikke aktivt ført til overflaten eller ettertraktet**. Lærerens handlinger er begrenset til **korrigerende tilbakemeldinger eller oppmuntring**.
2. Læreren **referer til elevenes tenkning**, kanskje til og med til vanlige feiler, men **enkelte elevers ideer blir ikke bygget på** (når de er potensielt verdifulle) eller brukt til å påpeke utfordringer. Lærerens **kommentarer er generelle**, der det ikke er noen klar indikasjon på at læreren hjelper elevene til å forstå utfordringene eller mulighetene som kommer ut av bestemte ideer som dukker opp fra elevenes kommentarer.
3. Læreren **innhenter elevenes tenkning**, og senere instruksjoner **respondert til disse ideene** ved å bygge på produktive utgangspunkt eller ved å påpeke begynnende misoppfatninger. En score på 3 indikerer at elevenes tenkning blir **tvunget frem og referert til**, hvor det er bevis på at det som kommer frem av elevenes tenkning noen ganger **påvirker hvilken retninger** undervisningen tar.

Individuelt arbeid

Dimensjon 1

1. Oppgavene legger opp til å **finne svar** uten å beskrive underliggende resonnementer.
2. Oppgavene **legger opp i en viss grad** for å skape sammenheng i matematikken, men **læreren støtter i liten grad opp** rundt dette, og utnytter ikke mulighetene oppgavene gir.
3. Lærerens innspill med de enkelte elevene bygger opp under et sammenhengende syn på matematikken.

Dimensjon 2

1. Oppgavene krever ikke noe mer enn å benytte seg av **kjente prosedyrer eller memorert fakta.**
2. Oppgavene **utfordrer** elevene og gir de mulighet til å streve litt, men **læreren tar bort utfordringene** ved å gi forslag til løsningsmetode eller gir for mange hint.
3. Læreren **gir gode hint** og bygger stillaser som skaper forståelse og engasjerer eleven til å jobbe med matematikken.

Dimensjon 3

1. Et betydelig antall elever **virker lite engasjert** og det **er ingen tiltak** for å støtte opp under engasjement.
2. Elevene **virker å jobbe**, men det **er ingen tydelige tiltak** for elever som vil ha, eller trenger støtte eller oppmerksomhet for å få det. (det = støtte og oppmerksomhet).
3. Lærerens oppmerksomhet er tydelig tilgjengelig for elever som vil ha det, noe som resulterer i tilgang til matematikken.

Dimensjon 4

1. Læreren **viser eller forklarer** elevene hvordan de skal løse matematikken og **retter** muligens på elevenes arbeid. Elevenes ideer blir ikke dratt ut eller bygget videre på.
2. En-til-en-interaksjoner **gir elevene muligheter til å snakke om deres ideer OG/ELLER** gir tilgang til måter å engasjere seg i matematikken.
3. En score på 3 **gis bare** hvis elevene har rikelige muligheter og *agency* for å **utvikle sine ideer** gjennom interaksjon med læreren, **ELLER** hvis læreren **tar elevens idé opp foran hele klassen** gjennom diskusjon rett etter det individuelle arbeidet slutter.

Dimensjon 5

1. Lærerens handlinger er **begrenset til korrigerende tilbakemeldinger** eller oppmuntring.
2. Individuelle interaksjoner gir muligheter for at elevene skal diskutere deres tenkning, og **lærerens svar adresserer denne tenkningen eksplisitt**. (Ikke bare retting av elevens arbeid).
3. Læreren **innhenter elevenes tenkning** og etterfølgende diskusjoner **svarer på disse ideene** ved å bygge på produktive utgangspunkt eller adresserer begynnende misoppfatninger.

Gruppearbeid

Dimensjon 1

1. Matematikken som diskuteres er <u>ikke på trinn-nivå</u>, **ELLER** så er diskusjonene **rettet mot å finne svar**. Forklaringer, hvis det i det hele tatt er noen er for det meste **basert på prosedyrer**.
2. Diskusjonene **er for det meste på riktig nivå**, men hovedsakelig **ferdighetsbasert** med få muligheter for å skape koblinger og sammenhenger.
3. Det bygges opp under at forklaringene og begrunnelsene er sammenhengende.

Dimensjon 2

1. Aktivitetene eller lærerinstruksjoene oppfordrer elevene til å benytte seg av **memorerte prosedyrer**.
2. Aktivitetene **gir elevene mulighet til å streve litt** og delta produktivt, men elevene er enten **etterlatt til seg selv** slik at de ikke klarer å gjennomføre oppgavene, eller at læreren hjelper for mye og **tar bort utfordringen**.
3. Elevene blir **støttet av læreren** ved å bli engasjert til å jobbe med sentrale matematiske ideer. Elevene får **streve litt**, og får **tid til å tenke igjennom ting**.

Dimensjon 3

1. **Noen elever er lite engasjert** eller marginalisert, og forskjellig tilgang til matematikken eller gruppen **blir ikke håndtert**.
2. **Alle medlemmene på gruppen ser ut til å jobbe med matematikk**, men noen **deltar ikke i gruppeaktiviteten**. Læreren **støtter ikke deres engasjement** i elevdiskusjoner.
3. Alle på gruppen bidrar til gruppens matematiske diskusjoner, **ELLER** læreren **gjør handlinger** for å få alle elevene til å komme med meningsfulle bidrag.

Dimensjon 4

1. Lærerens innskytelser, hvis det er noen begrenser elevene til å produsere **korte svar** til læreren, **ELLER** at læreren **ikke gjør noe/ignorerer klare ubalanser** i gruppediskusjonen.
2. **Minst en** av elevene har **muligheten til å snakke** om det matematiske innholdet, men **læreren er den som hovedsakelig driver samtalen**, eller har en rolle som **fasit**. Elevene er **ikke støttet** til å bygge på hverandre sine ideer.
3. **Minst en** av elevene stikker seg ut og **forsvarer sine ideer/**resonnementer **OG/ELLER** elevene bygger på hverandres ideer **ELLER** læreren tilskriver eierskap til elevenes ideer i senere diskusjoner.

Dimensjon 5

1. Lærerens handlinger er **kun korrigerende**, for eksempel gjennom å lede elevene gjennom en **forhåndsbestemt sti,** og læreren **innhenter ikke og etterfølger elevenes tenkning** på en meningsfull måte.
2. Læreren **innhenter elevenes tenkning,** men etterfølgende diskusjoner **bygger ikke på spirende ideer**. Lærerens handlinger virker korrigerende, muligens gjennom å føre elevene i "riktig" retning.
3. Læreren **innhenter elevenes tenkning**, **OG** etterfølgende diskusjoner **responderer på disse ideene** ved å bygge på produktive utgangspunkt/begynnelser eller at mulige misoppfatninger blir adressert.

VEDLEGG 2: Informasjonsskriv til deltakerne

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

Brøkundervisning i skolen

Bakgrunn og formål
Hensikten med prosjektet er å undersøke hva som kjennetegner god brøkundervisning. Vi skal undersøke hvordan forskning beskriver god brøkundervisning, samt se hva som blir gjort i skolen. Prosjektet er en masteroppgave ved Universitet i Tromsø, Norges arktiske universitet.

Utvalget er valgt ut basert på anbefalinger fra veileder og rektor ved aktuelle skoler.

Hva innebærer deltakelse i studien?
Deltakelse i studien innebærer å bli observert i klasserommet i en periode på to uker i matematikk. I denne sammenheng vil det bli tatt opp lyd og fotografi av tavle og oppgaver (Ingen bilder av personer). Det vil være to observatører til stedet som fyller ut observasjonsskjema om undervisningen. I tillegg vil deltakelse innebære å bli intervjuet ved en til to anledninger. Spørsmålene vil omhandle lærerens faglige bakgrunn, tanker om brøkundervisning og gjennomført undervisning.

Hva skjer med informasjonen om deg?
Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Det er kun forskerne som vil ha tilgang til informasjon om deltakerne. I forskningsrapporten blir informasjon anonymisert. All data lagres på lokal datamaskin og slettes etter endt prosjekt.

Deltakeren vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 18. mai 2016

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert.

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med Andreas Markus Johansen (98 81 80 96) eller Therese Andreassen (98 81 10 19). Veileder i prosjektet er Ove-Gunnar Drageset ved UiT, Norges arktiske universitet, og kan nåes på ove.drageset@uit.no / 776 60274.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å delta

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

VEDLEGG 3: Infoskriv til foreldre

Til foreldre og foresatte

Vi er to studenter fra Universitetet i Tromsø som skal inn å observere i matematikktimene i uke 5 og 6. Dette er i forbindelse med et masterprosjekt hvor vi skal undersøke lærerens undervisningsmetoder i brøk. Det vil benyttes lydopptak og fotokamera (stillbilder), men da det kun er læreren som skal observeres vil det ikke bli tatt bilder av elever, og vi innhenter ingen opplysninger om elevene.

Når det gjelder lydopptak vil læreren ha på seg mikrofon, derfor kan også elevene havne på opptak når de snakker. Vi vil informere om at alle opptak blir lagret sikkert slik at ingen utenforstående har tilgang til dataen som lagres, og vil bli slettet så fort prosjektet er over. Prosjektet er meldt inn og godkjent av Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD).

Hvis dere har spørsmål angående vårt besøk på skolen er det bare å ta kontakt med Andreas Johansen på epost: andreas.m.johansen@uit.no

Med vennlig hilsen

Andreas Johansen og Therese Andreassen

VEDLEGG 4: Observasjonsskjema

Hva skjer:____

	Poeng	Kommentarer/forklaring
Matematikken - Nivåtilpassing Isolert faktakunnskap vs nettverk		
Krav til kognitiv tenkning -Tid til å tenke -Rom for utfordringer		
Tilgang til det matematiske innholdet -Dekke alle elevene - -Flere innfallsvinkler		
Dele ideer og få anerkjennelse -Elevers matematiske identitet og selvfølelse -Bygge på andres ideer		
Tilbakemeldinger og vurderinger -Basere på elevers ideer og misoppfatninger -Velformulerte spml -Resonnere/forklare		

VEDLEGG 5: Intervjuguide skole A

Intervjuguide til skole A

1. Hvordan har du planlagt brøkundervisningen i år? *Hva ønsket du å starte med?* (1)
   - Hva ønsker du at elevene skal sitte igjen med etter endt periode med brøk,
   - Hvordan ser du for deg progresjonen i brøkundervisningen videre? *(etter vi har dratt)*

2. Du begynte første time med et tankekart. Kan du fortelle hva tanken bak dette var? (1) (viser til tankekartet)
   a. Blir tankekartet brukt til noe senere?

3. I første økten kommer dere inn på addisjon av brøker, hvor det oppdages at man må ha felles nevner for å addere brøker. Du sier at dere skal undersøke det litt mer senere, hvor en elev spør om du ikke bare kan si det nå. Du svarer nei, og at dere skal se på det senere. Hva er tanken bak dette? *(vis til bilde/tankekartet) (2)*

4. I introduksjonsfremvisningen har du en oppgave med flere figurer som er fargelagt en av fire deler, og du kommer med påstanden om at alle figurene er en fjerdedel. Hva er tanken bak denne oppgaven? (vise oppgaven) (1)
   a. Hvorfor fremstiller du oppgaven som en påstand, hvor du "står på" og forsvarer et feilsvar?

5. Vi har observert at cuisenairestaver blir mye brukt i undervisningen. Kan du si litt hvorfor dette er et godt verktøy når elevene skal jobbe med brøk? (1)
   a. Er *det andre metoder eller verktøy som du benytter?*

6. Når dere jobbet med cuisinairestavene kunne du til tider sitte veldig lenge hos enkelte elever. Vi ser her i en transkripsjon at elevene ikke snakker så mye. Hvor mye tenker du det er hensiktsmessig å veilede i en slik situasjon? (2)
   a. Når føler du at du kan gå fra dem?
   b. Hvor mye tid bør elevene få til å tenke og dele sine ideer?
   c. Hva ønsker du å sitte igjen med?

7. Hva mener du kjennetegner en god oppgave eller aktivitet i brøk? (2)
   a. Hvordan velger du ut oppgaver til timene og lekser (fra læreboken)? (1)

8. Vi observerte at dere ofte benytter dere av lyttekrok, hvorfor det? (3)
   a. Hva oppnår man bedre i lyttekroken?
   b. Hver gang dere skulle gjøre noe felles samlet du de i lyttekroken, hvorfor det?
   c. Vi observerte at du kunne gå gjennom oppgaver i lyttekroken som enkelt elever synes var vanskelig(vise situasjon fra A2b). Hvordan bestemmer du deg for hva som blir tatt opp i lyttekroken?
      i. Er det vanlig at du tar elevenes eksempler foran hele klasse i lyttekroken? Hvorfor? *(Omhandler dimensjon 5: Lar du elever styre retningen til undervisningen?)*

9. Du valgte å ta oppgave 6.22 i lyttekroken. Hvorfor mener du denne oppgaven er egnet til dette? (2)
   a. Oppgave 6.22 mener vi er en problemløsningsoppgave. Problemløsningsoppgaver kjennetegnes som en oppgave hvor fremgangsmåten på forhånd ikke er kjent. Benytter du deg ofte av slike oppgaver? Hvorfor/Hvorfor ikke?

10. Når dere tok oppgave 6.22 felles i lyttekroken svarte to elever at 2/3 og 5/6 var størst. Du spurte om de kunne vise dette og fikk de frem på tavlen, han tegnet helt riktig 5/6 ved hjelp av arealmodellen. Du spurte om han kunne vise 2/3 på den samme figuren, dette var vanskelig og du fikk noen andre til å

hjelpe han. Disse guttene har en misoppfatning som er ganske vanlig, sammenligner teller og nevner med hverandre og ser at begge mangler 1 for å fylle opp nevneren, hvordan kan man oppklare dette? (3)

   a. Kunne det vært hensiktsmessig og bruke en annen representasjon i tillegg, slik at elevene forstår på en annen måte? *Eller ønsker du å ta dette senere?*

11. Vi har gjennom observasjonen sett at det fokuseres mye på at brøk er del av en hel eller en helhet(Vis til ark 4). Fortell oss litt om hvorfor du har valgt å introdusere brøk som dette. (1)
    a. Kan det være andre gode måter å forklare brøk på?
    b. Hvordan tenker du man bør gå frem for at elevene skal forstå at brøk også er en tallverdi som kan plasseres på tallinja?

12. Hvilke grep gjør du for å få med alle elevene? (3)
    a. Gjør du det samme i lyttekroken som når de sitter på plassene sine?
    b. Hvordan velger du ut hvem som får snakke og presentere?
    c. Hva gjør du med de som ikke deltar?
    d. Vi observerte at dere jobber mye to og to/samarbeid, hvorfor det?
    e. Hvordan setter du sammen gruppene?
13. Du har nevnt til oss en gang at du synes diskusjon er viktig i matematikk, hvorfor det? (4)
    - Hvilke grep gjør du for å få en god og strukturert klasseromsdiskusjon?

14. I de timene vi har vært høres det ut som du er bevisst på hvilke spørsmål du stiller elevene. Har du noen grep/tanker om hvordan du formulerer deg i klasserommet, hvordan du stiller spørsmål osv? (4)
    a. Er det forskjell når du har hele klassen og hos enkelt elever?

15. Når du skulle gå gjennom leksa (side 43 i boka) ga du elever forskjellige oppdrag, først to og to, så arbeidsbord. Du ga også oppdrag når de fikk cusinairestav-arket tilbake. Hvorfor bruker du oppdrag? (4)
    a. Er elevene vant til dette?

16. Vi observerte at du samlet inn arbeid gjort i timen (Armans hjerne og c-stav-arket), hva bruker du dette til? (5)
    a. Er det bare til egen nytte eller elevenes?
    b. Med c-stav-arket leverte du det ut igjen med noen oppdrag, hvorfor det?
       i. Du tok også disse inn igjen, hva skal du gjøre med de denne gangen?
       ii. E og M sitt ark, hadde de forstått alt? Evt. Hva forsto de ikke?

17. Det er ikke karakterer på barneskolen, hvordan vurderer du elevene og hvordan får de vite hvordan de ligger an? (5)
    a. Hvordan gir du underveisvurdering/vurdering for læring?

18. I lyttekroken ber du elever ofte ”holde den tanken”, ”vi tar det senere?”, hva er tanken bak dette? (5)

19. Hvilken utdanning har du(studiepoeng)?

20. Hvor lenge har du jobbet som lærer?

VEDLEGG 6: Intervjuguide skole B

Intervjuguide Skole B

1. Hvordan har du planlagt brøkundervisningen i år? *Hva ønsket du å starte med?*
    a. Hva er det som er utfordrende med brøkundervisningen?
    b. Hva ønsker du at elevene skal sitte igjen med etter endt periode med brøk
    c. Hvordan ser du for deg progresjonen i brøkundervisningen videre? (etter vi har dratt?)

2. Du starter første økt med at dere skal se på brøk som en del av en mengde, og som del av en helhet. Du sier at de er to forskjellige måter å se på brøk på, har du flere måter å se på brøk?

3. Du begynte første økt med logiske brikker. Kan du fortelle tanken bak dette? (1)
    a. Du hadde tre forskjellige oppgaver med logiske brikker. En oppgave hvor du spurte hvor stor andel de forskjellige fargene utgjør av en menge, deretter at et visst antall brikker utgjør en del, hvor spørsmålet var "hva er hele mengden", og til slutt hvor stor del hver elev ville fått hvis de skulle dele en mengde mellom seg. Hvorfor valgte du å gi disse forskjellige oppgavene? (viser til bilde)

4. I første økt har du også noen oppgaver med "hvem skal ut?". Hva er tanken bak disse oppgavene?
    a. Hvordan valgte du ut bildene eller representasjonene som ble benyttet i denne oppgaven?
    b. Kunne det vært hensiktsmessig å benyttet andre representasjoner enn del av mengde og del av helhet?

5. Hvordan bruker du læreverket ”Multi” til planlegging og gjennomføring av undervisning?

6. Hva mener du kjennetegner en god oppgave eller aktivitet i brøk?
    a. Hvordan velger du ut oppgaver til timene og lekser? Bare fra læreboka?

7. Dere bruker en økt i uken der hovedfokuset er på blåboka, hvorfor det?
    a. Hva brukes den til?

8. Hvilke vurderinger gjør du når du velger ut aktiviteter til stasjonsundervisningen? (smartboard, terningspill, blåbok, lekser, binderspill og smartboard igjen)
    a. Vi la merke til at du benyttet deg av samme oppgave på smartboard begge ukene vi observerte. Hvorfor gjorde du det?
    b. Her har vi hentet oppgaver som elevene skulle gjøre om likeverdige brøker i stasjonsundervisningen. Den første oppgaven er fra nivå 1, mens det andre er fra nivå 2. Hvilke forskjellige krav stiller disse oppgavene til elevenes tenkning? (Vise til oppgavene)

9. Hvordan grep gjør du for å få med alle elevene?
    a. Hvordan velger du ut hvem som får snakke?
    b. Hva gjør du med de som ikke deltar?
    c. Hvordan setter du sammen gruppene til stasjonsundervisningen?
    d. Vi observerte at elevene snakket med læringsvenn, hvorfor det?

10. Vi har observert en god klassekultur hvor elevene er gode til å diskutere, forklare og spørre om hjelp(både hos lærer og hverandre). Er dette noe som har vært arbeidet med?
    a. Vi la merke til at elevene ofte svarte med gode, fullstendige setninger. Er dette noe du har fokusert mye på? (viser til transkripsjon B1)
    b. Hvilke grep gjør du for å få en god og strukturert klasseromsdiskusjon?

11. I de timene vi har vært høres det ut som du er bevisst på hvilke spørsmål du stiller elevene. Har du noen grep om hvordan du formulerer deg i klasserommet? Hvordan du stiller spørsmål?
    a. Er det forskjell når du har hele klassen og hos enkelt elever
    b. I økten de jobbet med oppgaver(Økt 4) gikk du rundt og ba de forklare hvorfor figurene passet til brøkene, dette var ikke en del av oppgaveteksten, hvorfor det? (vise til transkripsjon B4)

12. Det er ikke karakterer på barneskolen, hvordan vurderer du elevene og hvordan får de vite hvordan de ligger an?

13. Vi ser at skolen fokuserer på ”vurdering for læring”. Hvordan gjør dere dette i matematikkundervisningen?

14. Hvilken utdanning har du? Hvor mange studiepoeng har du i matematikk?

15. Hvor lenge har du jobbet som lærer?