UiT NORGES ARKTISKE UNIVERSITET

Institutt for matematikk og statistikk

Bruk av teknologiske verktøy og problemløsning i arbeid med forståelse av funksjonsbegrepet

—

Tord Are Strømsnes

MAT-3906 - Mastergradsoppgave i matematikk – lektorutdanning, Juni 2016

MAT-3906

Bruk av teknologiske verktøy og problemløsning i arbeid med forståelse av funksjonsbegrepet

Tord Are Strømsnes

Mastergradsoppgave i matematikk - lektorutdanning

Juni 2016

Forord

Denne masteroppgaven er et resultat av det femte året ved utdanningsprogrammet Lektor i matematikk og fysikk ved Universitetet i Tromsø.

Jeg ønsker å rette en stor takk til min hovedveileder Per Øystein Haavold for gode råd og veiledning gjennom oppgaven.

Jeg har også satt stor pris på engasjementet til elevene ved ungdomsskolen undersøkelsen ble gjennomført på.

Til slutt vil jeg også rette en liten takk til mine andre to veileder Trygve Johnsen og Ragnar soleng, samt til min venn Fredrik Haugland som var så snill å lese korrektur for meg.

Tromsø, Juni 2016

Tord Are Strømsnes

Innhold

1 Introduksjon

Problemstillingen til masteroppgaven min er som følger: "Hvordan kan et undervisningsopplegg med fokus på problemløsning og teknologiske hjelpemidler være med å skape en bedre forståelse for funksjonsbegrepet?" En del av grunnen til at jeg ønsker å skrive om dette emnet er at jeg finner temaet ekstremt spennende og mine erfaringer tilsier at forståelsen for funksjoner hos ungdomsskoleelever er svært lav. Jeg ønsket å se på om det var mulig å utvikle et opplegg rundt funksjoner som kunne utfordre elevene til å tenke i nye baner rundt emnet.

Da jeg begynte med prosjektet mitt tenkte jeg en god stund på hvordan jeg skulle angripe oppgaven min. Jeg fikk meg jobb på en ungdomsskole med ansvar for matematikk både i 9. og 10. klasse og da jeg startet der holdt vi på med emnet algebra. Et emne som er nært beslektet med funksjoner. Mange av elevene slet med dette emnet. Ifølge TIMSS(Grønmo et al., 2012) er det generelt sett mange elever i Norge som sliter med emner som ligninger, ulikheter, algebra og funksjoner. I rapporten fra TIMSS 2011 står det at norske skoler scorer spesielt lavt på algebra-oppgaver. Det står at elevene sliter allerede når de møter enkle algebraiske oppgaver, mens de har en bedre forståelse for grunnleggende matematikk som addering og subtrahering. Når man sammenligner tidligere TIMSS-prøver har Norge blitt litt bedre på alle emner, men er fremdeles ikke i nærheten av de flinkeste landene.

Etter å ha erfart det samme som rapporten fra TIMSS kom ideen om å lage et undervisningsopplegg som kanskje kunne forbedre elevenes forståelse for å bruke funksjoner på tvers av representasjonsformer. Som jeg ser det i ungdomsskolen er det nok flere ting enn bare undervisningsopplegg som gjør at elevene har svake testresultater på funksjonsdelen av pensum. Noe av grunnen kan ha noe å gjøre med at funksjoner er et av emnene som blir brukt minst tid på i mattepensumet i løpet av ungdomsskolen. Denne påstanden kommer jeg med, på bakgrunn av min egen praksis i skolen. Mens de fleste emner, som geometri, ligninger og ulikheter, statistikk og sannsynlighet får minimum fire uker med undervisning, ble kapittelet om funksjoner kortet ned til omtrent to uker undervisning i år. Med slike forutsetninger må man bruke tiden effektivt om elevene skal få noe særlig ut av sitt arbeid med funksjoner.

Da jeg hadde landet på emnet jeg ønsket for masteroppgaven min, var det på tide å finne ut hva jeg kunne prøve å lære elevene bedre samt finne ut hvordan jeg kunne finne data som representerer funnene mine. Jeg kommer mer detaljert inne på nøyaktig hvordan jeg gjorde ting senere i oppgaven.

Uansett var det slik at problemstillingen kan være vanskelig å måle kvantitativt. Den er litt vid med tanke på alle aspektene som finnes om funksjoner og hva som er god forståelse av dem. Det er også mulig å forstå en funksjon på en representasjonsform, men ikke en annen. Derfor fant jeg ut at det kvalitative forskningsintervjuet ville være et godt verktøy for å samle inn data for prosjektet mitt. Planen ble å gjennomføre et intervju for å kartlegge sånn omtrent hvilket kunnskapsnivå elevene hadde om funksjoner. Deretter ville jeg gjennomføre et undervisningseksperiment som skulle basere seg på problembasert undervisning. Etter eksperimentet ville jeg gjennomføre nok et intervju for å se på hvordan en slik undervisningsmetode kunne være med på å heve elevens kunnskapsnivå. I tillegg kunne jeg spørre noen spørsmål om de mest grunnleggende prinsippene ved funksjoner.

Samtidig ville jeg skrive litt logg fra timene hvor jeg underviste. Så kunne jeg se hvordan elevene arbeidet med opplegget mitt i forhold til hvordan det har vært ellers når de har arbeidet med stoffet etter de vanlige kursene som blir gjennomført på skolen. Kanskje kunne jeg oppleve at noen av elevene ville få en "aha"-opplevelse og hva som førte til denne. Med "aha"-opplevelse mener jeg at de plutselig får en forståelse for hvordan en oppgave skal gjøres eller en metode fungerer.

Selve undervisningsopplegget ønsket jeg også å gjøre problembasert. Altså jeg ville gi de problemløsningsoppgaver som de skulle løse som var relatert til pensum. Etter at de hadde jobbet og prøvd seg litt fram på disse oppgavene ville vi ha et kurs hvor vi gjennomgikk oppgaven. Grunnen til at jeg sier kurs er at på skolen sitter 8., 9. og 10. klasse sammen i et klasserom. Når man da skal ha en gjennomgang med elevene tar man de elevene som skal ha forelesning ut på et annet rom å gjennomgår emnet eller oppgaven.

Grunnen til at jeg ville teste dette er at jeg har veldig gode opplevelser med å arbeide med problemløsning, samt at det finnes mye teori som skriver om positive innvirkninger på elevens ferdigheter og forståelse (Schoenfeld, 1992; Kapur & Toh, 2013; Kieran, 2007). Ofte finner jeg at det utfordrer meg til å bruke ting jeg har lært tidligere på en ny måte. I tillegg har jeg ofte en følelse av at jeg husker ting bedre når jeg må slite litt før læreren forteller meg hvordan ting egentlig hører sammen. Jeg ønsket derfor å se om elevene i aksjonen min kan ha det på samme måte. Samtidig ville jeg at undervisningen skulle ha et fokus på hvordan vi kunne ta i bruk teknologiske hjelpemidler for at elevene enklere kunne se sammenhengen mellom de forskjellige representasjonsformene. Da ville jeg bruke Geogebra, et visuelt kraftig matematisk verktøy med et veldig enkelt grensesnitt som blir brukt mye i den norske skole i dag.

Til slutt endte jeg opp med at jeg ønsket å se på hvordan elevene kunne forbedre sine kunnskaper om de forskjellige representasjonsformene til en graf. Da ville jeg se litt på om de forstod at en funksjon skrevet på formen $y = ax + b$ og en lineær graf er samme tingen. Eller, om de satte opp en verditabell, at de skjønte at denne bare var en annen måte å representere funksjonen på. Hovedsakelig er det disse tre representasjonsformene jeg ønsker å se på. Det er tross alt disse som blir brukt i matematikken til langt opp gjennom videregående skole og til universitetsnivå. Jeg føler at det er et viktig emne som blir brukt innen ekstremt mange yrker. Jeg tenker derfor at å få elevene til å ha et godt forhold til funksjoner både teoretisk og praktisk kommer ikke til å skade dem i fremtiden.

2 Teori

Teori omhandler de forskjellige teoretiske aspektene som bygger opp under studien min. Assude et al. (2008) definerte teori i matematikk som å lære og undervise fra to forskjellige perspektiver. Nemlig fra et et *strukturelt* og et *funksjonelt* perspektiv. Fra et funksjonelt perspektiv kan vi se på teori som flere verktøy satt i et system som lar oss spekulere rundt virkeligheten vår. Fra dette perspektivet mener de at teori kan brukes til å

- finne måter å forbedre undervisning og læring i matematikk,
- utvikle metodologi.
- beskrive, tolke, forklare og rettferdiggjøre observasjoner av lærere og elever i klasserommet.
- gjøre om praktiske situasjoner til problemstillinger i forskning.
- definere forskjellige steg som er utført i en studie.
- produsere kunnskap.

På den andre siden kan vi se på teori med et strukturelt perspektiv. Da kan et av målene med teorien være å utvikle teorien selv. Det kan bety å teste en teori for å produsere nye teoretiske utviklinger. I studien min vil synet på teori helle over mot det funksjonelle perspektivet. Dette passer veldig fint da studien min handler om å teste ut et undervisningsopplegg som kan være med å forbedre undervisning og læring i matematikk. For å gjøre dette må det utvikles en metodologi og de forskjellige stegene utført i studien må defineres. Forhåpentligvis kan studien være med på å skape kunnskap om hvordan elever lærer og om dette undervisningsopplegget kan hjelpe elevene til å lære bedre.

Gjennom teorien drøfter og avgrenser jeg begreper som er sentrale for studien min. Her setter jeg fram et rammeverk for hva som anses som god matematisk kompetanse, og hvordan teknologi og problemløsing kan være med på å styrke disse kompetansene.

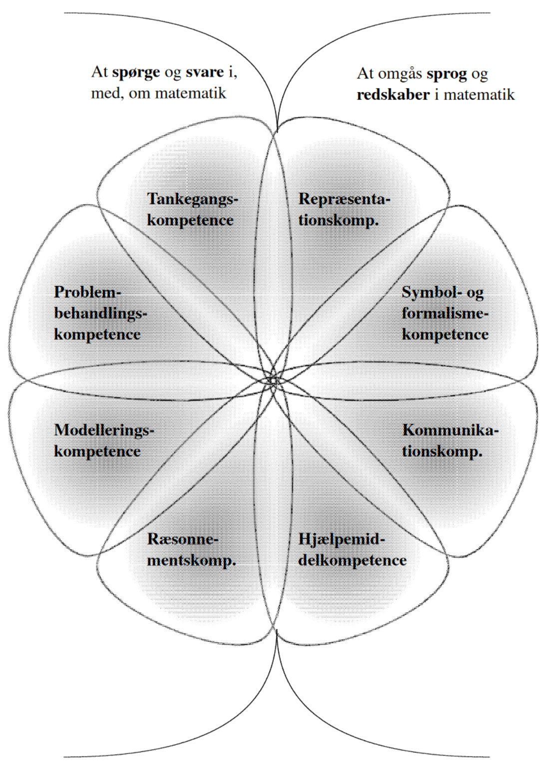
2.1 Matematisk kompetanse

Hva vil det si å forstå matematikk? Målet for oppgaven min er at elevene skal få en mer fullverdig matematisk kompetanse. Niss(Niss & Jensen, 2002) skriver at en person besitter kompetanse innenfor et område, hvis han eller hun er i stand til å fremstå med gjennomslagskraft, overblikk, sikkerhet og god dømmekraft innenfor det gjeldende området. Vi kan også se på begrepet kompetanse som ekspertise. Om vi skulle sett på dette med matematiske øyne kunne vi sagt at matematisk kompetanse vil kunne si å ha "viten om, å forstå, anvende og kunne ta stilling til matematikk og matematikkvirksomhet i et mangfold av sammenhenger, hvor matematikk inngår eller kan komme til å inngå".

Videre sier han at *en* matematisk kompetanse er en rimelig avgrenset komponent innenfor matematisk kompetanse som beskrevet i forrige avsnitt.

2.1.1 Niss kompetansemodell

I tillegg til Niss sin kompetansemodell, finnes det andre kompetansemodeller. For eksempel skriver Kilpatrick (2014) om hvordan vi kan spesifisere kompetanser i matematikken. For studien min har jeg valgt Niss & Jensen (2002) sitt rammeverk da jeg tenker at aksjonen min hovedsakelig kan være med på å styrke disse kompetansene. Modellen til Niss består av åtte forskjellige kompetanser. I figur 1 kan man se ei visuell fremstilling av modellen hans. De åtte kompetansene har han delt inn i to grupper. Den ene kalles *å kunne spørre og svare i matematikk* mens den andre kan betegnes som *å omgås språk og redskaper i matematikk*. Til tross for at han deler de opp slik betyr ikke det at han mener de to gruppene ikke er forbundet til hverandre. Faktisk kan flere av kompetansene være like godt forbundet på tvers av de to gruppene som innad. Det kommer helt an på hvordan man tolker figuren. Han eksemplifiserer at i mange tilfeller vil symbol- og formalismekompetansen være en avgjørende forutsetning for problembehandlingskompetanse.



Figur 1: Representasjon av de åtte kompetansene

Alle åtte kompetansene dekker et svært bredt spekter av ferdigheter og kompetanser innen matematikken. I studien min vil kompetansene være med på å danne et rammeverk for å se hvordan elevene tenker matematikk før og etter undervisningsekseperimentet mitt.

Tankegangskompetanse

På avsluttende trinn i ungdomsskolen bør man forvente at elevene ligger på et nivå der de utover sentrale begreper i matematikken som størrelser, tall og rom også skal kunne kjenne til begrepenes begrensninger og de skal også ha utviklet en sans for hva slags svar man kan forvente av en oppgave. Altså at de er kritiske hva slags svar de har fått og skal kunne se på om det gir mening i forhold til oppgaven. I tillegg skal elevene også kunne forstå hva som ligger i å kunne generalisere matematiske prinsipper og selv kunne gjøre dette i enkle tilfeller.

Niss & Jensen (2002) sier at det også handler om at eleven skal kunne skille mellom forskjellige matematiske utsagn og påstander. Det vil i "betingede utsagn", "Definisjoner" og "setninger(teoremer)".

Eksempler på spørsmål og svar som gir eksempler på god tankegangskompetanse (Niss & Jensen, 2002):

- A: "På hvor mange forskjellige måter kan man uttrykke tallet 3 som differens mellom to naturlige tall?"
- B: "Uendelig mange"
- A: "er verdimengden til et tredjegradspolynom alltid hele mengder av reelle tall?"
- B: "Ja"
- A: "Gjelder det samme for alle polynomber?"
- B: "Nei, ikke for dem med en partallsgrad."
- A: "Er 0,99999... det siste tallet før 1?"
- B: "Nei, 0,99999... er det samme som 1."
- A: "Kan man løse den trigonometriske ligningen $sinx = a$?"
- B: "Det avhenger av hva a er for en verdi, eller til dels hva man mener dermed 'å løse'. Hvis a ligger i intervallet -1 til 1, kan man lage tilnærmede løsninger med en vilkårlig nøyaktighet, men for de fleste verdier av a kan man ikke gi en nøyaktig løsning ved bruk av brøk eller rotuttrykk."

Problembehandlingskompetanse

Det regnes med at elever mot slutten av ungdomsskolen skal ha såpass stor forståelse at de kan sette opp egne problemer for elementære matematiske problemer. I tillegg skal elevene også ha utviklet seg såpass at de skal ha mulighet for å løse allerede ferdig formulerte problemer på forskjellige måter. Niss & Jensen

(2002) skriver om denne kompetansen at den består av å kunne løse matematisk problemer, praktiske eller teoretiske, åpne eller lukkede, egne så vell som andres problemer og om nødvendig på forskjellige måter.

Problemløsning, problemformulering og problemoppsett finnes i utallige former på de forskjellige trinnene gjennom skolegangen. Har derfor bare valgt å nevne et par eksempler på dette.

- A: "Kan man få en trekant av tre sidelengder uavhengig av deres størrelse?"
- B: "Nei, har vi for eksempel sidelengdene 3, 5 og 10 og starter med å plassere de to korte lengdene ved hvert sitt endepunkt på den lengste siden, vil ikke de to korte sidene kunne møte hverandre. Derfor dannes det aldri noen trekant.
- A: "Er det like mange sorte og hvite felter på et vanlig sjakkbrett?"
- B: "Ja, det er fire hvite og fire svarte på hver rekke."
- A: "Du har et rektangel med kjent omkrets. Omkretsen er 20 cm. Hva er det største arealet dette rektangelet kan ha?"
- B: "Da må vi først sette opp ligningen for areal og for omkrets.

  $$2a + 2b = 20 \tag{1}$$

  $$a \cdot b = A \tag{2}$$

  Hvor A er arealet. Da har vi et ligningssystem og kan regne ut en funksjon for arealet ved hjelp av innsettingsmetoden. Funksjonen blir da

  $$A = -b^2 + 10b \tag{3}$$

  Deretter kan vi enten derivere å sette opp et fortegnsskjema for å finne toppunktet, eller vi kan bruke en grafisk kalkulator til å sette inn grafen og finne toppunkt ved hjelp av den innebygde toppunkt-funksjonen de fleste slike har. "

Modelleringskompetanse

Denne kompetansen handler om elevens muligheter for å se sammenhenger mellom matematikken og en reel situasjon. Det vil si at eleven skal kunne strukturere en situasjon som skal modelleres, for deretter å lage en matematisering av denne situasjonen. Noe som innebærer oversettelse av objekter, relasjoner, problemstillinger m.m.

Eksempler på dette kan være

- en modell som operer med eksponentiell vekst av verdens befolkning i perioden 1900-2000 og sammenligne den med tilgjengelig befolkningsdata.
- Undersøke hvordan grunnflaten av et hus kan se ut om arealet skal være $120m^2$.
- En undersøkelse av hvor dyrt det er å snakke i mobiltelefon.

Resonnementkompetanse

Denne kompetansen handler om at eleven kan følge og bedømme et matematisk resonnement. Den handler om å forstå hva et bevis er, men også om å kunne tenke ut og gjennomføre uformelle og formelle resonnementer, som å omforme heuristiske resonnementer til gyldige beviser. Et eksempel på å kunne følge og bedømme et matematisk resonnement kan være

A "Når man kvadrerer et tall, blir resultatet alltid større. Det gjelder jo for alle de uendelig mange hele tall, så det må også gjelde for alle andre tall. "

B "Nei, påstanden er for det første feil. For eksempel vil $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. For det andre kan man ikke overføre alle egenskapene ved mengden av hele tall til egenskapene ved en mer omfattende tallmengde, som for eksempel rasjonelle tall".

Representasjonskompetanse

Representasjonskompetanse handler om at elevene skal kunne forstå og bruke forskjellige representasjonsformer av matematiske objekter, problemer, fenomener eller situasjoner (Spesielt for denne oppgaven handler dette om grafiske, symbolske, tabellrepresentasjoner og verbale representasjoner). Det vil si at de skal kunne se forbindelser mellom de forskjellige representasjonene, samt kunne bruke den representasjonen som gir mest mening i en gitt situasjon. Etter hvert skal elevene også kjenne til styrker og svakheter for de forskjellige representasjonene, for eksempel informasjonstap og -tilvekst. Forskjellige representasjonsformer kan innebære måten vi ser på et tall. For eksempel tallet 2 kan representeres som:

- $\sqrt{4}$
- $\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8}...$
- $3 - 1$

Eller vi kan se på en lineær funksjon og de forskjellige representasjoner som kommer med dette begrepet:

- Som et funksjonsuttrykk: $f(x) = 2x + 1$
- Som en ligning: $y - 2x = 1$
- I en verditabell:

x	$f(x) = 2x + 1$	y	(x, y)
0	$2 \cdot 0 + 1$	1	$(0, 1)$
1	$2 \cdot 1 + 1$	3	$(1, 3)$
2	$2 \cdot 2 + 1$	5	$(2, 5)$
3	$2 \cdot 3 + 1$	7	$(3, 7)$

Tabell 1: Viser funksjonen $f(x) = 2x + 1$

- Eller vi kan vise funksjonen som en graf i et koordinatsytem.

Symbol- og formalismekompetanse

Symbol- og formalismekompetanse består i å kunne avkode symbol- og formelspråk eller å kunne oversette frem og tilbake mellom symbolsk matematikk og naturlig språk. Det vil også si at man kan behandle og fordelaktig betjene seg ved bruk av symbolske utsagn og utrykk. Eksempler på dette kan være

- Å forstå at tallet 721 er satt sammen syv hundrere, 2 toere og 1 ener.
- At man ikke har lov til å skrive $6 + \cdot 5$ eller $6 - -3$.
- At å sette inn 1 for x i uttrykket $5x + 1$ ikke blir $5x \cdot 1 + 1$.

Kommunikasjonskompetanse

Denne kompetansen han om å kunne sette seg inn og tolke andres matematikk skriftlig, muntlig eller ved visuelle utsagn og "tekster". Det handler også om å selv kunne uttrykke seg skriftlig, muntlig eller visuelt overfor forskjellige mottakere med et varierende nivå av teknisk og teoretisk presisjon. Niss (2007) har med et eksempel om en diskusjon om hvorfor man ikke har lov å dele med 0, hvor det diskuteres fram og tilbake om hvorfor dette er tilfellet. De er innom flere muligheter, som gjør at samtalen blir litt lang å gjengi, men gjennom diskusjon med bruk av matematiske resonnementer klarer de sammen å komme til en slags konklusjon på problemet.

Hjelpemiddelkompetanse

Denne kompetansen handler i ungdomsskolen om å kjennskap til hva slags typer hjelpemidler vi har og kan bruke i matematikken. Elevene burde forstå hvilke muligheter slike hjelpemidler gir i forskjellige situasjoner og hvordan man bruker disse hjelpemidlene. Elevene vil mot slutten av grunnskolen også ha kjennskap til forskjellige begrensninger slike redskaper kan ha.

Eksempler på hjelpemiddelredskaper er utallige. Alt fra klosser og brikker på laveste nivå for å gjenkjenne mønstre eller antall, videre mot linealer og passere som bruk for å forstå lengde og konstruksjoner og opp til man også kan lære seg med teknologiske hjelpemidler som kalkulatorer og datamaskiner. På PC har man forskjellige it-software som regneark(for eksempel Excel, Calc, etc.), Mathcad, Maple, osv., til bruk for forskjellige kalkulasjoner, grafiske representasjoner, konstruksjoner, visualiseringer og andre ting.

2.2 Problemløsing

Problemløsing har ikke vært uforandret gjennom historien (Lesh & Zawojewski, 2007). Et eksempel på dette er nåtidens teknologiske hjelpemidler. Slik kraftfulle verktøy som legger til rette for høyere grad av utregning, begrepshåndtering og kommunikasjon er med på å endre graden og typen av oppgaver som må læres for å lykkes etter endt skolegang. Denne kraftige teknologiske utviklingen har ført til stadig økte, og forskjellige meninger blant folk om hvordan problemløsing kan utføres. Ifølge Schoenfeld (1992) har problemløsning av noen blitt definert som en måte profesjonelle utfører matematikk på, mens andre har jobbet med det som om det var memoreringsoppgaver.

Når problemer og problemløsing gjennom årene har blitt brukt med flere og ofte motsigende meninger har det blitt vanskelig å tolke litteraturen som er skrevet om det. Schoenfeld (1992) skriver at respondenter ofte har forskjellige meninger om hva et "problemløsingskurs" kan være for noe. Han har satt opp noen punkter som har vært vanlige blant mottakerne. For eksempel at:

- Å få elever til å "tenke kreativt" eller "utvikle deres problemløsingsegenskaper".
- For å lære vanlige teknikker i spesifikke domener, slik som modellering.
- For å gi en ny tilnærming til grunnleggende matematikk for å få elever til å tenke kritisk på svarene eller være mer analytisk i gjennomgang av oppgaven.

Meningene om hva et "problem" er for noe kan godt forklares ved hjelp av to definisjoner(Webster, 1979):

- Definisjon 1: I matematikk er et problem alt som trengs å gjøres, eller krever at man gjør noe.
- Definisjon 2: Et spørsmål... Som er vanskelig eller forvirrende.

Disse to definisjonene har i matematikken relativt forskjellige betydninger. Den første tar utgangspunkt i at vi har ett sett med matematiske oppgaver vi bruker som verktøy for instruksjoner, øvingsoppgaver og som steg på veien til å mestre en matematisk egenskap. I forhold til den andre definisjonen vil slike matematiske oppgaver ikke være annet en rutineoppgaver som gir eleven en spesifikk matematisk teknikk.

Det vanlige designet som har vært brukt for å undervise slike problem har vært at man som lærer:

1. En oppgave blir brukt for å introdusere en teknikk
2. Teknikken blir illustrert
3. Deretter får elevene jobbe med oppgaver der de kan øve på denne teknikken.

Definisjon 2 er mer i tråd med måten begrepet problem blir definert i denne oppgaven. Det som er poenget med et problem er at det skal være vanskelig for eleven å løse. Oppgaven skal være mulig å angripe på flere måter. Altså at man enten kan prøve seg frem, prøve en algoritme, eller prøve å lage sine egne strategier for hvordan man skal komme frem til et svar.

Stanic & Kilpatrick (1989) har identifisert tre hovedpunkter om problemløsing gjennom historien. Det første går ut på at problemløsing blir brukt som et verktøy for å lære seg et mål, det andre handler om at problemløsing er et eget emne som burde læres, og det siste ser på problemløsing som kunst. Kort oppsummert handler det første hovedpunktet om fem oppdagelser:

1. Som et middel for å rettferdiggjøre læring av matematikk.
2. For å gi en spesifikk motivasjon for et emne.
3. Som rekreasjonelle oppgaver. Altså en litt bredere form for motivasjon enn i det forrige punktet.
4. Som et middel for å utvikle et nytt matematisk verktøy.
5. Som øving. Noen plasser blir elevene gitt en gjennomgang av hvordan teknikk blir utført for deretter å få problemer hvor de kan øve på denne teknikken.

Det andre hovedpunktet skiller seg ut i at problemløsing ikke blir sett på som et verktøy, men som et eget emne som burde læres. Det skrives at målet da ikke ville være å bli bedre til å løse problemer, men at det å kunne løse matematiske problemer er verdifullt i seg selv. Innenfor dette punktet ser Schoenfeld (1992) selv at på 1980-tallet ble problemløsing ofte brukt enten som en av flere teknikker som skulle læres i skolepensum, eller det ble brukt i et hierarki av teknikker. Det vil si at de i skolen hadde det de kalte for rutine-problemer og ikke-rutine-problemer. De problemene som går under ikke-rutine-problemer ble sett på som oppgaver med et høyere nivå som elevene kunne strebe etter når de hadde løst rutine-problemene.

Sist av hovedpunktene fra Stanic & Kilpatrick (1989) er at problemløsning blir sett på som en kunst. I motsetning til de to andre synspunktene går det ut på at problemløsning er hjertet i matematikken. Man kan si at problemløsing rett og slett er hva matematikk i bunn og grunn er.

Lesh & Zawojewski (2007) sier at en nyttig teori om problemløsing må ta hensyn til at konseptet problemløsing ikke har vært uforandret gjennom historien. I dag endres problemstillingen rundt problemløsing med et svært stort tempo grunnet bruk av datamaskiner både i skolen og arbeidslivet. Dette forandrer både typen og nivået matematikk som skal læres i skolen for å nå den nødvendige kompetansen for å lykkes i arbeidslivet.

Videre skriver Lesh & Zawojewski (2007) om hvordan noen av de vanskeligste aspektene ved nye problemløsingssituasjoner er utviklingen av måter å tenke matematisk om relevante relasjoner, mønstre og reguleringer. Leksikon (2016) sin definisjon av begrepet problemløsing er beskrevet under.

Definisjon: problemløsing

> Problemløsning er en målrettet aktivitet for å løse en, for individet ny oppgave. Dvs. en situasjon hvor tilvante aktiviteter ikke gir det ønskede resultat (Leksikon, 2016).

Tidlig forskning har prøvd å skille mellom "gode" og "dårlige" problemløsere. Lester & Kehle (2003) summerte sine funn på området som at a) "Gode problemløsere vet mer enn dårlige problemløsere og det de vet, det vet de annerledes. Deres kunnskap er satt sammen av rike skjemaer," og b) "Gode problemløsere har en tendens til å fokusere på strukturelle trekk ved en oppgave, mens dårlige problemløsere ofte tenker på overflatiske egenskaper ved oppgaven". De summerte også opp noen punkter de la godt merke til ved gode problemløsere.

- Gode problemløsere er mer oppmerksom på egne styrker og svakheter som problemløsere.
- Gode problemløsere er mer kritiske til egne utprøvelser av oppgavene og åpne for regulering av tiltakene sine.
- Gode problemløsere bryr seg mer om at oppgavene skal ha en "elegant" gjennomføring og løsning.

Når elevene i studien min skal jobbe med problemløsing kan deres problemløsingsferdigheter ha en innvirkning på hva de får ut av å jobbe med oppgaver som er bygget opp som problemer.

2.3 Problembasert undervisning

Hensikten med denne delen er at leser skal få en innsikt i hva slags forskning som er gjort på problembasert undervisning og som en bakgrunn til de valgene jeg tar i min aksjon. Dette kapittelet setter lys på forfatters tro om at problembasert undervisning kan være med på å gi elever et mer personlig forhold til matematikken og på den måten vise at en oppgave kan løses på flere måter og fremdeles være like riktig. Samtidig vil de prøve å forstå matematikken i stedet for å pugge regler som de metodisk setter ut i livet.

Kieran (2007) skriver at i den tradisjonelle skolen blir "reelle problemer" sett på som de vanskeligste, altså problemløsingsoppgaver. Derfor har det i den tradisjonelle skolen vært slik at oppgaver av denne typen har blitt introdusert først etter at elevene har lært seg prosedyrene for emnet de har vært innom. På denne måten har problemløsing tidligere hatt en liten rolle da de kun har blitt introdusert mot slutten av et emne(gitt at det har vært tid til det).

Kieran skriver at vi tenker at gjennom problemløsing lærer vi matematikk og gjennom å lage matematikk lærer vi problemløsing. Ved et slikt modell-og modelleringsperspektiv mener Kieran (2007) at studentene skaper sitt eget perspektiv og sin egen mening til problemet. Meningen er at eleven skal på samme tid få en økt forståelse for selve situasjonen og deres egen matematiske erfaring brukt i løsningen av problemet.Dersom det blir brukt på en slik måte, blir ikke problemløsing kun forbeholdt de flinkeste studentene, men også et verktøy for de svakere til å kunne lære seg matematikk med bakgrunn i egen kunnskap. Problembasert undervisning handler om å introdusere alle elevene for problemer og lære dem matematikk gjennom problemløsing.

For at problemløsing som verktøy for læring av matematikk skal fungere, er det viktig at oppgavene er bygd opp for å fremme læring. Om oppgaven er utviklet riktig vil den være med på å fremme elevens grunnleggende forståelse for matematikken og holde på interessen deres, samtidig som den optimaliserer læringen deres (Kapur & Toh, 2013). Kapur & Toh sier at det er viktig at elevene er engasjert i noe de kaller "produktiv feiling". Med dette mener de at oppgavene må lages for å utfordre elevene uten å frustrere dem. Oppgavene skal kunne løses ved hjelp av tidligere undervist matematikk, men også legge til rette for at løsningen kan bli funnet ved hjelp av flere representasjonelle løsningsmetoder.

Brousseau (1997) beskriver en undervisningsteknikk der elevene fikk ut en oppgave som skulle løses uten hjelp og innblanding fra læreren. På denne måten mente han at de kunne skape sin egen kunnskap. Han mente at gjennomføring av undervisning på denne måten ville være like viktig som utviklingen av oppgaven. Han kalte det for en "adidaktisk" læringssituasjon. Undervisningen min, blir delvis å basere seg på en "adidaktisk" læringssituasjon. Med det menes at elevene i studien vil få ut oppgaver som de skal jobbe med på egenhånd eller i grupper. Oppgavene vil bli delt ut i starten av timen og de vil få jobbe med dem i samarbeid med andre eller alene. De vil også ha tilgang til læreverkene sine og datamaskiner mens de arbeider. Lærer vil være tilgjengelig i timene også, men vil ikke forklare hvordan oppgavene kan utføres før man mot slutten av timen har en gjennomgang av dem.

I løpet av undervisningen kan man møte på elever som har forskjellige oppfatninger og tro på hva som er matematikk. Schoenfeld (1992) skriver at elever ofte lager seg egne meninger på hva som er matematikk basert på hva de opplever i timene. Vanlige oppfatninger elever kan ha om matematikken kan være av typen

- Matematiske problemer har kun et riktig svar
- Det er bare en riktig måte å løse et matematisk problem - vanligvis den siste metoden læreren viste frem i timen.
- Vanlige elever skal ikke forventes å forstå matematikk, de er kun forventet å memorere matematikken, for å kunne anvende det mekanisk uten forståelse.
- Matematikk er noe som blir gjort individuelt.
- Matematikken man lærer i skolen har lite å gjøre med den virkelige verden.

I tillegg til dette kommer som regel læreren også med sin egen oppfatning om hva matematikk er. Disse oppfatningene kan være med på å bygge opp under eller bryte med punktene over. Schoenfeld (1992) skriver videre om intervju med et par lærere der den første læreren Jeanne mente at en skoletime skulle gjennomføres som planlagt uten ineffektive endringer eller digresjoner. En metode Schoenfeld skriver kjapt fører til en del av oppfatningene over.

Den andre læreren som ble intervjuet, Kay, hadde et mer utforskende syn på matematikken. Han mente at matematikken måtte gjenoppfinnes fra elevenes side, samt at utforskning og verifisering er sentrale elementer i matematikken. I tillegg er det også viktig at elevene utvikler resonneringsferdigheter som er nødvendig for å jobbe med problemløsing. Schoenfeld (1992) skriver at et opplegg som støtter seg på en slik pedagogikk i det minste er delvis støttende for en elevs problemløsingsferdigheter.

Schoenfeld (1992) skriver at mye av det teoretiske aspektet rundt strategier for å løse problemløsingsoppgaver er gjort, men at det fremdeles fremstår mye jobb med hvordan man i praksis implementerer problemløsing i en klasse. Det vil si at det trengs mer kontrollert data over hvor mye trening eller hvilke type oppgaver, som fører til at elevene lærer spesifikke strategier.

For gjennomføring av en problembasert undervisning mente Department (1985) at "Matematisk mestring, som involverer egenskapen å forstå matematisk sammenhenger, logisk resonnering og bruken av matematiske teknikker effektivt må være hovedfokus i matematikkutdanning"(s. 1). Deretter anbefalte de at undervisningen ble lagt opp som følger:

- Eksperimenter og undersøk sammen med studenter ved hjelp av problemløsing når det er mulig.
- Legg til rette for et klasseromsmiljø hvor alle elever er komfortabel med å prøve ut nye ideer.
- La elever forklare tankegangen sin under alle deler av problemløsingen.
- Tillatt flere strategier for å løse samme oppgave.
- Presenter problemer som ligner på realistiske situasjoner slik at elever har noe å relatere det til.

Schoenfeld (1992) skriver at metodene vi bruker i undervisningen for å fremheve matematisk tenkning, henger litt etter vår forståelse av hva matematisk tenkning er. Han mente derfor at fremdeles forskning på lærerens oppfatninger av hvordan matematikk er formet og hvordan oppfatningene kan utvikles for å skape et bedre læringsmiljø er nødvendig.

Lesh & Zawojewski (2007) diskuterer hvordan tidlig forsking om problemløsing hadde en tendens til å kun fokusere på hvordan individet lærte seg om emnet. Mens nylig forskning har funnet at det sosiale har stor betydning for hvordan individet lærer nye ting. Han sier videre at om elevene jobber i grupper er det forventet at elevene ikke kommer "tomhendte" inn i en ny læringssituasjon. Dermed kan interagering mellom elevene før til at de får testet ut, integrert, differensiert, utvidet, verifisert eller forkastet teoriene sine. Med en slik tilnærming til undervisningen forventes en styrking av forståelse for begreper. Da sier han at kunnskapen utvikler seg heller enn at man ser på den som lært eller ikke lært.

2.4 Forståelse av funksjonsbegrepet

Elevene har ofte flere vanskeligheter med funksjoner, for eksempel med å forstå hva som er og hva som ikke er en funksjon(Dubinsky & Wilson, 2012).

Dette innebærer at elevene også skal forstå forskjellige egenskaper til en funksjon. For eksempel å vite at termen $f(x)$ betyr en funksjon gitt variabelen x, hva som kjennetegner en lineær funksjon, en kvadratisk funksjon eller en omvendt proporsjonalitet. Alle disse er emner som elevene på 10. klasse jobber med i pensum. De må forstå hva det vil si at x er en variabel i en funksjon kontra en "ukjent" når de jobber med ligninger. Ser man på problemstillingen min er det viktig at de klarer å forstå hvordan disse egenskapene fungerer på tvers av representasjonsformene til en funksjon.

Å vite hva som er en funksjon

Du kan lære deg forskjellige egenskaper til en funksjon, samt lære deg å bruke den i forskjellige sammenhenger uten egentlig å forstå hva en funksjon er. Definisjonen av en funksjon er som følger.

> $f(x)$ er en funksjon av x, hvis det for alle verdier av x i definisjonsområdet, finnes nøyaktig èn verdi av $f(x)$ i verdimengden.

Selv om mange elever synes at definisjonen er viktig og mange viser forståelse for hva det betyr har Even (1990) funnet at svært få klarer å si noe om hvorfor dette er viktig og hvorfor en funksjon er definert på den måten. Han skriver om at ingen av elevene klarte å komme opp med en god forklaring på hvorfor en funksjon er definert på denne måten. Noen prøver seg på tilnærming fra hverdagslivet eller forskning som begrunnelser. De ser ut til å forstå at det skiller mellom relasjoner som er funksjoner og de som ikke er, men de forstår ikke hvorfor det er viktig å skille mellom disse gruppene. Lærere har en tendens til ikke å forklare dette skillet, som er med på å gi elevene et forhold til funksjoner som en samling av regler og funksjoner, en tro subjektet i studien hans så ut til å ha.

I tillegg til dette kommer det fram fra andre kilder at elver kan ha vanskeligheter med å kjenne igjen funksjoner ved hjelp av et begrenset antall punkter i et koordinatsystem(Markovitz et al., 1986). De kan ha vanskeligheter med å forstå at konstanter også er funksjoner (Bakar & Tall, 1991) eller at funksjoner bare kan beskrives ved hjelp av analytiske formler og at en funksjon beskrevet ved hjelp av et splittet domene slik som dette(Carlson, 1998) også er en funksjon.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{om } x \leq 0 \\ 1 & \text{om } x > 0 \end{cases} \tag{4}$$

Elevene blir introdusert for mange nye begreper i emnet funksjoner. Noe som kjapt kan skape forvirring og misforståelser.

Å forstå en-til-en egenskapen

Dubinsky & Wilson (2012) har et avsnitt hvor han tar opp en-til-en egenskapen til en funksjon. Vanskelighetene for elevene med denne egenskapen er at de ofte tror at relasjonene mellom to sett alltid må være i et en-til-en forhold. Derfor blir det vanskelig å forstå at kvadratiske funksjoner kan ha to forskjellige svar for hvor vi finner nullpunktene, eller at konstanter slik som $f(x) = 0$ også er en funksjon.

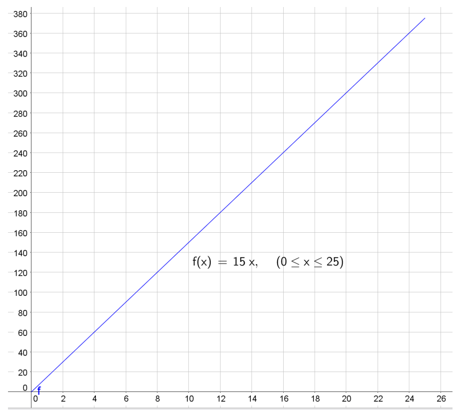
Misforståelser mellom definisjonsområdet og verdimengden

Dubinsky & Wilson (2012) skriver også om vanskelighetene elevene har for å for eksempel forstå formelen $y = x^2$. Vertikal linjetest er et verktøy som kan brukes for å sjekke om en funksjon er en funksjon. Dette gjøres ved at en tegner opp grafen til funksjonen i et koordinatsystem og ser om grafen alltid beveger seg i samme retning på arket. Dersom funksjonen skifter retning vil x gi ut to verdier for y, noe som strider mot definisjon av en funksjon.

Poenget med denne delen er at eleven skal forstå korrelasjonen mellom verdimengde og definisjonsmengde. Begrepene er ikke introdusert i ungdomsskolen, men det utvikles ofte en intuitiv forståelse for hva slags verdier som kan brukes for x og hvilke verdier man da kan få ut for y. For å vise kan vi ta et lite eksempel

> Jens er ute i skogen og plukker jordbær. Han samler de i kurver som han tenker å selge for 15 kroner stykket. Han plukker til sammen 25 kurver. Sett opp et funksjonsuttrykk og tegn grafen.

Denne oppgaven definerer en verdimengde mellom 0 og 25 som er antall kurver som kan selges, mens definisjonsmengden er mellom 0 og 375 som er kroner han kan tjene.



Figur 2: Visuell presentasjon av oppgaven beskrevet over.

Representasjoner av funksjoner

I studien min ønsker jeg å legge vekt på elvens evne til å se forskjellene, sammenhengene, samt fordeler og ulemper ved bruk av tabeller, funksjonsuttrykk og grafer som representasjonsformer for funksjoner. Studien min vil se på elevens forståelse for disse egenskapene hos elevene før og et undervisningsopplegget mitt. Ifølge studier gjort på området viser det seg at elever og noen lærere hovedsakelig foretrekker å bruke det algebraiske funksjonsuttrykket når de skal representere en funksjon(Dubinsky & Wilson, 2012). Clement (2001) har analysert noen studier og funnet at mange elever har en tendens til å tenke at tabeller ikke er representative for funksjoner, mens Schwartz et al. (1990) har funnet at selv opp på college-nivå sliter studenter med å jobbe seg sømløst mellom tabeller, grafer og funksjonsuttrykk.

Clement (2001) tror at det kan være lurt at noe av tiden som brukes på å undervise om funksjoner brukes til å diskutere forskjellige aspekter ved funksjoner. Hun fant i aksjonen sin at intervjuene hun hadde ga mye mer informasjon om hvordan elevene tenkte om funksjoner enn hva de skrevne prøvene gjorde.

Clement (2001) sin forskning viser (i hvertfall i USA) at mange elever rundt 14-15 års alderen klarer å håndtere informasjon gitt i tabeller, grafer og som funksjonsuttrykk. Det virker derimot som at disse kunnskapene kun omhandler algebraiske manipulasjon av resultatene. Elevene virker å ha liten eller ingen evne til å tolke representasjonene på meningsfulle måter.

Karplus (1979) studier viste at studenter hadde en tendens til å se på lineære funksjoner som den eneste muligheten for en funksjon. De hadde også store problemer med å overføre informasjon fra en representasjonsform til en annen, selv i enkle tilfeller.

Fra Udir sine hjemmesider finner vi to punkter i læreplanen om hva elevene forventes å ha lært om funksjoner i løpet av ungdomsskolen (Utdanningsdirektoratet, 2016):

- Lage funksjoner som beskriver numeriske sammenhenger og praktiske situasjoner, med og uten digitale verktøy, beskrive og tolke dem og omsette mellom de ulike representasjoner av funksjoner, som grafer, tabeller, formler og tekster.
- Identifisere og utnytte egenskapene til proporsjonale, omvendt proporsjonale, lineære og kvadratiske funksjoner og gi eksempler på praktiske situasjoner som kan beskrives ved hjelp av disse situasjonene.

Det første punktet i læreplanmålene for 8. til 10. klasse står for at elevene skal kunne gå mellom de forskjellige representasjonsformene. Som tidligere skrevet sliter elevene ofte med denne delen. I tillegg må oppgavene i studien lages slik at de dekker over emnene proporsjonale, omvendt proporsjonale, lineære og kvadratiske funksjoner.

Allerede fra begrepet funksjoner er introdusert i skoleprogrammet blir det brukt med varierende representasjonsformer (Schwartz et al., 1990). Schwarz skriver at det er to trekk som ofte kommer fram i pensum:

- Miljøet som studenten jobber i gir få muligheter for å forstå linken mellom variasjonene i x og de korresponderende variasjonene i y.
- De tekniske sidene ved et problem hindrer eleven fra å tenke på prosess- og konseptutvikling av funksjoner.

Dette mener han fører til to relaterte problemer:

- Elevens forståelse av funksjoner blir ofte begrenset til en av representasjonsformene. Eller sagt på en annen måte: Den samme oppgaven vist ved hjelp av de forskjellige representasjonsformene blir sett på som forskjellige problemer.
- Prosessen med å gå mellom representasjonsformer er ikke en del av elevens kunnskapsarsenal.

Det er viktig at elever forstår hver enkelt representasjonsform for seg, både på et teoretisk grunnlag, men også med tanke på å kunne bruke dem opp mot praktiske situasjoner. I tillegg til dette kommer den delen der elever historisk sett sliter mest. Det er når de skal prøve å forstå forholdet mellom representasjonsformene og også kunne regne mellom dem. Samtidig viser det god kompetanse på området om elevene forstår og kan argumentere for hva en funksjon er, hva som skal til for at en funksjon er en funksjon og hvilken representasjonsform som gir mening å bruke i forskjellige praktiske situasjoner.

2.5 Læring av funksjoner ved hjelp av teknologiske hjelpemidler

På begynnelsen av 1980-tallet gjorde datamaskiner sitt inntog i skolen og gjorde om på mange av forutsetningene for hva man kunne lære om algebra i skolen(Fey, 1989). I den norske skolen har, spesielt de siste årene, datamaskinen blitt en relevant problemstilling da elever helt ned i 8. klasse på ungdomsskolen har tilgang til sin egen bærbare datamaskin. Heid (1988) er en av pionerene innenfor arbeid med å bruke funksjoner og datamaskiner for å lære algebra i skolen. Heids arbeid sammen med Fey et al. (1991) viste oppløftende resultater for elever som jobbet i datamskinstyrte læringsmiljø.

Til tross for Fey og Heids oppløftende resultater fantes det også kritikere mot bruken av teknologiske verktøy i skolen. Pimm (1995) skrev et lite avsnitt om sitt syn på det hele:

> "Ironisk nok blir teknologi brukt for å tolke algebraiske formler. Det er en sterk formodning om at symbolske formler burde tolkes grafisk, heller enn å bli løst direkte. Algebra holder på å bli kjapt redefinert, mye føler jeg på grunn av potensialet i disse nye teknologiske systemene og på grunn av et over-fragmentert pensum, heller enn epistemologisk innsikt. "(s. 104)

Med dette mener han at når teknologien ble innført skjedde det en endring i hvordan algebraen ble undervist på, ikke på grunn av at det var den beste måten, men mye fordi pensum i skolen var for oppdelt. Det ble undervist i for mange delemner, og datamaskiner ga en praktisk måte å blande sammen funksjoner og algebraiske formler på.

Forskning viser at forskjellige teknologiske hjelpemidler kan hjelpe elevers utvikling av sin algebraiske forståelse ved å skape meningsfulle linker mellom de forskjellige typer representasjonsformer (Friedlander & Tabach, 2001; Koedinger et al., 1997). Likevel er det ikke slik at dette skjer automatisk om man bruker teknologi. Det handler også om kvaliteten på oppgavene(Hoyles, 2002), lærerens undervisning(Kubinová & Novotná, 2002) og det generelle læringsmiljøet(Kramarski, 2000). Alle disse områdene spiller hver sin viktige rolle for at eleven skal få en helhetlig undervisning som gir best mulig utbytte av stoffet som skal læres.

Schwartz & Hershkowitz (1999) hadde et studie over en 1-årsperiode der de studerte elever i 14-15 års alderen og hvordan de forstod konseptet matematiske funksjoner. Her la de til rette for bruk av problemløsingsoppgaver, grafiske kalkulatorer, multirepresentasjonell programvareverktøy, samt et miljø hvor elevene ble oppmuntret til å ta egne valg angående representasjonsmåte de ønsket å bruke.

I deres (Schwartz & Hershkowitz, 1999) deltok to grupper med elever, hvor den ene gruppen hadde tilgang til alle de nevnte verktøyene i forrige avsnitt, mens den andre gruppen fungerte som en kontrollgruppe. De fokuserte i studien på å svare på to spørsmål: 1) Hva er statusen til spesifikke eksempler som lineære funksjoner? 2) Hvor rikt er bildet av funksjoner fra hver gruppe av elever, basert på deres forståelse for de forskjellige aspektene ved funksjoner og funksjonsbegrepet? De jobbet med dette gjennom et undervisningseksperiment hvor de på slutten ga elevene et spørreskjema de skulle svare på.

De (Schwartz & Hershkowitz, 1999) konkluderte i undersøkelsen med at elevenes forståelse for egenskapene til funksjoner ble positivt påvirket av å jobbe i et slikt miljø. De hevdet også at å starte timene med at elevene jobbet i små grupper med åpne oppgaver, før lærer mot slutten av timen la opp til klassediskusjon ga grobunn for et enda høyere nivå av matematisk resonnering og begrepsforståelse.

Kieran (2007) forklarer at den største innflytelsen digitale verktøy har hatt på elevers forståelse av algebra på, er den grafiske måten å representere funksjoner og ligninger. De har fått en bedre evne til å kunne visualisere den grafiske måten å se en funksjon på. Likevel hevdes det at mange elever fremdeles sliter med å forstå forholdet mellom algebraiske og grafiske representasjoner av en funksjon. Hun skriver også at ved bruk av kraftige grafiske digitale verktøy mener noen lærere at datamaskiner "Gjør alt arbeidet " for elevene, men at all forskning viser det motsatte. Likevel skriver hun at mer forskning kreves på feltet for utvikling av oppgaver og undervisning i teknologiske miljøer. Samtidig kreves det mer forskning på nøyaktig hvordan elevenes forståelse utvikles i slike miljøer.

Som nevnt tidligere fra Schwartz et al. (1990) får elevene få muligheter til å forstå linken mellom x og y eller at problemene hindrer prosess og konseptutvikling i undervisningen. Ved bruk av problemløsing og teknologiske hjelpemidler er forventningen til studien min at det skal styrke elevens kompetanse basert på Niss sin kompetansemodell og deres begrepsforståelse av funksjoner. Det vil si at de utvikler verktøy for å gå mellom representasjoner og en forståelse for representasjonsformene som gjør at den samme oppgaven vist ved forskjellige representasjonsformer faktisk blir sett på som den samme oppgaven.

2.6 Undervisning, funksjoner og teknologi

Mange forskere har funnet at arbeid med problemløsing og teknologi har resultert i varierende resultater(Ainsworth, 1999). Noen studier har funnet at å jobbe i læringsmiljø støttet med grafiske programmer på PC og problemløsing, ikke gir de store læringsutbyttene(Yerushalmy, 1991; Tabachneck et al., 1994). Yerushalmy (1991) hadde en undersøkelse med 35 elever i teknologisk basert miljø hvor de møttes 20 ganger i løpet av en periode på 3 måneder. I undersøkelsen ble data samlet inn ved hjelp av 5 prøver samt observasjoner av arbeidet i klassen. De konkluderte med at ingen sammenheng mellom algebraiske manipulasjoner og visuelle sammenhenger oppstod hos elevene i perioden.

Andre studier har igjen har vist at man kan få visse fordeler ved å benytte slike miljøer når det kommer til funksjoner (Ainsworth et al., 1998; Cox & Brna, 1995; Thompson, 1992).Ainsworth et al. (1998) hadde to eksperimenter hvor de brukte et læremiljø på datamaskiner som ble kalt COPPERS og hvor målet var å utforske hvordan metoder for læring i klasserommet kunne bli implementert ved hjelp av teknologiske hjelpemidler. En test(flervalgsoppgave) før undervisningseksperimentet og en ny test etter, viste at et slikt læringsmiljø hadde stor innflytelse på elevenes læring.

Selv om disse studiene har vist at det er usikkert rundt hva slags læreutbytte elevene får, har det vært stor enighet om studentenes vanskeligheter med å gå mellom de forskjellige representasjonsformene av en funksjon(Ainsworth, 1999). For eksempel drar hun frem en studie gjort av Yerushalmy (1991), som fant at selv etter et stort undervisningsopplegg basert på representasjon i flere former, var det bare 12% av studentene som ga svar som involverte flere former av representasjoner. De fleste svarene reflekterte bruk av bare en av representasjonene, og det ble konkludert med at å forstå og sette pris på linkene mellom de forskjellige representasjonsformene ikke kommer automatisk.

Elevene blir i studien min å komme innom flere kompetanser som må mestres. De må mestre bruken av teknologiske hjelpemidler, finne problemløsingsstrategier og samtidig mestre de forskjellige representasjonsformer som finnes for funksjoner. Niss & Jensen (2002) skriver at en matematisk kompetanse kan skrives som en "insiktsfull parathet til å handle hensikstmessig i situasjoner som rommer en bestemt slags matematisk utfordring". Likevel følger han opp med å si at selv om slike matematiske kompetanser kan virke selvstendige og avgrensede, betyr ikke det at det ikke finnes overlappinger mellom kompetansene. Noe som vil si at en kompetanse ikke kan læres eller forstås i isolasjon fra de andre kompetansene.

3 Metode

3.1 Kunnskapssyn

Som man kanskje husker var problemstillingen min “Hvordan kan et undervisningsopplegg med fokus på problemløsning og teknologiske hjelpemidler være med å skape en bedre forståelse for funksjonsbegrepet?”. Aksjonen er laget for å kunne svare på dette spørsmålet. For å kunne gjøre dette må det være noen rammebetingelser for hvilke antakelser jeg kan gjøre.

I drøftingen av de innsamlede data jeg har funnet vil samtalen fort bli påvirket av min personlige tro og mening. Da jeg senere skal diskutere resultatene som finnes er det viktig at jeg diskuterer det innenfor et standardisert verdenssyn. Studien min tar for seg et problem i skolen med at elever sliter med å forstå deler av funksjonsbegrepet. Jeg vil gjennomføre en undervisningsperiode og prøve å se hva slags utfall dette kan gi for elevenes forståelse av begrepet. Siden det pragmatiske verdenssynet er orientert i virkeligheten, ønsker å utbedre problemer og tar utgangspunkt i å teste hva slags konsekvenser en aksjon kan få, passer det til studien min.

Cresswell (2014) skriver om sine egne samt Cherryholes (1992) og Morgan (2007) sine syn på pragmatisme. Dette skal være med å skape en filosofisk basis for forskningen.

- Pragmatisme er ikke knyttet opp mot et spesifikt syn på filosofi og realitet. Noe som fører til valgfrihet i bruk av kvalitative og kvantitative metoder når man undersøker. Noe som fører til en frihet for meg som forsker til å velge intervju, logg og et undervisningseksperiment som prosedyrer for forskning som best møter mine behov.

- Pragmatikere ser ikke på en absolutt enhet. Med det menes at forsker er fri til å bruke flere forskjellige metoder samtidig for å skaffe informasjon.

- En pragmatisk forsker ser mot *hva* og *hvordan* en forsker basert på hva man ønsker å oppnå.

- For forsker åpner pragmatisme døren til bruk av flere metoder, forskjellige verdenssyn, forskjellige antakelser, samt forskjellige datasamlinger og analyser man kan ta seg bruk av.

Undervisningen i aksjonen min ønsker å se på hvordan elevens forståelse for funksjonsbegrepet endrer seg et miljø basert på problemløsing og teknologiske hjelpemidler. I pragmatismen ønsker en å utbedre et problem og dette er problemet mitt. Jeg ønsker å bruke flere metoder for å samle data. Dette innebærer intervjuer og loggskriving, som da også krever observasjon fra forsker. Intervjuene vil bli gjennomført både før og etter og skal i grove trekk brukes til å finne eventuelle konsekvenser undervisningen har hatt for elevene.

3.2 Metoder

Schoenfeld (2007) sier at spørsmål som blir stilt og data man velger å samle sammen har stor innflytelse på de konklusjoner som kan trekkes. Bak en hver studie lurer da spørsmålet om hva som er verdsatt av forskeren og hvilke observasjoner som blir vektlagt.

Forskningsdesignet mitt går ut på at jeg gjør en aksjonslæring og et utviklingsarbeid. g at jeg ønsker å utvikle et undervisningsopplegg for elevene hvor jeg ser på deres utvikling av forståelse for funksjonsbegrepet. I studien tar jeg i bruk problembasert intervju, undervisningsforsøk og loggskriving fra timene for å få data som jeg kan bruke i analysen av problemstillingen min.

Fra et pragmatisk perspektiv ønsker jeg å se på konsekvensene av et undervisningsopplegg. Med det mener jeg om undervisningsopplegget mitt vil kunne endre elevens syn på funksjonsbegrepet. Om det gir dem en bedre begrepsforståelse, verktøy til å gå mellom representasjonsformene og generelt sett en bedre kompetanse som beskrevet i Niss sin kompetansemodell.

Det første intervjuet ønsket jeg å ha for å kartlegge elevenes kunnskaper om funksjonsbegrepet før undervisningen startet. På den måten ville jeg ha et sammenligningsgrunnlag i etterkant og ikke bare en ren spekulativ analyse om hva slags konsekvenser undervisningen har hatt. I tillegg spør problemstillingen spesfikt om *hvordan* et undervisningsopplegg med fokus på problemløsing og teknologiske hjelpemidler kan være med å skape en bedre forståelse for funksjonsbegrepet?. Da var det viktig å bruke en metode og form hvor elevene kunne uttrykke sin individuelle oppfatning av hva en funksjon er og hvordan begrepet kan brukes til å løse problemer. Noe slikt ville vært vanskelig å gjennomføre ved hjelp av en kvantitativ metode, som legger større vekt på struktur og hvor misforståelser kan være vanskelig å oppklare.

Loggskrivingen ønsket jeg å ha med for å skape et "bilde" av hvordan elevene arbeidet i undervisningsperioden. Loggskriving er en etnografisk strategi for å skaffe data, hvor forsker studerer en gruppe over lengre tid og skriver ned data jeg observerer. Jeg ønsket å se om elevene ville prøve ut nye arbeidsmetoder med denne typen undervisning. Altså vil jeg ikke gjennom loggen se så mye på forståelsen til elevene, men kanskje legge merke til om deres kommunikasjonskompetanse og hjelpemiddelkompetanse endret seg underveis i studien.

Cobb (2007) nevner at det er viktig at målene som er satt for hva elevene faktisk lærer ikke er satt på bakgrunn av subjektive vimser og smaker. Altså er det viktig at valgene som blir satt for hva som anses som faktisk fremgang i kunnskap er godt begrunnet. I tillegg synes han det er viktig at sluttpoengene i målene også rettferdiggjøres i hvilke fremtidige mål disse kan hjelpe elevene til å nå.

3.3 Aksjon

Selve aksjonen min er hva jeg kaller et undervisningseksperiment. Det er tett knyttet opp mot aksjonslæring. Noe som vil si at jeg forsker på min egen praksis som en prosedyre for systematisk å prøve ut et nytt undervisningsopplegg.

3.3.1 Opplegg

Undervisningsperioden bestod av fire undervisningstimer hvor elevene fikk ut fem forskjellige problemløsingsoppgaver. Disse finner du i appendix C. Opplegget gikk over tre uker og elevene fikk utgitt hver av de fem oppgavene i starten av hver time, med unntak av den siste timen da elevene fikk utdelt de to siste oppgavene. Målet med å gjennomføre et slikt undervisningseksperiment er i tillegg til å bli kjent med elevens matematiske erfaringer, er det også et mål med utforskende læring å se på de distinkte forskjellene i måten elevene operer i matematikken (Steffe & P.W., 2000).

Løpet

Alle oppgavene er konstruert på en slik måte at elevene skal kunne løse dem ved hjelp av tidligere gjennomgått pensum. Den første oppgaven heter "Løpet" og oppgaven handler om hvordan en ligning kan skrives på forskjellige måter om den samme situasjonen gitt forskjellige perspektiver. Denne oppgaven er bygd på en slik måte at den kan være med på å bygge opp under elevens modelleringskompetanse, symbol- og formalismekompetanse samt representasjonskompetanse. Dette mener jeg fordi oppgaven har spørsmål der eleven må tolke tekster, funksjoner. I tillegg vil oppgaven legge opp til at eleven må gjennom flere representasjonsformer av oppgaven som funksjonsuttrykk og grafer. Om de velger å ikke ta seg bruk av teknologisk verktøy kan det fort være at de får behov for å sette opp en verditabell også. Forventningen til oppgaven er som beskrevet i kapittel 2.4 at prosessen å gå mellom representasjonsformer skal bli en del av elevens arsenal.

Produksjon

Den neste timen fikk de en oppgave som het "Produksjon" som handlet om å finne skjæringspunkt mellom to funksjoner. Her vil elevene kunne få bruk for problembehandlingskompetansen sin. Oppgaven kan løses ved hjelp av både grafiske og algebraiske uttrykk, selv om forventningen er at de skal kunne gjøre dette grafisk. Å algebraisk kunne finne et skjæringspunkt er ikke en del av pensum før på videregående skole. Oppgaven krever at de tolker en tekst og setter opp funksjonsuttrykk, det vil si at de må kunne tolke en reell situasjon og gå fra naturlig språk til et matematisk språk. Nok en gang vil elevene måtte jobbe spesielt med sin symbol- og formalismekompetanse, samt sin modelleringskompetanse. Samtidig er det mulig gjennom en slik oppgave at eleven kan utvikle en intuitiv forståelse for definisjonsområdet og verdimengden av funksjonen. De kan se at begge grafene vil ha samme definisjonsområde, men at verdien som kommer ut ikke er den samme for alle punkter utenom det ene (altså skjæringspunktet mellom de to grafene). Siden elevene har tilgang til den kraftige grafiske programvaren, som i denne oppgaven ville vært svært hensiktsmessige som et verktøy for å finne skjæringspunkt, er det forventet at elever også vil kunne styrke sin hjelpemiddelkompetanse gjennom denne oppgaven.

Maraton

I den tredje timen hadde vi oppgaven "Maraton" hvor elevene skulle sette opp funksjoner for hvor langt og kjapt en maratonløper skulle kunne løpe. Denne oppgaven handlet ikke lenger bare om lineære funksjoner, men også om en omvendt proporsjonalitet. Her vil eleven igjen måtte bruke modellerings-, problembehandlings-, hjelpemiddels- og symbol- og formalismekompetanse. Grunnen til sistnevnte og modelleringskompetansen er at eleven må først kunne tolke ut ifra en tekst hva oppgaven handler om før han eller hun gjør om oppgaven fra naturlig språk til symbolsk matematikk. Oppgaven kan regnes som et praktisk problem og ved å jobbe med en slik oppgave forventes eleven å kunne utvikle sin kompetanse for å løse problemer.

Finn arealet og rekker

I den siste timen fikk elevene to oppgaver. "Finn arealet" og "rekker", der den første handlet om å bruke et ligningssystem for deretter å bruke innsettingsmetoden for å finne en funksjon hvis toppunkt ville fortelle et størst mulig areal av et rektangel. Oppgave nummer to handlet om å kjenne igjen et mønster. I dette tilfellet viste mønsteret seg å være den kvadratiske funksjonen $y = x^2$. Begge disse oppgavene var lagt opp slik at elevene kunne jobbe på tvers av av representasjonsformer. Den er også spesielt egnet til å bli løst ved hjelp av flere metoder. Mange elever, som skrevet i kapittel 2.3, sliter med å forstå at en oppgave kan bli løst ved hjelp av flere metoder eller ha mer enn et svar.

Generelt

Ifølge Kapur & Toh (2013) er det viktig i et slikt undervisningsdesign at elevene har mulighet til å samarbeide og at det blir lagt til rette for at de kan få eventuell veiledning og forklaring. I alle timene fikk elevene jobbe i 35 minutter med oppgavene. Grunnet elevenes mange uventede måter å operere på i matematikken skriver Steffe & P.W. (2000) at lærer/forsker fort kan bli nødt til å tilpasse undervisningen. Det vil si at uansett hvor godt planlagt en time er, vil det svært ofte være nødvendig å tilpasse for elevene der lærer/forsker skulle føle at det måtte være nødvendig.

I de resterende 20 minuttene hadde vi kurs hvor vi gikk gjennom oppgavene. Med kurs menes seansen der elever går gjennom oppgaven elevene hadde fått utdelt og de begreper som hører til. Her ble elevene spurt hvordan de hadde løst oppgavene, slik at de i beste fall kunne vise hverandre forskjellige metoder. Schwartz & Hershkowitz (1999) skriver som tidligere nevnt om positive effekter som følge av å jobbe med åpne oppgaver, som blir gjennomgått mot slutten av timene. Det er en av grunnene til at jeg ønsket å gjennomføre timen på denne måten. Noen ganger hender det at elever svarer feil under slike gjennomganger. Om dette skriver Steffe & P.W. (2000) at det ikke er lærers jobb å dømme eleven. Heller enn å tro at eleven bare tar feil, må en lærer prøve å forstå hva eleven kan gjøre. Det vil si at lærer må finne hva slags tankegang som ligger bak elevens svar, og heller tilpasse det til den gitte situasjon.

3.3.2 Prosedyre

Etter hver time skrev jeg logg. En ganske ustrukturert logg som gikk på hvordan elevene jobbet, om de jobbet i par eller alene, om de spurte mye om oppgaven, eller om det virket som de hadde noen "aha"-opplevelser underveis. Jeg skrev også litt om hvordan deltakelsen var og hvordan det virket som de oppfattet stoffet når vi gikk gjennom oppgavene i plenum mot slutten av hver time. Men hva er en logg? Bjørndal (2011) skriver at loggboken har sin opprinnelse fra skipsfarten der kapteinen på båten skrev ned ulike hendelser på båten som kurs, posisjon, vind, bølger og mannskapets adferd. I boken hans, *Det vurderende øyet*, forteller han at logg til vanlig går under forskjellige navn som eksempelvis refleksjonslogg, kommunikasjonslogg, vurderingslogg og dagbok.

Både Bjørndal (2011) og Schoenfeld (2007) skriver at slik kvalitativ datainnsamling minner om noe kalt "thick descriptions"(Geertz, 1973). Dette kan beskrives som omfattende fremstillinger av hva som skjer i en sosial sammenheng og konteksten rundt det som skjer. For eksempel et klasserom hvor flere elever er samlet for å gjøre matematikk. I tillegg blir loggen kan loggen bli veldig personlig, subjektiv og forskjellig fra person til person. Derfor vil jeg i studien min, bruke loggen som et redskap kun som en beskrivelse og forklaring til hva som foregikk i undervisningstimene.

Hvilken nytteverdi har da loggskriveing? Poenget med loggskriving er at man skal kunne skape en dypere forståelse av hendelser, gjennom skriftlig refleksjon(Bjørndal, 2011). Gjennom loggen har man en slags diskusjon med seg selv og det hevdes at man i hvert fall kan lære noen ting om seg selv

- Hva man allerede vet. At gjennom skriving skjer det en bevisstgjøring av hva man kan og vet.
- Hva man føler. Loggen er personlig, ingen andre skal vurdere den, noe som kan gjøre det lettere å uttrykke følelser.
- Hva man gjør og hvordan. Mye man gjør er automatisert og å sette ord på det kan hjelpe på å analysere.
- Hvorfor man gjør som man gjør. Gjennom logg må man begrunne overfor seg selv hvorfor man tar de valgene man gjør i praksis. Da tvinges man til å ta frem praksisteori, noe som gjør en mottakelig for eventuelle endringer.

Loggen vil dermed, i tillegg til å være en beskrivelse på hva som foregikk, også være en refleksjon for meg som forsker til å se på eventuelle endringer som må gjøres i løpet av studien. Steffe & P.W. (2000) forklarer at i starten av et undervisningseksperiment kan forskere ha flere hypoteser som ønskes å testes ut. Likevel kan selv erfarne undervisere ikke bestandig forutse hvordan elevenes utvikling kommer til å forløpe seg. Dette kan føre til at helt uventede problemstillinger kan oppstå.

3.3.3 Utvalg

De som var med i studien min meldte seg på frivillig. Det var seks gutter fra 10. klasse. Elevene gikk fra å prestere fra et noe gjennomsnittlig til et høyt nivå på dette alderstrinnet. Av karakterer lå elevene på alt mellom 3 og 6. To av elevene fikk 6 i matematikk, en fikk 5, to fikk 4 og en fikk 3. Elevene var også bare gutter. Dette ble tilfellet fordi det var dem som meldte seg frivillig og av en klasse på 20 elever der 17 av elevene var gutter ble sjansen ganske stor for at gutter skulle bli valgt ut. Oppgaven skulle uansett ikke ta noe hensyn til om det var forskjeller på hvordan kjønn endrer sin forståelse av funksjonsbegrepet. Kan hende hadde det også vært å foretrekke om alle elevene hadde vært på samme nivå. Da kunne en ha sammenlignet om opplegget ville hatt tilnærmet lik effekt på alle elevene. Uansett ble det slik av praktiske årsaker da undersøkelsen var på frivillig basis.

3.4 Intervjuene

Steffe & P.W. (2000) skriver at hensikten med intervjuet er forstå elevens nåværende forståle, mens undervisningseksperimentet er rettet mot å forstå elevens utvikling over en lengre tidsperiode. De sier at det er en metodologi som er utviklet for å forklare og forstå elevens matematiske aktivitet.

Når jeg skal gjennomføre intervjuene mine er det noen ting som må tas hensyn til. Ifølge Kvale & Brinkmann (2015) vil det å skrive ned alt som blir sagt i et intervju ofte ende med at det blir store opphold med stillhet som hindrer flyten i intervjuet. Samtidig kan det virke forstyrrende på intervjupersonen om han eller hun blir tatt opp på video eller båndopptaker. Likevel kan dette gi en bedre flyt. Cohen & Lawrence (2007) skriver at en praktisk måte å oppnå større validitet i et intervju kan være gjennom å minske ytre påvirkningskrefter. Dette kan innebære punkter som:

- Holdninger og meninger fra intervjueren
- En tendens fra intervjueren til å se intervjupersonen i sitt bilde.
- Misforståelser om hva som blir sagt og spurt om i intervjuet.
- Spørsmål fra intervjueren som kan være veiledende.

Fra Bjørndal (2011) menes det at vi kan forstå observasjon som oppmerksom iakttakelse. Noe som vil si at man med konsentrasjon prøver å legge merke til ting i en situasjon av pedagogisk betydning. Så under intervjuene vil jeg også bruke observasjon som et verktøy og metode for å legge merke til og legge til rette for elevens læring. Underveis vil jeg skrive ned disse observasjonene i en liten logg. Bjørndal (2011) sier at slike beskrivelser som blir ført i en logg kan bli sett på som fremstillinger av hva som skjer i en sosial sammenheng.

3.4.1 Kunnskapssyn

I intervuene ser vi på elevens nåværende forståelse. Da havner vi innenfor det konstruktivistiske paradigmet. Innenfor dette paradigmet gjør vi tre forskjellige antakelser i forhold til menneskene innvolverte i studien. Vi har deltakerne, forskeren og de som vil lese studien. For hver av disse gruppene har paradigmet en egen beskrivelse. Tabellen under er hentet fra boken "Research design" (Cresswell, 2014)

Paradigmeantakelser	Konstruktivistisk paradigme
Forskeren	Bevise at noe ikke stemmer
Deltakerne	Lengre involvering i feltet
Kritikere/lesere	Rike beskrivelser

Tabell 2: Oversikt over de involverte i studien.

Bevise at noe ikke stemmer

Dette er en prosedyre for validitet hvor forsker først stiller opp temaer, før han eller hun deretter søker gjennom dataene for å finne bevis som bekrefter eller avkrefter disse temaene(Cresswell & Miller, 2000). I denne delen av studien avhenger forskeren av sitt eget syn på dataene. En konstruktivistisk tilnærming slik som dette er ofte mindre systematisk enn andre paradigmer, men samtidig bygger den på at man prøver å se alle perspektivene av et tema. Det vil si at forsker prøver å finne t hva som kan være både bra og dårlig med studien. En videre beskrivelse av den tematiske analysen kommer i kapittel 3.5.

Lengre involvering i feltet

Cresswell & Miller (2000) skriver at en annen måte å skape validitet i studien på er å være ute i felten i en lengre periode. Gjennom gjentatte observasjoner og interaksjoner med deltakere i studien vil de bli mer komfortable med å gi informasjon til forsker. Konstruktivister mener at ved å være i felten over en lengre periode vil gjøre deltakerne mer observant i forhold til de forskjellige aspektene studien. Dette vil igjen føre til at konteksten vil være mer kjent for dem og man kan få mer reflektert informasjon fra dem.

Rike beskrivelser

Den siste prosedyren som kan brukes i denne sammenhengen for å skape validitet i studien er "rike beskrivelser" av hva som skjer. Da beskriver man settingen, deltakerne og temaene i en kvalitativ studie i rik detalj. Meningen er at slike rike beskrivelser skal få deltaker til å føle at han eller hun kunne opplevd det som skjer i studien. Man kan bruke slik beskrivelser for å få en interaksjon mellom to eller flere personer til å føles virkelig. Dette kan skje gjennom representasjoner av samtaler, erfaringer eller andre ting som foregikk i studien.

Studien

Alle disse prosedyrene er mer eller mindre med i studien min. Jeg har oppholdt meg på skolen hvor studien er blitt gjennomført over en lengre periode, både før, mens og etter gjennomført studie. Når jeg går løs på den tematiske analysen prøver jeg å lete kritisk etter observasjoner som kan være med på både å bekrefte eller avkrefte temaene. Dette blir såklart en subjektiv tilnærming til innholdet og leser burde forbeholde seg retten å være kritisk til forfatters perspektiv. Samtidig er studien godt dokumentert gjennom intervjuer, observasjoner og logg. Noe som legger til rette for at leser burde kunne gjøre seg opp noen tanker om forfatters oppfatning av de forskjellige temaer og emner som studien tar opp.

3.4.2 Problembasert intervju

Kvale & Brinkmann (2015) karakteriserer et forskningsintervju om læring på følgende måte

> Formålet med det kvalitative forskningsintervjuet er å forstå sider ved intervjuepersonens dagligliv, fra hans eller hennes perspektiv. Forskningsintervjuets struktur er likt den dagligdagse samtale, men som et profesjonelt intervju inneholder det også en bestemt metode og spørreteknikk(s. 42).

Mange som bruker kvalitativt intervju i forskningen sin, har forskjellige syn på hvordan kunnskap utvikles i løpet av intervjuet. Dette fører igjen til at det blir mange forskjellige typer intervju(Kvale & Brinkmann, 2015). Intervjuet mitt er problembasert og jeg forventer at elevene blir å utvikle sin forståelse av emnet mens intervjuet pågår. Problembasert intervju vil si at intervjuepersonen blir å gjennomføre noen oppgaver i intervjuet. De vil få tid og hjelpemidler tilgjengelige. Dette for å se hvilken metode de vil bruke for å løse oppgaven. Altså vil mest sannsynlig deres oppfatning av oppgaven endre seg etter hvert som de arbeider med den.

Bjørndal (2011) sier om intervjuet at det har den egenskapen at man kan legge merke til detaljer som ellers ville blitt oversett. Når jeg gjennomfører intervjuene vil dette i praksis si at jeg kan få en bedre oversikt over intervjupersonens perspektiv. Dette kan komme gjennom oppklaringer av eventuelle misforståelser og utdypninger av svar.

Det finnes kritiske røster mot bruken av intervjuet som metode. For eksempel menes det at det kvalitative kan bli sett på som individualistisk ved at den får visse begrensninger i forhold til planlegging og evaluering(Ryen, 2002). Ryen (2002) forteller også om hvordan intervjuet kan bli sett på som idealistiskt ved at de overser den materielle og sosiale situasjonen respondenten befinner seg i. I tillegg er ofte noe av kritikken rettet mot bruken av intervjuet som metode at det er immobilt. Ofte blir intervjuet foretatt på et nøytralt rom mellom intervjuer og intervjuperson og altså ikke gjennom deres naturlige aktiviteter på skole, i hjemmet, på jobb osv.

Ifølge A. Goldin (2015) er det vanlig at man ser på individuelle case-studier. Noen mener at det man får av resultater fra slike studier kan være svært diskutable, men Goldin mener tilfellet er at slike studier er svært viktige for å forstå naturen til det å lære seg matematikk gjennom problemløsningsoppgaver. Han spesifiserer at denne typen forskning kan få resultater som kan tenkes utvidet til senere å bli brukt i kvantitative undersøkelser med større muligheter for reproduksjon.

Videre har A. Goldin (2015) utarbeidet fem prinsipper som han mener er viktige for å skape et sterkt vitenskapelig grunnfeste og maksimere informasjonsdata som blir innhentet.

1. Tilgjengelighet - de matematiske spørsmålene representert for intervjupersonen må være mulige å løse basert på det grunnlaget de har i faget.

2. Representerende struktur - De matematiske oppgavene representert burde være mulige å løse ved bruk av forskjellige metoder

3. Åpen problemløsing - Intervjupersonen burde få lov til å trekke slutninger om hvordan oppgaven skal løses uavhengig av veiledning fra intervjupersonen. For tidlig veiledning vil resultere tap av viktig informasjon om kunnskap hos intervjupersonen.

4. Eksplisitte kriterier - Kriterier for hva som er gode svar slik at intervjupersonen har mulighet til å korrigere seg selv underveis. Det er også viktig med gode kriterier med tanke på å kunne reprodusere og generalisere forsøket.

5. Et rikt læringsmiljø - Det bør legges til rette for at intervjupersonen har mulighet til å representere funnene sine på flere måter. Det være seg muntlig, på papir, datamaskin, etc.

I planleggingen av et intervju er det viktig at man ikke bare tenker på hva som skal forskes på og hvordan intervjuet skal settes opp. Ifølge Kvale & Brinkmann (2015) vil en del av planleggingen også omhandle innhenting av intervjupersonens informerte samtykke til å delta i studien, sikre konfidensialitet og og vurdere mulige konsekvenser intervjuet kan ha for intervjupersonen. Her igjen kommer vi tilbake til viktigheten av forarbeidet til intervjuet. For at man skal sikre konfidensialitet og kunne gi intervjupersonen informasjon om målet med intervjuet er det viktig at man gjør det klart hvordan intervjuet er strukturert, hva som kreves av deltakeren og hva som kommer til å bli publisert av det intervjuet omhandler. Det kan være lurt å presisere hva som er formålet med oppgaven både før og etter intervjuet.

3.5 Tematisk analyse for intervjuene

Tematisk analyse er en metode for å identifisere, analysere og rapportere mønstre som går igjen i dataene(Braun & Clarke, 2006). Begrepet tematisk analyse har blitt brukt vidt og på forskjellige måter. Et tema fanger noe viktig i datasettet man har anskaffet seg. Et slags mønster eller en mening som kommer sterkt fram. Derfor må vi ha en avgrensing for hva som kan regnes som et tema eller et mønster. Det er ikke sagt at om et tilfelle skjer i 50 % av datasettene mine så er det automatisk et tema, eller hvis et annet tilfelle bare skjer 48 % så er det ikke et tema. Det må diskuteres rundt hvorfor noe er eller ikke er regnet som et tema.

Braun & Clarke (2006) skriver at temaer eller mønstre i en tematisk analyse kan bli funnet på hovedsaklig to måter. I en *induktiv* eller på en *teoretisk* måte. En induktiv tilnærming betyr at temaene blir sterkt knyttet opp mot de innsamlede dataene. Det vil si at man ikke prøver å få temaene til å passe inn i et allerede eksisterende teoretisk rammeverk og blir derfor ikke drevet av forskerens interesse i emnet. Teoretisk analyse vil i motsetning lene seg i stor grad på forskernes interesse i emnet og lener seg mer på et eksisterende rammeverk. Slike analyser har en tendens til å gi mer detaljerte analyser av noen aspekter av dataene. I denne studien vil analysen bli av den mer teoretiske natur. I teorien har det blitt satt opp et rammeverk for kompetanse og forståelse innen emnet funksjoner og temaene i analysen vil være sterkt knyttet opp mot dette rammeverket.

Vi kan ha semantiske eller latent temaer (Braun & Clarke, 2006). Semantiske temaer betyr at man jobber med de mer overfladiske tingene som kommer fram i løpet av for eksempel et intervju. Det viser mønstre i hva som er blitt sagt og skrevet. Studien min vil nok ligge mest opp mot dette da jeg blir å se på om mønstre i elevens tankegang før og etter undervisningen. Vil deres forståelse av begrepet funksjoner ha endret seg, vil deres hjelpemiddelkompetanse ha bedret seg, eller annet. Et latent tema vil derimot gå mer i dybden og prøve å finne ut hva slags ideer, antakelser og hvilke begreper som ligger til grunn for de semantiske dataene som er i dataene. Slik jeg ser det vil ikke dataene mine være omfattende eller spesifiserte nok til at jeg kan gå i dybden av hvilke ideer og antakelser elever sitter på.

Ved en tematisk analyse skriver Saldana (2009) at noen spørsmål kan være smart å ha i bakhodet når man gjennomfører en tematisk analyse.

- Hva gjør folk? Hva prøver de å oppnå?
- Hvordan nøyaktig gjør de dette? Hva slags spesielle metoder eller strategier bruker de?
- Hvordan snakker de involverte om, karakteriserer og forstår hva som foregår?
- Hvilke antakelser gjør de?
- Hva ser jeg som foregår? Hva lærte jeg fra notatene?
- Hvorfor inkluderte jeg dem?

3.5.1 Gjennomføring av tematisk analyse

Koder er deler av dataene som virker interessante for den som analyserer og som relaterer til de mest fundamentale elementene av rådataene. Det kan også bli sett på som informasjon som kan bli gitt mening i forhold til fenomenet som undersøkes.

Etter hvert som forskeren har funnet koder i teksten samler han disse sammen i grupper hvor han eller hun føler at de passer sammen. Disse gruppene kan være eventuelle temaer i rapporten.

Den tematiske analysen blir gjennomført i seks forskjellige steg basert på Braun & Clarke (2006) sin modell.

1. **Gjøre seg kjent med data:**
   Transkribere data, lese over data og notere ned ideer. Her hørte jeg på båndopptakene og skrev intervjuene i tekstdokument. Noterte deretter initielle tanker jeg hadde om intervjupersonens svar.

2. **Lage initiell koding:**
   Prøvde å finne nøkkelord(koder) i intervjuene som kunne være med på å forklare elevens forståelse av begrepet funksjoner på dette tidspunktet. Dette ble kodene mine. Etter at de var skrevet samlet jeg sammen kodene i grupper som virket å forklare samme fenomenet.

3. **Søke etter temaer:**
   Samlet sammen kodene til potensielle temaer, for deretter å samle sammen all data relevant til hvert tema.

4. **Evaluere temaene:**
   Så om temaene er relevante for kodingen og dataene som er innsamlet, for deretter å lage en slags oversikt over temaer, koder og data.

5. **Definere og navngi temaer:**
   Her la jeg siste finpuss på hvordan hvert tema blir definert og hele historien analysen forteller.

6. **Produsere rapporten:**
   Finpussen av funnene. Prøvde å finne utdrag fra intervjuene som kunne fungere som spesielt interessant. Deretter gi en analyse som relaterer tilbake til teorien.

3.6 Validitet i studien

Cresswell & Miller (2000) skriver at validiteten av en studie avhenger av flere aspekter. Sannsynlighet, autentisitet, troverdighet, validering og kredibilitet er noen av disse. Under finner du beskrivelser av prosedyrer som vil være med på å skape validitet i studien min. Disse prosedyrene er bunnet i strategier som er med på å skape kredibilitet i studien. Cohen et al. (2007) skriver at validitet i kvalitativ data kan komme gjennom ærlighet, dybde og rikhet i informasjon, samt omfanget av den innsamlede dataen. I min studie er ikke omfanget av dataene enorme. De er samlet inn fra kun seks elever. Til tross for det går man ganske i dybden på emnet og rikheten av detaljer rundt opplegget vil forhåpentligvis gi leser en sans av kredibilitet til studien. For å sikre validitet nevner Cresswell (2014) noen punkter forsker burde ta hensyn til i designet av studien som kan minimalisere farene som truer validitet:

- Bruk en hensiktsmessig tidsskala.
- Bruk riktige instrumenter for å samle data.
- Sikre validitet gjennom stabilitet. Altså ikke endre for mye på opplegget gjennom studien.
- Ha et representativt utvalg for problemstillingen.
- Bruk hensiktsmessig metodologi for å svare på problemstillingen.

3.6.1 Validitet på bakgrunn av kunnskapssyn

Det filosofiske synet på verden som ligger til grunn for min studie blir kalt pragmatisk. Med syn på verden menes et slags sett med meninger som styrer de valgene som blir tatt i studien. Andre filosofiske syn på verden i følge Cresswell (2014) er postpositivismen, konstruktivismen og sakførende/deltakene verdenssyn.

Postpositivismen mener at kvalitativ forskning av forskjellige metoder og former av systematisk utspørring. Her skriver Cresswell & Miller (2000) at individer med denne tilnærmingen tror på validering, ser etter kvantitative opplysninger som støtter opp om forskningen og bruker aktivt prosedyrer som skaper validitet med hjelp fra spesfikke protokoller. Studien min er mer åpen enn hva postpositvismen tillater.

Det sakførende/deltakende synet på verden er ennå mer spesifikt enn det konstruktivistiske. Dette synet holdt spørsmålene eller aksjonen som ble brukt i undersøkelsen måtte følge en poltikk eller ha en politisk agenda. I min studie går jeg ikke så mye inn på hvorfor elevene skal lære akkurat dette om funksjoner fra et politisk hold. Dermed tenker jeg at rammene for studien min ikke faller innenfor dette synet.

Fra et konstruktivistisk perspektiv er målet til forskeren å forholde seg mest mulig til deltakerne i studien (Cresswell, 2014). Meningene fra deltakerne vil være subjektive og spørsmålene til intervjuer vil være åpne og generelle slik at den intervjuede kan komme med sin innsikt. Dette vil føre til at forskeren ser etter kompleksiteten i svarene heller enn å prøve å finne spesifikke meninger som kan settes inn i få kategorier. Studien min handler om å finne en utvikling hos elevene, mens det konstruktivistiske synet handler mer om å finne ut hvordan en elev tenker om et tema i øyeblikket. Derfor passer dette synet når jeg ser på intervjudelen der elevene skal vise kunnskapen sin, men ikke som et helhetlig syn på studien.

Grunnen til at jeg skriver noe om hva de andre paradigmenene ligger innenfor er for å vise hvorfor disse ikke passer som et helhetlig syn på min oppgave. I tillegg blir det en understreking av hvorfor det pragmatiske synet passser til min studie. Det kan likevel være aspekter fra de andre paradigmene som kan påvirke studien min. For eksempel er jeg mest sannsynlig innom det kritiske konstruktive paradigmet i drøftingen av resultatetene mine da meninger ofte kan være preget av egne erfaringer innen feltet. Samme kan være med postpositivismen da jeg har et rammeverk om funksjoner og kompetanse som resultatene sammenlignes med.

Likevel har studien og mitt eget syn mest til felles med det pragmatiske paradigmet. Oppgaven min er relativt åpen. For øyeblikket er det vanskelig å finne konkrete tilnærminger til hvordan elevenes læring av funksjoner ved problemløsing og teknologiske verktøy fungerer. Derfor blir i hovedsak drøftingen min tolkende. Da har jeg laget et rammeverk i teorien der vi ser på hva god kompetanse innenfor de relevante feltene i studien min er og vil drøfte resultatene opp mot det.

Slik jeg bruker det pragmatiske synet i studien min ser jeg på hvordan et problem kan utbedres. Altså hvordan kan et undervisningsopplegg skape bedre forståelse for funksjonsbegrepet og innenfor den problemstillingen vil ikke det pragmatisk synet legge noen begrensninger for hvilke metoder som kan bli brukt. Det vil si at man kan bruke alle tilgjengelige metoder for å kartlegge og løse problemet. I studien min har jeg et undervisningseksperiment, jeg skriver logg og gjennomfører intervjuer med elevene.

Innenfor dette synet på verden ser man på sannhet som noe som fungerer i den gitte situasjon. Derfor kan man bruke en blanding av metoder for best mulig å kunne svare på en problemstilling.

3.6.2 Validitet og reliabilitet i intervjuene

Veldig ofte blir validitet i intervjuer basert på om spørsmålene ser ut til å måle det de hevder å måle (Cohen et al., 2007). En ting som ofte skaper invaliditet i studier er ensidighet eller at man er partisk. Det vil si at man har en tendens til å gjøre feil i samme retning eller sagt på en annen måte at man gir mer eller mindre mening til en attributt en hva som er nødvendig. En måte som skaper validitet i studien er å heller sammenligne funnene sine med mål som allerede har viste seg å stemme for området. Det er det jeg gjør i studien min når jeg ser på hva svarene elevene gir opp mot teoriene om kompetanse og funksjoner som er definer i teorien.

Likevel skriver Cohen et al. (2007) at den kanskje beste måten å skape validitet er å minimalisere partiskhet mest mulig i intervjuet. En liste han har laget av hva som kan skape partiskhet mot den intervjuede er som følger:

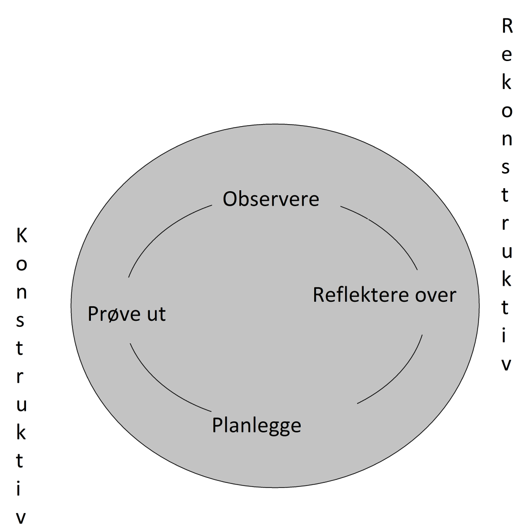
- Holdninger, meninger og forventinger fra intervjuer
- En tendens fra intervjuer til å se den intervjuede i sitt “bilde”.
- En tendens fra intervjuer til å se etter svar som støtter opp under tidligere funn.
- Misforståelser for intervjuer på hva den intervjuede sier.
- Misforståelser for den intervjuede på hva intervjuer sier.

Jeg har i studien min gjort mitt beste for å etterfølge dette. Om det var noe som virket uklart i intervjuet spurte jeg etter betydning, eller om elevene satte seg fast med oppgaven prøvde jeg å ikke hinte til hvordan de kom seg videre, men heller la dem prøve seg frem. Prøve å forholde meg objektiv i forhold til hvordan de svarte på spørsmål og oppgavene i intervjuene samt at jeg i drøftingen blir å prøve å gi et objektivt syn på funnene jeg har gjort.

Flere ting kan påvirke validiteten. Alt fra forholdet jeg hadde til elevene som læreren deres til hvordan tolkningen av dataene ble gjennomført. Derfor er det viktig at jeg som tidligere sagt holder meg objektiv, ikke bare når de svarte på spørsmål og oppgaver, men i alle aspekter av studien.

3.6.3 Å forske på egen praksis

Som lærer eller pedagog generelt er man alltid ute etter å finne metoder som er med på å fremme studenters læring. Man kan i så måte si at man forsker på egen praksis. Bjørndal (2011) skriver at en lærers rolle som forsker er intuitiv. Altså at den ikke har alle kjennetegnene som karakteriserer vitenskapelig forskning. Han sier at når praktikere ser på egen praksis bruker de ofte spiralformede modeller for å forske på egen praksis. Ofte går de ut på å identifisere problemer, samle inn data, sette i verk tiltak og dernest redefinere problemene.



Figur 3: En modell for pedagogens aksjonslæringsprosess fra Bjørndal (2011)

En slik aksjonslæringsprosess har fått kritikk for ikke å ha alle kriteriene som anerkjenner vitenskapelig forskning, mens noen også mener at lærere og pedagoger ikke har tid eller kvalifikasjoner til å drive forskning (Tiller, 1999). Bjørndal (2011) poengterer i boken *Det vurderende øyet* at evnen til å *se* best mulig er avgjørende for å kunne vurdere og utvikle seg som pedagog. Med det mener han å kunne se sin egen praksis og på den måten være åpen for endring og utvikling.

Det er i tillegg visse fallgroper med å forske på seg selv. For eksempel kan det være vanskelig å danne seg et realistisk bilde av seg selv som pedagog. Vanskeligheter med å godta at man ikke er så flink på områder kan oppstå og man kan lett bli partisk mot seg selv. Om man er lærer i et klasserom vil også situasjonene i klassen bli påvirket av deg som lærer. Det kan være vanskelig å trekke ut de rette observasjonene av praksisen som blir gjort til evaluering. Det er ikke sagt at den refleksjonen som blir gjort blir til det bedre. Det kan altså i slike tilfeller være lurt å få hjelp av en objektiv tredjepart. Selv om dette kan være lurt, er det ikke dermed sagt at det er enkelt å få tak i, og det blir fort snakk om tid og kvalifikasjoner igjen for å gjennomføre noe sånt.

I min studie har jeg måtte stole på meg selv som forsker. Jeg har etter hver time skrevet logg og gjort meg noen tanker om undervisningen som er blitt gjort. Selv har jeg funnet ut at det kan være vanskelig å få tiden til å strekke til for å gjøre meningsfulle refleksjoner rundt de forskjellige situasjonene som kan oppstå i et klasserom. Det er derfor viktig at man hele tiden har et kritisk øye til sin egen praksis og er åpen for eventuelle endringer som skulle måtte til for at elevene skal få mer ut av læringen. Det samme gjelder for studien. Om noe i studien ikke er like enkelt å gjennomføre i praksis som teoretisk, kan man måtte gjøre endringer. Det kan være vanskelig å være våken på dette og kanskje endrer man på noe man ikke en gang tenker over.

3.7 Hvorfor dette vil svare på problemstillingen min

Problemstillingen min er som tidligere beskrevet: "Hvordan kan et undervisningsopplegg med fokus på problemløsning og teknologiske hjelpemidler være med å skape en bedre forståelse for funksjonsbegrepet?" Det er flere grunner til at jeg mener aksjonen min vil gi meg gode data for å svare på problemstillingen. Det første jeg tenker på er hvor lite svar jeg ville fått med kvantitative metoder som spørreskjema, strukturerte intervjuer o.l. Da ville jeg som forsker gjort oppgavene veldig snevre og elevene ville ikke hatt mulighet til å vise hele sin kompetanse og muligheten for oppklaringer kunne blitt vanskelig å få til. Området som skulle blitt forsket på ville vært forhåndsbestemt og det ville vært vanskelig å finne ny kunnskap på området.

Å brukte et problembasert intervju basert på et relativ ustrukturert kvalitativt intervju ga den nødvendige fleksibiliteten for å få ut mest mulig av elevens evner og kunnskap. Da problemstillingen min er på et område hvor det er gjort noe forskning, men lite forskning som har gått i dybden og funnet spesifikker som kan være med å styrke elevens forståelse av representasjoner av funkjoner, ville jeg lage en aksjon som kanskje kunne avduke slike aspekter. Med det i bakhodet var det viktig at aksjonen var såpass åpen at elevene hadde mulighet til å vise kompetansen sin på måter som jeg selv kanskje ikke har tenkt på. De kvantitative metodene går ofte på veldig spesifikke områder innen forskningsområdet. Om temaene for problemstillingen ble delt opp i spørsmål med faste svaralternativer eller ledede spørsmål ville gjort det vanskelig for elevene å vise seg frem på alle kompetansemålene. Samtidig kunne det også vært vanskelig å lage spørsmål på en måte slik at elevene kunne vise frem kompetansene sine innenfor funksjoner.

Oppgavene i intervjuene omfatter alle områdene i problemstillingen og interagerer på en måte jeg tror vil kunne gi en pekepinn på hvordan dette undervisningsopplegget påvirker elevens forståelse av problemløsing, representasjon av funksjoner og bruk av teknologiske hjelpemidler.

4 Resultater

Resultatene er hentet fra logg, observasjon og intervju. Analysene som ble gjort i intervjuene er tematisk. De generelle bemerkningene er initielle tanker fra forfatter som ble gjennomført før jeg gikk i gang med analysen av intervjuene.

4.1 Logg og observasjon

Loggen ble skrevet rett etter hver time slik at minnene var ferskest mulig. På de fire timene ble elevene gitt fem forskjellige oppgaver. Under forklares et par hovedpunkter fra loggen.

4.2 Logg-analyse

I løpet av undervisningseksperimentet la jeg merke til noen endringer i klasserommet. Siden det bare var fire timer vi brukte til å gå gjennom temaet funksjoner ble det ikke så mye stoff. Derfor blir denne delen svært kort. Punktene jeg syntes var interessante handlet om måten elevene arbeidet på og de kompetanser jeg på sikt tror disse arbeidsmetodene kan underbygge. Det ble heller ikke brukt noen metoder i undervisningen for å prøve å måle kompetanse hos elevene. Jeg fant to temaer som passet til undervisningen:

- Kommunikasjonskompetanse
- Problembehandling- og hjelpemiddelkompetanse

4.2.1 kommunikasjonskompetanse

Grunnen til at jeg tar med denne kompetansen er ikke at elevene viste prov på bedre kommunikasjonskompetanse. Det handler mer om måten de jobbet på i timene. I første timen vi hadde med emnet var det bare ett par elever som jobbet sammen om oppgaven før vi gikk ut på kurs, mot siste timen der alle elevene gjorde det.

Etter første timen skrev jeg:

> "Jeg leverte ut oppgaven til de elevene som skulle være med å ha kurs denne dagen. Altså gjennomgang av et nytt emne. Elevene jobbet godt med oppgavene. To stykker jobbet sammen om oppgaven."

Elevene var muntlig aktive i gjennomgangen og de fleste hadde fått til oppgaven jeg kalte "Løpet". Med unntak av den siste deloppgaven. Det var et par som lurte på hvorfor løperen ikke startet i origo og ble fortalt at dette handlet om perspektivet man så oppgaven fra.

Den siste timen forløp seg ganske likt som den første. Elevene var veldig muntlig delaktig i gjennomgangen av oppgavene, men måten de jobbet på i timen var annerledes. Jeg skrev i loggen:

> "I denne timen jobbet alle elevene i grupper på to eller tre. De virket nysgjerrige på hvordan man skulle løse oppgavene "Rekke" og "Finn arealet" . I tillegg til å sitte i grupper gikk de rundt og spurte de andre gruppene om hva de hadde kommet frem til. Dette var ikke vanlig praksis i denne klassen før jeg startet med undervisningseksperimentet."

Jeg fikk ikke høre veldig mye av matematikken som ble uttrykt mellom elevene i denne timen, men måten å jobbe med matematikk som elevene hadde i siste kontra den første timen, er en metode jeg på sikt tror kan være med å øke elevenes kommunikasjonskompetanse.

4.2.2 Problembehandling- og hjelpemiddelkompetanse

Grunnen til at jeg har disse to kompetansene i et punkt er at jeg så litt på måten elevene jobbet med oppgavene i løpet av undervisningsperioden. Elevene hadde datamaskinene tilgjengelig til å jobbe med gjennom all undervisningen, men i første timen var det ingen som tok seg bruk av den. I den andre timen var det to som tok seg bruk av den og i de to siste timen brukte alle elevene datamaskinene sine og den grafiske programvaren Geogebra.

Om dette har med naturen til oppgavene å gjøre eller at elevene etter hvert så nytten av å bruke den grafiske programvaren Geogebra vites ikke. Likevel kan det tyde på at eleven så en nytteverdi i å kunne bruke hjelpemiddelet for å løse problemet.

4.3 Intervju

Etter fullførte intervjuer gikk jeg først gjennom intervjuene og transkriberte dem før jeg lagde meg noen initielle tanker om elevenes evner. I fremstillingen av intervjuene bruker jeg "I" for intervjueren, mens jeg bruker symbolet "*" for å representere den intervjuede. I gjennomgangen blir jeg å vise til noen eksempler i det første intervjuet før jeg viser til eksempler i det andre intervjuet.

4.3.1 Initielle tanker

Det jeg la merke til som en av forskjellene mellom første og andre intervju er at elevene brukte mindre tid på oppgavene. Forskjellen mellom intervjuene var svært merkbar. Elevene var kjappere til å ta seg bruk av Geogebra i de tilfellene hvor det var effektivt. Første oppgaven med grafer og funksjonsuttrykk gikk veldig kjapt. De var mer presise i beskrivelsene sine av konstantledd og stigningstall og de brukte mindre tid for å identifisere rett graf til rett funksjonsuttrykk.

De færreste av elevene brukte boka til å hjelpe seg. Mange klarte å resonnere seg frem til svarene om de brukte litt tid. Dette gjorde de både på første og andre del.

Stigningstall og konstantledd

Begrepene stigningstall og konstantledd er veldig sentrale når man først lærer om funksjoner. Man begynner som regel med lineære funksjoner der disse to begrepene forklarer de viktigste egenskapene for funksjonen. Fire av elevene hadde en tendens til ikke å bruke disse begrepene i første intervjuet. I tillegg hadde et par, av de fire som ikke brukte begrepene, problemer med å forklare hva begrepene beskriver.

Første intervju: I første intervjuet sa en elev dette om stigningstall.

I: Hva er et stigningstall og hva forteller det oss?

*: Det er liksom det du ganger med x-en. Eller er det ikke det? Stigningstallet som går gjennom y-aksen forteller oss hva y skal bli.

En annen elev forklarte det på en litt annen måte.

I: Hva betyr leddene i den lineære funksjonen?

*: Det første vil fortelle hvor mye det stiger... Og det andre forteller hvor mye det stiger.

I: Men du sa jo akkurat at leddet med x sa noe om hvor mye det stiger. Hva betyr det andre leddet?

*: Jeg er usikker på hva det betyr.

Begrepene blir ikke brukt riktig. Når han sier at begge leddene handler om at funksjonen stiger, mangler begreper som stigningstall og konstantledd. Han sier kun at det stiger og ikke noe om hvordan konstantleddet kan hjelpe med å identifisere grafen.

Andre intervju: I det andre intervjuet klarte alle elevene å si noe om at grafen ville synke eller stige avhengig av stigningstallet. To var litt usikre på hva konstantleddet ville fortelle oss ennå. En elev forklarte stigningstallet på denne måten.

I: Hva forteller stigningstallet oss?

*: Det forteller hvor bratt grafen stiger og synker. Om det er positivt så stiger grafen og om det er negativt så synker den.

*: Konstantleddet i denne grafen er -3. Det kan jeg se av at den går gjennom -3 på y-aksen, mens stigningstallet er 2 fordi den går opp 2 for hver gang den går bort.

Eleven brukte begrepene hensiktsmessig her. Han hadde en helt akseptabel forklaring på hva stigningstallet gir oss av informasjon.

En annen elev som ikke hadde fått til å svare på dette i første intervjuet svarte på andre intervjuet:

*: Stigningstallet er jeg litt usikker på hva det forteller oss egentlig. Det forteller hvor bratt grafen stiger og synker. Positivt så stiger den, negativt da synker den. Det andre tallet er konstantleddet. Det er -3(Funksjonen som skulle bli forklart var $2x - 3$.

Det kan tyde på elevenes begrepsforståelse for den lineære funksjonen har endret seg i løpet av undervisningsperioden. Til å ikke bruke begrepene stigningstall og konstantledd, eller bruke dem med hensyn kun på den algebraiske formelen, hadde elevene nå utviklet et mer grafisk syn på hva stigningstallet forteller oss. Dette kan vi se av måten de bruker ord som synking og stigning i beskrivelsene sine, i stedet for å sette inn tall og fortelle hvor mye y skal bli.

Hva er en representasjonsform?

Representasjoner av funksjoner handler som skrevet i teorien om å kjenne til de tre vanligste representasjonsformene: grafisk, verditabeller og funksjonsuttrykk. Elevene var på begge intervjuene veldig klare på at de visste at man kunne uttrykke seg grafisk. I første intervjuet var det som skrevet over veldig mange som helte mot en forklaring av begrepene som var algebraisk. Likevel svarte alle elevene på begge intervjuene at grafer var en måte å representere en funksjon på, men ikke alle virket å forstå at både funksjonsuttrykket og verditabeller er ekvivalenter til grafen.

Første intervju: På spørsmål til elevene om hvilke representasjonsformer vi har for funksjoner var det litt forskjellige svar. Et svar jeg syntes var interessant var en av elevene i første intervjuet som først svarte at han ikke viste, men på oppfølgingsspørsmål om han viste hvordan vi representerte en lineær funksjon svarte han:

I: Hva slags representasjonsformer har vi?

*: Forstår ikke helt spørsmålet. Lineær funksjoner er det noe annet?

I: Det er bare en type funksjon. Hvordan kan du representere en lineær funksjon?

*: Som funksjon, graf og verditabell.

Det var litt individuelt på dette spørsmålet hva som kom fram. For eksempel sa en elev:

I: Hva slags representasjonsformer har vi?

*: Vi har verditabeller og grafer i et koordinatsystem med punkter.

Det er likevel ting som tyder på at et par av elevene har forstått at det er korrelasjoner mellom de forskjellige representasjonsformene.

Andre intervju: I andre intervju var det fremdeles et par som glemte verditabeller og et par som glemte funksjonsuttrykket når de skulle si hvilke representasjonsformer vi har for funksjoner.

I: Hva slags representasjonsformer har vi?

*: Du kan skrive det opp som en funksjon, vise det i en graf. Husker ikke flere.

En annen svarte på samme spørsmål:

*: Koordinatsystemer, ligninger og verditabell.

Koordinatsystemer blir ikke helt riktig, da det er grafen som representerer en funksjon, mens koordinatsystemet er rammene for hvor en graf blir representert.

Selv de elevene som ikke husket navnet på alle representasjonsformene brukte de forskjellige formene i løpet av intervjuet sitt. Det kan derfor tyde på at elevene allerede før undervisningsopplegget kjenner til de forskjellige representasjonene, men vet ikke at de er ekvivalenter til hverandre. Etter undervisningsopplegget tyder ikke resultatene til noen større kjennskap til det.

Problemløsing

I de to delene av intervjuene var det ofte i den første delen at elevene slet mest med å finne gode forklaringer for hvordan de skulle løse oppgaven. På den andre oppgaven fikk nesten alle elevene til å utrette noe. Ikke alle klarte å sette opp de riktige funksjonene i oppgaven på første forsøk. Oppgave 2) i begge intervjuene syntes jeg var litt interessant da det var en av oppgavene elevene valgte å løse på forskjellige måter.

Første intervju: Mine første tanker om elevens problembehandlingskompetanse og forståelse av funksjonsbegrepet var at den var noe begrenset. Fire av elevene klarte å sette opp funksjonene på første forsøk i oppgave 2, men et par var ble litt usikre. Hele oppgave 2 var tenkt på som et problem og spesielt på den aller siste oppgaven var det ingen som fikk til å løse oppgaven grafisk. En av var inne på noe, men fikk det ikke helt til.

*: Går det an når den ligger på 30 på siste oppgaven? Vet ikke helt hvordan jeg skal gjøre det. Kanskje jeg kan sette opp en linje som går opp ved 30 på x-aksen, men vet ikke helt hvordan det blir. Kanskje 30x, eller nei... kanskje x+30. Nei, jeg er ikke helt sikker.

Bare to av elevene valgte å løse den algebraisk på første intervjuet.

*: Om jeg bruker funksjonen jeg har skrevet opp[1].Da vil $215 \cdot 30 = 6450kr$ gi svaret på den første(Rossfjord catering) mens $180 \cdot 30 + 700 = 6100kr$.

[1] Funksjonene han henviste til var $f(x) = 215x$ og $f(x) = 180x + 700$.

I: Kan du løse det på en annen måte?

*: Jeg vet desverre ikke om noen annen måte.

Andre intervju: I det andre intervjuet var det fem elever som fikk til å gjøre oppgaven grafisk. To av dem klarte også å gjøre den algebraisk på oppfølgingsspørsmål. Den siste eleven som gjorde oppgaven algebraisk på første intervjuet klarte fremdeles kun å løse oppgaven ved hjelp av denne algebraiske formelen.

*: Jeg lager en normal opp fra 25 på x-aksen og så setter jeg på skjæringspunkter.

I: Hva har du funnet?

*: At det da vil koste 6450 kroner for Rossfjord Catering.

Var svaret til en av elevene som løste den grafisk. En av de to eleven som gjorde det på begge måtene gjorde det veldig enkelt.

*: ganske enkelt med den siste oppgaven. Setter bare inn 25 for x på den andre her. Y=220*25+850 og så bruke kalkulatoren. 6350 altså.

I: Kunne du gjort det på en annen måte?

*: sette opp en normal fra x=25 og tatt skjæringspunktene der den krysset de to grafene (Deretter førte han det inn i Geogebra).

Disse resultatene kan, sammen med en økt forståelse av programvaren, bety at eleven har økt sin problembehandlingskompetanse. Flere av dem klarer å løse oppgaven som lignet på den de tidligere slet med og et par av dem gjør det i tillegg ved hjelp av flere metoder.

4.4 Elevenes forståelse

Etter mine initielle tanker om intervjuene begynte jeg å kode intervjuene. Her kom jeg fram til seks forskjellige temaer som kodene mine passet under. Disse temaene er valgt på bakgrunn av teorien beskrevet i kapittel 2.

- Symbol- og formalismekompetanse
- Problembehandlings- og modelleringskompetanse
- Hjelpemiddelkompetanse
- Representasjonskompetanse
- Å vite hva som er en funksjon
- Resonnementkompetanse

4.4.1 Symbol- og formalismekompetanse

Temaet handler om hvordan elevene bruker begrepene relatert til emnet funksjoner. De skal som skrevet i teorien kunne avkode symbol- og formelspråk, eller kunne gå frem og tilbake mellom naturlig språk og matematisk språk. Noe som vil si at de må forstå og kunne bruke begrepene som er relatert til emnet funksjoner. Av disse finner vi for eksempel stigningstall, konstantledd, lineær og kvadratisk graf med flere. I det første intervjuet var det få av elevene som klarte å bruke disse begrepene på en måte som ga mening, men i andre intervjuet var det flere som brukte begrepene hensiktsmessig. I tillegg handler kompetansen om at de bruker tegn og språk på en presis og riktig måte når de snakker og skriver matematikk. Mange av elevene brukte begrepene forskjellig før og etter undervisningsperioden.

Første intervju: Den kvadratiske funksjonen i første oppgave var det mange av elevene som slet med både før og etter undervisningsperioden. På første intervjuet fant fire av elevene ut hvilken graf som tilhørte uttrykket $f(x) = x^2$, men de ingen kunne si noe om hvorfor den ble seende slik ut. Altså de fant det ut på grunn av at de fant de andre to grafene og da var det bare den igjen. Få brukte begreper som "den kvadratiske funksjonen" eller "kurvet graf". En elev sa i første intervjuet noe om hvor en graf starter og slutter.

*: Funksjonsuttrykk 2 hører nok til den nederste for den stiger alltid med en. Usikker på hva det andre tallet betyr. Tror det er der grafen starter eller slutter.

I: Hvor tenker du at en graf starter eller slutter?

*: Vet ikke hvor en graf starter, den kan jo gå i det uendelige. Tenker at hvis du setter inn verdien 3 for x, så vil grafen starte her.(peker på 3 på y-aksen)

*: Er ikke så god på sånne kurver. Den her er kanskje enklest å få øye på. Om vi tar $y = 3x + 2$, starter den på 2 når $x = 0$. Hver gang x øker så øker også y. Om vi så tar $y = x + 1$(Stopper opp i et minutt). Den må være den rette linja der linja går gjennom 1 på y-aksen, skjæringspunktet ligger på 1 og så øker den med en for hver gang x øker. Den siste må være $-x^2$, fordi det bare er den som er igjen.

Her har eleven hatt en feiltolkning om at en graf har et startpunkt og et sluttpunkt. Når han skal forklare hvor den starter bare skriver han inn en tilfeldig verdi for x og peker på $y - aksen$ i den verdien. Det blir litt motsatt i forhold til variablene og fører til at forklaringen faller sammen.

Selv om fire av elevene kom frem til hvilken graf alle funksjonsuttrykkene hørte til, var det ingen som kunne si noe om hvorfor den kvadratiske funksjonen ble seende ut som den ble. Siden kompetansen handler om å kunne avkode symbol- og formelspråk, for deretter å oversette til et naturlig språk tyder svarene på at elevene ikke er utviklet på denne kompetansen.

Andre intervju: I andre intervjuet var det flere av elevene som brukte begrepene stigningstall og konstantledd når de skulle forklare de lineeær grafene og funksjonene

*: Oppgave 1 a) er $2x-3$. Det ser vi fordi konstantleddet er -3 og da ser vi at denne grafen har det konstantleddet(peker på riktig graf på arket). I den andre er konstantleddet -1. Den kan vi også se bare av konstantleddet fordi det er den eneste med akkurat det konstantleddet.

I: Hvordan finner du stigningstall?

*: Finner ut hvor mye det øker eller minker per x-enhet. På den første (han mener $y=2x-3$) ser vi at det vil øke med to for hver gang x-en øker med 1. Da er 2 stigningstallet. I den andre har vi $-2x-1$ og da vil den minke med to for hver gang x-en øker med 1. Da er stigningstallet -2.

Svarte en elev, mens en annen elev sa:

*: Den grafen tilhører $y=2x-3$. Kan jeg se fordi konstantleddet er -3 og stiger med 2. Den kvadratiske er den kurvede, men klarer ikke huske hvordan jeg regnet den. Den siste er $-2x-1$ fordi vi ser at den går nedover hele tiden og -1 viser at den skjærer andreaksen på -1. Stigningstallet til den første er 2 og konstantleddet er -3. Jeg finner stigningstallet ved å se på hvor mange den stiger opp eller ned for hver gang den går en til høyre. Konstantleddet er der den krysser y-aksen.

Her hadde elevene en utfyllende besvarelse hvor de identifiserte grafen både ved hjelp av stigningstall og konstantledd. Så på samme måte som mine initielle bemerkninger om stigningstall og konstantledd, tyder resultatene på en høyere forståelse av symbol- og formalismekompetanse blant elevene.

4.4.2 Hjelpemiddelkompetanse

Hovedsakelig var det oppgave 2 c) og d) som var utviklet for at elevene skulle bruke Geogebra. Bare en av elevene brukte Geogebra som bekreftelse for valgene han tok i oppgave 1. Elevene var kjapp å ta i bruk programmet når de så muligheten for det i 2 c). Det var likevel ikke alle som var klar over mulighetene som ligger inne i programmet. Spesielt ikke på første intervjuet.

Hjelpemiddelkompetanse handler om å kjenne mulighetene og begrensningene i et verktøy, men for elevene i 10. klasse har de ikke veldig mye erfaring i å arbeide med grafisk programvare. Derfor er de ikke kommet til et nivå hvor det å skulle se begrensninger i dette hjelpemiddelet, burde sees på som en problemstilling.

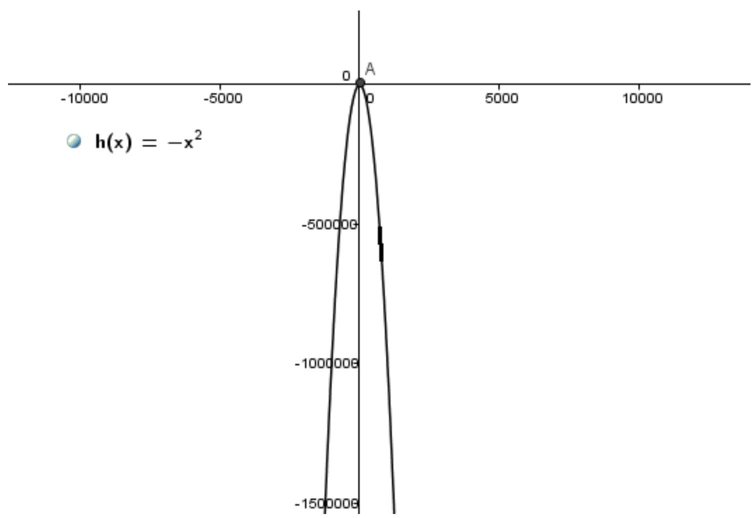
Første intervju: Det var bare en av elevene som brukte datamaskinen som hjelpemiddel i den første oppgaven.

*: Tenker at funksjon 1) er den nederste grafen, fordi x er 1, men det kan også være nr. 2. Litt usikker egentlig. Går videre på funksjon 2), tror det er den første grafen. vet ikke helt, men den treffer 0.

I: Hvordan tenkte du da du kom fram til dette?

*: x kan jo være en, men er veldig usikker, kanskje jeg bruker PC-en.

Da skrev han inn den kvadratiske funksjonen i Geogebra og fikk bildet under tegnet i Geogebra etter å ha zoomet litt ut.



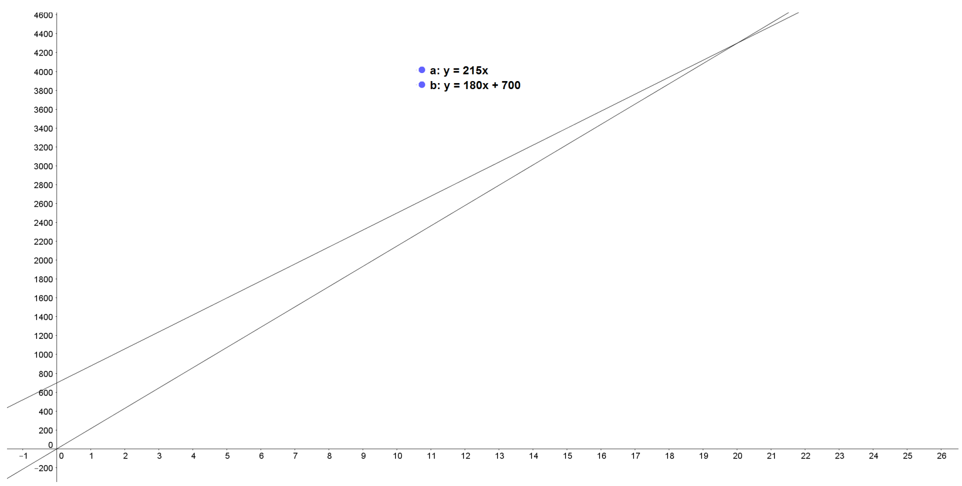
Figur 4: Funksjonen $f(x) = -x^2$

Deretter klarte han å gjette seg fram til de to andre funksjonene. Til tross for at han kom frem til hvilke funksjoner som hørte til hvilken graf manglet han fremdeles kunnskap til å si noe om hvorfor akkurat disse funksjonsuttrykkene hørte til sine grafer.

I den andre oppgaven klarte alle elevene å finne fram til funksjonene som skulle brukes i Geogebra. Etter det var det ikke alle som klarte å finne skjæringspunktet. Eller å finne ut av oppgave 2 d) ved hjelp av det grafiske verktøyet. Alle forstod at i punktet der grafene møttes var det noe spesielt som skjedde. Et par sa at det var i dette punktet det ble billigere å bruke den ene en den andre bedriften, mens de resterende fire sa at det her ville være lik pris for fotballskjortene. En av elevene hadde funnet funksjonene i oppgave a) og b). Deretter forklarte han videre:

*: Kanskje om jeg setter inn funksjonene i programmet. Den ene aksen forteller antall skjorter og den andre forteller prisen for det antallet. Om jeg finner punktet der grafene møtes er det akkurat like dyrt. Startprisen er høyere på a, men prisen per skjorte er lavere. Så det blir billigere for skjortene gjennomsnittlig etter en stund b) og dyrere for a).

I den neste oppgaven tenkte eleven på å lage en linje opp fra x-linja ved verdien 30, men visste ikke hvordan han kunne lage linja.



Figur 5: Elevens besvarelse av oppgavene 2 b) og c) i første intervjurunde

Det var ingen av elevene i det første intervjuet som klart å sette opp linja $x = 30$ på egenhånd. De forklarte at de ønsket å sette opp en strek ved $x = 30$, men visste ikke hvordan de skulle gjøre dette. Dette tydet på at hjelpemiddelkompetansen deres var noe begrenset i forhold til hva de ønsket å få ut av oppgaven. Da de satte seg fast på den grafiske metoden var det bare to av elevene som kom på å gjennomføre disse oppgavene algebraisk på første intervjuet.

Andre intervju: I det neste intervjuet brukte samme eleven som først beskrevet i første intervjuet, datamaskinen for å bekrefte at $f(x) = x^2$ stemte overens med den kurvede grafen. Deretter klarte han ikke å forklare hvorfor det bli slik, men kunne argumentere for hvorfor de to andre funksjonsuttrykkene hørte til de to lineære grafene.

*: $2x - 3$ er grafen opp til venstre. Stigningstallet i denne er 2 fordi det står $2x$.

Selv om han sier at han er usikker på betydningen av stigningstallet gir han en etterhvert en helt ok beskrivelse av stigningstallets betydning. Deretter lokaliserer han konstantleddet som 3. Her glemmer han fortegnet.

I det andre intervjuet klarte alle elevene å sette opp skjæringspunktet mellom de to grafene og å finne ut hvor prisene var like for bestilling av catering. Likevel var det fremdeles to stykker som først sa at det var i dette punktet det ble billigere å bruke den ene enn den andre. Etter spørsmål om det var i punktet det lønte seg, så de litt ekstra på svaret og modererte seg til å si at det etter punktet ville lønne seg.

Oppgave 2 d) fikk fem av elevene å gjennomføre ved hjelp av den grafiske programvaren. Et par etter å ha brukt litt tid. Bare en av elevene brukte funksjonsuttrykket og regnet ut for hånd. Han fikk ikke til å sette opp en normal fra x-aksen i $x = 25$. Flere forklarte i første intervju om hvordan de ønsket å gjøre oppgaven ved å sette opp en normal fra 25 på x-aksen, men først i andre intervjuet hadde de den nødvendige kompetansen til å gjennomføre den ønskede operasjonen.

*: Har satt inn begge grafene i Geogebra, så må vi vel først lage et punkt så vi viser hvor de skjærer hverandre. Bruker "skjæring mellom to objekter". Det punktet er på 18,89 og det forteller oss hvor mange det skal komme før det lønner seg å bruke Rossfjord Catering.

I: Lønner det seg i punktet?

*: Nei, så klart, det må kommer en mer før det skal lønne seg.

Deretter gikk han videre til neste oppgave og forklarte.

*: Kanskje vi kan lage en linje opp fra x-aksen der på 25.

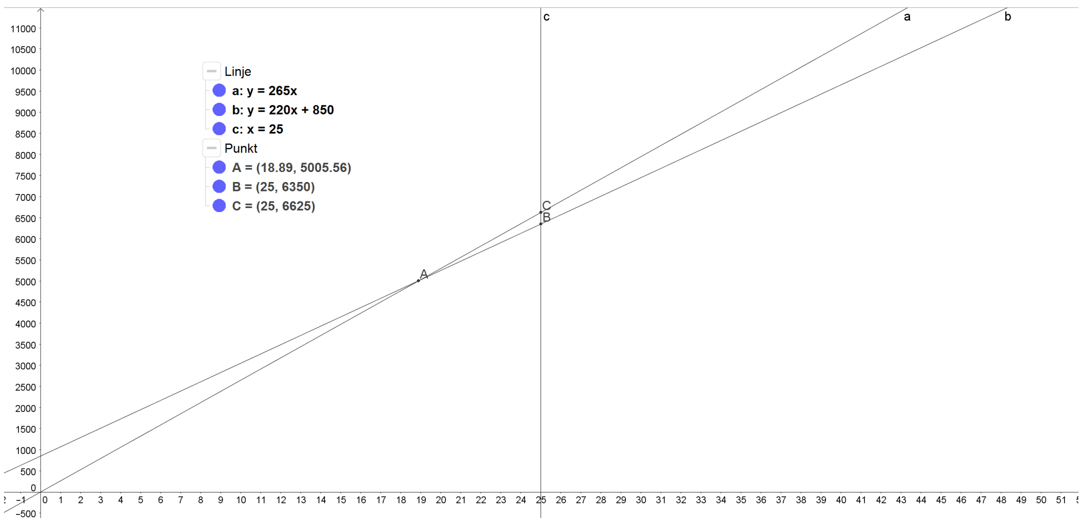
I: Hvordan kan du gjøre det?

*: Litt usikker.

I: Hva er det som er 25 der?

*: Det er x. Ja, kanskje om jeg skriver at $x = 25$ og så setter vi opp skjæringspunkter.

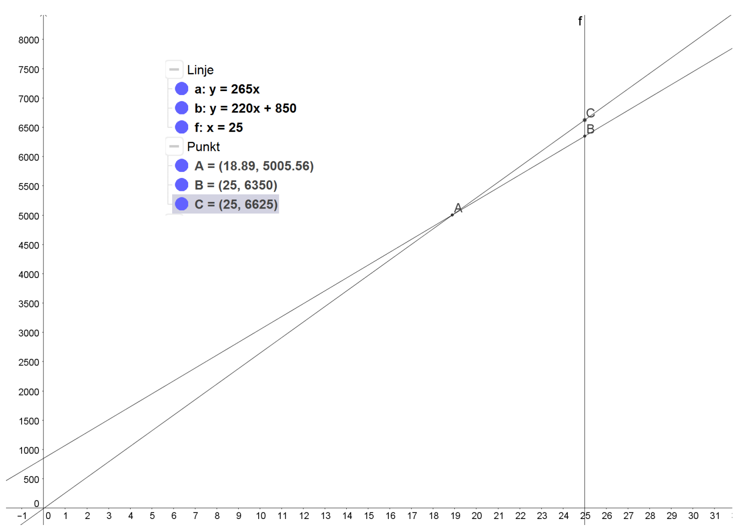
Etter han skrev den inn brukte han "skjæring mellom objekter" i Geogebra og fant skjæringspunkter for begge grafene. Under ser man oppgaven hans.



Figur 6: I det andre intervjuet ble oppgaven utført på denne måten i Geogebra.

Han poengterte at det nederste punktet var Rossfjord Catering og det øverste og dyreste var Finnsnes Catering. I tillegg forklarte han at etter at Bill hadde kjøpt mat til 25 personer i oppgaven ville han spare 275 kroner på å handle fra Rossfjord Catering.

I et av intervjuene ble oppgaven som vist i figur 7 da eleven valgte å gjøre den i Geogebra. Han poengterte at punkt B var for Rossfjord Catering og punkt C for Finnsnes Catering.



Figur 7: Svar på oppgave 2 c) og d)

Dette tyder på at elevene har fått en bedre oversikt over verktøyene og mulighetene som ligger i det grafiske grensesnittet. Det ligger en mening bak bruken. Alle elevene klarte å sette skjæringspunkt mellom grafene og fem klarte den siste oppgaven ved hjelp av den grafiske programvaren. Det kan virke som at det har vært en betydelig fremgang i elevenes hjelpemiddelkompetanse. Det vil si, de kjenner til egenskaper i hjelpemiddelet og kan bruke dem mot et mål. Som sagt tidligere er ikke disse elevene på et nivå der de skal ha kjennskap til begrensningen i programvaren og derfor tar jeg ikke det videre opp her.

4.4.3 Problembehandling- og modelleringskompetanse

Elevene hadde i begge intervjuene få problemer med å løse problemene i oppgave 2. I begge intervjuene kom alle elevene til slutt fram til funksjonene som de skulle bruke i oppgave c) og d). Deretter klarte alle elevene å skrive inn funksjonene i Geogebra. Når de så grafene klarte alle å resonnere seg frem til at skjæringspunktet mellom grafene hadde noe å si for når den ene ble billigere enn den andre. Likevel, som tidligere nevnt var det ikke alle som forstod at det først var etter dette punktet det ville bli billigere.

Første intervju: To av elevene gjorde litt feil på første intervjuet når de skulle skrive opp funksjonen i a) og b), men rettet opp i feilen uten innblanding fra intervjuer:

*: (Skriver opp funksjonen $y = x + 215$ på arket foran seg. Bruker deretter et par minutter før han skriver opp funksjonen $y = 180x + 700$)

I: Hva har du tenkt her?

*: For hver gang den går videre blir det 180 kroner ekstra, så for hver gang han går videre blir det 180 kroner ekstra +700 som er fast. Nå ser jeg at det ble gjort feil på den første oppgaven. (går tilbake og fikser på den første oppgaven) Da blir det vell kanskje... (bruker 2 minutter) For hver skjorte i oppgave 1 blir det 215 kroner ekstra, altså 215x.

svarte en av elevene, mens en annen elev svarte på denne oppgaven slik:

*: Blir det ikke sånn her. $215x$

I: Hvordan tenker du da?

*: Bruker x for antall skjorter og 215 er prisen for hver skjorte som blir bestilt. Det står ikke noe om hvor mange spillere det skal bestilles for, så da må det være x. Om det for eksempel hadde vært fem skjorter kunne jeg tatt $215 \cdot 5 = 1075$ som er prisen for fem skjorter.

Deretter var det en som sa på oppgave 2 b):

*: Starter med en fast pris som vil bli et konstantledd på 700 og etter det er det 180 kroner for hver skjorte. Du har da antall skjorter som blir x, som igjen skal ganges med 180 og dette blir da totalkostnaden. funksjonen blir $y = 180x + 700$

I: Kan du si noe om hvordan grafen blir å se ut?

*: De vil bli rette linjer, men med litt høyere tall enn hva vi vanligvis har pleid å bruke. Den blir å starte på 700 og da blir det 360 kroner ekstra for hver andre skjorte han kjøper, så etter to skjorter vil det for eksempel koste 1080 kroner.

Her brukte eleven litt tid etter at han hadde sagt at funksjonen brukte litt høyere tall enn hva han var vant til. Han regnet på arket noen verdier for funksjonen $y = 180x+700$ før han kommenterte at det ble 360 kroner ekstra for hver andre skjorte. Elevene generelt klarte å resonnere seg fram til svarene på oppgavene eller hadde en idé om hvordan de skulle gjøres. Vi kan derfor argumentere for at deres modellerings- og problembehandlingskompetanse var ganske bra. For å fullføre hele oppgave 2, tydet svarene på manglende støtte fra andre kompetanser for å gjennomføre ideene deres.

Andre intervju: på andre intervju var det bare en elev som satte seg fast på oppgavene der de skulle komme frem til funksjonene i oppgave 2 a) og b). Det tok litt tid, men han klarte til slutt å komme frem til funksjonen som skulle brukes i b). Denne eleven fikk samme oppgave til på første intervjuet.

*: I den neste er $y = \frac{850}{220x}$

I: Hvordan tenker du da?

*: De har jo betalt 850 kroner og det ville jo bli konstantleddet. Deretter ville de gått mer og mer i null for hver som kjøpte. Så starter de med det og så vill det gå i null før det går i pluss igjen.

I: Prøv å skriv inn i Geogebra.

*: Den ser ikke helt riktig ut. 850 er noe de har brukt fra før av. Så kanskje om jeg prøver $850 - 220x$. Ser ikke helt riktig ut det heller.

I: Prøv litt til.

*: (Bruker 3 minutter, ser litt i boka) tror kanskje jeg skulle betale ned 850 kroner med 220 per person som skulle komme. Blir kanske $850 + 220x$ da. Ja, det var kanskje slik det ble.

Det tok litt tid, men eleven klarte selv å resonnere seg fram til at det siste han sa måtte være det riktige svaret. En annen av elevene var usikker på om han kunne legge sammen to ledd med x i:

*: Må vel skrive $235x + 30x = y$.

I: Kan du gjøre det uttrykket enklere?

*: Litt usikker, men kan vell kanskje skrive det som $265x$. Litt usikker, derfor jeg valgte å skrive det på den andre måten.

Selv om det ikke ble feil det han gjorde først, er det en tolkning som kan gjøre lengre uttrykk vanskelig å holde orden på. Spørsmålet ble kanskje litt ledende i dette tilfellet, men eleven kunne trekke uttrykket sammen selv. Ved hjelp av samme beskrivelsen fant han ut hvilket funksjonsuttrykk den andre lineære grafen også tilhørte.

Etter at elevene hadde funnet uttrykkene, noe alle etter hvert gjorde, ser vi fra forrige tema at elevene i andre intervju fullførte oppgave 2 ganske enkelt. Noe som kan tyde på at deres modellerings- og problemløsningskompetanse nå blir støttet opp av andre kompetanser. Med det mener jeg at for eksempel at de kan bruke de teknologiske verktøyene, eller problembehandlingskompetansen deres, på en måte som gjør det mulig for dem å finne svarene på oppgaven.

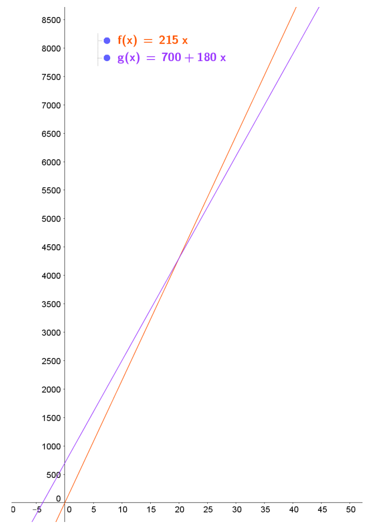
4.4.4 Representasjonskompetanse

På oppgave 2 c) var det flere av elevene som klarte å løse oppgaven med finne skjæringspunktet ved hjelp av Geogebra. På oppfølgingsspørsmål om det fantes andre måter vi kunne kommet frem til samme resultatet responderte elevene på litt forskjellige måter.Fire var i første intervjuet visste ikke om en alternativ måte. De to siste var litt usikker. En av dem foreslo bruk av verditabell og prøve seg frem metodisk. Til andre intervjuet hadde et par elever spennende svar på denne oppgaven.

Første intervju: I det første intervjuet hadde eleven under en ganske god besvarelse. Han forstod hva som måtte gjøres, men hadde ikke kompetansen til å gjennomføre oppgaven fullstendig.

*: kanskje om jeg setter inn funksjonene i programmet. Den ene aksen forteller antall skjorter og den andre forteller prisen for det antallet. Om jeg finner punktet der grafene møtes er det akkurat like dyrt. Startprisen er høyere på a), men prisen per skjorte er lavere. Så det blir billigere for skjortene gjennomsnittlig etter en stund i b) og dyrere for a).

Her var eleven klar over at i skjæringspunktet ville det være like dyrt for skjortene. Han var ikke klar over verktøyet som heter "skjæring mellom objekter" hvor han kunne fått ut et punkt som viser verdiene i skjæringspunktet.



Figur 8: Elevens besvarelse av oppgaven i første intervjurunde

En annen elev var svært usikker. Han hadde kommet frem til de riktige funksjonene, men begynte så å rote med hva funksjonene betydde.

*: Så da hvis det er 215 spillere og det andre er 180 kroner. Så vi vet ikke hvor mange fotballspillere. Hvis jeg setter inn noe i lignignene... nei, vent litt. Det blir ikke rett. Litt usikker her. Jeg prøver å skrive det inn i Geogebra.

(Det kom ikke opp noe i Geogebra, aksene måtte tilpasses)

*: Litt usikker på hva jeg skal gjøre nå.

Etter en liten stund måtte eleven hjelpes slik at han kom seg videre i oppgaven. Da eleven så grafene forklarte han hvordan skjæringspunktet mellom grafene ville fortelle når det kostet like mye å bestille fra begge firmaene. klarte ikke å finne ut hvordan han fant dette.

I denne oppgaven kunne svarene tyde på at eleven heller mot et ønske om å forklare ved hjelp av den grafiske uttrykksformen heller enn den algebraiske. De ser hva som skal til for å løse oppgaven, men har ikke den nødvendige hjelpemiddelkompetansen for å gjennomføre oppgaven. På spørsmål om det finnes andre måter å løse oppgaven på er det ingen som har et svar. Noe som kan tyde på at de ikke har utviklet representasjonskompetansen til et nivå der de kommer på å løse ved hjelp av de algebraiske formlene.

Andre intervju: Nå var det som sagt slik at alle eleven klarte å gjøre oppgaven grafisk, men to klarte i tillegg å gjennomføre den algebraisk. En av dem svarte slik:

I: Kunne du funnet svaret på en annen måte?

*: Kunne vell brukt en verditabell og prøvd oss frem.

I: Finnes det ennå flere måter?

*: Vi kan gjøre oppgaven med å lage et uttrykk for y og putte det inn i den andre ligninga. Slik som vi gjorde da vi hadde om ligninger og ulikheter.

De to nevnte gjorde dette ganske likt under intervjuet og begge skrev faktisk nøyaktig det samme ned på papiret(Impliseringstegnet har forfatter innført for bedre oversikt. Dette var ikke med i besvarelsen til elevene).

$$y = 265x \tag{5}$$

$$y = 850 + 220x \tag{6}$$

$$\Downarrow$$

$$265x = 850 + 220x$$

$$\Downarrow$$

$$45x = 850$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{45x}{45} = \frac{850}{45}$$

$$\Downarrow$$

$$x = 18,89$$

Svarene kan tyde på at elevene har fått et innblikk i andre kompetanser som hjelper dem å finne svarene i oppgaven grafisk. Ikke alle virker å ha fått en bedre forståelse for at det algebraiske uttrykket kan brukes i like stor grad som det grafiske for å finne skjæringspunktet. At to stykker likevel hadde fått dette til tyder på at undervisningen har gitt en bedre representasjonskompetanse. Å finne et skjæringspunkt ved hjelp av de algebraiske uttrykkene er ikke pensum før elevene kommer på videregående skole.

4.4.5 Resonnementkompetanse

I flere av oppgavene nølte elevene med å svare. De kunne bruke tid og når de svarte hendte det at noen gjorde feil. Da viste en del av elevene at de hadde evnen å tenke kritisk til sine egne svar og om nødvendig endre på dem. I a) og b) på oppgave 2 var det i begge intervjuer meningen at elevene skulle finne funksjoner for det praktiske eksempelet. Her var det et par eksempler på elever som mistolket oppgavene, men som klarte å rette seg inn etter hvert.

Første intervju: En av elevene var ganske nært å få riktig på den første oppgaven. Han tenkte at han måtte ha en linje opp ved $x = 30$, men svaret ble bare litt annerledes.

*: Er det en måte å få en linje opp slik at vi får akkurat her, slik at det blir akkurat 30 T-skjorter. Blir linja y=30?

Han prøvde å skrive den inn, men det ble ikke riktig og vi fikk ikke tid til å gjennomføre oppgaven. En annen elev klarte ikke å sette opp linja, men gjennomførte oppgaven likevel.

*: (Oppgave 2 d)) Kan jeg kanskje lage en linje som går rett opp fra 30.

I: Hvordan ser vi prisen nå?

*: Prøve å zoome inn eller ut. Nei, jeg kan vell sette opp et sånt skjæringspunkt igjen.

I: Hvor mye sparer du nå på å kjøpe fra "topprinter"?

*: Sparer 350 kroner på topprinter. Kunne kanskje også brukt formelen. 215*30=6650

Det var bare en av elevene som først slet med å finne grafen som kom fram til svaret. Han prøvde seg ikke fram, men gikk over til det algebraiske uttrykket og regnet.

Andre intervju: Som skrevet tidligere var det fem elever som fikk til den aller siste oppgaven ved å løse den grafisk på siste oppgave. Likevel var det ikke alle som fikk det til på første forsøket. To av elevene måtte prøve seg litt fram.

*: Hva om jeg skriver inn 25x, nei, er litt usikker.

I: hva skjer om du skriver det inn?

*: Det blir ikke helt riktig. Det blir x=25 og da vi finner skjæringspunktene med grafene. 6300 og noe fra en, og 6600 fra den andre.

I tillegg til de to som ikke klarte det på første forsøk, var det som klarte det ganske enkelt, men som valgte feil firma.

*: oppgave d) tar jeg og lager en linje opp fra x=30. Kanskje jeg bare kan lage en stråle opp fra x=30 i Geogebra. Da blir prisen 6625(gjør litt feil her og tar feil firma)

I: Hvilket firma er det du har funnet?

*: Jeg lager et punkt for den andre grafen også for å finne hva det vil koste fra det andre firmaet i samme x-verdi. Obs, nå ser jeg at fant for feil firma først. Det blir så klart motsatt.

Svarene i det andre intervjuet viste en større tilbøyelighet hos elevene til å se feilene som ble gjort i resonnementene sine, for så å bruke tid på å rette dem opp. Dette kan være med å antyde at elevene har blitt noe mer kritiske til sine egne svar og fremgangsmåter, noe som igjen kan tyde på en høyere grad av resonnementkompetanse.

4.4.6 Å vite hva som er en funksjon

Når det kom til funksjoner var det flere som hadde tanker om hva en funksjon var for noe. Det var dessverre få hverken før eller etter undervisningsperioden som hadde noe klart svar på hva en funksjon er for noe.

Første Intervju: På første intervjuet var det fire elever som svarte på spørsmålet om hva en funksjon er. To var usikre og fant ikke noe svar på dette.

I: Hva er en funksjon?

*: Jeg tror en funksjon er en slags sammenheng der verdien av y blir høyere eller lavere med hensyn på om x blir høyere eller lavere.

Det han sier blir ikke riktig om man for eksempel bruker funksjonen $y = x^2$ eller $y = 4$. I den første funksjonen vil y gi en høyere verdi uavhengig om x blir et høyere positivt eller negativt tall og i den andre vil y bli det samme samme hvilken x-verdi som brukes. En annen svarte:

*: På en måte hvis du har x og y, så har de et forhold til hverandre, så når x-en vokser så vokser y-en og sånn.

Her forklarer han et veldig enkelt bilde av funksjoner og får med seg det han tidligere har jobbet med av lineære funksjoner.

De fire elevene hadde svar som lignet på dette. Svarene i første intervju tyder på at elevene har en tendens til å tro at når x øker så vil også y øke. Det er en vanlig mistolkning.

Andre intervju: Neste intervjuet kom alle elevene med et svar til hva de trodde en funksjon er. Det var likevel ikke noen som hadde funnet en klar definisjon:

I: Hva er en funksjon?

*: En funksjon er en slags sum av noe. y varierer ut ifra hvor mye x eller en annen bokstav er

I: Må det være en bokstav for at det skal være en funksjon?

*: Nei, da blir det kanskje bare en rett strek, så det er kanskje en funksjon det og.

Denne forklaringen er noe mer generell da han sier at y varierer. Likevel er det noe som blandes inn som ikke stemmer da han sier at det er en "slags sum av noe". En funksjon kan bestå av både, multiplikasjon, addering, subtrahering og deling m.m.

En annen elev svarte på spørsmålet om hva en funksjon er at han tenkte på utvikling.

*: En funksjon viser på en måte utvikling, eller om vi tar en lineær funksjon viser hvordan noe utvikler seg over tid.

I: Hva må til for at en funksjon er en funksjon?

*: Det må være et y-ledd og et x-ledd. Det må bare vise at noe er noe annet. Y er en bestemt mengde x.

Tanken om utvikling er spennende. Ikke veldig spesifikt, men han mente. Ikke noen klar definisjon og en lineær funksjon må ikke nødvendigvis handle om tid.

Svarene tyder på at det har skjedd en endring i forståelsen av funksjonsbegrepet. Flere svar har gått fra å tro at så lenge x øker vil også y øke, eller hvis x minker, vil også y minke, til å si at y vil variere ut ifra verdien av x. I tillegg virker det å være en tolkning fra elevenes side på andre intervjuet at de har begynt å tro at det må være et x-ledd og et y-ledd til stedet for at det skal være en funksjon. Noe som ikke nødvendigvis er en god utvikling, da ikke alle funksjoner er avhengig av å ha en x, en y eller andre bokstaver. En funksjon kan for eksempel være gitt ved kun en konstant verdi.

5 Drøfting

Drøftingen handler ikke om å lage konklusjoner for om undervisningseksperimentet skapte bedre forståelse. Det blir en diskusjon rundt ting som kan tyde på bedre forståelse innen forskjellige kompetanser. Eller en diskusjon rundt hva tidligere forskning sier i forhold til mine resultateter og også noen erfaringer som ble gjort underveis, slik som begrensninger i studien.

5.1 Problemstillingen

Først må jeg se litt på problemstillingen i oppgaven. "Hvordan kan et undervisningsopplegg med fokus på problemløsning og teknologiske hjelpemidler være med å skape en bedre forståelse for funksjonsbegrepet?" Noe bestemt svar på dette har jeg ikke funnet, men flere av svarene til elevene tyder på utvikling av forståelsen for funksjonen innen enkelte av kompetansene i Niss sin kompetansemodell. Vi kan også se noen endringer i hvordan elevene ser på funksjoner. Med det mener jeg hvordan svarene tydet på at fra første til andre intervjuet snakket elevene mer om hvordan grafen utviklet seg visuelt heller enn hvordan du kunne sette inn verdier i uttrykket. Det er ikke feil å se på en funksjon på noen av måtene, men det kunne virke som om at elevene etter endt undervisningen fant den grafiske tilnærmingen som mer intuitiv å bruke. Dette syntes jeg var interessant da det i kapittel 2.4 ble beskrevet at elever og noen lærere har en tendens til å helle mot den algebraiske uttrykksformen (Dubinsky & Wilson, 2012). Studien min viste tegn til dette i første intervjurunde, men til andre intervju var det ofte den grafisk fremstillingen elevene lente seg mot.

5.1.1 Funksjonsbegrepet

Var det blitt noen forbedringer av elevenes forståelse av funksjonsbegrepet? På spørsmål om hva en funksjon er for noe var det mange forskjellige svar. Dette er nok en vanskelig spørsmål for elevene i 10. klasse. Definisjonen av en funksjon blir ikke brukt i pensum og selv om den hadde blitt brukt kan den virke ganske abstrakt for elevene. Begreper som definisjonsmengde og verdimengde blir ikke innført for elevene før de er kommet godt i gang med videregående. For å forstå definisjonen av en funksjon må man nesten først ha en god forståelse for hva disse begrepene betyr.

Likevel kan jeg i løpet av denne studien si at elevene har forstått mange deler av funksjonsbegrepet. Flere har god kontroll på lineære funksjoner, et par viser at de mestrer begrepene proporsjonalitet og omvendt proporsjonalitet. Alle viser en forståelse for hvordan å finne et skjæringspunkt mellom grafene. Det er til og med et par som klarer dette ved bruk av funksjonsuttrykk. Å kunne bruke de algebraiske formlene for å regne seg fram til skjæringspunktet regnes som pensum for videregående skole.

Spørsmålet som må tas opp er om kunnskapene elevene viser ville vært mindre omfattende eller mer omfattende ved bruk av mer tradisjonelle arbeidsmåter eller andre metoder. Dette er viktig å ta hensyn til da denne studien kun tar hensyn til hva slags kompetanse intervjuene tyder på at elevene har oppnådd i løpet av studiet. Den sier ingenting om at dette er den beste måten å gjennomføre undervisning på. Jeg ønsker å se hva slags kunnskap eleven har tatt til seg i løpet av undervisningen.

En viktig del av funksjonsbegrepet er de forskjellige måtene å representere en funksjon på. På spørsmål om hvilke representasjonsformer vi har for funksjoner svarte alle sammen på begge intervjuene at vi har grafer. Om verditabeller og funksjonsuttrykk var det varierende om hvem som nevnte hva, men bare et par stykker på begge intervjuene nevnte alle tre. Dette var et noe merkelig resultat. Flere av elevene som nevnte bare to av representasjonsformene brukte alle alle tre formene når de regnet gjennom oppgavene. Det kan tyde på en misforståelse mellom forsker og elev, eller det kan bety at elevene vet for eksempel hva en verditabell er og hvordan den brukes, men ikke at det kan kalles en representasjonsform for funksjoner.

Det er en tendens til at flere hadde dårligst kjennskap til verditabell som en form for å representere en funksjon. Dette kan komme av verditabellen sin natur. Elevene ser ut til å forstå intuitivt at ved å jobbe med verditabeller mister man fort data. Derfor kan i mange tilfeller grafer og funksjonsuttrykk være mer hensiktsmessige å jobbe med.

5.1.2 Problemløsing

Som skrevet i logg-delen av resultatene var elevene veldig engasjerte når de jobbet med problemløsningsoppgavene. De tok initiativ selv til å gå sammen i par, eller i grupper på tre, for å jobbe med oppgavene. De diskuterte og jobbet med flere innfallsvinkler for å finne ut hvordan de kunne komme fram til et svar. Nå har jeg bare min egen erfaring å jobbe ut fra, men før undervisningseksperimentet var ikke dette vanlig praksis i denne klassen. Det kan være subjektivt, men jeg tenker at dette er en måte å jobbe med matematikk som etter hvert vil føre til høyere kommunikasjonskompetansen i Niss sin kompetansemodell. I tillegg ville elevene ha mulighet til å komme med innspill og spørsmål når vi gjennomgikk oppgaven i slutten av timen.

I intervjuene viste elevene allerede i første intervjuet prov på at de hadde god problembehandlingskompetanse. Selv om de ikke klarte å gjennomføre den siste oppgaven fullstendig, hadde alle en plan om hvordan de ønsket å gjøre dette. Dette tydet på problembehandlingskompetanse, men litt mangel på andre kompetanser, som for eksempel hjelpemiddelkompetanse. Det var også noen eksempler på enkeltelever som hadde problemer med å sette opp funksjoner fra tekst i de første deloppgavene. Etter å ha brukt litt tid klarte alle elevene å gjennomføre dette på begge intervjuene. Poenget mitt er at på andre intervjuet brukte elevene mange av de samme formuleringene når de skulle komme fram til svarene i oppgaven.

Elevene i denne studien ser med andre ord ut til allerede å ha en såpass godt utviklet evne til å løse problemer at det ble vanskelig å antyde noen endringer innenfor problembehandlingskompetansen. I hvert fall for emnet funksjoner har elevene en tydelig praktisk innsikt for hvordan de kan tolke et problem, for deretter å gjøre det naturlige språket om til matematisk formelspråk. Oppgavene er veldig like og når de antyder det meste som har med problemløsning på første intervjuet, var det vanskelig å si noe om hvordan det kunne gjøres bedre på andre intervjuet, når alle løste det der også.

5.1.3 Hjelpemidler

Elevene hadde jobbet med Geogebra tidligere, men i første intervjuet virket de ikke å være klare over mulighetene som ligger i programvaren. Etter undervisningsperioden tydet svarene deres på at de hadde fått en bredere oversikt over egenskapene til programmet og kunne bruke disse for å løse oppgavene. Dette kunne man se på de siste par deloppgavene i begge intervjuene. I første intervjuet klarte de ikke gjennomføre oppgavene da de ikke visste hvordan de kunne bruke verktøyene i Geogebra for å finn skjæringspunkt eller linjer. I andre intervjuet klarte alle elevene dette, med unntak av en elev på siste deloppgaven.

5.1.4 Oppsummering

Det studien min tyder på er en fremgang i flere av kompetansene i Niss sin kompetansemodell. Innen symbol- og formalismekompetanse, hjelpemiddelkompetanse, resonnementkompetanse, representasjonskompetanse kan man finne resultater som tyder på utvikling eller endring i forståelsen hos elevene av funksjonsbegrepet.

Det jeg fant som svært interessant er hvordan elevene virket å vise vell så god problembehandlingskompetanse i første intervjuet. Likevel var det først når denne kompetansen var underbygget av andre kompetanser som hjelpemiddelkompetansen, samt symbol- og formalismekompetanse i andre intervjuet at elevene klarte å gjennomføre oppgavene.

Problembehandlings- og modelleringskompetansen fant jeg at det var vanskelig i studien min å finne svar fra elevene som tydet på betydelig fremgang på disse områdene. Det kan med andre ord se ut som at undervisningen kan ha hatt noen positive effekter for elevenes læring, men samtidig er det vanskelig å si noe om nøyaktig hvor gode disse er eller om alle deler av studien har vært like positive.

Når elevene virkelig skinte var når de klarte å sette sammen de forskjellige kompetansene i modellen for å løse en oppgave. Dette virket de å gjøre i mye større grad på det andre intervjuet enn hva de gjorde på det første. Elevene jobbet med emnet over 4 skoletimer og det varte i et par uker. Man kan argumentere for at resultatene hadde blitt bedre uansett. Likevel kan vi si at for akkurat dette undervisningsopplegget tyder resultatene på utvikling og endring av forståelse for funksjonsbegrepet innenfor de nevnte kompetansene.

5.2 Produktiv spekulasjon

Hvorfor ble svarene som de ble? Det er veldig mange forskjellige aspekter ved studien min og det kan være flere ting som har spilt inn for hvorfor elevene svarte som de gjorde på intervjuene. Grunnen til at jeg i studien min ikke fikk noen klare antydninger på hvordan problembehandlingskompetansen til elevene utviklet seg under perioden, mener jeg kan komme av typen oppgaver som ble gitt i intervjuene. Det var viktig at oppgavene var like av natur, men min oppfatning var at problemet som skulle løses kanskje ble i enkleste laget for elevene. Da alle elevene hadde gode forklaringer på hvordan de i første intervjuet skulle løse problemløsningsoppgavene, var det vanskelig å vise noen utvikling innen denne kompetansen for funksjonsbegrepet.

Angående hjelpemiddelkompetansen til elevene hadde de allerede et ganske godt utgangspunkt å jobbe ut ifra. Da handlet det om å gjøre elevene oppmerksomme på de forskjellige verktøyene som ligger i Geogebra da man gjennomgikk oppgavene på kursene. Jeg mener dette, i tillegg til at de stod fritt til å bruke datamaskinene når de jobbet med oppgavene i timene, bidro til at elevene selv fikk oppdage hvor praktisk det var å kunne løse dem på denne måten. Kompetansen ble da utviklet ikke som en nødvendighet, men som et eget valg elevene tok på bakgrunn av at de så en produktiv nytteverdi i dette.

Evnen til å tenke kritisk til egne antakelser og å følge et matematisk resonnement var det elever som viste tegn til å ha utviklet. Det kan være at dette skjer automatisk ettersom elevene jobber med matematikkoppgaver. Likevel kan det tenkes at problemløsningsoppgaver lik de som er blitt gitt i løpet av undervisningen tvinger elevene til å tenke på om svaret deres gir mening. De har ingen fasit tilgjengelig. De har seg selv, elevene i klassen og de tilgjengelig hjelpemidlene for å finne ut om svarene gir mening. Derfor kan det tenkes, som skrevet i loggen, at elevene blir mer muntlige i forhold til hverandre og dermed, uten egentlig å tenke over det, blir flinkere til å se om svarene deres gir mening.

Studien kan også være påvirket av at jeg har gjennomført alle aspektene av den på egenhånd. Det har vært noen veiledningstimer med veileder, men disse har ikke blitt brukt som en base for slutninger trekt fra resultatene. Resultatene kan være påvirket av egne subjektive meninger. Det vil si at man ser etter fremgang på plasser hvor man tror det har vært fremgang, så man legger vekt på ting som egentlig ikke betyr noe. Det kan igjen føre til at man overser viktige detaljer i svarene til elevene.

5.2.1 Sammenlignet med tidligere forskning

Noe som jeg fant interessant, som jeg allerede har nevnt, var at elevene etter endt undervisningsperiode hadde en mer grafisk tilnærming til spørsmål om funksjoner. Dubinsky & Wilson (2012) skrev at noen elever har en tendens til å bruke den algebraiske formelen når de skal jobbe med en funksjonsoppgave. Etter undervisningen var det derimot slik at elevene, oftere enn ikke, forklarte en lineær funksjon med utgangspunkt i stigning og synking av grafen. Tidligere hadde det vært en tendens til at de forklarte funksjonen ved hjelp av å sette inn verdier i uttrykket for deretter å fortelle hvordan verdiene endret seg.

Pimm (1995) skrev som tidligere nevnt, kritikk mot bruk av teknologi for å tolke algebraiske formler. Han mente at bakgrunnen for at elever skulle lære å tolke grafer ved hjelp av teknologiske verktøy ikke hadde den rette epistemologiske bakgrunnen. Altså grunnlaget for hvordan vi lærer ny kunnskap. Han mente at den teoretiske bakgrunnen for å bruke den grafiske programvaren som et verktøy for å vise elevene egenskapene til den algebraiske formelen ikke ble begrunnet for elevene. I studien min blir det ikke forklart overfor elevene hvorfor det er bruk for den grafiske programvaren. Håpet med måten det ble introdusert for elevene på, var at de skulle finne deres egen mening med bruken. At de selv skulle lage en egen grunn for hvorfor det ville være praktisk å bruke datamaskinen. Siden flere og flere brukte datamaskinen i timene samt at de viste tegn til høyere kompetanse for bruk av hjelpemidler på andre intervjuet, kan det virke som at elevene tok det til seg. Pimm (1995) sine bekymringer kan ha noe for seg, men om undervisningen blir lagt opp på riktig måte, virker det som teknologi kan bli brukt for å fremme kunnskap og forståelse i stedet for å hemme den.

Hvorfor har det blitt tilfelle at elevene har en mer grafisk forståelse av funksjonsbegrepet etter undervisningen? Bruk av datamaskiner og grafisk programvare legger til rette for at elevene enkelt kan manipulere funksjonsuttrykk. Dermed kan det være at de ser sammenhengen med hvor enkelt man kan forklare utviklingen av en funksjon grafisk. Resultatene i studien min virker å peke i retning av Ainsworth et al. (1998) sin studie. Her fant man fra resultatene at bruk av teknologiske hjelpemidler hadde stor innflytelse på elevenes læring av funksjoner. Yerushalmy (1991) sine studier viste derimot at et slikt undervisningsopplegg ikke ga noen bedre forståelse for linken mellom visuell representasjon og algebraisk manipulasjon. Jeg vil ikke påstå at resultatene mine antyder en betydelig økning i forståelse for funksjonsbegrepet, men innen flere av kompetansene er det tegn som tyder på utvikling av deler av funksjonsbegrepet.For eksempel deres forståelse på tvers av representasjonsformer og at deres hjelpmiddelkompetanse, samt symbol- og formalismekompetanse viser tegn til utvikling.

Schoenfeld (1992) skrev om elevers tendens til å tro at matematiske problemer kun har et riktig svar, at matematikk er noe som blir gjort individuelt eller at et matematisk problem kun kan bli løst på en måte. Om vi ser på oppgavene 2 c) og 2 d) i denne studien, var det flere av elevene som klarte å løse 2 d) ved hjelp av både den grafiske metoden og funksjonsuttrykket. Oppgave c) var det derimot bare to av elevene som klarte. Dette tyder på, i tillegg til en bedre representasjonskompetanse, at elevene etter undervisningsopplegget har oversikt nok til å se at man kan angripe oppgaven ved hjelp av forskjellige metoder. Siden undervisningen var lagt opp ved hjelp av problemløsningsoppgaver var det flere forskjellige måter elevene angrep oppgavene på. Noen brukte datamaskinene mye, andre prøvde å skrive på ark og tenke seg frem, mens andre leste gjennom boka. I tillegg til at de da diskuterte mye sammen og fikk gjennomgang mot slutten av timen, kan det hende elevene så at det var mulig å gjøre oppgavene ved hjelp av flere metoder.

Clement (2001) skrev at elever i 14-15 års alderen klarte å håndtere manipulasjon av informasjon gitt i tabeller, grafer og funksjonsuttrykk. Derimot hadde de visstnok problemer med å kunne tolke de forskjellige representasjonene på meningsfulle måter. Elevene i denne studien var rundt samme alder som elevene i Clement (2001) sin studie. De viste også her evner til å kunne håndtere manipulasjon av de forskjellige representasjonsformene for funksjoner. I første del av intervjuene, på oppgavene hvor elevene skulle sette funksjonsuttrykk til en graf, var det flere av elevene som slet med å uttrykke seg på hvorfor grafene skulle høre til de gitte funksjonsuttrykkene. 1I den andre delen av intervjuene hadde elevene enklere for å forklare hva som skjedde i skjæringspunktet mellom grafene for fotballskjortene eller cateringen. Poenget mitt er at det kunne virke som at elevene hadde enklere for å gi mening til funksjonen når den ble brukt i en virkelig situasjon, i motsetning til den første oppgaven der det kun var et teoretisk grunnlag for meningen til elevene. Studien bygger derfor både opp under og motbeviser Clement (2001) sin påstand på en og samme tid. Noe av grunnen til dette tror jeg at undervisningen jobber såpass mye med problemer som den gjør. Elevene har i løpet av timene for det meste sett på hvordan man skal jobbe med tekstoppgaver hvor man ofte kan se om svaret er "realistisk". I de teoretiske oppgavene har de ikke noe å relatere svarene til og forklaringene kan fort bli hemmet av dette.

Schwartz et al. (1990) skrev om at undervisning i skoleprogrammet ofte førte til et par problemer i elevenes bruk og forståelse av funksjonsbegrepet. Det ene var at elevenes forståelse ble begrenset til en av representasjonsformene og det andre handlet om elevenes manglende forståelse av prosessen å gå mellom representasjonsformer. Til det andre intervjuet i denne studien hadde elevene en ganske klar i idé om hvordan de skulle gå mellom funksjon og graf på den første oppgaven. Spesielt for de lineære funksjonene. Her kunne de bruke konstantledd og stigningstall som verktøy når de gikk mellom funksjonsuttrykk og graf. Derimot var der færre som klarte dette når det gjaldt den kvadratiske funksjonen da de ikke så muligheten for å bruke stigningstall og konstantledd her. Et par fikk det til ved å sette opp en verditabell og regne ut et par punkter. Til tross for at det virker som at undervisningsopplegget har gitt elevene verktøy for å kunne jobbe mellom representasjonsformene på lineære funksjoner, kan det virke som at dette aspektet ikke er like godt utviklet når funksjonene blir mer kompliserte. Dette kan komme av, som Schwartz et al. (1990) skriver, at de tekniske sidene ved et problem ikke legger til rette for at eleven får tenke på prosess- og konseptutvikling av funksjoner. Det kan med andre ord hende at oppgavene i studien(undervisningen) som omhandlet bruk av kvadratiske uttrykk, ikke var optimalt laget for at elevene skulle utvikle disse ferdighetene.

5.2.2 Resultatenes betydning for skolematematikken

Hva vil resultatene ha å si for skolematematikken? Med skolematematikken menes hvordan elevene oppfatter matematikk i skolehverdagen sin. Ingen av resultatene i denne studien er endelige på noen som helst måte og er mest av alt ment som et slags innspill i diskusjonen rundt hvordan problemløsningsoppgaver og datamaskiner virker inn på det moderne klasserommet.

Derfor vil betydningen for skolematematikken være mer opp til den enkelte leser av oppgaven og ikke hele fellesskapet. Det vil handle om hvordan den enkelte tolker resultatene og tankene som er gjort opp om temaet og om leser da er enige i de trekninger som er sluttet. Om tilfellet skulle være at de er enige vil kanskje studien bidra til et økt fokus på bruk av problemløsningsoppgaver i deres praksis. I tillegg vil de kanskje også legge til rette for at elevene vil ha tilgang til datamaskiner som et hjelpemiddel i timene.

Som skrevet over er det flere av resultatene i studien min som relaterer til tidligere studier. Kanskje vil derfor noen bruke denne studien som en bekreftelse for disse studiene. Derfor er det viktig at det understrekes at resultatene er spekulative og ikke endelige til tross for deres likhet med andre studier. Noen kan og være uenige i funnene som er gjort. Uansett hva noen tenker, håper jeg denne studien kan virke inspirerende på de som praktisere læreryrket til å teste ut bruk av problemløsning og bruk av teknologiske hjelpemidler i egen undervisning.

Det kreves flere synspunkter innenfor dette feltet fra flere lærer som underviser i forskjellige klasser, med forskjellige individer. Før man kan si noe om slike studier på tvers av forskjellige bakgrunner som for eksempel årstrinn, klassestørrelse, lærers erfaring o.l. vil det være vanskelig å si noe om hva disse resultatene vil ha å si for skolematematikken. I beste fall vil resultatene i denne studien bidra til en diskusjon rundt bruken av problemløsningsoppgaver som introdusering for nye temaer i et emne(for eksempel omvendt proporsjonalitet som et tema i emnet funksjoner) og teknologiske verktøy som læringsfremmende hjelpemidler for elevene. Det kan bety et økt fokus på området og muligheter for å finne styrker og svakheter ved å bruke dette i undervisningen.

For de som leser denne studien kan den også fungere som et rammeverk for hva funksjonsbegrepet handler om å forstå. En mulighet jeg ser for meg er at man tar utgangspunkt i teorien i denne studien og kan bruke det som et rammeverk for å teste ut hvordan elevenes kompetanse og forståelse for funksjoner utvikler seg uavhengig av undervisningsform.

Observasjonene mine underveis i studien tydet også på at elevene tok initiativ til å jobbe sammen i par eller grupper for å løse problemene de møtte på. De var i grupper på 2 eller 3 i tillegg til at de gikk rundt og spurte hverandre om de hadde kommet på forskjellige måter å gjøre oppgavene på. For skolematematikken tenker jeg at et slikt opplegg på sikt, om oppgaver og forhold legger til rette for det, kan føre til at elevene ikke lenger ser på matematikken som et fag som blir gjort individuelt av eleven(Schoenfeld, 1992). Kanskje vil de heller se på matematikk som et sosialt fag med problemer og utfordringer som kan gjøres individuelt og i samarbeid med andre.

5.2.3 Resultatenes betydning for min praksis

For min egen del har studien vært en lærerik opplevelse. Det var første gangen jeg gjennomførte en studie av denne størrelsesordenen. Forsåvidt var det også første gangen jeg gjorde en kvalitativ undersøkelse, for deretter å gjøre en tematisk analyse av dataene. Det ble spennende å bruke tid på og virkelig sette seg inn i de problemstillinger som omhandler min egen praksis og utfordringer elever møter på i arbeidet med funksjoner. Hva vil dette ha å si for min egen praksis på kort sikt? Jeg vil fortsette å legge til rette for at elevene skal føle seg utfordret i klasserommet. Det vil si å legge til rette for oppgaver som skal være engasjerende, utfordrende og på samme tid legge til rette for læring hos elevene. I et litt lengre tidsperspektiv må man se an resultatene man får ved bruk av et slikt undervisningsopplegg som dette. Om man ser at det ikke fungerer i egen praksis må man kanskje etter hvert gjøre endringer.

Skolen blir bare mer og mer digitalisert. Med introduksjon av “smartboards”, datamaskiner, bruk av mobiltelefoner og lignende gjør at man som lærer må tilpasse seg disse nye verktøyene som kommer i elevenes skolehverdag og som må mestres i tillegg til matematikken. Denne studien har for min del blitt en øvelse i hvordan jeg kan ta meg bruk av slike hjelpmidler i min egen praksis. Erfaringene jeg har gjort meg i klasserommet gir et grunnlag for å utvikle metodene mine for implementering av teknologiske hjelpemidler for elevene. Måten det ble gjennomført på i dette undervisningsopplegget ved hjelp av problemløsningsoppgaver viste antydninger til fremgang på flere områder hos elevene. Studien har vist såpass oppløftende resultater at jeg vil fortsette å jobbe med å utvikle opplegget for funksjoner i min praksis. Vil for eksempel endringer i oppgavene gjøre dem bedre egnet for læring? Burde oppgavene være lettere eller vanskeligere for at elevene skal få mest mulig fremgang? Burde være bygd opp annerledes, burde det være flere hint eller ikke? Det er mange muligheter å teste ut. I tillegg ville det vært spennende å se hvordan et slikt opplegg ville fungert innen andre emner. Dette kan jeg ikke si noe om for øyeblikket, men hadde vært spennende å teste ut i min praksis ved en senere anledning.

En annen erfaring som ble gjort underveis i studien er mengden arbeid som ble lagt ned i utformingen av undervisningen. Det kreves en del ekstra av underviser for å lage et opplegg av en slik natur. Den mer tradisjonelle modellen der lærer først gjennomgår ett emne, før elevene får jobbe med oppgaver er veldig enkel for lærer å gjøre klar. I en travel arbeidshverdag, blir ofte undervisningen gjort på denne måten for enkelhets skyld. For å gjennomføre undervisning med hensyn på måten det er gjort i denne studien kreves ganske mye fra lærer. G. Goldin (1997) hadde som skrevet i metodedelen utarbeidet fem punkter som han mente var viktig for å grunnfeste og maksimere informasjonsdata som blir innhentet. Dette var også punkter som gikk på hvordan oppgavene burde være utformet i en slik undervisningsform. Det vil si at dette opplegget krever av lærer at han legger vekt på at oppgavene som blir gitt ut kan løses ved flere metoder, de må kunne løses ved hjelp av ferdigheter elevene har lært tidligere. I tillegg må lærer lage kriterier for hva som er gode svar på oppgaven, tilrettelegge for at elevene kan uttrykke seg på flere måter(datamaskiner, papir, muntlig etc.) og passe på at elevene i timen får lov å trekke slutninger av oppgaven før lærer veileder for mye.

Det kan være vanskelig å få kontroll på alle aspektene ved en slik undervisningsform. Derfor tror jeg at det resultatene kunne vært annerledes om lærer hadde hatt mer erfaring enn det jeg hadde. Nå vil jeg etter hvert få mer erfaring selv og med det vil man helt sikkert lære seg noen triks og metoder som kan være med på å fremme de positive sidene ved oppgaven enda mer. Ville resultatene tydet på fremgang i andre kompetanser eller bredere forståelse for funksjonsbegrepet må det forskes videre på.

Selvfølgelig må det ikke være slik at dette opplegget er det beste for elevene.

Kanskje finnes det andre metoder som gir mer læringsutbytte eller finnes det metoder som fungerer bedre for forskjellige grupper elever. Det er mange ting som spiller inn og innenfor yrket som lærer tror jeg det er viktig at man hele tiden er åpen for innspill og tilrettelegging for at undervisningen skal bli best mulig for alle elevene.

5.3 Studiens begrensninger

Studien har sine begrensninger. For det første er jeg alene om å gjennomføre den. Det har ført til noen vanskeligheter, spesielt med å få tid til alt som handlet om gjennomføring av selve undervisningseksperimentet og intervjuene. Det var et tidspress på å få gjennomført intervjuene før vi gikk i gang med undervisningen. Dette gjorde det vanskelig å få gjennomført intervjuene på en måte slik at elevene fikk vist absolutt alt de kunne. Med det mener jeg at det var et par tilfeller hvor intervjuene måtte hastes gjennom for at alle elevene skulle få svart på alle spørsmålene. Derfor kan det hende at det har oppstått noe datatap eller noen misforståelser. Det var et par ganger at jeg mistet 5 minutter av intervjuene som kunne vært med på å oppklare et par ting i intervjuene, men ikke noe som skulle hatt en veldig stor innvirkningen på resultatene.

Undervisningen gikk ganske fint, men i to av timene var det en elev i studien som var borte. Det var ikke samme eleven. Disse elevene fikk i lekser å gjøre oppgaven de hadde mistet, men vet ikke hvor mye de kunne ha tapt på dette.

Begrensningene i studien ligger nok også i utvalget av elevene som var med i studien. Selv om de var imøtekommende og flink å svare for seg er det nærmest umulig å si om de er representative for det mangfoldet av elever som finnes. Kanskje er dette en undervisningsmetode som fungerte spesielt fint for dette utvalget og som igjen ikke ville fungert for andre. Det er vanskelig å si noe om dette da det er et veldig lite studie med bare en som forsker, underviser og trekker slutninger, mens seks personer deltar i studien.

Etter å ha analysert dataene fant jeg også at problemløsningsoppgavene kanskje ikke var utfordrende nok for elevene. Dette kan i ettertid bli sett på som en begrensende faktor i forhold til resultatene da det gjør det vanskelig å trekke noen slutninger som omhandler elevenes problembehandlingskompetanse. Når jeg nå ser på hvordan resultatene ble, virker det som ikke oppgavene favner om alle kompetanseområdene i Niss sin kompetansemodell. Dermed får man ikke et helhetlig "bilde" av hvordan fremgangen til elevene er blitt.

5.3.1 Hva kunne vært gjort annerledes?

Hadde det vært bedre tid ville det gitt mening å prøvd å fått med et større utvalg av elever i studien. Da ville man hatt rikere utvalg av data å analysere og kanskje flere mønstre ville kommet frem i lyset og andre slutninger ville blitt gjort.

En annen ting som ville gitt mening når en ser tilbake på hvordan studien ble gjennomført, ville vært å endre på oppgavene i intervjuene. Eller at med bedre tid ville det gitt mening å ha med flere oppgaver i intervjuene. Alternativt oppgaver som favnet bredere enn de som ble representert. Det hadde ikke gitt noen mening å hatt flere oppgaver bare for å ha flere oppgaver, men de måtte ha vært laget for å teste andre aspekter ved kompetansene eller gått mer i dybden av den enkelte kompetanse enn hva som nå var tilfellet.

Det er et utall forskjellige måter man kunne gjennomført studien på. Hva som ville gitt de mest omfattende resultatene med størst reliabilitet og validitet er ikke så enkelt å si. Som forsker ville måtte hatt større erfaring for å kunne si noe om spesifikke metoder som ville gitt bedre resultater.

En analyse av typen jeg har gjennomført i etterkant av studien er også påvirket av at jeg har gjort den alene. Jeg la tidlig merke til at en slik analyse kunne hatt en stor fordel av å bli løst sammen med en partner. Da hadde man hatt mulighet til å diskutere rundt meninger om kompetansene i modellen og hva som ville vært kriterier for gode svar på disse.

5.4 Veien videre

Studien min blir som tidligere nevnt å fungere best som utgangspunktet for en diskusjon rundt emnet. Om emnet trengs mye mer forskning på hvilke innvirkninger problemløsning og teknologiske verktøy har på elevenes forståelse av funksjonsbegrepet.

Først og fremst tenker jeg på forskning rundt hvordan et slikt undervisningsopplegg øker forståelsen i forhold til andre typer undervisningsopplegg. Dette vil være forskning som krever mye ressurser og elever som er representative for alle nivåer i skolen. Det finnes flere problemstillinger man kan ta utgangspunkt i for en slik undersøkelse. For eksempel kan man gjøre et undervisningsopplegg lignende som jeg har gjennomført i denne studien, men i tillegg hatt en kontrollgruppe med en mer tradisjonell undervisning for å sammenligne resultatene. Man kunne sammenlignet enkelte kompetanser for å finne svakheter og styrker med denne typen undervisning mot den mer tradisjonelle metoden. Man kunne så klart gjennomført andre varianter av dette. For eksempel kunne man hatt undersøkelser hvor problemstillingen kun fokuserte på problemløsning uten bruk av teknologiske hjelpemidler, eller motsatt hatt stort fokus på det teknologiske, men kun brukt øvingsoppgaver hvor elevene mer metodisk prøver ut svarene sine.

I litt større studier ville det også vært spennende å se på om undervisningsopplegg av en slik natur som finner sted i denne studien ville fungert for alle årstrinn. Kanskje yngre elever ikke har utviklet den kognitive evnen til å kunne bruke teknologiske verktøy slik 10. klasser gjør eller kanskje finner man at det burde satses allerede i tidligere klasser på bruk av grafisk programvare. En annen svært aktuell problemstilling er hvordan et slikt undervisningsopplegg tar stilling til differensiering i skolen. Med det mener jeg at det etter hvert burde utredes for hvem et slikt undervisningsopplegg vil være mest fordelaktig. Vil det være for de sterkeste elevene, de svakeste elevene, alle, eller kanskje det ikke passer for noen?

Andre interessante innfallsvinkler i fremtidige studier kunne gått på å finne ut hvorfor resultatene blir som de blir. Det vil si at vi går inn på en av kompetansene i Niss kompetansemodell og ser på hvordan elevene forstår nøyaktig denne kompetansen og hvordan deres utvikling av denne kompetansen foregår gjennom undervisning. Vil den kompetansen være avhengig av en eller flere andre kompetanser, er det spesielle plasser i undervisningen eleven ser ut til å oppdage egenskaper ved denne gitte kompetanse eller man kunne sett på om det er spesielle egenskaper ved denne kompetansen som blir forsterket hos eleven ved bruken av et slikt undervisningsopplegg. Det siste eksempelet her ville for eksempel vært å sett nærmere på hvorfor elevene i denne studien ser ut til å ha omfavnet en mer grafisk beskrivelse av funksjonene når de skal forklare hvordan funksjonen utvikler seg. I tillegg ville man fått mer data som virker bekreftende eller avkreftende på om dette er tilfellet hos elevene.

I studier som omhandler samme tema som denne vil det i framtiden være nødvendig at man i mindre undersøkelser kan gå mer i dybden på nøyaktig hva som læres innen kompetansemålene, mens det i større studier kanskje burde legges vekt på fordeler og svakheter med et slikt undervisningsopplegg i forhold til andre metoder og for hvilke typer studenter og årstrinn det kan være mest aktuelt å bruke problemløsning og teknologiske verktøy.

Det vil nok også være et behov for studier som er med på å utvikle undervisningen med teknologiske verktøy. Hvordan burde oppgaver utformes for at man skal få mest mulig ut av bruken av teknologien? Hva slags hjelpemidler skal elevene ellers ha tilgang til? Burde elevene bli veiledet gjennom oppgavene? Hvordan burde undervisningen legges opp? For eksempel, er det bedre om elevene jobber individuelt, sammen i par eller i grupper? Dette er bare noen punkter som kan være aktuell å stille seg kritiske til når man skal arbeide temaet fremover.

Nå har jeg i studien sett på hvordan et undervisningseksperiment med fokus på teknologiske verktøy og problemløsning kan ha vært med på øke forståelse for funksjonsbegrepet. Det kunne da vært en idé å se på hvordan et slikt undervisningsopplegg ville fungert for andre emner. Hvilke problemer ville dukket opp i disse emnene? Kunne man på noen måte sammenlignet dem med hva man har funnet for funksjonsbegrepet? Det er uendelig mange muligheter, bare fantasien setter grenser.

Appendix

A Intervjuguide og kvittering

Intervjuguiden for de to intervjuene som ble gjennomført i studien min. Intervju nr.2 var likt intervju 1 med bare noen minimale forskjeller. Da det tidligere ble godt spesifisert hva som er bakgrunn og formål med undersøkelsen i intervjue 1 viet jeg ikke like mye tid til dette i intervju 2. Fasene er så og si identiske så jeg brukte samme intervjuguide på begge intervjuene.

Intervju 1 og 2	
Fase 1: Rammer	1. Infomarmasjon(5 min) • Sier litt om temaet til for samtalen (bakgrunn og formål) • Forklaringer på hva dataene skal brukes til • Spørre om intervjudeltakeren føler alt er gjort klart og tydelig • Informerer om båndopptaker på nytt
Fase 2: Introduksjon og gjennomføring	2. Spørre hva intervjudeltakeren tidligere har av erfaring fra emnet/temaet(5 min) 3. problemet(15 min) • Vil forklare eleven at han eller hun må prate høyt og forklare underveis hvordan han eller hun tenker for å komme frem til en løsning av problemet. • Det vil gjøres klart at han kan bruke hjelpemidler som penn og papir, kalkulator, Geogebra o.l. • Deretter vil jeg introdusere problemet • Vil underveis spørre utdypende spørsmål av typen: “Hvordan tenkte du her?” eller “kan du utdype deg litt mer om dette?”.

Fase 3: Oppfølging	4. Om intervjudeltakeren klarer oppgaven og det enda er tid til rådighet vil jeg spørre hvordan de kan gå videre med oppgaven. Som for eksempel om de har løst oppgaven algebraisk, om de også kan løse den ved hjelp av en grafisk tilnærming. (5-10 min).
Fase 4: Avslutning	5. Oppsummering (5 min) • Spørre noen spørsmål rundt funksjoner • Spørre om evt. oppklaringer

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel: +47-55 58 21 17
Fax: +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Per Øystein Haavold
Institutt for lærerutdanning og pedagogikk UiT Norges arktiske universitet

9006 TROMSØ

Vår dato: 08.12.2015 Vår ref: 45814 / 3 / ASF Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 25.11.2015. Meldingen gjelder prosjektet:

45814	*Forståelse av funksjoner*
Behandlingsansvarlig	*UiT Norges arktiske universitet, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Per Øystein Haavold*
Student	*Tord Are Strømsnes*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 28.02.2016, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Katrine Utaaker Segadal

Amalie Statland Fantoft

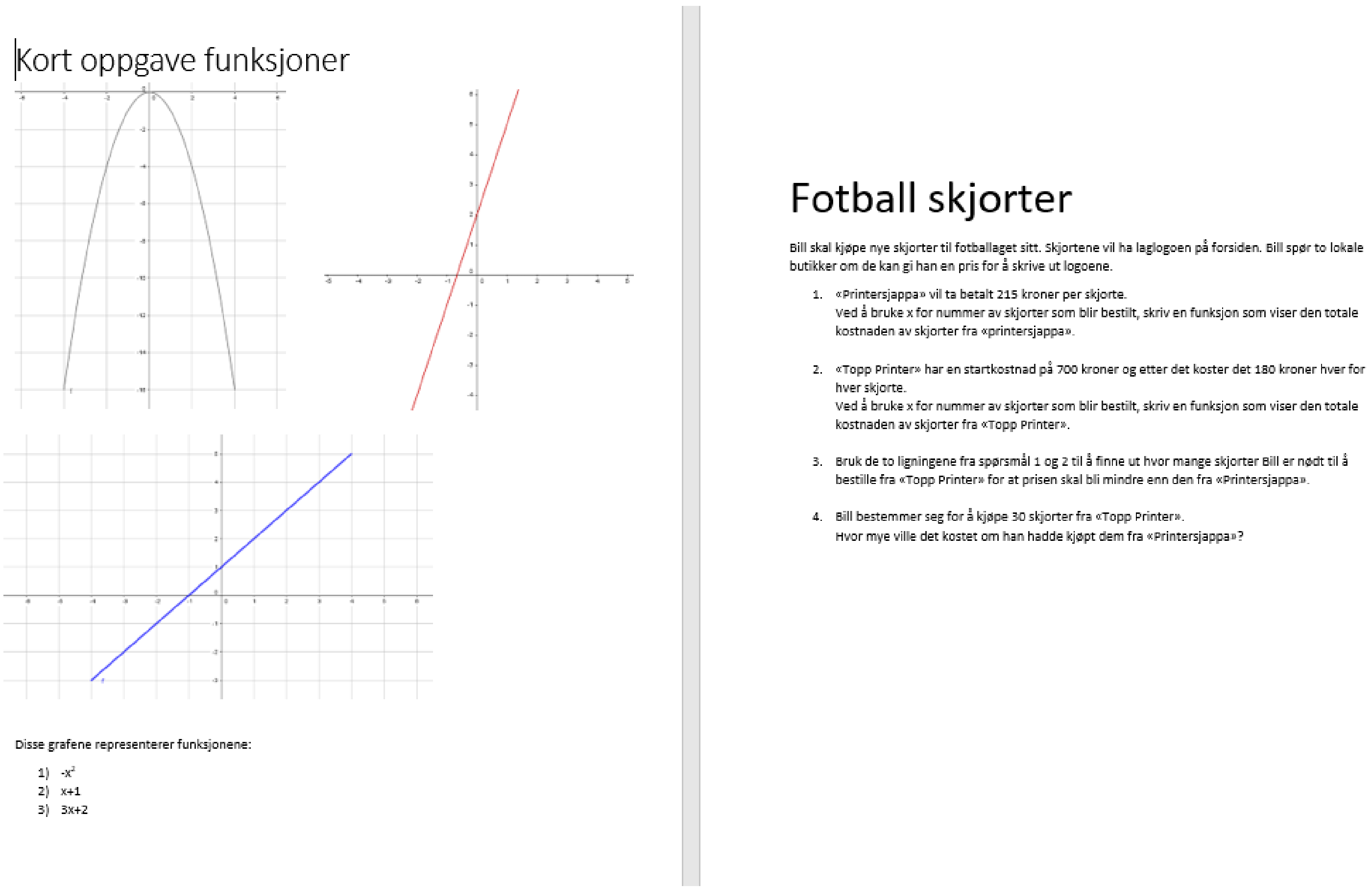
Kontaktperson: Amalie Statland Fantoft tlf: 55 58 36 41
Vedlegg: Prosjektvurdering

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

Avdelingskontorer / *District Offices*:
OSLO: NSD. Universitetet i Oslo, Postboks 1055 Blindern, 0316 Oslo. Tel: +47-22 85 52 11. nsd@uio.no
TRONDHEIM: NSD. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim. Tel: +47-73 59 19 07. kyrre.svarva@svt.ntnu.no
TROMSØ: NSD. SVF, Universitetet i Tromsø, 9037 Tromsø. Tel: +47-77 64 43 36. nsdmaa@sv.uit.no

Figur 9: kvittering fra NSD for bruk av innhentet data

B Oppgaver til intervjuene



Kort oppgave funksjoner

Disse grafene representerer funksjonene:

1) $-x^2$
2) x+1
3) 3x+2

Fotball skjorter

Bill skal kjøpe nye skjorter til fotballaget sitt. Skjortene vil ha laglogoen på forsiden. Bill spør to lokale butikker om de kan gi han en pris for å skrive ut logoene.

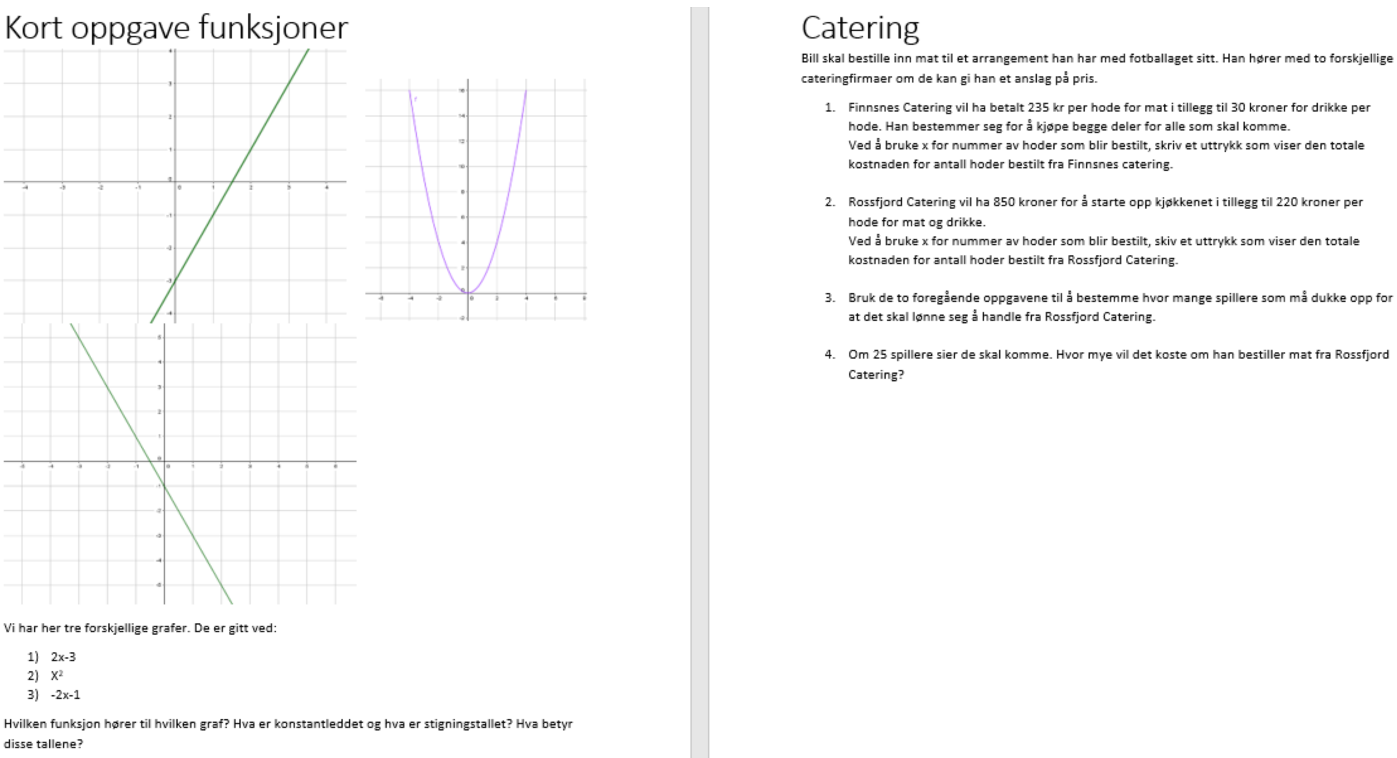
1. «Printersjappa» vil ta betalt 215 kroner per skjorte.
   Ved å bruke x for nummer av skjorter som blir bestilt, skriv en funksjon som viser den totale kostnaden av skjorter fra «printersjappa».

2. «Topp Printer» har en startkostnad på 700 kroner og etter det koster det 180 kroner hver for hver skjorte.
   Ved å bruke x for nummer av skjorter som blir bestilt, skriv en funksjon som viser den totale kostnaden av skjorter fra «Topp Printer».

3. Bruk de to ligningene fra spørsmål 1 og 2 til å finne ut hvor mange skjorter Bill er nødt til å bestille fra «Topp Printer» for at prisen skal bli mindre enn den fra «Printersjappa».

4. Bill bestemmer seg for å kjøpe 30 skjorter fra «Topp Printer».
   Hvor mye ville det kostet om han hadde kjøpt dem fra «Printersjappa»?

Figur 10: Oppgaavene til intervju 1 som ble gjennomført før undervisningsperioden



Kort oppgave funksjoner

Vi har her tre forskjellige grafer. De er gitt ved:

1) 2x-3
2) X²
3) -2x-1

Hvilken funksjon hører til hvilken graf? Hva er konstantleddet og hva er stigningstallet? Hva betyr disse tallene?

Catering

Bill skal bestille inn mat til et arrangement han har med fotballaget sitt. Han hører med to forskjellige cateringfirmaer om de kan gi han et anslag på pris.

1. Finnsnes Catering vil ha betalt 235 kr per hode for mat i tillegg til 30 kroner for drikke per hode. Han bestemmer seg for å kjøpe begge deler for alle som skal komme.
   Ved å bruke x for nummer av hoder som blir bestilt, skriv et uttrykk som viser den totale kostnaden for antall hoder bestilt fra Finnsnes catering.

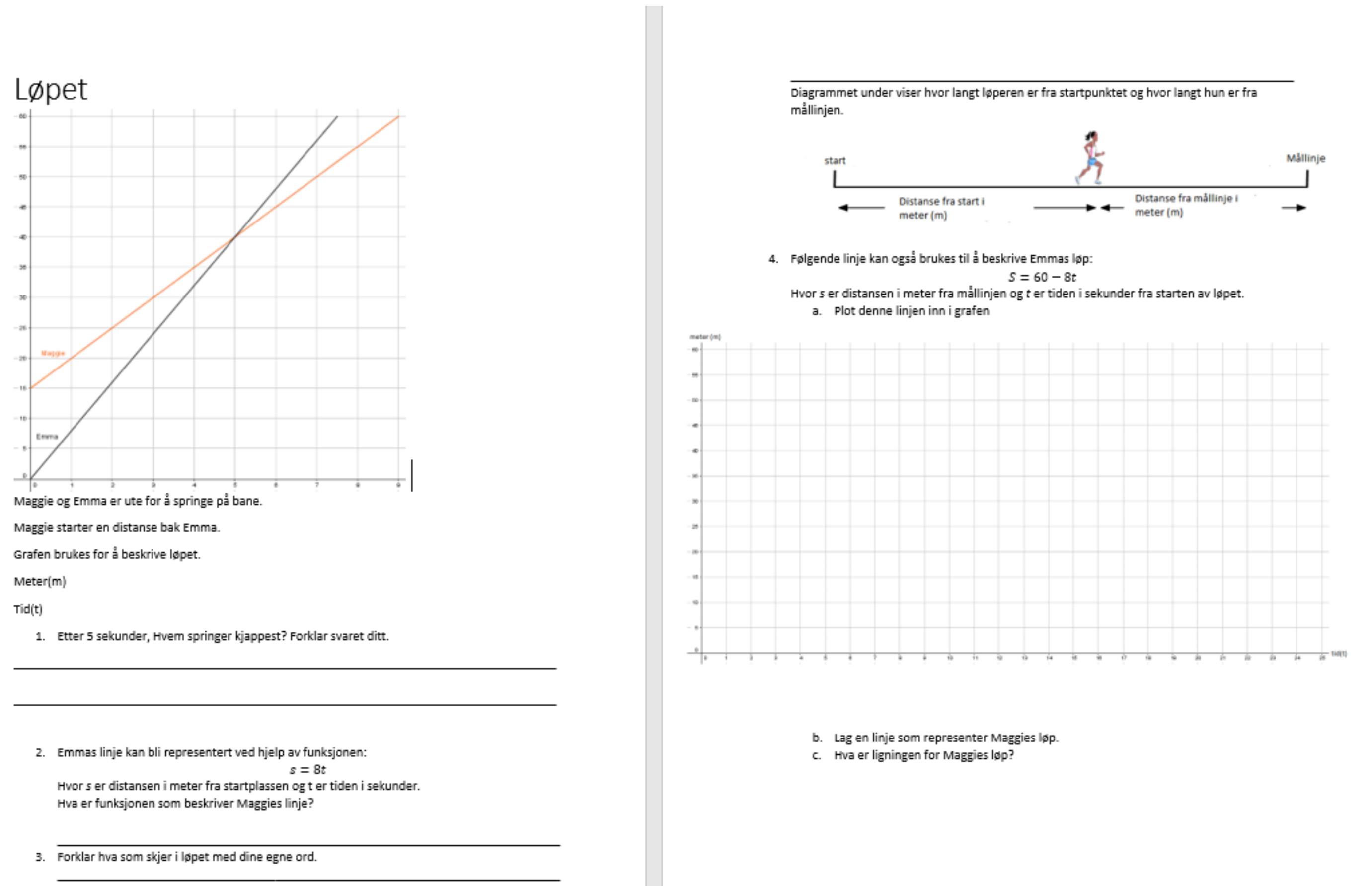
2. Rossfjord Catering vil ha 850 kroner for å starte opp kjøkkenet i tillegg til 220 kroner per hode for mat og drikke.
   Ved å bruke x for nummer av hoder som blir bestilt, skiv et uttrykk som viser den totale kostnaden for antall hoder bestilt fra Rossfjord Catering.

3. Bruk de to foregående oppgavene til å bestemme hvor mange spillere som må dukke opp for at det skal lønne seg å handle fra Rossfjord Catering.

4. Om 25 spillere sier de skal komme. Hvor mye vil det koste om han bestiller mat fra Rossfjord Catering?

Figur 11: Oppgavene til det andre intervjuet. Etter at undervisningsperioden var over.

C Oppgaver til undervisningen



Løpet

Maggie

Emma

Maggie og Emma er ute for å springe på bane.

Maggie starter en distanse bak Emma.

Grafen brukes for å beskrive løpet.

Meter(m)

Tid(t)

1. Etter 5 sekunder, Hvem springer kjappest? Forklar svaret ditt.

2. Emmas linje kan bli representert ved hjelp av funksjonen:
$$s = 8t$$
Hvor s er distansen i meter fra startplassen og t er tiden i sekunder.
Hva er funksjonen som beskriver Maggies linje?

3. Forklar hva som skjer i løpet med dine egne ord.

Diagrammet under viser hvor langt løperen er fra startpunktet og hvor langt hun er fra mållinjen.

start

Mållinje

Distanse fra start i meter (m)

Distanse fra mållinje i meter (m)

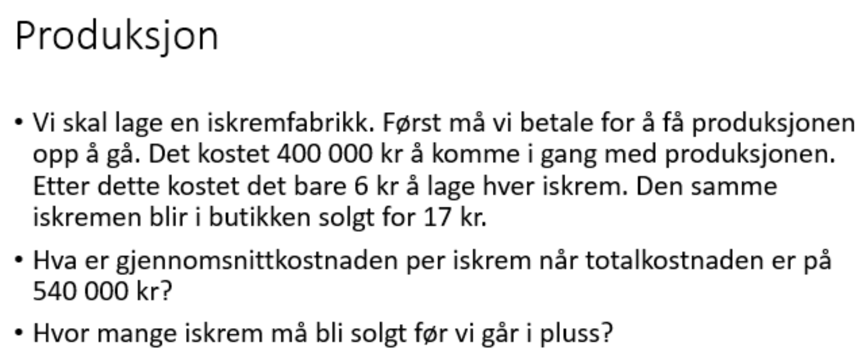
4. Følgende linje kan også brukes til å beskrive Emmas løp:
$$S = 60 - 8t$$
Hvor s er distansen i meter fra mållinjen og t er tiden i sekunder fra starten av løpet.
   a. Plot denne linjen inn i grafen

meter (m)

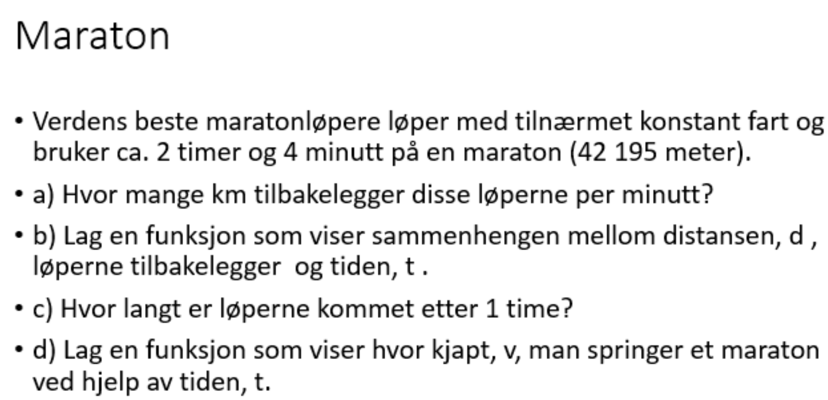
Tid(t)

   b. Lag en linje som representer Maggies løp.
   c. Hva er ligningen for Maggies løp?

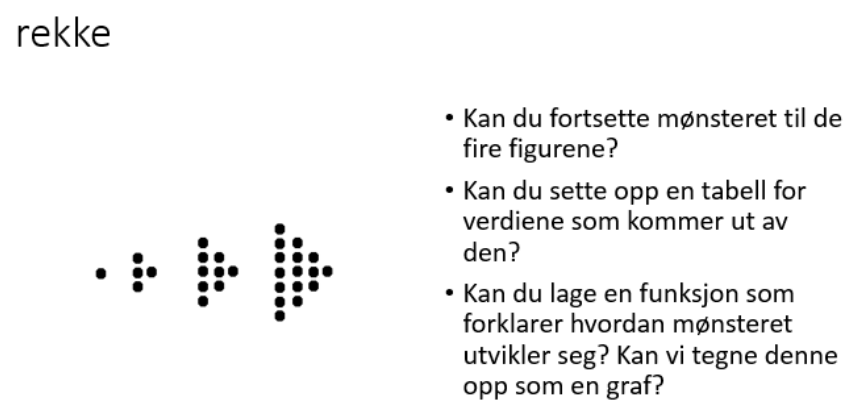
Figur 12: Oppgaven som ble brukt i første time av undervisningseksperimentet.



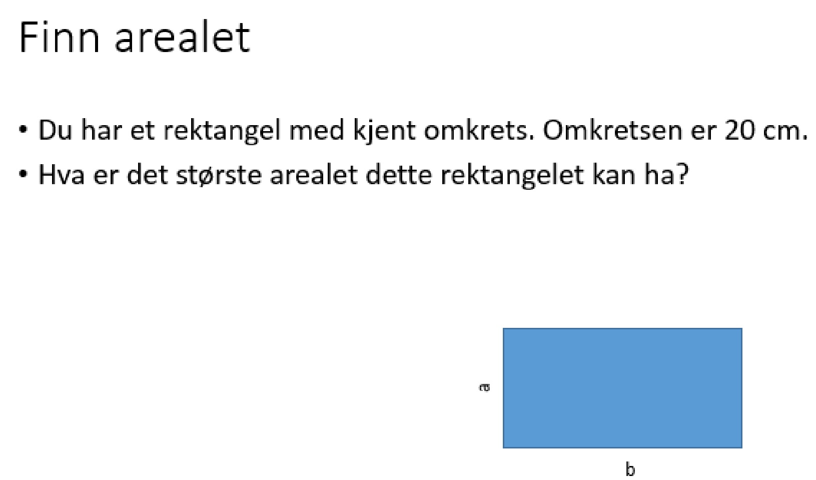
Figur 13: Oppgaven som ble brukt i andre time av undervisningseksperimentet.



Figur 14: Oppgaven som ble brukt i tredje time av undervisningseksperimentet



Figur 15: En av to oppgaver som ble brukt i fjerde time av undervisningseksperimentet.



Figur 16: En av to oppgaver som ble brukt i fjerde time av undervisningseksperimentet.

Referanser

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & education*.

Ainsworth, S., Wood, D. & O'Malley, C. (1998). There is more than one way to solve a problem:evaluating a learning environment to support the development of children's multiplication skills. *Learning and Instruction*, 141–157.

Assude, T., Boero, P., Herbst, P., Lerman, S. & Radford, L. (2008). The notion and roles of theory in mathematics education research. *10th International Congress on Mathematical Education*.

Bakar, M. & Tall, D. (1991). Students mental prototypes for functions and graphs. *Proceedings of the conference of the international study group for mathematics education*.

Bjørndal, C. (2011). *Det vurderende øyet* (2. utg.). Gyldendal Akademisk.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Springer.

Carlson, M. (1998). A cross sectional investigation of the development of the function concept. *Research in Collegiate mathematics eduacation III*.

Cherryholes, C. (1992). Notes on pragmatism and scientific realism. *Educational Researcher*, 13–17.

Clement, L. (2001). What do students really know about functions? *Mathematics Teacher*.

Cobb, P. (2007). *Putting philosophy to work*.

Cohen, L. & Lawrence, M. (2007). *Research methods in education* (6. utg.).

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6. utg.). Routledge.

Cox, R. & Brna, P. (1995). Supporting the use of external representations in problem solving: the need for flexible learning environments. *Journal of Artificial Intelligence in Education*, 239–302.

Cresswell, J. (2014). *Research design:qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4. utg.). SAGE Publications, Inc.

Cresswell, J. & Miller, D. (2000). Determining validity in qualitative inquiry. *Theory into Practice*.

Department, C.S. (1985). *Mathematics framework for california public schools kinndergarten through grade twelve.* California State Department of Education.

Dubinsky, E. & Wilson, R. (2012). High school students understanding of the function concept. *The Journal of Mathematical Behavior*.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching the case of functions. *Educational studies in Mathematics*.

Fey, J. (1989). School algebra for the year 2000. *Research issues in the learning and teaching of algebra*.

Fey, J., Heid, M., Good, R., Sheets, C., Blume, G. & Zbiek, R. (1991). Computer-intensive algebra. *Unpublished manuscript*.

Friedlander, A. & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. *The roles of representation in school mathematics*.

Geertz, C. (1973). Thick descriptions: towards an interpretive theory of culture. *The interpretations of cultures: selected essays*.

Goldin, A. (2015). Observing mathematical problem solving through task-based interviews. *Journal for Research in Mathematics Education*.

Goldin, G. (1997). Observing mathematical problem solving through task-based interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 9, Qualitative Research*.

Grønmo, L., Onstad, T., Nilsen, T., Holde, A., Aslaksen, H. & Borge, I. (2012). *Fremgang, men langt fram.* akademika forlag.

Heid, M. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as tool. *Journal for Research in Mathematics Education*.

Hoyles, C. (2002). From describing mathematical activity: The next step in developing a social approach to research in mathematics education? *Learning discourse: Discursive approaches to research in mathematics education*.

Kapur, M. & Toh, P. (2013). Productive failure:from an experimental effect to a learning design. *Educational design research - Part B:Illustrative cases*.

Karplus, R. (1979). Continuos functions: Students‘ viewpoints. *Eur. J. Sci, Educ.*.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. *Second Handbook og Research on Mathematics Teaching and Learning*.

Kilpatrick, J. (2014). Competency frameworks in mathematics education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 85–87.

Koedinger, K., Anderson, J., Hadley, W. & Mark, M. (1997). Intelligent tutoring goes to school in big city. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*.

Kramarski, B. (2000). The effects of different instructional methods on the ability to communicate mathematical reasoning. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Kubinová, M. & Novotná, J. (2002). Promoting students' meaningful learning in two different classroom environments. *Proceedings of the 21st Conference og the International Group for the Psychology og Mathematics Education*.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju.* Gyldendal Akademisk.

Leksikon, S.N. (2016, Mai). *Problemløsning.* Hentet fra `https://snl.no/problemløsning`

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*.

Lester, F. & Kehle, P. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. *Beyond constructivism and modeling perspectives on mathematical problem solving, learning and teaching*.

Markovitz, Z., Eylon, B. & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics*.

Morgan, D. (2007). Paradigms lost and pragmatism regained methodological implications of combining qualitative and quantitative methods. *Journal of Mixed Methods Research*, 48–76.

Niss, M. (2007). Reflections on the state of and trends in research on mathematics teaching and learning. *Second Handbook of Research on Mathematics teaching and Learnin*.

Niss, M. & Jensen, T. (2002). *Kompetencer.* Undervisningsministeriet.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics.* Routledge.

Ryen, A. (2002). *Det kvalitative intervjuet.* Fagbokforlaget.

Saldana, J. (2009). An introdcuction to code and coding. *The Coding Manual for Qualitative Researcher*.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. *Handbook for Research on Mathematics teaching and Learning*.

Schoenfeld, A. (2007). Method. *Second Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*.

Schwartz, B., Dreyfus, T. & Bruckheimer, M. (1990). A model of the function concept inn a three-fold representation. *Computers and education*.

Schwartz, B. & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes:brakes or levers in learning the function concept? *Journal for Research in Mathematics Education*.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. *The teaching and assessing of mathematical problem solving*.

Steffe, L. & P.W., T. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essentials elements. *Research design in mathematics and science education*, 267–307.

Tabachneck, H., Koedinger, K. & Simon, H. (1994). How does an expert use a graph? a model of visual & verbal inferencing in economics. *Proceedings of the 16th aannual conference of the cognitive science society*, 842–847.

Thompson, P. (1992). Notations, conventions and constraints: Contribution to effective uses of concrete materials in elementary mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 123–147.

Tiller, T. (1999). *Aksjonslæring: Forskende partnerskap i skole.* Høyskoleforlaget.

Utdanningsdirektoratet. (2016, Mai). *Læreplan i matematikk fellesfag - kompetansemål.* Hentet fra $http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Kompetansemaal?arst = 98844765\&kmsn = 583858936$

Webster. (1979). *New universal unabridged dictionary.* Simon&Schuster.

Yerushalmy, M. (1991). Students perception of aspects of algebraic function using multiple representation software. *Journal of Computer Assisted Learning*, 42–57.